Escuela Superior Politécnica del Litoral
Instituto de Ciencias Matemáticas

SOLUCIÓN y RÚBRICA
Examen de la Primera Evaluación de Álgebra Lineal
05 de julio de 2012

Rúbrica para todos los temas:

Deficiente	Vacío, evaluación incompleta o incorrecta del valor de verdad de la proposición o desarrollo de incoherencias	0-1
Regular	Comprensión parcial del problema con errores conceptuales	2-5
Bueno	Comprensión y planteamiento correcto con errores de procedimiento	6-9
Excelente	Planteamiento y procedimiento correctos	10

Ponderaciones:

	P1	P2	P3		P4		P5			P6	Total
			a	b	a	b	a	b	c		
puntos:	10	5	5	5	10	10	8	8	4	5	70

1. (10 pts) Demuestre:
   Sea $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ un subconjunto linealmente independiente de vectores del espacio vectorial V y sea x un vector de V que no puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de S, entonces $\{v_1, v_2, ..., v_n, x\}$ también es linealmente independiente.

   La proposición puede escribirse como: (S es L.I.) $\wedge$ ($x \notin gen\{S\}$) $\Rightarrow$ ($S \cup \{x\}$ es L.I.)

   Sea la combinación lineal $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n + kx = 0$. Como $x \notin gen(S)$ entonces $k = 0$, sino fuera así dividiendo para k toda la expresión dada, se tendría $x \in gen(S)$. Entonces la combinación lineal dada se reduce a $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n = 0$ y como S es L.I. se tiene que $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$, por lo tanto se ha demostrado que la única solución de $k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_nv_n + kx = 0$ es $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = k = 0$ y $S \cup \{x\}$ es L.I. ■

2. (5 puntos) Rectifique o ratifique la siguiente **DEFINICIÓN**:

   Un conjunto S de vectores de V es linealmente independiente si y solo si el vector neutro puede ser escrito como combinación lineal de los vectores de S y los escalares de la combinación lineal son todos ceros.

   El conjunto $\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\}$ es L.D. pero se cumple que $0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, entonces la definición podría escribirse como:

   Un conjunto S de vectores de V es linealmente independiente si y solo si el vector neutro puede ser escrito como combinación lineal de los vectores de S **solo si** los escalares de la combinación lineal son todos ceros.

3. (10 puntos) Califique cada una de las siguientes proposiciones como VERDADERA o FALSA, justificando formalmente su calificación.

   a) Sea V un espacio vectorial tal que $H \subseteq V$. Si H es un subespacio vectorial de V entonces H^C es subespacio de V. (FALSO)

   Si H es S.E.V. de V entonces $0_V \in H$ pero $H^c = V \setminus H$ entonces $0_V \notin H^c$ y por lo tanto H^c no puede ser S.E.V. de V.

   b) Sea $V = M_{3\times3}$ y $W = \{A \in M_{3\times3}/a_{ij} = 0, i+j \neq 4\}$, entonces W es un subespacio de V. (VERDADERO)

   $$W = \{\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

   - W no es vacío, porque al menos tendrá un vector, por ejemplo: si $a=b=c=0$, se tiene $v = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ y $v \in W$
   - $\begin{pmatrix}0&0&a_1\\0&b_1&0\\c_1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&a_2\\0&b_2&0\\c_2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a_1+a_2\\0&b_1+b_2&0\\c_1+c_2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a'\\0&b'&0\\c'&0&0\end{pmatrix}\in W$
   - Sea $k\in\mathbb{R}$, $k\begin{pmatrix}0&0&a\\0&b&0\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&ka\\0&kb&0\\kc&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&a'\\0&b'&0\\c'&0&0\end{pmatrix}\in W$

4. (20 puntos) Sea $V = P_3$. Considere el conjunto de todos los subespacios de V tal que $H(a) = gen\left\{1+ax+x^2+x^3, 1+ax+(1-a)x^2+x^3, x+(2a)x^2+2x^3, 1+(1+a)x+(1+a)x^2+3x^3\right\}$.

   a) Determine el valor de a para que $dimH = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 1 & 1+a & 1+a & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2a^2+1 & -2a+1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ si $a = 0 \Rightarrow dimH = 2$

b) Halle una base y la dimensión de los subespacios $H(0) \cap H(1)$ y $H(0) + H(1)$

Por el literal anterior $dimH(0) = 2$ y $H(0) = gen\{1+x^2+x^3, x+2x^3\}$, además ubicando los coeficientes de los vectores de $H(1) = gen\{1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^3, x + 2x^2 + 2x^3, 1 + 2x + 2x^2 + 3x^3\}$ como filas de una matriz, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H(1) = \{1+x+x^2+x^3, 1+x+x^3, x+2x^2+2x^3\}$$

y $dimH(1) = 3$

Se hallan las condiciones de $H(0)$:

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 + dx^3 &= k_1(1 + x^2 + x^3) + k_2(x + 2x^3) \\ &= k_1 + k_2x + k_1x^2 + (k_1 + 2k_2)x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} k_1 & & & = & a \\ & & k_2 & = & b \\ k_1 & & & = & c \\ k_1 & + & 2k_2 & = & d \end{array} \right. \Rightarrow a = d - 2b, c = d - 2b$$

Se hallan las condiciones para $H(1)$:

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 + dx^3 &= k_1(1 + x + x^2 + x^3) + k_2(1 + x + x^3) + k_3(x + 2x^2 + 2x^3) \\ &= (k_1 + k_2) + (k_1 + k_2 + k_3)x + (k_1 + 2k_3)x^2 + (k_1 + k_2 + k_3)x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} k_1 & + & k_2 & & & = & a \\ k_1 & + & k_2 & + & k_3 & = & b \\ k_1 & & & + & k_3 & = & c \\ k_1 & + & k_2 & + & 2k_3 & = & d \end{array} \right. \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 2 & c \\ 1 & 1 & 2 & d \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b-a \\ 0 & 1 & -2 & a-c \\ 0 & 0 & 0 & a-2b+d \end{array}\right)$$

$\Rightarrow a = 2b - d$

Como se puede escribir $H(1) = \{(2b - d) + bx + cx^2 + dx^3 | b, c, d \in \mathbb{R}\}$, entonces otra base de $H(1) = \{2 + x, x^2, -1 + x^3\}$

Se hallan las condiciones de $H(0) \cap H(1)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} a &= c \\ a &= d-2b \\ c &= d-2b \\ a &= 2b-d \end{cases} \Rightarrow a=0, c=0, d=2b \Rightarrow H(0)\cap H(1) = \{bx+2bx^3 | b \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow Base(H(0)\cap H(1)) = \{x+2x^3\}$ y $dim((H(0)\cap H(1)) = 1$

Se hallan las condiciones de $H(0)+H(1)$:

$H(0)+H(1) = gen\{B(H(0)) \cup B(H(1))\} = gen\{1+x^2+x^3, x+2x^3, 2+x, x^2, -1+x^3\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Base(H(0)+H(1)) = \{1+x^2+x^3, x+2x^3, 2+x, x^2\}$ y $dim((H(0)+H(1)) = 4$

5. (20 puntos) Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal, definida por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 7y-6x \end{pmatrix}$$

a) Considere el paralelogramo P con vértices $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(2,5)$, $D(1,3)$. En el plano cartesiano mostrado a continuación, grafique el paralelogramo P y a su imagen mediante T, $T(P)$.

$T(A) = T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(B) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$T(C) = T\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 23 \end{pmatrix}$

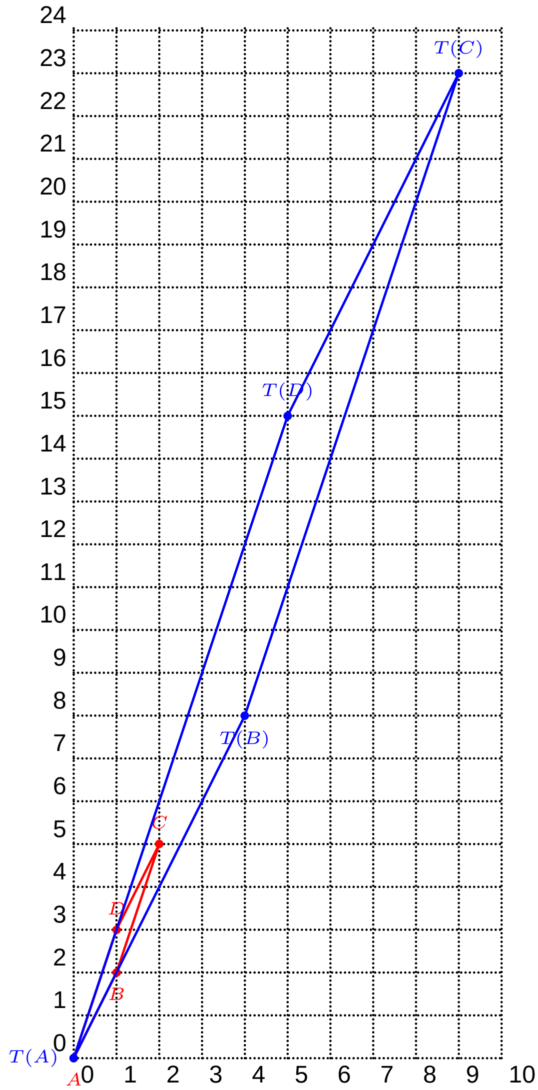
$T(D) = T\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix}$

b) ¿Es $T(P)$ también un paralelogramo?

Sí es un paralelogramo. Sea $m(\overline{XX'})$ la pendiente del segmento de recta $\overline{XX'}$. De acuerdo al gráfico de $T(P)$, se tiene $m(\overline{T(A)T(B)}) = \frac{8}{4} = 2 = \frac{23-15}{9-5} = m(\overline{T(D)T(C)})$. También $m(\overline{T(A)T(D)}) = \frac{15}{5} = 3 = \frac{23-8}{9-4} = m(\overline{T(B)T(C)})$

c) Determine todos los subespacios W de $\mathbb{R}^2$ tales que $\forall x \in W, T(x) \in W$

Es claro que dos subespacios que cumplen con la condición son $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ y $\mathbb{R}^2$, además otro W debe ser de la forma $W = \{\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} | m, x \in \mathbb{R}\} \Rightarrow base(W) = \{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}\}$



$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ mx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+mx \\ 7mx-6x \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & mx & = & k \\ 7mx & - & 6x & = & km \end{array} \right.$$

$\Rightarrow 2x + mx = \frac{7mx-6x}{m} \Rightarrow m^2x - 5mx + 6x = 0 \Rightarrow m^2 - 5m + 6 = 0$ siempre que $x \neq 0$,

$\Rightarrow (m-3)(m-2) = 0$

$\therefore$ Los subespacios W's son $\{\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, $\{\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$, y $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

6. (5 puntos) Sean $\beta_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\beta_1 = \{v_1 - v_2, v_2 + v_3, 2v_1\}$ dos bases de un espacio V. Si $[E]_{\beta_1} = [F]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, determine $[5E - 2F]_{\beta_2}$

Como $[E]_{\beta_1} = [F]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E = v_1 + v_2 + v_3$ y $F = (v_1 - v_2) + (v_2 + v_3) + (2v_1) = 3v_1 + v_3$

$$\Rightarrow E = k_1(v1 - v2) + k_2(v_2 + v_3) + k_3(2v_1) = (k_1 + 2k_2)v_1 + (-k_1 + k_2)v_2 + k_2v_3$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} k_1 & + & & + & 2k_3 & = & 1 \\ -k_1 & + & k_2 & & & = & 1 \\ & & k_2 & & & = & 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} k_1 & = & 0 \\ k_2 & = & 1 \\ k_3 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow [E]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\therefore [5E - 2F]_{\beta_2} = 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$