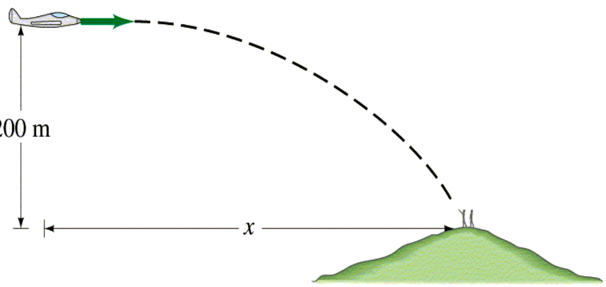
ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS
I TÉRMINO 2006-2007
TERCERA EVALUACIÓN DE FÍSICA A

SOLUCION

PREGUNTA 1 (25 puntos)

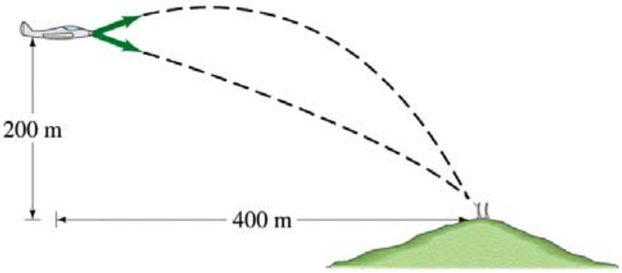
a) Un avión de rescate va a soltar provisiones a unos montañistas aislados en una colina rocosa que se encuentra a 200 m por debajo del avión. Si este último viaja horizontalmente con una rapidez de 252 km/h, ¿a qué distancia antes de los montañistas (distancia horizontal) se deben soltar los víveres? (8 puntos)



$$y = y_0 - \tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 200 - 4.9t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = 6.39\ \text{s}$$

$$x = v_{0x}t = (70)(6.39) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{x = 447\ \text{m}}$$

b) Suponga ahora que el avión libera las provisiones a una distancia horizontal de 400 m antes de los montañistas. ¿Qué velocidad vertical (arriba o abajo) se debe proporcionar a las provisiones de modo que lleguen precisamente a la posición de los escaladores? (10 puntos)



$$x = v_{0x}t \Rightarrow 400 = (70)t \quad \Rightarrow \qquad t = 5.71\ \text{s}$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 0 = 200 + v_{0y}(5.71) - 4.9(5.71)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{0y} = 7.05\ \text{m/s hacia abajo}}$$

c) En el último caso, ¿con qué rapidez aterrizan las provisiones? (7 puntos)

$$v_y = v_{0y} - gt = -7.05 - (9.8)(5.71) \qquad \Rightarrow \qquad v_y = 63\ \text{m/s}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(70)^2 + (63)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 94.2\ \text{m/s}}$$

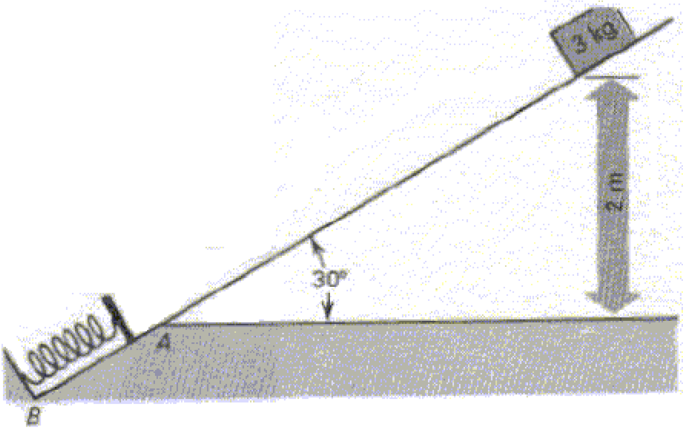
PREGUNTA 2 (25 puntos)

Una masa de 3.00 kg parte del reposo en un plano inclinado de 2.00 m, como se muestra en la figura. en la parte inferior del plano hay un resorte, cuya constante elástica es $k = 1.0 \times 10^4$ N/m. El coeficiente de fricción cinético entre el plano y la masa es de 0.30; entre los puntos A y B, el coeficiente de fricción es cero. Encuentre

a) la velocidad de la masa exactamente antes de hacer contacto con el resorte (8 puntos)

b) la compresión máxima del resorte (7 puntos)

c) la altura a la cual sube la masa después de rebotar con el resorte (10 puntos)



a)

$$W_{nc} = E_2 - E_1$$

$$-f_k d = \tfrac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$-\mu_k mg\cos\theta \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \tfrac{1}{2}mv^2 - mgh$$

$$v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu_k}{\tan\theta}\right)} = \sqrt{2(9.8)(2)\left(1 - \frac{0.30}{\tan 30}\right)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 4.34 \text{ m/s}}$$

b)

$$E_2 = E_3$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx^2 + mgh'$$

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}kx^2 + mg(-x\operatorname{sen}\theta)$$

$$\tfrac{1}{2}kx^2 - mg\operatorname{sen}\theta x - \tfrac{1}{2}mv^2 = 0$$

$$5000x^2 - 14.7x - 28.3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 7.67 \text{ cm}}$$

c)

$$W_{nc} = E_4 - E_3$$

$$-f_k d' = mgh_4 - \left[\tfrac{1}{2}kx^2 + mg(-x\operatorname{sen}\theta)\right]$$

$$-\mu_k mg\cos\theta \frac{h_4}{\operatorname{sen}\theta} = mgh_4 - \tfrac{1}{2}kx^2 + mgx\operatorname{sen}\theta$$

$$h_4 = \frac{\tfrac{1}{2}kx^2 - mgx\operatorname{sen}\theta}{mg\left(1 + \frac{\mu_k}{\tan\theta}\right)} = \frac{\tfrac{1}{2}(1.0\times10^4)(7.67\times10^{-2})^2 - (3)(9.8)(7.67\times10^{-2})\operatorname{sen}30^\circ}{(3)(9.8)\left(1 + \frac{0.30}{\tan 30^\circ}\right)}$$

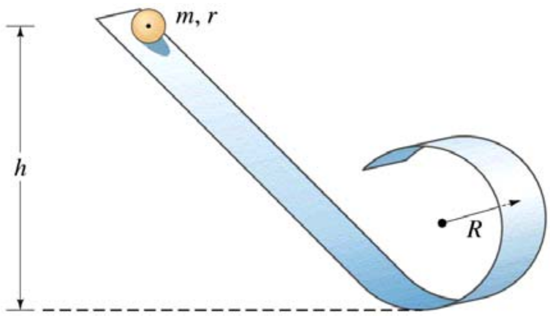
$$\Rightarrow \quad \boxed{h_4 = 63.3 \text{ cm}}$$

PREGUNTA 3 (25 puntos)

Una canica de masa m y radio r rueda a lo largo de la rugosa pista con lazo que se muestra en la figura. $\left(I_{cm} = \frac{2}{5}mr^2\right)$

a) ¿Cuál es el valor mínimo de la altura vertical h que la canica debe caer si ha de alcanzar el punto más alto del lazo sin dejar la pista? Exprese su respuesta en términos de r y R. **Nota:** *Observe que el centro de masa de la canica se encuentra inicialmente a una altura h + r de la base del lazo* (15 puntos)

b) Si h = 3R, determine la magnitud de la fuerza normal que actúa sobre la canica al llegar a la base del lazo (10 puntos)



a) *En el punto 2, para que la canica esté a punto de dejar la pista, se tiene el caso límite N = 0:*

$$F_c = ma_c$$

$$mg = m\frac{v^2}{R-r} \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = g(R-r)$$

La fricción permite que la canica ruede, pero no efectúa trabajo sobre la misma, por lo tanto:

$$E_1 = E_3 \Rightarrow mg(h+r) = mg(2R-r) + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$mg(h+r) = mg(2R-r) + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{v}{r}\right)^2 \Rightarrow mg(h+r) = mg(2R-r) + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}mr^2)\frac{v^2}{r^2}$$

$$mg(h+r) = mg(2R-r) + \tfrac{7}{10}mv^2 \Rightarrow mg(h+r) = mg(2R-r) + \tfrac{7}{10}mg(R-r)$$

$$h = (2R-r) + \tfrac{7}{10}(R-r) - r$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h = 2.7(R-r)}$$

$$E_1 = E_2 \Rightarrow mg(h+r) = mgr + \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\omega^2$$

$$mg(3R+r) = mgr + \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}I_{cm}\left(\frac{v_1}{r}\right)^2 \Rightarrow mg(3R+r) = mgr + \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}mr^2)\frac{v_1^2}{r^2}$$

$$mg(3R+r) = mgr + \tfrac{7}{10}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\tfrac{30}{7}gR}$$

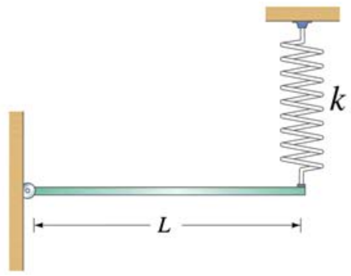
$$N - mg = m\frac{v_1^2}{R-r} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{N = mg\left(1 + \frac{30R}{7(R-r)}\right)}$$

PREGUNTA 4 (25 puntos)

Una varilla uniforme de longitud L y masa M ($I_P = \frac{1}{3}ML^2$) está articulada en un extremo y sostenida por un resorte de constante k del otro extremo. Cuando está en reposo, la varilla queda horizontal, como se ilustra en la figura. Para desplazamientos pequeños verticales del extremo de la varilla,

a) demuestre que el sistema realiza un movimiento armónico simple (20 puntos)

b) deduzca una expresión para el periodo de oscilación de este sistema (5 puntos)



a) Para la posición de equilibrio tenemos:

$$\sum \tau_P = 0 \Rightarrow -Mg\frac{L}{2} + kx_0L = 0,$$ donde x_0 es la deformación de equilibrio

Luego de que la varilla sufre un pequeño desplazamiento vertical:

$$\sum \tau_P = I_P\alpha \Rightarrow -Mg\frac{L}{2} + kxL = I_P\alpha$$

$$-Mg\frac{L}{2} + k(x_0 - L\theta)L = \frac{1}{3}ML^2\alpha$$

$$-kL^2\theta = \frac{1}{3}ML^2\alpha$$

$$\alpha = -\frac{3k}{M}\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3k}{M}\theta$$

La última expresión tiene la forma $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$, por lo que se deduce que el movimiento oscilatorio de la varilla es un **movimiento armónico simple**

b) Comparando la expresión obtenida en el literal a con la ecuación general del m.a.s., tenemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{3k}{M}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{3k}}}$$