Mayo de 2016

M.Sc. Jorge Medina
Ph.D. Johni Bustamante
MPC. Alex Luque

DEMOSTRACIÓN DE LÍMITES

EJERCICIO 1:

Demostrar que $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$

Tenemos que **demostrar:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \neq 3: |x-3| < \delta \implies |(3x-1)-8| < \varepsilon$$

A través de un **Análisis Previo,** observamos:

$|(3x-1)-8| = |3x-9| = 3|x-3|$. Entonces, se puede notar que $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

La **Demostración Formal:**

Sea $\varepsilon > 0$, con $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$,entonces:

$Si\ \forall x \neq 3:\ |x-3| < \delta \implies |(3x-1)-8| = |3x-9| = 3|x-3| < 3\delta$

Pero como $\delta = \frac{\varepsilon}{3} \implies |(3x-1)-8| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3}$

$$\Rightarrow |(3x-1)-8| < \varepsilon \text{ } \textit{l.q.q.d}$$

EJERCICIO 2:

Demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$

Tenemos que **demostrar:**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \neq 2: |x-2| < \delta \implies |x^2-4| < \varepsilon$$

A través de un **Análisis Previo,** observamos:

$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2|$

Como el factor $|x-2| < \delta$ es muy pequeño, convenimos en tomar $\delta \leq 1$, con lo que buscamos una cota superior para $|x+2|$ de la siguiente forma:

$$|x+2| = |(x-2)+4| \leq |x-2| + |4| < 1+4 = 5$$

Por lo que se requiere que $\delta \leq {}^{\varepsilon}/_{5}$ entonces $|x-2||x+2| < \varepsilon$

La **Demostración Formal:**

Sea $\varepsilon > 0$ y elegimos $\delta = \min\left\{1, {}^{\varepsilon}/_{5}\right\}$, entonces:

$Si\ \forall x \neq 2: |x-2| < \delta \implies |x^2-4| = |x-2||x+2| < 5\delta$

Pero como $\delta = \frac{\varepsilon}{5} \implies |x^2-4| < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5$

$$\Rightarrow |x^2-4| < \varepsilon \text{ } \textit{l.q.q.d}$$

EJERCICIO 3:

Demostrar que $\lim_{x\to 3}(2x^2-3x)=9$

Tenemos que **demostrar:**

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x\neq 3: |x-3|<\delta \implies |(2x^2-3x)-9|<\varepsilon$$

A través de un **Análisis Previo,** observamos:

$|(2x^2-3x)-9| = |(x-3)(2x+3)| = |2x+3||x-3|$

Como el factor $|x-3|<\delta$ es bastante pequeño, convenimos en tomar $\delta\leq 1$ con lo que buscamos una cota superior para $|2x+3|$, de la siguiente forma:

$$|2x+3| = 2\left|x+\frac{3}{2}\right| = 2\left|x+\frac{3}{2}-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right| = 2\left|(x-3)+\frac{9}{2}\right| \leq 2\left(|x-3|+\frac{9}{2}\right) < 2\left(1+\frac{9}{2}\right) = 11$$

Por lo tanto se requiere tomar $\delta\leq\frac{\varepsilon}{11} \implies |2x+3||x-3|<\varepsilon$

La **Demostración Formal:**

Sea $\varepsilon>0$ y elegimos $\delta=\min\{1,{}^{\varepsilon}/_{11}\}$, entonces:

$Si\ \forall x\neq 3: |x-3|<\delta \implies |(2x^2-3x)-9| = |2x+3||x-3| < 11\delta$

Pero como $\delta=\frac{\varepsilon}{11} \implies |(2x^2-3x)-9| < 11\cdot\frac{\varepsilon}{11}$

$$\implies |(2x^2-3x)-9|<\varepsilon \ \ \textit{l.q.q.d}$$

EJERCICIO 4:

Demostrar que $\lim_{x\to 5}\sqrt{x+4}=3$

Tenemos que **demostrar:**

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0,\forall\ x\neq 5: |\ x-5|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x+4}-3\right|<\varepsilon$$

A través de un **Análisis Previo,** observamos:

$$\left|\sqrt{x+4}-3\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x+4}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+3\right)}{\sqrt{x+4}+3}\right| = \left|\frac{(x+4)-9}{\sqrt{x+4}+3}\right| = \left|\frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right| \leq \frac{|x-5|}{3}$$

Para hacer esta última expresión menor que $\boldsymbol{\varepsilon}$**,** hacemos que $|x-5|<3\varepsilon$

La **Demostración Formal:**

Sea $\varepsilon>0$, tenemos que $\delta\leq 3\varepsilon$, entonces:

$$Si\ \forall\ x\neq 2:\ |\ x-5|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x+4}-3\right| \leq \frac{|x-5|}{3} < \frac{1}{3}\cdot\delta$$

Pero como $\delta=3\varepsilon \implies \left|\sqrt{x+4}-3\right| < \frac{1}{3}\cdot 3\varepsilon$

$$\implies \left|\sqrt{x+4}-3\right|<\varepsilon \ \ \textit{l.q.q.d}$$

EJERCICIO 5:

Demostrar que $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}=4$

Tenemos que **demostrar:**

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0, \forall\,x\neq 3: |\,x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|<\varepsilon$$

A través de un **Análisis Previo,** observamos:

$$\left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|=\left|\frac{x^2-2x-3-4x+12}{x-3}\right|=\left|\frac{x^2-6x+9}{x-3}\right|=\left|\frac{(x-3)^2}{x-3}\right|=|\,x-3|<\delta$$

Entonces se puede notar que $\delta=\varepsilon$

La **Demostración Formal:**

Sea $\varepsilon>0$, tenemos que $\delta=\varepsilon,$ entonces:

$Si\ \forall\,x\neq 3:\ |\,x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|=|\,x-3|<\delta$

Pero como $\delta=\varepsilon \implies \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|<\varepsilon$

$$\implies \left|\frac{x^2-2x-3}{x-3}-4\right|<\varepsilon \quad \textit{l.q.q.d}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 1

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$ $\quad : R=2$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x-1}{x^3+x^2-x-1}$ $\quad : R=0$
3. $\lim\limits_{x\to 10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$ $\quad : R=\infty$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ $\quad : R=\frac{1}{4}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$ $\quad : R=\frac{3}{5}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$ $\quad : R=-1$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cos5x}{x^2}$ $\quad : R=\frac{25}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tan5x}{sen2x}$ $\quad : R=\frac{5}{2}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+xsenx}-1}{x^2}$ $\quad : R=\frac{1}{2}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tanx-senx}{x^3}$ $\quad : R=\frac{1}{2}$

11. Bosquejar la gráfica de:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & ; \quad x < 1 \\ x^2 - 1 & ; \quad 1 \le x \le 2 \\ 4 - x & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

Después determine cada uno de los siguientes enunciados o establezca que no existen:

i. $f(1)$

ii. $\lim_{x \to 1^-} \mathrm{f(x)}$

iii. $f(2)$

iv. $\lim_{x \to 2^-} \mathrm{f(x)}$

v. $\lim_{x \to 2} \mathrm{f(x)}$

12. Bosquejar la gráfica de:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|2 - x|}$$

Luego determine o establezca que no existen, los siguientes enunciados:

i. $f(2)$

ii. $\lim_{x \to 2^-} \mathrm{f(x)}$

iii. $\lim_{x \to 2^+} \mathrm{f(x)}$

iv. $f(3)$

v. $\lim_{x \to 3} \mathrm{f(x)}$

13. Bosquejar la gráfica de:

$$f(x) = sgn(senx)$$

Luego determine o establezca que no existen, los siguientes enunciados:

i. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

ii. $f(\pi)$

iii. $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

iv. $\lim_{x \to \pi} \mathrm{f(x)}$

v. $\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}} \mathrm{f(x)}$

vi. $\lim_{x \to 2\pi^+} \mathrm{f(x)}$

14. Bosquejar la gráfica de:

    $f(x) = sgn(x^2 - 1)$

    Luego determine o establezca que no existen, los siguientes enunciados:

    i. $f(0)$

    ii. $f(-1)$

    iii. $f(2)$

    iv. $\lim\limits_{x \to 1^-} \mathrm{f(x)}$

    v. $\lim\limits_{x \to 2} \mathrm{f(x)}$

15. Bosquejar la gráfica de:

    $f(x) = x - [\![x]\!]$

    Luego determine o establezca que no existen, los siguientes enunciados:

    i. $f(1)$

    ii. $f(2)$

    iii. $f\left(\frac{3}{2}\right)$

    iv. $\lim\limits_{x \to 0} \mathrm{f(x)}$

    v. $\lim\limits_{x \to 1^-} \mathrm{f(x)}$

16. Demostrar que si F y G son funciones tales que $0 \leq F(x) \leq G(x)$ en una vecindad $B_\delta(c)$ y si $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{G(x)} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x \to c} \mathrm{F(x)} = 0$

17. Sea f una función tal que $\lim\limits_{x \to c} \mathrm{f(x)} = L$ existe. Entonces f es acotada en alguna vecindad de c.

18. Demostrar en términos de $\varepsilon - \delta$

    a. $\lim\limits_{x \to 4} (2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x}) = 20$

    b. $\lim\limits_{x \to -1} (3\mathrm{x} + 2) = -1$

    c. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{2\mathrm{x} + 1} = 3$

    d. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 2}{2x - 4} = \frac{5}{2}$

    e. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\mathrm{x}^3 - 1}{x - 1} = 3$

19. Esbozar un gráfico y dar la definición formal de:

    a. $\lim\limits_{x \to 2} \mathrm{f(x)} = 4$

    b. $\lim\limits_{x \to -2^-} \mathrm{f(x)} = 3$

    c. $\lim\limits_{x \to 3^+} \mathrm{f(x)} = -2$

EJERCICIOS DE CÁLCULO DE LÍMITES

EJERCICIO 1:

Si $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 1, y\ x \neq 0$. Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Resolución:

De la condición $\left|\frac{f(x)}{x}\right| < 1$ se tiene que $|f(x)| < |x| \quad \Rightarrow -|x| < f(x) < |x|$ y por el teorema del valor del emparedado, se tiene como $\lim\limits_{x\to 0}(-|x|) = 0\ y\ \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, entonces podemos concluir que $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0}$

EJERCICIO 2:

Calcular $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}}$

Resolución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{(1+\cos 2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-cos^2 2x}{x^2(1+\cos 2x)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{sen^2 2x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos 2x} = 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{2}$$

EJERCICIO 3:

Calcular $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 4x}{x^2}}$

Resolución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 4x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 4x+1-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-(1-\cos x)+(1-\cos 4x)}{x^2}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} + \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)}{x^2(1+\cos 4x)}$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{sen^2 x}{x^2(1+\cos x)} + \lim_{x\to 0}\frac{sen^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)} = -\frac{1}{2}+4\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{\frac{15}{2}}$$

EJERCICIO 4:

Calcular $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x}$

Resolución:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{8}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^8}{e^{-2}} = \boldsymbol{e^{10}}$$

$$Como\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k, \forall k\in\mathbb{R}-\{0\}$$

EJERCICIO 5:

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$

Resolución:

Primero luego de la división del coeficiente de polinomios tenemos:

$$\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}=1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}$$

De esta forma cuando $x\to\infty$ nuestra función tiene la indeterminación de 1^∞. Entonces nuestro límite se lo puede resolver de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{x(8x-3)}{x^2-3x+7}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right]^{\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}}=*$$

$$\boxed{Como\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}=e\,,y\ \lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=8}$$

$$\Rightarrow *= e^8$$

EJERCICIO 6:

Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln(x)]$

Resolución:

$$\lim_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln(x)]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$$

EJERCICIO 7:

Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

Resolución:

Hacemos primero la sustitución $y = a^x - 1$

$\lim\limits_{x\to 0} y = 0$ y se tiene que $y = a^x - 1 \Rightarrow a^x = y + 1$

$$\Rightarrow \ln a^x = \ln(1+y) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+y)}{\ln(a)}$$

Entonces,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\frac{\ln(1+y)}{\ln(a)}}$$

$$= \ln a \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \ln a \lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}} = \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = \mathbf{\ln a}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS 2

1. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$
2. Demostrar que si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} g(x) \lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. Esbozar en cada caso un gráfico y dar la definición formal de los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

   c) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = l$

   d) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = l$

   e) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$

   f) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

4. Sea $f: X \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in X$. Suponga que existe $\lim_{x \to a} f(x) = l > 0$.

   Demostrar que: $\exists\, \delta > 0, \forall\, x \in X: 0 < |\, x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < \frac{l}{2}$

5. Construir la gráfica de una función de variable real tal que:

   a)
   i. $f(0) = f(1) = f(5) = 0$
   ii. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < |x + 2| < \delta \implies |f(x) - 1| < \varepsilon$
   iii. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < \mathrm{x} - 1 < \delta \implies |f(x) + 1| < \varepsilon$
   iv. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < 1 - \mathrm{x} < \delta \implies |f(x) + 2| < \varepsilon$
   v. $\forall N > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < |x - 3| < \delta \implies f(x) < -N$
   vi. $\forall N > 0\ \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}: x > M \implies f(x) > N$
   vii. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}: x < -M \implies |f(x)| < \varepsilon$

   b)
   i. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < |x| < \delta \implies |f(x) - 3| < \varepsilon$
   ii. $\forall N > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < \mathrm{x} + 3 < \delta \implies f(x) > N$
   iii. $\forall N > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}: 0 < -\mathrm{x} - 3 < \delta \implies f(x) < -N$
   iv. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}: x > M \implies |f(x) - (1 + x)| < \varepsilon$
   v. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R}: x < -M \implies |f(x)| < \varepsilon$

6. Hallar los valores de a y b para que:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x - 1} - ax - b \right) = 0$$

R. a=1, b=-1/2

7. Hallar la asíntota oblicua de las siguientes funciones de variable real

   a) $f(x) = \frac{3x^3 + 4x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

   b) $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1}$

   c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

8.

   a) Si $|g(x) + 5| \leq 3(4 - x)^2$ y $x \in \mathbb{R}$, calcular $\lim_{x \to 4} g(x)$

b) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$

9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{X\to 0^+} \frac{x\sin x}{2-2\cos x}$

b) $\lim\limits_{X\to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin 3x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$

d) $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\tan 2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\, ln\left(\frac{x+2}{x-5}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{4x}-1}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

i) $\lim\limits_{h\to 0} \frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h}$ $, a>0$

j) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan x)^{\csc x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0}(4-3x)^{\tan\frac{\pi}{2}x}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(\cos ax)}{ln(\cos bx)}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

10. En cada una de las siguientes proposiciones califique como verdadero o falso. En caso de ser verdad demostrar y en caso de ser falso de una contingencia.

a) Si $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ existe $\Rightarrow$ existen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

b) Si $f(x_\circ)$ no está definida $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ no existe

c) Si $f(x_\circ)$ esta definida $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x_\circ)$ existe

d) Si $f(x)\neq g(x), \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_\circ} g(x)$

e) Si f – es una función talque $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ y si g es otra función cualquiera $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)=0$

f) No existe función f y g talque $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\ y\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=5$

g) $\lim_{x\to 2} \mu\big(ln(1-x)\big) = 0$

11. Calcular

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{|x|} \; : R = NO\ EXISTE$

b) $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} : R = 1$

c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} : R = 0$