
Transformada Z y sus propiedades

— Control Avanzado —

Transformada Z

Permite convertir una señal o sistema en el dominio de tiempo discreto a su representación equivalente en el dominio de la frecuencia.

$$X(z) = \mathcal{Z} \{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

A diferencia de su análoga, la transformada de Laplace, la transformada Z de una señal o sistema no tiene una respuesta única. La respuesta final dependerá del tiempo de muestreo escogido para discretizar el sistema o muestrear la señal.

Transformada Z: Respuesta no es única

$$G(s) = \frac{10}{s+5} \begin{cases} \xrightarrow{T=1} G(z) = \frac{1.987}{z-0.006738} \\ \xrightarrow{T=0.1} G(z) = \frac{0.7869}{z-0.6065} \end{cases}$$

Propiedades

Al ser un operador lineal, cumple con la propiedad de superposición:

$$x_1[n] \rightarrow X_1(z)$$

$$a^*x_1[n] \rightarrow a^* X_1(z)$$

Homogeneidad

$$x_2[n] \rightarrow X_2(z)$$

$$x_1[n]+x_2[n] \rightarrow X_1(z)+X_2(z)$$

Aditividad

Otras propiedades importantes son:

- Desplazamiento en el tiempo
- Primera diferencia
- Acumulación

$$x[n-k] \rightarrow z^{-k} X(z)$$

$$x[n]-x[n-1] \rightarrow (1-z^{-1}) X(z)$$

$$\sum_{k=0}^n x[k] \rightarrow (1-z^{-1})^{-1} X(z)$$

Discretización de un sistema

Para discretizar un sistema ya creado en MATLAB, se utiliza el comando **c2d**.

$$G_z = c2d(G, T)$$

G: función de transferencia continua previamente creada.

T: tiempo de muestreo a utilizar en la discretización

G_z: función de transferencia discretizada

Este comando permite usar diferentes métodos de discretización; por default usa 'Zero Order Hold'.

Creación de funciones de transferencia discretas

Para ingresar en MATLAB una función de transferencia discreta, se utilizan los mismo comandos revisados para sistemas continuos, pero se debe especificar el tiempo de muestreo del sistema para que MATLAB reconozca el sistema como discreto y emplee la variable 'z'.

$G=tf(num,den, T) \rightarrow$ num y den son los polinomios del numerador y denominador respectivamente.

$G=zpk([z],[p],k, T) \rightarrow$ z, p y k representan los ceros, polos y ganancia de la función respectivamente.

T: tiempo de muestreo usado.

Representación continua equivalente

Si por el contrario, se desea obtener el equivalente continuo de un función de transferencia discreta, se utiliza el comando **d2c**.

$$G=d2c(Gz)$$

Gz: función de transferencia discreta

G: función de transferencia continua equivalente

Existen diferentes métodos para obtener el equivalente continuo; por default el comando d2c utiliza el método 'Zero Order Hold'.

Comandos para transformada Z y su inversa

MATLAB facilita el cálculo de la transformada Z y de la transformada Z inversa de una expresión de manera literal a través del toolbox simbólico. Para definir una variable de manera simbólica, use el comando **syms**.

```
syms x1 x2
```

```
y=3*x1*sqrt(x2)
```

En este ejemplo se define a **x1** y **x2** como variables simbólicas y luego se define a **y** como una expresión que depende de dichas variables.

Comandos para transformada Z y su inversa

Para hallar la transformada Z y la transformada Z inversa se debe declarar a la variable independiente discreta n , la variable del dominio de la frecuencia z , la variable de muestreo T y cualquier otra variable adicional que sea necesaria.

```
syms T n z
```

```
y=6*n*T
```

```
yz=z/(z-1)
```

```
yz=ztrans(y)
```

```
y=iztrans(y)
```