

Profesor:

(X) Jonathan Avilés

(X) Ricardo Cajo

### Solución

#### Tema 1 (20 puntos)

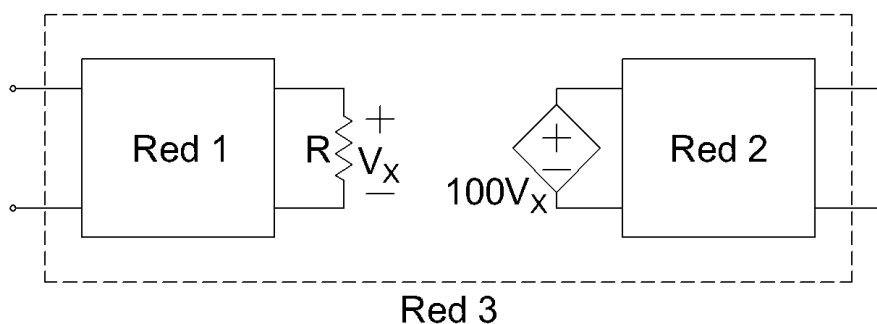
Escoja la o las respuestas correctas, justificando adecuadamente su selección.

1.1) Para las respuestas en el tiempo de una red eléctrica, seleccione las declaraciones verdaderas sobre la frecuencia neperiana: (6 puntos)

- a) Es un indicador del desplazamiento angular en radianes por unidad de tiempo de una determinada señal sinusoidal.
- b) Es una medida de qué tan rápido una respuesta transiente desaparece en el tiempo y es el inverso de la constante de tiempo de una señal exponencial.**
- c) Es la frecuencia de una señal exponencial que puede tomar valores complejos (parte real e imaginaria) para representar una gran variedad de señales de respuesta, típicas en ingeniería eléctrica.
- d) La frecuencia neperiana  $\sigma$  es la parte imaginaria de la frecuencia compleja  $s$ .

**Justificación:** Cada fracción parcial con raíces  $s = -\sigma \pm j\omega$  corresponde a una exponencial de la forma  $Ae^{-\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$  donde  $\sigma$  es la frecuencia neperiana, es decir es una medida de qué tan rápido decrece la parte exponencial o transitoria.

1.2) Se conoce que la red de dos puertos 1 tiene una ganancia de voltaje de 5 [dB] y la red de dos puertos 2 tiene una ganancia de voltaje de 15 [dB]. ¿Cuál será la ganancia de voltaje de la red 3 mostrada en la figura? (7 puntos)

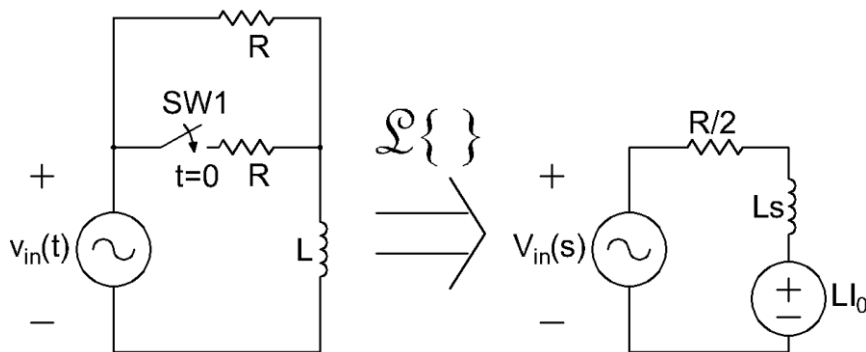


- a)  $|Gv|_{dB} = 60 [dB]$**
- b)  $|Gv|_{dB} = 40 [dB]$
- c)  $|Gv|_{dB} = 22 [dB]$
- d)  $|Gv|_{dB} = 20 [dB]$
- e) No se puede determinar el valor sin conocer la topología de las redes 1 y 2
- f) Ninguna de las anteriores

Justificación:

$$|G_{v3}|_{dB} = |G_{v1}|_{dB} + 20 \log_{10}(100) + |G_{v2}|_{dB} \\ = 5 + 40 + 15 = 60 [dB]$$

1.3) En la figura se muestra la transformación de una red eléctrica del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia compleja. Si se sabe que  $v_{in}(t)$  es una señal sinusoidal con magnitud  $V_1$  [VRMS] y frecuencia  $\omega$ , y se considera que la red estuvo un tiempo muy largo en la posición inicial, seleccione la declaración verdadera acerca del valor de la constante  $I_0$ ? (7 puntos)



- a)  $I_0 = V_1/R$  porque la red estaba en estado estable y el inductor equivalía a un cortocircuito.
- b)  $I_0 = -V_1/R$  porque la red estaba en estado estable y el inductor equivalía a un cortocircuito.
- c)  $I_0 = i_L(t = 0^+)$  en la dirección opuesta a la corriente de la fuente, pero no es posible saber su valor exacto sin conocer el desfase del voltaje de la fuente.
- d) Hay un error en el circuito transformado porque la fuente de valor  $LI_0$  debería tener polaridad invertida.

Justificación: La red tiene una fuente sinusoidal, por tanto, en estado estable todas las señales eléctricas serán oscilaciones sinusoidales a la frecuencia de la fuente:

$t=0^-$

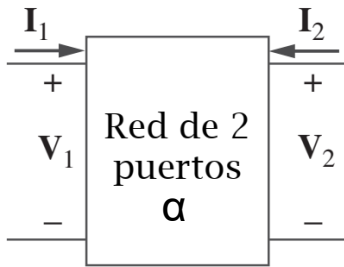
$$\bar{I}_L = \frac{-V_1 \angle \phi}{R + j\omega L} = \frac{V_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle \phi + 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$i_L(t=0) = \frac{\sqrt{2} V_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \phi + 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

dato faltante

## Tema 2 (38 puntos)

- a) Determine los parámetros impedancia de circuito abierto en el dominio fasorial de la red de dos puertos  $\alpha$ , sabiendo que se tomaron las siguientes mediciones con una fuente sinusoidal de voltaje con frecuencia  $f = 1$  [kHz] conectada en el puerto 1: (18 puntos)



Puerto 2 en circuito abierto		Puerto 2 en cortocircuito	
Magnitud RMS	Desfase	Magnitud RMS	Desfase
$V1 = 10$ [V]	$0^\circ$	$V1 = 10$ [V]	$0^\circ$
$V2 = 28.284271$ [V]	$-45^\circ$	$I1 = 0.877058$ [A]	$-37.874984^\circ$
$I1 = 7.071068$ [A]	$+45^\circ$	$I2 = 2.480695$ [A]	$97.125016^\circ$

$$\bar{I}_2 = 0$$

$$\bar{V}_2 = 0$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{z}_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \bar{z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{z}_{22} \bar{I}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = \bar{z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{z}_{12} \bar{I}_2 \\ \bar{V}_2 = \bar{z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{z}_{22} \bar{I}_2 \end{cases}$$

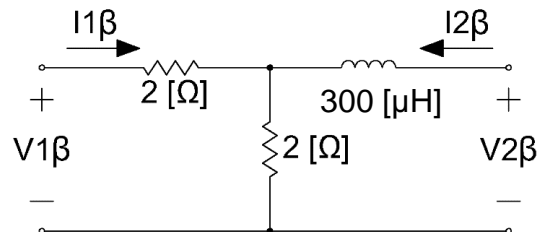
$$\bar{z}_{11} = \left. \frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} = 1 - j [\Omega]$$

$$\bar{z}_{12} = \left. \frac{\bar{V}_1 - \bar{z}_{11} \bar{I}_1}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{V}_2=0} = -j4 [\Omega]$$

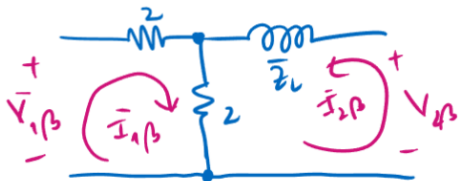
$$\bar{z}_{21} = \left. \frac{\bar{V}_2}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2=0} = -j4 [\Omega]$$

$$\bar{z}_{22} = - \left. \frac{\bar{z}_{21} \bar{I}_1}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{V}_2=0} = 1 - j [\Omega]$$

- b) Determine los parámetros transmisión de la red de dos puertos  $\beta$  mostrada a continuación en el dominio fasorial para la frecuencia de la fuente del literal a ( $f = 1$  [kHz]): (14 puntos)



$$\bar{z}_L = j\omega L = j2\pi(1\text{K})(300\mu) = j1.884956 [\Omega]$$



$$\begin{cases} \bar{V}_{1\beta} = 4 \bar{I}_{1\beta} + 2 \bar{I}_{2\beta} \\ \bar{V}_{2\beta} = 2 \bar{I}_{1\beta} + (2 + j1.884956) \bar{I}_{2\beta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{z}_{\beta} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 + j1.884956 \end{bmatrix} [\Omega]$$

$$\det(\bar{z}) = 4(2 + j1.884956) - 2(2) = 4 + j7.539822$$

$$\Rightarrow [\bar{z}_{\beta}] = \frac{1}{\bar{z}_{21}} \begin{bmatrix} \bar{z}_{11} & \det(\bar{z}) \\ 1 & \bar{z}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 + 3.769911 [\Omega] \\ 1/2 [S] & 1 + j0.942478 \end{bmatrix}$$

- c) Determine la matriz impedancia de circuito abierto de la conexión serie de las redes de dos puertos  $\alpha$  y  $\beta$ . (6 puntos)

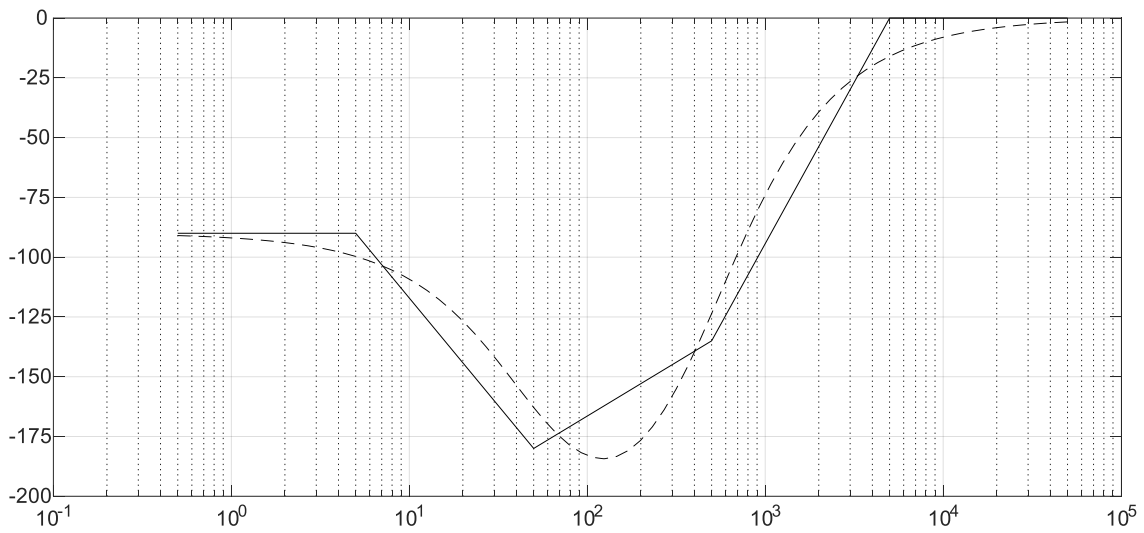
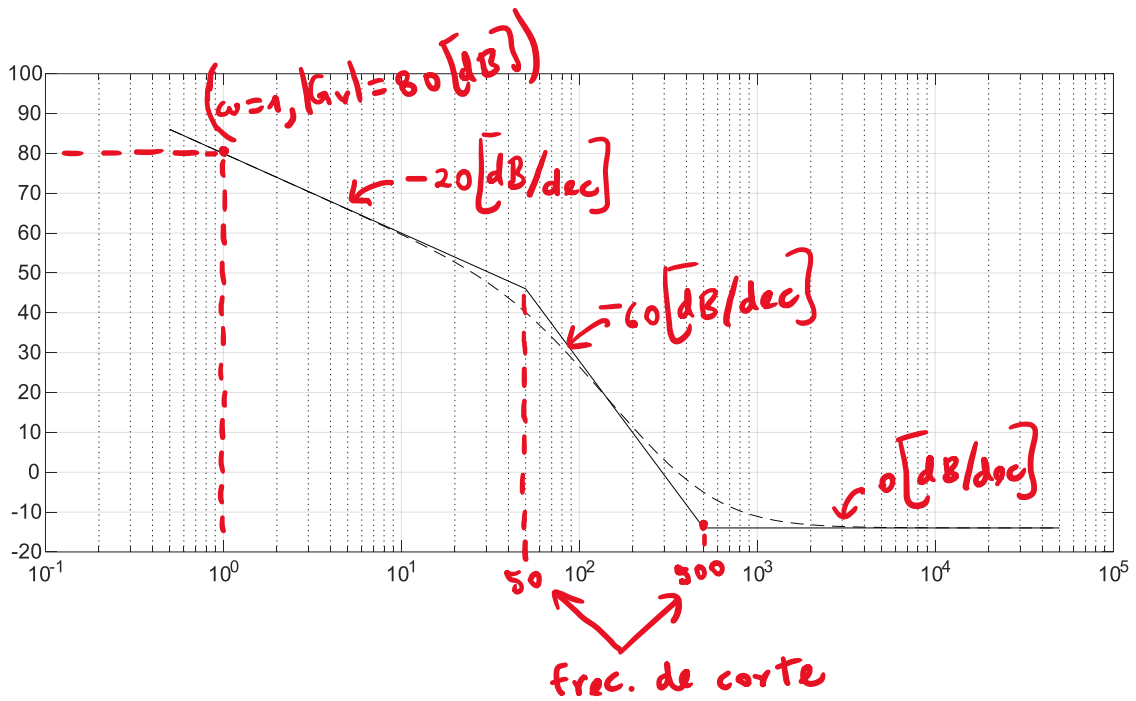
$$\begin{aligned} \bar{z}_{\text{serie}} &= [\bar{z}_{\alpha}] + [\bar{z}_{\beta}] = \begin{bmatrix} 1-j & -j4 \\ -j4 & 1-j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 + j1.884956 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5-j & 2-j4 \\ 2-j4 & 3 + j0.884956 \end{bmatrix} [\Omega] \end{aligned}$$

### Tema 3 (42 puntos)

Un sistema consiste en una red eléctrica de dos puertos, con una fuente de voltaje alterno conectada al puerto 1 como entrada y el voltaje del puerto 2 como salida.



Se realiza un barrido de frecuencias mediante la variación de la frecuencia del voltaje sinusoidal de entrada y el registro de la ganancia de magnitud y el cambio de fase, obteniendo los siguientes diagramas de Bode de magnitud ( $|G_v|$  [dB] vs  $\omega$  [rad/s]) y fase ( $\phi$  [grados] vs  $\omega$  [rad/s]). En ambos gráficos se han trazado también sus correspondientes aproximaciones asintóticas:



- a) Considerando que las pendientes de los extremos se mantienen para frecuencias mayores y menores a las mostradas, determine la función de transferencia ganancia de voltaje  $G_v(s)=V_{out}(s)/V_{in}(s)$ . (15 puntos)

$$m \text{ inicial} \rightarrow -20 \text{ dB/dec} \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$\omega = 50 : \Delta m = -60 - (-20) = -40 \text{ [dB/dec]} \rightarrow \frac{1}{\left(\frac{s}{50} + 1\right)^2}$$

$$\omega = 500 : \Delta m = 0 - (-60) = +60 \text{ [dB/dec]} \rightarrow \left(\frac{s}{500} + 1\right)^3$$

$$\Rightarrow G(s) = K \frac{\left(\frac{s}{500} + 1\right)^3}{s \left(\frac{s}{50} + 1\right)^2}$$

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{K}{1} \right) = 80$$

$$\Rightarrow K = 10^{80/20} = 10000$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{10000 (50)^2}{(500)^3} \frac{(s+500)^3}{s(s+50)^2} = 0.2 \frac{(s+500)^3}{s(s+50)^2}$$

b) Si  $v_{in}(t) = 0.05 \sin(10t) - 10 \cos(50t)$ :

b.1. Determine  $v_{out}(t)$  para cuando se ha alcanzado estado estable utilizando los diagramas de Bode reales de magnitud y de fase. (5 puntos)

$$\omega=10 \Rightarrow |G_v|_{dB} = 60 \quad \phi = -108^\circ$$

$$\omega=50 \Rightarrow |G_v|_{dB} = 40 \quad \phi = -163^\circ$$

$$v_{out}(t) = 0.05 \cdot 10^{\frac{60}{20}} \sin(10t - 108^\circ) - 10 \cdot 10^{\frac{40}{20}} \cos(50t - 163^\circ) [V]$$

$$= 50 \sin(10t - 108^\circ) - 1000 \cos(50t - 163^\circ) [V]$$

b.2. Determine  $v_{out}(t)$  para cuando se ha alcanzado estado estable utilizando los diagramas de Bode asintóticos de magnitud y de fase. (5 puntos)

$$\omega=10 \Rightarrow |G_v|_{dB} = 60 \quad \phi = -116^\circ$$

$$\omega=50 \Rightarrow |G_v|_{dB} = 46 \quad \phi = -180^\circ$$

$$v_{out}(t) = 0.05 \cdot 10^{\frac{60}{20}} \sin(10t - 116^\circ) - 10 \cdot 10^{\frac{46}{20}} \cos(50t - 180^\circ) [V]$$

$$= 50 \sin(10t - 116^\circ) - 1995.26 \cos(50t - 180^\circ) [V]$$

b.3. Comente acerca de la efectividad del uso del diagrama asintótico en este caso, especificando los motivos para el resultado obtenido. (6 puntos)

$\omega=10$  [rad/s]  $\Rightarrow$  Por ser un punto lejano a las frecuencias de corte, las aproximaciones de magnitud son muy buenas, pero las aproximaciones de fase no lo son.

$\omega=50$  [rad/s]  $\Rightarrow$  Al ser una de las frecuencias de corte, las aproximaciones de magnitud no son buenas y al ser un punto de cambio de pendiente debido a la frecuencia de corte en  $\omega=500$  [rad/s] tampoco es una buena aproximación de fase.

- c) Usando el diagrama asintótico, determine la frecuencia angular  $\omega$  en rad/s para la cual la ganancia absoluta de magnitud sea igual a 1000. ( $|v^{out}/v^{in}| = 1000$ ). (5 puntos)

$$|G_v|_{dB} = 20 \log_{10} |1000| = 60 \text{ [dB]} \Rightarrow \omega = 10 \text{ [rad/s]}$$

- d) Utilizando el diagrama asintótico y conociendo que  $v_i(t) = 10 \cos(1000t) \cos(800t)$  [V], determine la salida  $v_o(t)$ . (Recuerde que  $\cos(\alpha) \cos(\beta) = (0.5)[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ ) (6 puntos)

$$\omega = 1800 \Rightarrow |G_v|_{dB} \approx -14 \quad \phi \approx -60^\circ$$

$$\omega = 200 \Rightarrow |G_v|_{dB} \approx 10 \quad \phi \approx -153^\circ$$

$$v_{out}(t) = 5 \cdot 10^{-\frac{14}{20}} \cos(1800t - 60^\circ) - 5 \cdot 10^{\frac{10}{20}} \cos(200t - 153^\circ) \text{ [V]}$$
$$= 0.9976 \cos(1800t - 60^\circ) - 15.8114 \cos(200t - 153^\circ) \text{ [V]}$$