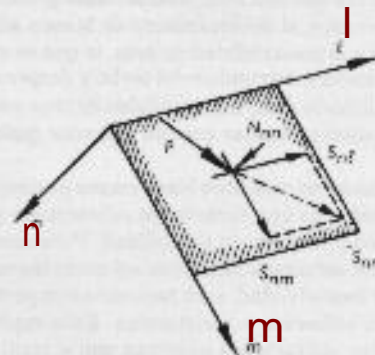


ANALISIS DE ESFUERZOS

COMPONENTES DE LOS ESFUERZOS*

Fuerzas de superficie

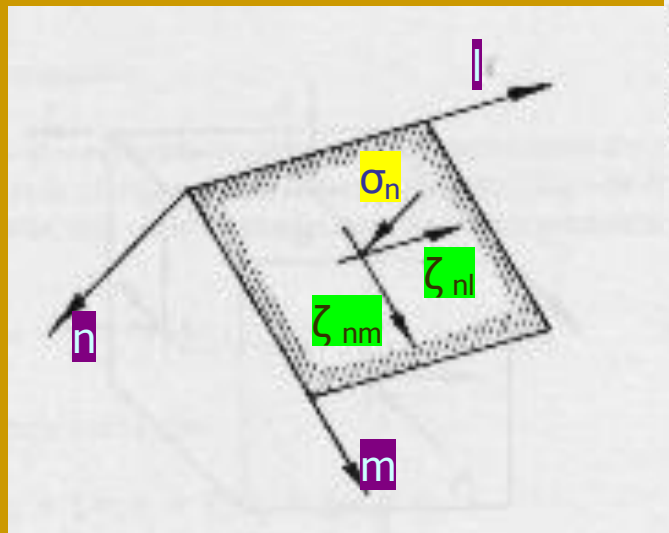
Supongamos que sea P la fuerza total aplicada al elemento de superficie. En general esta fuerza estará inclinada con respecto a la superficie pero se puede resolver en (i) un componente normal N_{nm} , que actúa perpendicularmente a la superficie, y (ii) un compo-



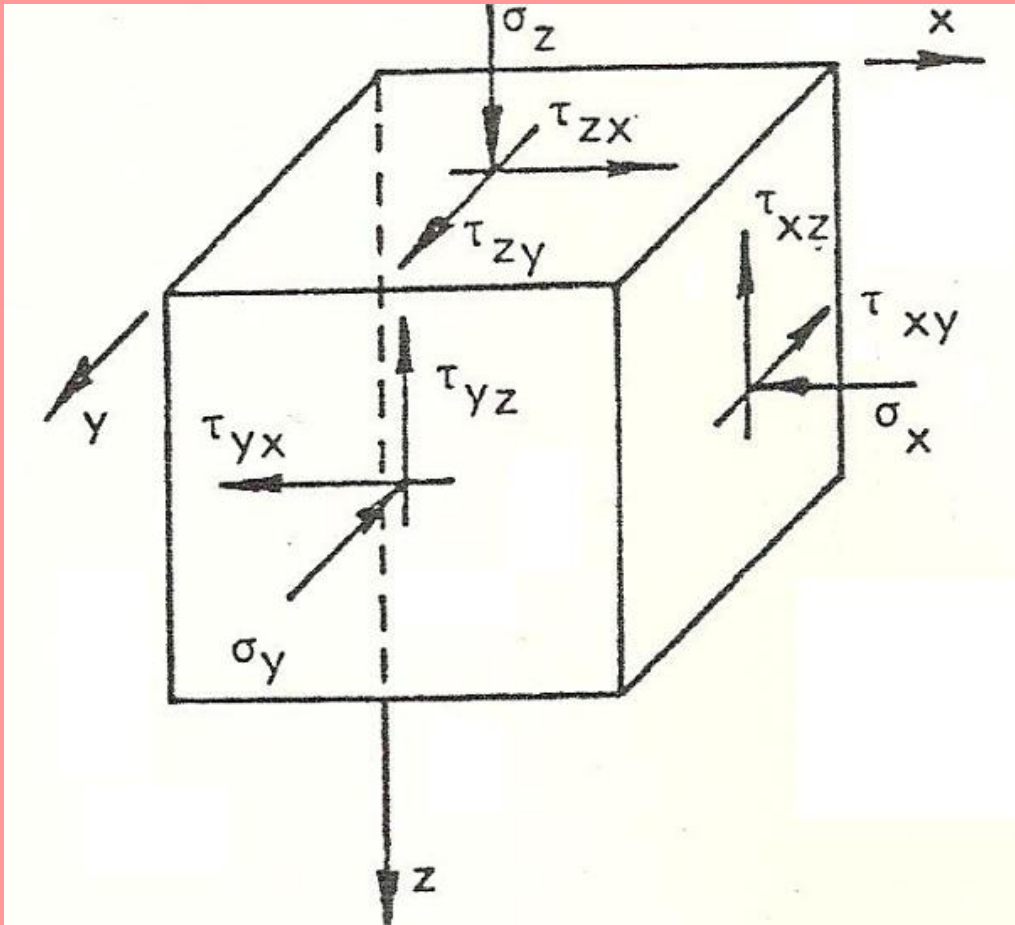
Tracciones de superficie

La intensidad de una fuerza aplicada a una superficie elemental se obtiene dividiendo la fuerza entre el área del elemento, A . En términos de las fuerzas componentes que se definieron arriba, podemos escribir

$$p_n = \frac{N_n}{A}, \quad \tau_{el} = \frac{S_{el}}{A}, \quad \tau_{em} = \frac{S_{em}}{A} \quad (1)$$



El esfuerzo en un punto



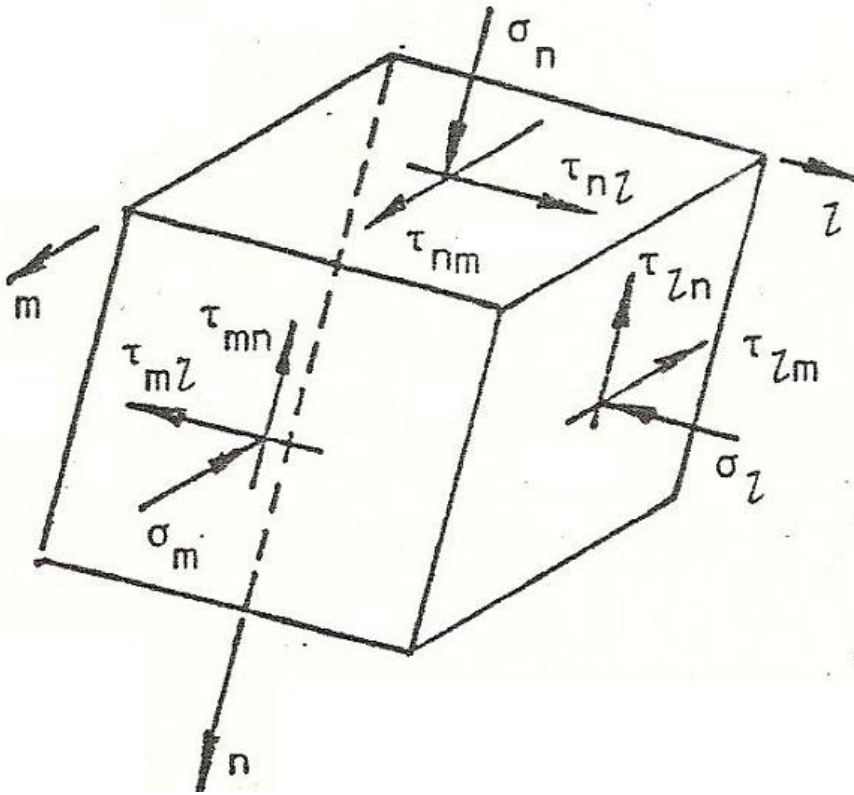
$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (2)$$

Equilibrio rotacional

(τ_{xy}, τ_{yx}) , (τ_{yz}, τ_{zy}) y (τ_{xz}, τ_{zx})

Se denominan esfuerzos conjugados

Cuando ocurre una rotación:



Para determinar la nueva condición de esfuerzos se requieren las denominadas **ecuaciones de transformación**

ECUACIONES DE TRANSFORMACIÓN

Si se conocen las componentes del esfuerzo en las coordenadas x , y , z

Se desea saber otras componentes en un eje

Rotado l , m , n ,

Se requieren tres ecuaciones para esfuerzos normales y tres para esfuerzos cortantes.

La ecuación base para determinar los nuevos esfuerzos normales es:

$$\sigma_l = l_x^2 \sigma_x + l_y^2 \sigma_y + l_z^2 \sigma_z + 2(l_x l_y \tau_{xy} + l_y l_z \tau_{yz} + l_z l_x \tau_{zx}) \quad (1)$$

A partir de (1) se determinan σ_m y σ_n

Las componentes de los esfuerzos cortantes se determinan así:

$$\tau_{lm} = l_x m_x \sigma_x + l_y m_y \sigma_y + l_z m_z \sigma_z + (l_x m_y + l_y m_x) \tau_{xy} + (l_y m_z + l_z m_y) \tau_{yz} + (l_z m_x + l_x m_z) \tau_{zx} \quad (\text{Ecuac. 2})$$

Donde:

$l_x =$ coseno del ángulo entre los ejes l y x

$l_y =$ coseno del ángulo entre los ejes l e y

$l_z =$ coseno del ángulo entre los ejes l y z

$m_x =$ coseno del ángulo entre los ejes m y x

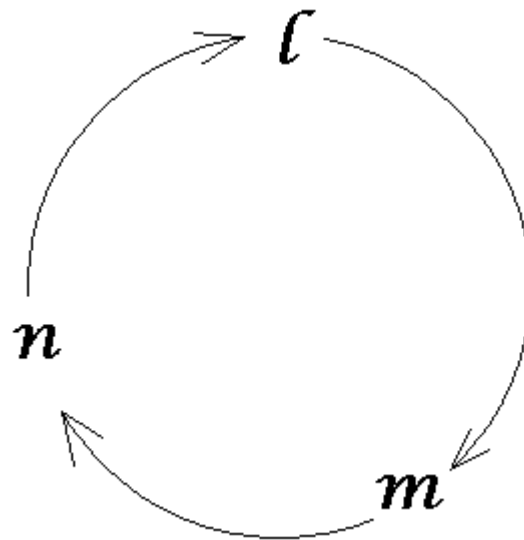
Así sucesivamente.....

Para obtener los valores de σ_m y ζ_{mn} , se parte de las ecuaciones 1 y 2, sustituyendo l por m y m por n

Como segundo paso se sustituye m por n y n por l y así se obtienen las ecuaciones de σ_n y ζ_{nl}

Este proceso se llama permutación cíclica. Cuando se conocen las componentes l , m y n y se requiere conocer las componentes x , y y z se utilizan las ecuaciones 1 y 2

Los eje x , y y z permutan en el orden expresado en el diagrama adjunto.

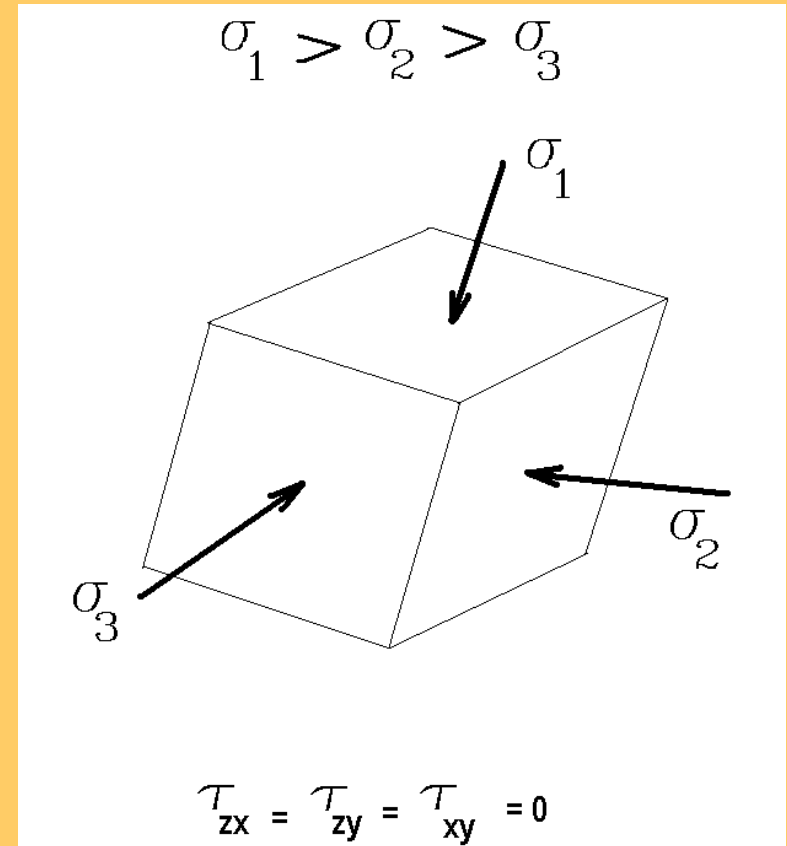


ESFUERZOS PRINCIPALES

Los valores de las 6 componentes del esfuerzo varían con la orientación de los ejes a los cuales están referidas.

Es posible encontrar una orientación particular de los ejes en la cual los **esfuerzos cortantes se anulan**

Esos ejes se denominan **ejes principales**, y los esfuerzos que así se obtienen se denominan **esfuerzos principales**.



The linear vertical strain in the cube is defined as the deformation per unit length and is given by $\epsilon_z = w/a$. For a linear elastic material, this strain is related to the vertical stress by the equation

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (6)$$

where E is the *Young's modulus* of the material.

The lateral strain $\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{u}{a}$ is related to the vertical stress by the equation

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_z}{E} \quad (7)$$

where ν is the *Poisson's ratio* of the material, and compressive strains are taken as positive.

Young's modulus and Poisson's ratio are material properties generally referred to as the *elastic constants*.

If instead of being free to deform laterally, the cube of rock is restrained in the x direction by the application of a normal stress, σ_x , the linear strains will be

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_z) \quad (8)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x) \quad (9)$$

$$\text{and } \epsilon_y = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_z) \quad (10)$$

If the general state of plane stress applied to the cube of rock is now completed by the application of the pair of conjugate shear stresses $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, a *shear strain* in the x - z plane will result. This shear strain, γ_{xz} , may be defined as the change, measured in radians, in an angle that was originally a right angle. It is a measure of the distortion suffered by the cube and is related to the elastic constants by the equation

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \quad (11)$$

where $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ is the *shear modulus* or *modulus of rigidity* of the material. If for a typical hard rock, $E = 100 \times 10^3$ MPa or 100 GPa, and $\nu = 0.25$, then $G = 40 \times 10^3$ MPa or 40 GPa.

ESTADO BIDIMENSIONAL DEL ESFUERZO

También es denominado esfuerzo Plano

Se define así a una condición en la cual, los componentes del esfuerzo que actúan en uno de los planos son cero.

$$\sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) \quad (13)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) \quad (14)$$

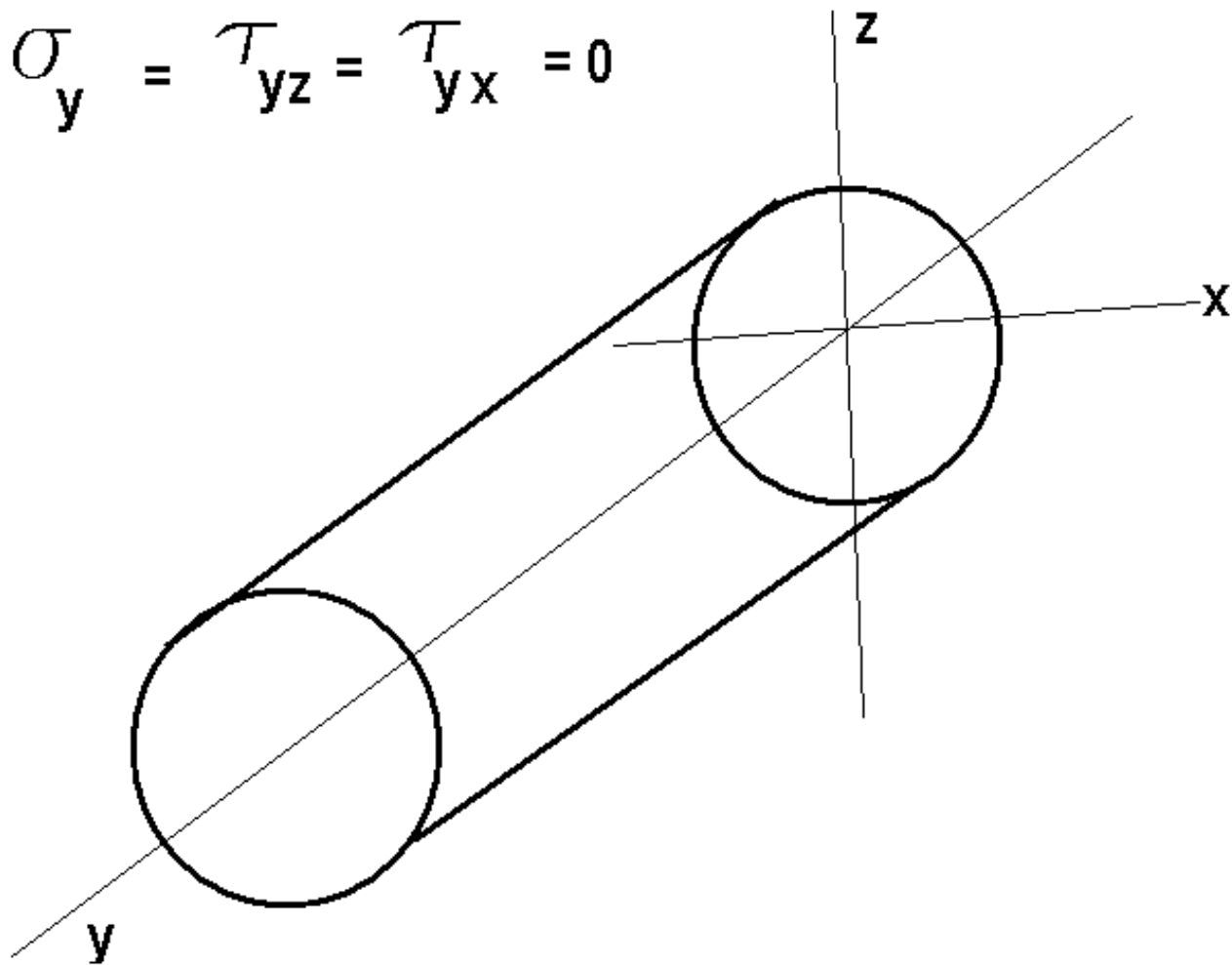
$$\epsilon_y = 0 \quad (15)$$

$$\nu \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu')}{E'} \tau_{xz} \quad (16)$$

$$\text{Donde} \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (17)$$

$$\nu \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (18)$$

$$\sigma_y = \tau_{yz} = \tau_{yx} = 0$$



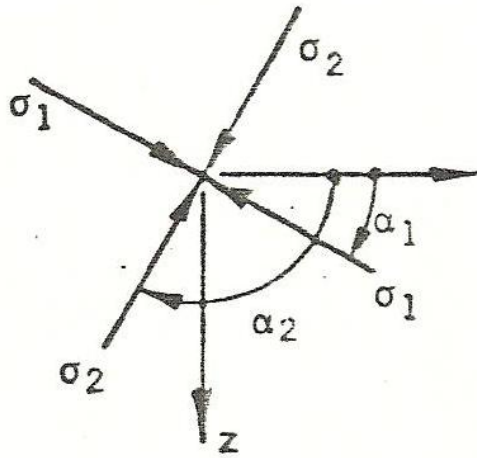
Las **ecuaciones de transformación** se obtienen de las correspondientes ya indicadas en el esfuerzo en tres dimensiones, eliminando todas las componentes en “y”

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\cos 2\alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\cos 2\alpha - \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{z_m} = \tau_{zx} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)\sin 2\alpha$$

Obtención de los esfuerzos principales



$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2}$$

Las direcciones de los esfuerzos son dadas por:

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{2\tau_{zx}}{\sigma_x - \sigma_z} \right\}$$

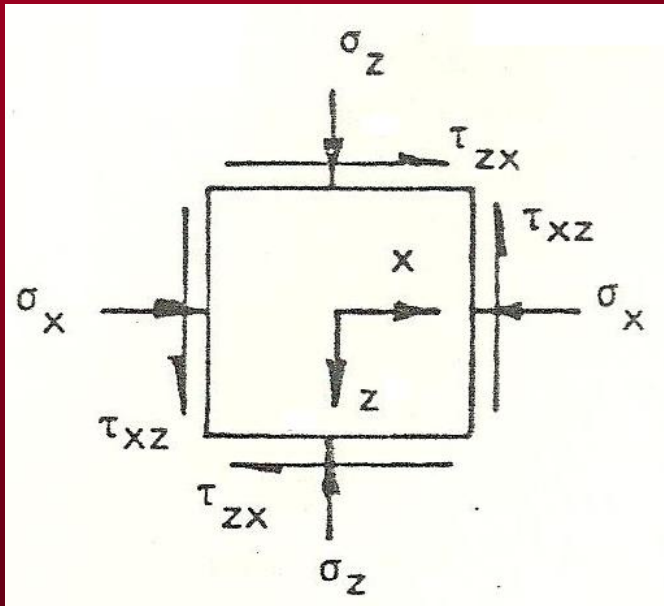
$$\circ \quad \alpha_1 = \arctan \left\{ \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{zx}} \right\}$$

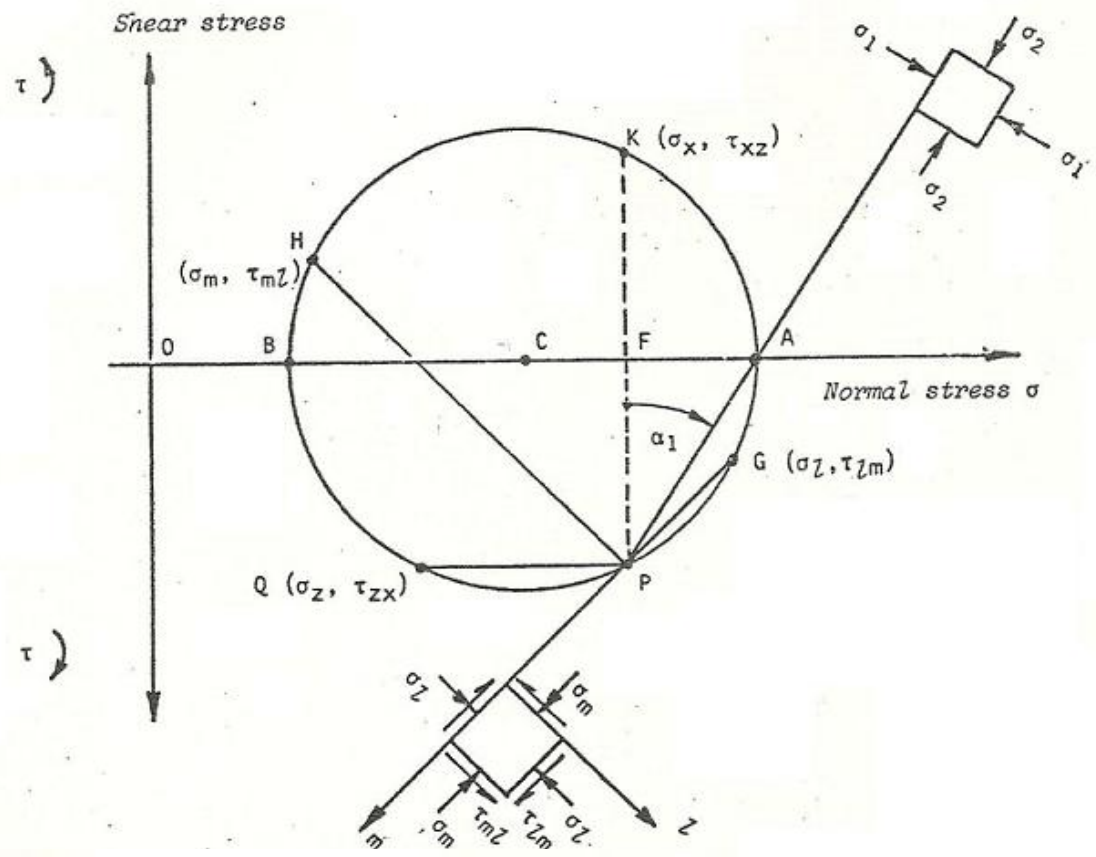
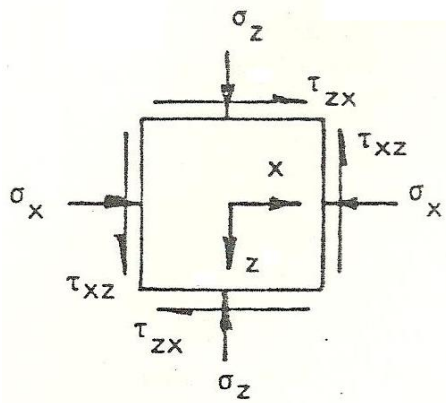
Donde:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$$

EL CIRCULO DE MOHR

Datos:





$$OF = \sigma_x \quad , \quad FK = \tau_{xz}$$

$$OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$OA = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \left\{ \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$OB = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \left\{ \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_x) / \tau_{zx}$$

Se utiliza el símbolo σ_1 para la tensión principal mayor, σ_2 para la intermedia y σ_3 para la menor. En estructuras se consideran las tensiones de tracción positivas y de aquí que la tensión principal mayor es la tracción máxima o algebraicamente la tensión de compresión mínima. En mecánica de rocas es conveniente suponer positivas las tensiones de compresión. De aquí que la tensión principal mayor en esta técnica sea la de tensión de compresión máxima o la de tracción mínima.

Del análisis anterior se puede deducir que para cualquier estado de tensión en un punto existirán siempre tensiones principales en el mismo. Entonces, si tomamos como ejes de coordenadas las direcciones de las tensiones principales, se ve que podemos expresar las tensiones σ_t y τ_t , en función de las tensiones principales y del ángulo θ que define la orientación del plano, por medio de las expresiones:

$$\sigma_t = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta \quad \text{Ec. 1-4(a)}$$

$$\tau_t = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta \quad \text{Ec. 1-4(b)}$$

CIRCULO DE MOHR

Las ecuaciones 1-4 (a) y 1-4(b) se simplifican poniendo

$$a = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

y

$$b = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Entonces

$$\sigma_t = a + b \cos 2\theta$$

o bien

$$\sigma_t - a = b \cos 2\theta$$

y

$$\tau_t = -b \sin 2\theta$$

Elevando al cuadrado y sumando:

$$(\sigma_t - a)^2 + \tau_t^2 = b^2$$

Ec. 1-5

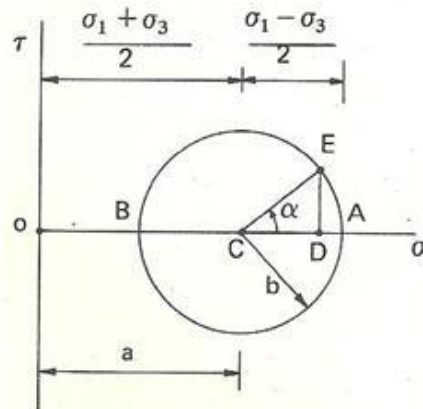


Fig. 1-4.—Representación geométrica de las tensiones en un punto por medio del círculo de Mohr.

Esta es la ecuación de una circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio b , siendo los ejes de coordenadas σ_t el horizontal y τ_t el vertical.

Este círculo se conoce con el nombre de círculo de Mohr y representa el lugar geométrico de las tensiones σ_t y τ_t que existen en un punto. En la figura 1-4 puede verse que la abscisa del punto A, que representa la tensión principal mayor σ_1 , es la suma de 'a' y 'b'; se observa que la tensión tangencial τ_t correspondiente al plano de tensión normal máxima es nula. El punto B representa las tensiones sobre el otro plano principal ($\sigma_t = \sigma_3 = a - b, \tau_t = 0$).

El punto E de la figura 1-4 tiene por coordenadas las tensiones σ_t y τ_t que se ejercen sobre un plano que forma un ángulo θ con el plano al que corresponde la tensión principal mayor. Por consideraciones geométricas podemos determinar el valor del ángulo α :

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = \overline{OC} + \overline{CE} \cos \alpha$$

por lo tanto

$$\sigma_t = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \alpha$$

teniendo en cuenta la ecuación 1-2(a)

$$\sigma_t = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

de donde

$$\alpha = 2\theta$$

De esta relación se deduce que el ángulo θ formado por el plano en cuestión y el plano de la tensión principal mayor es la mitad de α .

El estado de tensiones en un punto queda definido al conocer las tensiones principales correspondientes. Por ejemplo, en un ensayo de compresión simple, la tensión principal mayor es la aplicada y la tensión principal menor es nula. El estado de tensiones en cualquier punto de la muestra viene representado por el círculo ① de la figura 1-5. En esta figura se observa que la tensión tangencial

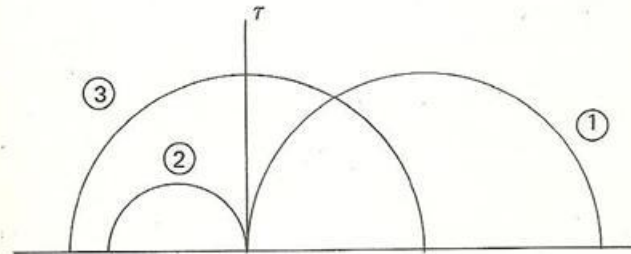


Fig. 1-5.—Círculos de Mohr correspondientes a algunos casos frecuentes de la tensión: ① Tensión de compresión simple o uniaxial. ② Tensión de tracción uniaxial y ③ Tensión de torsión o de cortante puro.

máxima es la mitad de la tensión principal mayor y que corresponde a un plano que forma 45° con el plano principal mayor, es decir, $\alpha = 90^\circ = 2\theta$. Análogamente el círculo ② representa las tensiones en cualquier punto de una muestra sometida a tracción uniaxial.

El círculo ③ de la figura 1-5 se puede considerar bajo dos puntos de vista. Si una muestra está sometida a una tensión principal mayor de compresión y a una tensión principal menor de tracción de la misma magnitud el círculo ③ nos representa el estado de tensiones en cualquier punto del interior de la muestra. Se deduce de la figura que las tensiones tangenciales máximas actúan sobre planos