# Proyecto de Álgebra Lineal
# II Término 2019

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Guayaquil, Diciembre 2019

## 1. Introducción

En matemáticas, un grafo es un conjunto de elementos llamados vértices o nodos, conectados por medios de enlaces denominados aristas o arcos. Un grafo, desde un punto de vista simple, permite representar una operación binaria interna de un conjunto. Uno de los problemas más representativos de la teoría de grafos es el ejemplo histórico denominado el problema de los puentes de Königsberg, problema que fue resuelto por Leonhard Euler.
Con un poco más de rigurosidad, podemos decir que un grafo $G$ es un par ordenado $G = (V, E)$, donde:

- $V$ es un conjunto de vértices o nodos, y
- $E$ es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos.

Consideraremos a V como un conjunto finito. Si los arcos poseen una dirección, el grafo de denomina grafo dirigido o digrafo. En la figura I se muestra un grafo dirigido cuyos vértices son las letras A, B, C, conectadas entre sí.

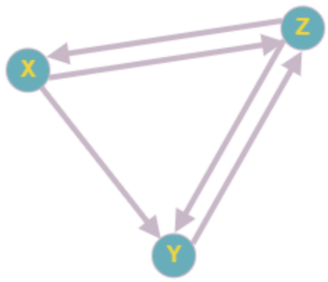


Figura 1: Grafo con nodos A, B, C

Para un grafo se define su matriz de adyacencia como una representación de la conexión de sus vértices. Para construir una matriz de adyacencia se debe seguir lo siguiente:

- Se crea una matriz cero, cuyas columnas y filas representan los nodos del grafo.

- Por cada arista que une a dos nodos, se coloca 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz.

Por ejemplo para el grafo de nuestro ejemplo, su matriz de adyacencia sería

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

* La primera fila indica que el nodo X se conecta con el nodo Y y con el nodo Z.

* La segunda fila indica que el nodo Y se conecta sólo con el nodo Z.

* La tercera fila indica que el nodo Z se conecta con el nodo X y con el nodo Y, tal como inidica la figura 1.

En un grafo se define una **k-trayectoria** como el camino para ir de un vértice X a un vértice Y, atravesando por k enlaces. Podemos observar en la imagen de nuestro grafo que en él existe una **1-trayectoria** de X a Y, una 1-trayectoria de X a Z, una **1-trayectoria** de Z a Y, entre otras.

Además de las 1-trayectorias, existen también las **2-trayectoria**'s, es decir, caminos de un vértice a otro vértice atravesando exactamente 2 enlaces. Por ejemplo para ir de X a Y existe una 2-trayectoria, porque se puede ir por el camino de X hacia Z y de Z hacia Y, atravesando exactamente 2 enlaces.

**Teorema 1.** *Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, el elemento ij de $A^k$ es igual al número de k-trayectorias del vértice i al vértice j, para todo* $k \in \mathbb{N}$

Lo que nos quiere decir el teorema anterior es que el elemento ij de la matriz A nos proporciona el número de 1-trayetorias que hay del vérticie i al vértice j.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Se observa que hay una **1-trayectoria** de Y a Z.

También nos asegura que en la matriz $A^2$ el elemento ij nos proporciona el número de 2-trayetorias que hay del vérticie i al vértice j.

$$A^2 = A \times A$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso podemos observar que el elemento $c_{12}$ es igual a 1 (texto en azul), lo que indica que existe exactamente UNA **2-trayectoria** que va de X hacia X. En el gráfico podemos notar que se trata de la ruta X - Z - X. Además como ejemplo también podemos decir que el elemento $c_{33}$, que tiene un valor de 2 (texto en rojo), nos indica que existen exactamente dos 2-trayectorias que van de Z a Z. Estos caminos son Z-X-Z y Z-Y-Z. Finalmente notamos que no hay 2-trayectorias de Y a Z ya que el elemento $c_{23}$ es igual a 0.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{array}{c} X \\ Y \\ Z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Por lo tanto, el problema de hallar las k-trayectorias dentro de un grafo se resume a hallar la k-ésima potencia de la matriz A. Para hallar la k-ésima potencia de la matriz A podemos usar diagonalización de matrices, ya que si A es diagonalizable se tiene lo siguiente

$$D = C^{-1}AC$$

Donde D es una matriz diagonal semejante a A, y C una matriz invertible, que diagonaliza a A. Si A es semejante a una matriz diagonal, entonces su k-ésima potencia es

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

Gracias al álgebra lineal sabemos que la matriz diagonal D se compone de los valores propios de A y que la matriz C de vectores propios linealmente independientes de la matriz A.

## 1.1. Cómo elevar una matriz a la k-ésima potencia

Para este ejemplo nos basaremos en una matriz $2 \times 2$. Mostraremos cómo usar la diagonalización para elevar una matriz a la k-ésima potencia. Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para nuestro ejemplo, los valores propios y bases de los espacios propios asociados a cada valor propio son:

$$\lambda_1 = 1 \quad B_{E_{\lambda_1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda_2 = 5 \quad B_{E_{\lambda_2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Las matrices D y C son

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es posible hallar la inversa de C, obteniendo:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Finalmente tenemos:

$$A^k = CD^kC^{-1}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 5^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}5^k & -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}5^k \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}5^k & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}5^k \end{pmatrix}$$

## 2. Ejercicios

(a) Demuestre que si $k$ es un valor propio de una matriz cuadrada $A$ entonces $k^n$ es un valor propio de la matriz $A^n$.

(b) Demuestre que si $D = (a_{ij})$ es una matriz diagonal, entonces $D^n = (a_{ij}^n)$, donde $1 \leq i, j \leq n$. Muestre un ejemplo de una matriz no diagonal en la cual esto no se cumpla.

(c) Demuestre que si A es diagonalizable, tal que $D = C^{-1}AC$, donde D es una matriz diagonal y C una matriz invertible, entonces $A^n = CD^nC^{-1}$.

## 3. El problema

En el año 2023, Guayaquil ha sufrido una regeneración urbana, y ciertas avenidas han sido modificadas con el tiempo. En un mapa vial de las principales zonas de Guayaquil se puede observar estas zonas están conectadas por carreteras modernas (con adoquines en los extremos) que ofrecen un acceso directo entre las mismas. Las zonas que muestra el mapa son

- Las Peñas (P)
- Terminal Terrestre (T)
- Parque Centenario (C)
- Estadio Capwell(E)
- Estadio Monumental (B)
- C.C. San Marino (M)
- Parque Samanes (S)

El alcalde J. Nebot en su enésimo período de alcaldía desea reunir información que considera importante acerca de estas modernas carreteras, entre uno de sus principales requisitos, se desea la siguiente información:

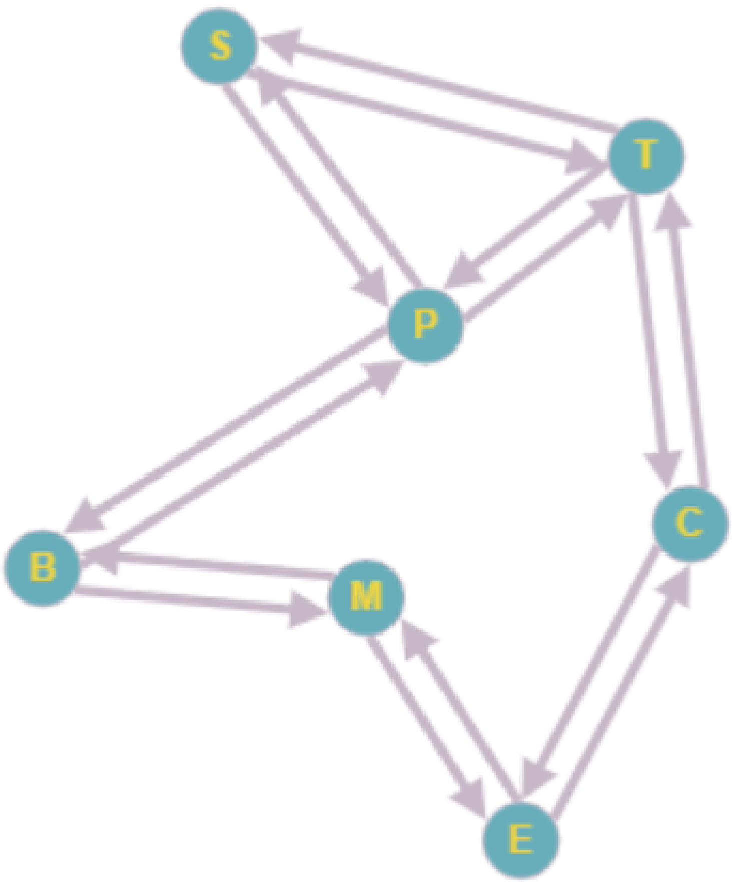


Figura 2: Vías directas entre las principales zonas de Guayaquil, año 2023

- ¿Cuántas rutas existen entre dos zonas principales cualesquiera de las mencionadas, atravesando exactamente por 23 carreteras directas.
- ¿Cuántas rutas existen entre dos zonas principales cualesquiera de las mencionadas, atravesando exactamente por 50 carreteras directas.

El alcalde, imperioso de conocer esta información, contrata a la empresa que usted coordina denominada Autopistas Guayaquil (AG). La empresa AG ofrece servicios de análisis de información acerca de cualquier suceso relacionado con carreteras en Guayaquil.

## 4. Entregables

Se necesita que su grupo de trabajo elabore un reporte con las soluciones a los ejercicios y al problema planteado. El reporte es un documento con introducción, fundamento teórico, solución, conclusiones, recomendaciones.

Para la sección solución del problema planteado usted deberá presentar:

- El planteamiento matricial del problema (matriz de adyacencia).
- El polinomio característico de la matriz
- Los valores propios de la matriz
- Las bases de vectores propios asociados a cada valor propio de la matriz
- La matriz D diagonal y la matriz C que diagonaliza a A
- La matriz A elevado a la k-ésima potencia
- La tabla de la cantidad de 23-trayectoria's entre una zona y otra.
- La tabla de la cantidad de 50-trayectoria's entre una zona y otra.

Todo lo anterior debe estar escrito de una manera secuencial y con sentido completo. Usted puede (y probablemente debe) ayudarse utilizando herramientas de software para resolver este problema, los mismos que deben ser descritos, y detallar su uso, en el reporte.