Mayo del 2016

M.Sc. Jorge Medina
Ph.D. Johni Bustamante
MPC. Alex Luque

CONTINUIDAD

EJERCICIO 1

Investigar la continuidad de las funciones $f[g(x)]\ y\ g[f(x)]$, si:

a) $f(x) = sgn(x)\ \ y\ \ g(x) = x(1-x^2)$
b) $f(x) = sgn(x)\ \ y\ \ g(x) = 1 + x - [\![x]\!]$

Resolución:

a) $f[g(x)] = sgn\ [x(1-x^2)] = \begin{cases} 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ 0 & ; \quad x = 0, x = 1, x = -1 \\ -1 & ; -\infty < x < -1 \vee 0 < x < +\infty \end{cases}$

Por lo que en $x = 0, x = 1, x = -1$ son puntos de discontinuidad.

En cambio $g[f(x)] = sgn\ x(1 - sgn^2 x) = 0$, implica que $g[f(x)]$ sea continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) $f(x) = sgn(x)\ \ y\ \ g(x) = 1 + x - [\![x]\!]$

Ya que cualquier $x \in \mathbb{R}$ se puede representar como $x = n + p$; donde $0 \leq p < 1$ y $n \in \mathbb{Z}$. Entonces:

$$f[g(x)] = sgn\ [1 + x - [\![x]\!]] = sgn\ (1 + n + p - n) = sgn\ (1 + p) = 1$$

Lo que implica que $f[g(x)]$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

✓ Demostrar que $g[f(x)]$ es continua en $x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 2

Demostrar que si f es continua en $x \in \mathbb{R} \implies F(x) = |f(x)|$ también es continua en $x \in \mathbb{R}$.

Demostración:

Sea $\forall \varepsilon > 0 \implies \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, tal que $|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pero como se afirma que $F(x) = |f(x)|$ es continua entonces:

$$|F(x) - F(x_0)| = \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Si se cumple que $|x - x_0| < \delta$. Es decir $F(x)$ es continua en todos los puntos de $x \in \mathbb{R}$.

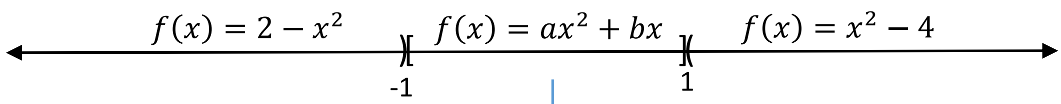
EJERCICIO 3

Determinar de ser posible $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función $f\ dada\ por$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & ; \quad x < 1 \\ ax^2 + bx & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4 & ; \quad x > 1 \end{cases} \qquad \text{Sea continua en } \mathbb{R}.$$

__Resolución:__ Nuestros posibles problemas serán en $x = -1$ y $x = 1$ pero sabemos que, para que f sea continua en x_0. Se requiere que: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Por lo tanto en $x_0 = -1$ y $x_0 = 1$ tenemos:



$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) \\ &\Rightarrow \lim_{x \to -1^-} (2 - x^2) = \lim_{x \to -1^+} (ax^2 + bx) \\ &\Rightarrow 1 = a - b \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \\ &\Rightarrow \lim_{x \to 1^-} (ax^2 + bx) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 4) \\ &\Rightarrow a + b = -3 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = -2$$

$$\Rightarrow a = -1\ y\ b = -2$$

∴ Es decir que $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & ; \quad x < 1 \\ -x^2 - 2x & ; \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4 & ; \quad x > 1 \end{cases}$,es continua en todo $x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 4

Sea $f(x) = 3cos^3x - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que por lo menos una de las raíces de f se encuentra $[0,1]$.

__Demostración:__

Se conoce el teorema del valor intermedio de continuidad que dice:

Si f es continua en $[a, b]$

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$

$\Rightarrow \exists c \in (a, b) \colon f(c) = 0$

Por lo que, para nuestro caso se puede ver que $f(x) = 3cos^3x - 2x - 2$ es continua en $[0,1]$ y que $f(0) = 1$; $f(1)$= $3cos^3 1 - 2 - 2 = 3cos^3 1 - 4 < 0$

Por lo que $f(0) \cdot f(1) < 0$

∴ Podemos afirmar que $\exists c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$ que es lo que queremos demostrar.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Analizar la continuidad y esbozar su gráfica:

a) $f(x) = sgn(x^2 - 2x)$

b) $f(x) = x[\![x]\!]$

c) $f(x) = \begin{cases} \left|\frac{sen\,x}{|x|}\right|, x \neq 0 \\ 1, \quad x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} cos\frac{\pi x}{2} & , \quad |x| \leq 1 \\ |x-1| & , \quad |x| > 1 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & ; \quad x < -1 \\ x - 1 & ; \quad -1 \leq x < 1 \\ 2x - x & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$

2. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; \quad x \leq 0 \\ ax + b & ; \quad 0 < x < 1 \\ 1 & ; \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Sea continua en $\mathbb{R}$.

3. Determinar de ser posible el valor de $A \in \mathbb{R}$ para que f sea continua si:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x}-1}{x} & , x \neq 0 \\ A & , x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+8}-4}{x-4} & , x \neq 4 \\ A & , x = 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x - \ln 2}{x-2} & , x \neq 2 \\ A & , x = 2 \end{cases}$

4. Analizar la continuidad de las funciones $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$, si:

a) $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 1 \\ 2 - x & , x > 1 \end{cases}; \quad g(x) = 1 + x^2$

b) $f(x) = \mu(x)\,; \quad g(x) = x(1 - x^2)$

5. Sea $f(x) = x^5 - 4x^3 - 3x + 1;\ x \in \mathbb{R}$
   Demostrar que por lo menos una de las raíces de f se encuentra en $[2,3]$

6. Si $\lim_{x \to 2} g(x) = 4$ y g es continua en x=2
   Determinar: $\lim_{x \to 2} g(x)^{\frac{e^{x-2}-1}{x-2}}$

7. Utilice el teorema del valor intermedio para demostrar que $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución real en $[0,1]$

8. Dar un ejemplo de una función f tal que $|f(x)|$ sea continua en $x = x_o$ pero que $f(x)$ sea discontinua en $x = x_o$

9. En las siguientes proposiciones establecer si son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadera, demostrar, y en caso de ser Falso dar un contraejemplo.

   a) Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \Rightarrow f$ es continua en x=a

   b) $f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]$ es continua $x = 3.2$

   c) Si f es continua en $[a,b] \Rightarrow f$ es acotada en $[a,b]$

   d) Si f esta definida en $[a,b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b)$, tal que $f(c) = 0$

   e) Si $[f(x) + g(x)]\ \forall x \in \mathbb{R}$ es continua en $c \in (a,b) \Rightarrow f(x)\ y\ g(x)$ son continuas en $x = c$