

TERMINOLOGIA

Discontinuidades:

Son superficies de debilidad que imparten a la roca una condición de anisotropía de resistencia, es decir, denotan una interrupción en la integridad mecánica de la roca. Para fines descriptivos se utiliza el término genérico, discontinuidad, con el objeto de referirse indistintamente a diaclasas, fallas, foliaciones y estratificaciones, teniendo en cuenta que la resistencia al cizallamiento en estas superficies, siempre es menor que la resistencia de la roca intacta que constituye el macizo (Salcedo, 1988).

Fracturas:

Es el término general para cualquier discontinuidad mecánica en la roca, tales como diaclasas, fallas, grietas, fisuras.

CONCEPTOS EN MECANICA DE ROCAS

DISCONTINUIDADES

DIACLASAS:

La diaclasa es un plano de discontinuidad, de fractura o de separación en una roca, que normalmente no implica desplazamiento. Las diaclasas suelen producirse como familias paralelas, que dividen al macizo rocoso en bloques.

La ISRM (1981) define una diaclasa como: "un quiebre o fractura de origen geológico en la continuidad de una roca, a lo largo de la cual no ha habido desplazamiento visible" (en realidad una diaclasa puede tener desplazamiento en sentido perpendicular a su plano). Un grupo de diaclasas paralelas se denomina **set** o **familia** y la intersección de familias de diaclasas forman **sistemas**. Las diaclasas paralelas a planos de estratificación o foliación, se denominan diaclasas de **estratificación** o de **foliación**, respectivamente.

DIACLASAS:

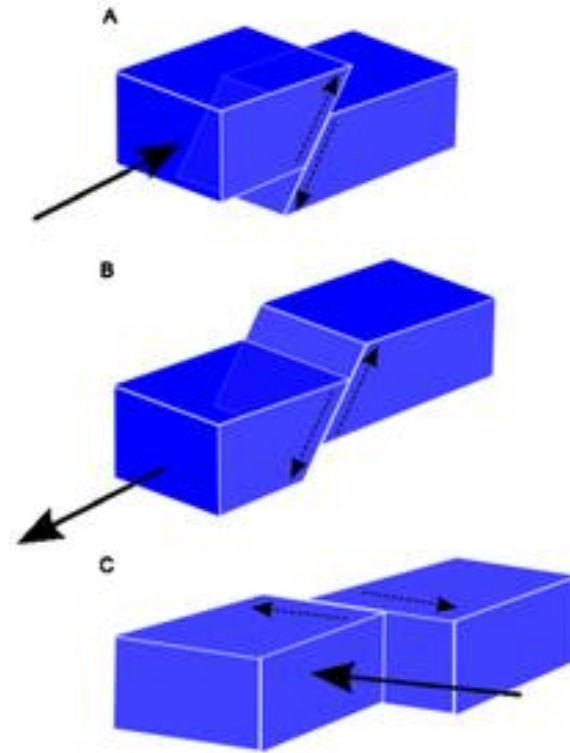
Las diaclasas pueden aparecer durante la formación de la roca o posteriormente por causas tectónicas.

Una familia de diaclasas, de acuerdo con su frecuencia y tamaño, determina el nivel de su importancia, así :
diaclasas primarias (más grandes y/o más frecuentes);
diaclasas secundarias (menos dominantes). Estos términos se refieren solamente al grado de meteorización y no son términos relacionados a la génesis.

FALLAS:

Son fracturas de la corteza terrestre a lo largo de las cuales ha ocurrido un desplazamiento paralelo a la superficie de la fractura. Lo que se observa es que una pared de la fractura se ha movido en relación con la otra. La superficie de fractura en la que ocurrió el desplazamiento se llama **plano de falla**. Como resultado de la fricción entre bloques, el plano de falla es suavizado y constituye una superficie llamada **espejo de falla**.

EJEMPLOS DE FALLAS



Tipos fundamentales de fallas: a) Falla inversa b) Falla normal c) Falla de desgarre d) Rotacional(no ilustrada)

FALLA SAN ANDRES



FALLA INVERSA



GRIETAS:

Término que se utiliza para definir una fractura pequeña

FISURAS:

Son grietas planares pequeñas. Se considera que tanto las fisuras como los poros de una roca originan respuestas no lineales en el proceso de carga-deformación a bajos niveles de tensiones; asimismo, disminuye la resistencia a la tracción, siendo responsables de la variabilidad y dispersión en resultados de ensayos.

ESTRATIFICACION:

Es una superficie característica de rocas sedimentarias que separa capas de igual o diferente litología. Estas superficies pueden estar presentes en rocas que se hayan originado por metamorfismo de rocas sedimentarias

FOLIACION O ESQUISTOSIDAD

Son superficies penetrativas, desarrolladas por orientación de minerales durante el metamorfismo, perpendiculares a la dirección de la tensión máxima. Es una estructura visible en ciertas rocas metamórficas, en que a la esquistosidad se suma una diferenciación petrográfica entre capas, formando hojas.

La **esquistosidad** tiene una estructura en láminas u hojas paralelas derivada de su origen tectónico, así:

a) Esquistosidad de fractura o pliegue-fractura: Se produce por una multitud de micro fallas o micro pliegues-falla muy próximos (espaciados del orden de algunos milímetros), que se superponen a una deformación continua apreciable y que separan láminas sin producir orientación de los minerales. Es subparalela al plano axial de los pliegues.

b) Esquistosidad de flujo: Es un fenómeno debido a un aplastamiento que origina un reajuste de la textura de la roca, con orientación paralela de todos los minerales planos, recristalizaciones y disoluciones orientadas. El resultado es la aparición de una anisotropía general, pero sin que existan discontinuidades. Es subparalela a la estratificación.

c) Foliación: Se produce a continuación de la esquistosidad de flujo, cuando aumentan las condiciones de presión y temperatura, alcanzándose el metamorfismo; así se generan minerales metamórficos orientados, cada vez de talla mayor y la roca se convierte en una serie de hojas con diferenciación mineralógica entre cada dos planos. Es subparalela a la estratificación.

PIZARROSIDAD

Es la propiedad de las rocas de aspecto laminar, tales como las pizarras que pueden dividirse en hojas delgadas

ZONAS DE CIZALLA

Son bandas de material de relleno con bajos niveles de fricción, cuyo espesor puede alcanzar algunos metros y en las que la rotura por cizallamiento ha tomado lugar. Representan zonas de tensiones a través de roca sana.

PLIEGUES

Son estratos que han estado sujetos a presiones, o su límite elástico puede alterarse lentamente por arqueamiento y donde la posición de los estratos es cambiada por tensiones de origen tectónico.

Dependiendo de la escala, los pliegues pueden ser estructuras principales comparadas con otras de menor escala (ej. Una obra subterránea).

DOMINIO ESTRUCTURAL Y ESTRUCTURA DEL MACIZO ROCOSO

Dominio estructural es la masa de roca delimitada por discontinuidades geológicas, dentro de la cual, la estructura es prácticamente homogénea.

Estructura del macizo rocoso es el conjunto de fallas, diaclasas, pliegues y demás características geológicas que definen una determinada región, en la que existen una serie de dominios estructurales perfectamente definidos y diferenciados entre sí.

La estructura del macizo rocoso comprende también los rasgos característicos de la textura y las asociación de uno o más tipos de rocas en el macizo.

CARACTERIZACION Y DESCRIPCION DE AFLORAMIENTOS

Caracterización de la roca intacta:

El macizo rocoso está compuesto por bloques de roca intacta separados por discontinuidades, tales como diaclasas, planos de estratificación, pliegues, zonas de cizalla y fallas. Estos bloques pueden tener diferentes grados de alteración, variando desde inalterados hasta disgregados.

Mineralogía y litología:

Brinda los primeros datos del comportamiento del macizo rocoso.

Grado de meteorización

Las propiedades mecánicas varían con el grado de meteorización. La meteorización es un proceso de desintegración mecánica o descomposición química que tiene lugar en los minerales y rocas.

La meteorización desempeña un papel importante en el ciclo de las rocas. Normalmente, desintegración y descomposición van juntas, porque la rotura física de las rocas facilita el acceso de los materiales químicos que causan la descomposición.

Los procesos de meteorización de una roca dan como resultado minerales de diferentes propiedades y comportamiento distinto, afectando, por ejemplo, su peso específico, densidad seca y su resistencia. Rocas con minerales solubles son susceptibles de disolución y alteración física

Caracterización de la roca intacta:

Grado de meteorización

Descripción de meteorización de la roca intacta (Duque-Escobar, 1998).

Término	Descripción
Sana	No existe evidencia de cualquier alteración química o mecánica.
Ligeramente meteorizada	Ligera decoloración en la superficie. De ser posible debe mencionarse el mineral al que está asociada dicha decoloración.
Moderadamente meteorizada	Decoloración evidente. Superficie moteada y alterada, llegando incluso a presentarse por debajo de la superficie de la roca.
Altamente meteorizada	Decoloración total. La alteración de la roca se extiende por casi todo el bloque o pieza considerada.
Desintegrada	La roca se ha meteorizado a la condición de un suelo, con vestigios de la textura original. La roca es friable pero los granos minerales no se han descompuesto.

Resistencia

Cada roca se caracteriza por su textura, resistencia y estructura.

Lo que mayor influencia tiene en una roca es la naturaleza de los minerales y la resistencia de sus constituyentes. Una roca no puede ser resistente si sus componentes minerales son débiles; por otro lado, si los minerales son resistentes, la roca puede todavía ser débil debido a una fábrica desfavorable (Salcedo, 1988)

La resistencia a la compresión uniaxial de la roca intacta es probablemente la propiedad mecánica mas empleada con fines geotécnicos y que a más de ser obtenida en ensayos de laboratorio.

ENSAYOS DE CARACTERIZACIÓN EN LAS ROCAS

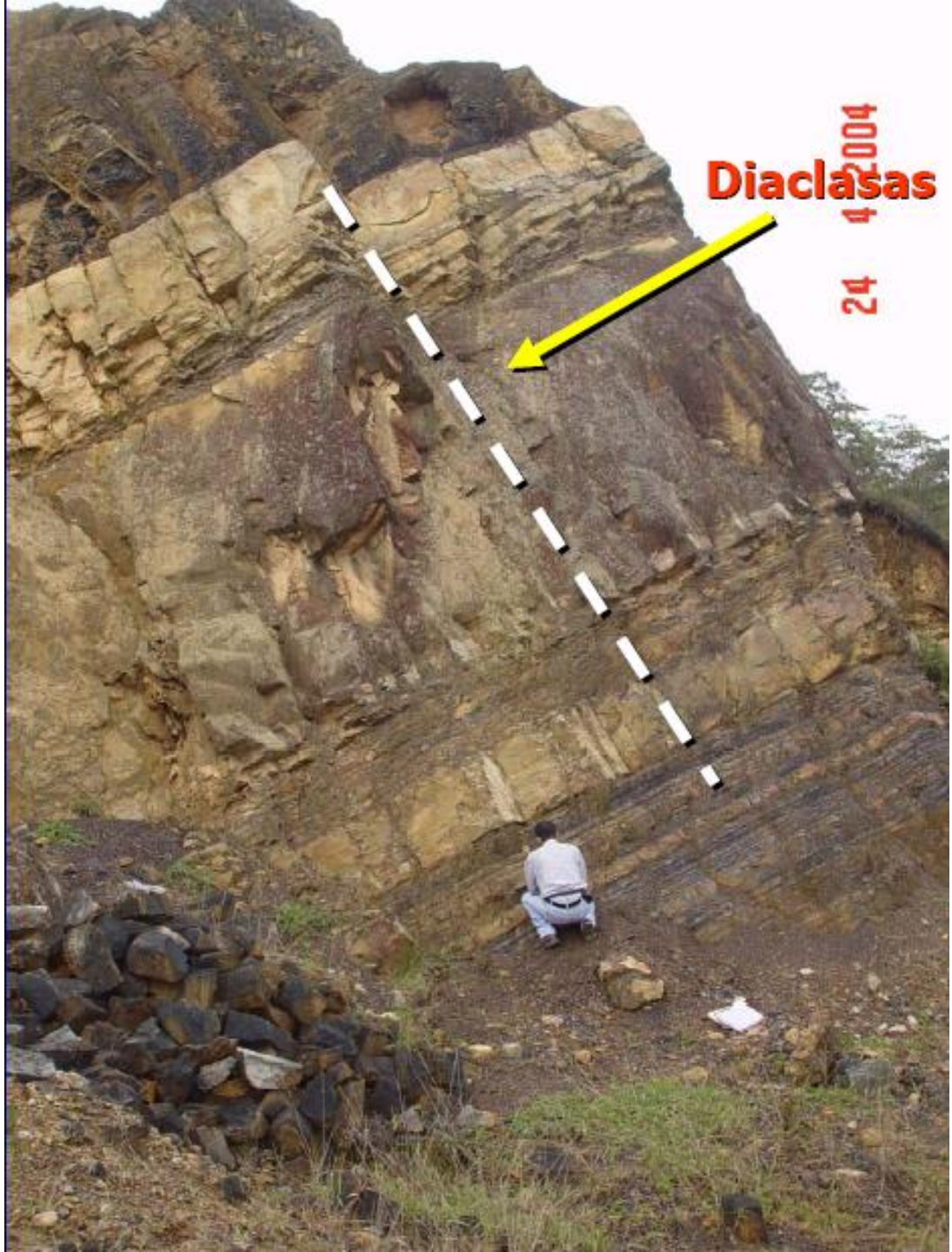
LAS ROCAS SON MATERIALES
NATURALES QUE POSEEN
COHESION





Quebrada Alccamayo

Quebrada Aguas
calientes

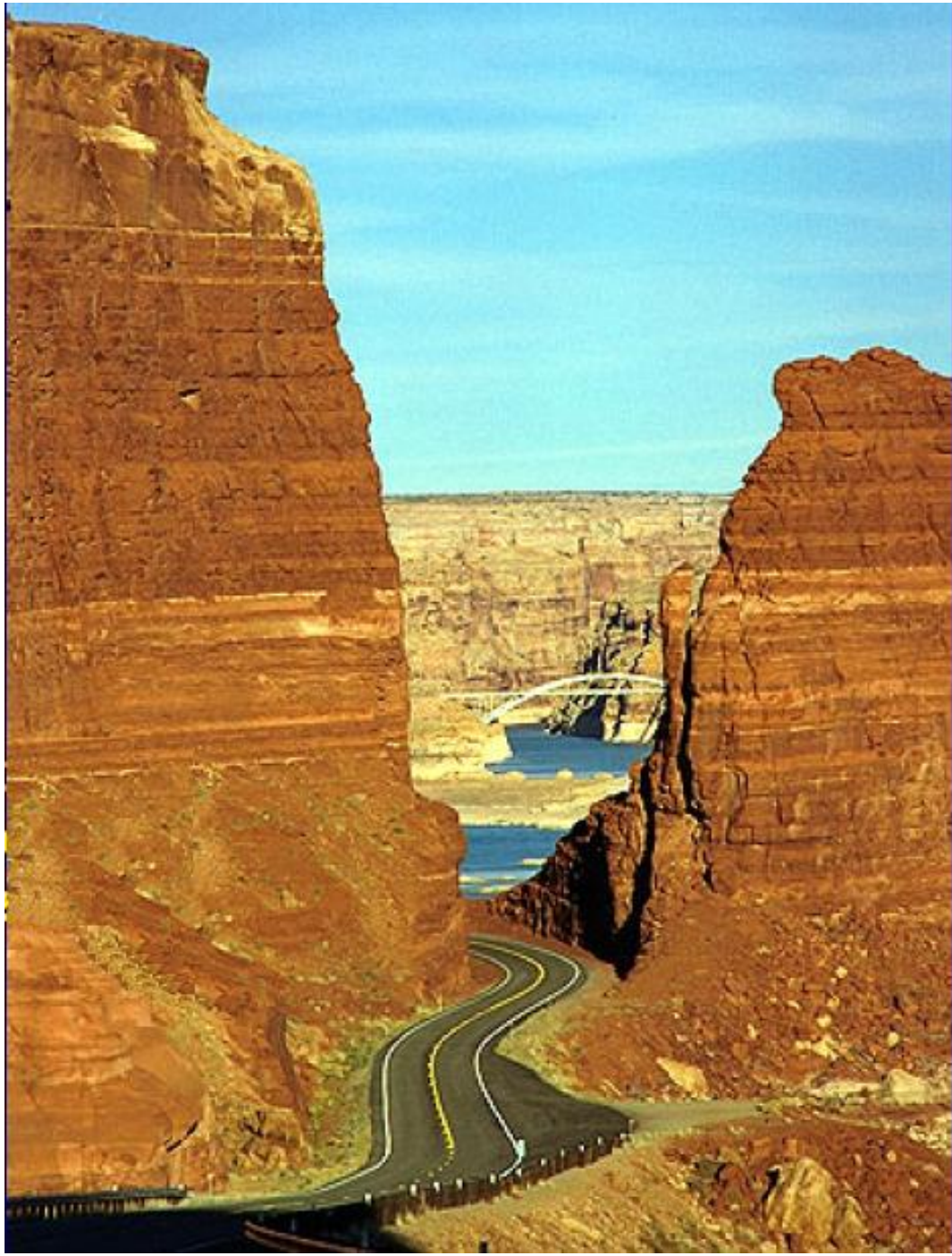


Diaclasas

100-2004
24







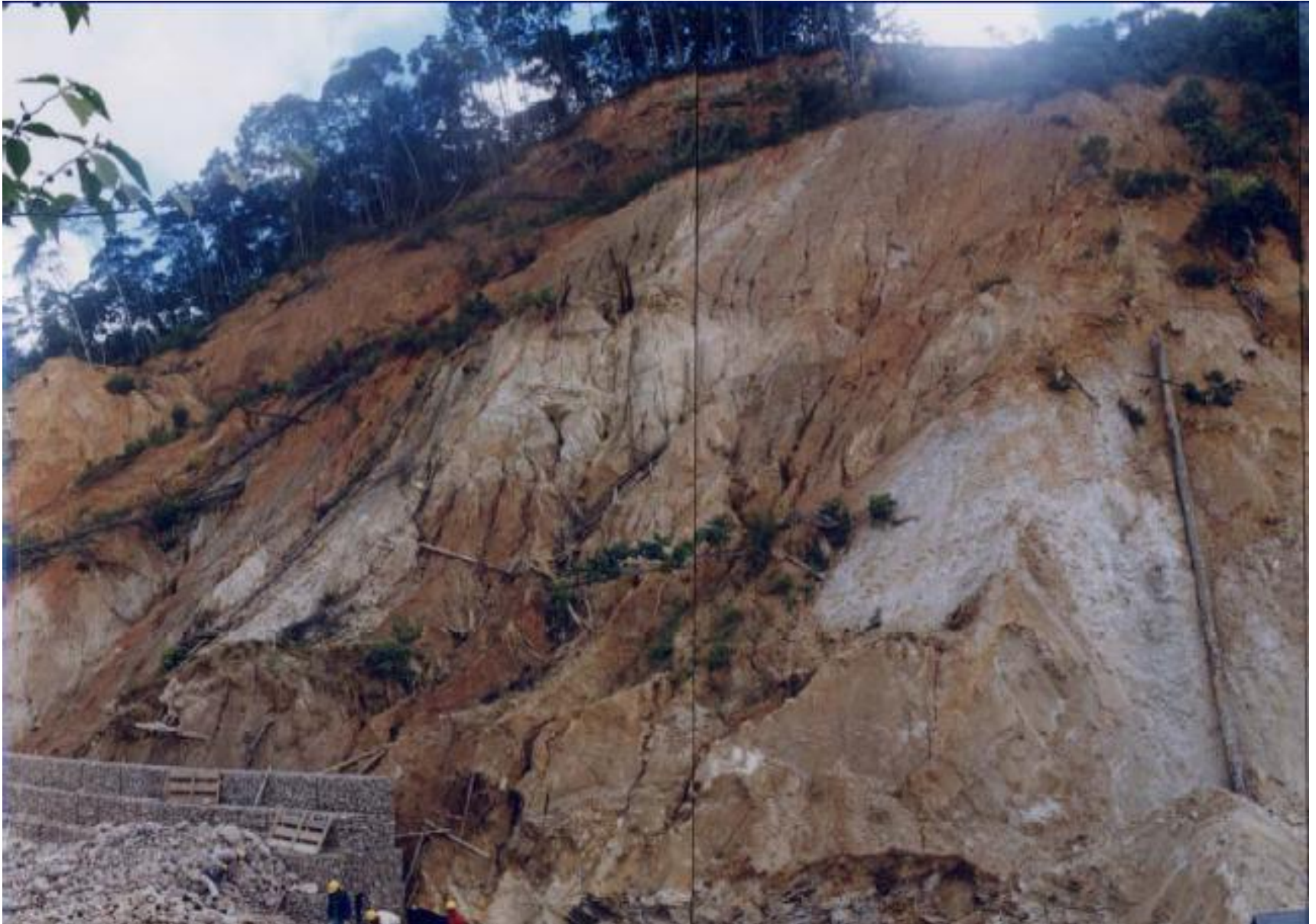




Los Corales Venezuela



LA METEORIZACION





Rocas Metamórficas (Neiss granítico)





LA RESISTENCIA AL CORTANTE

CORTANTE EN DISCONTINUIDADES

ECUACIÓN DE BARTON

$$\tau = \rho \tan \left(\varpi + \text{JRC} \cdot \log_{10} \left(R_c / \rho \right) \right)$$

$$\tau_i = \tau \cos^2 i - \rho \text{Sen } i \cos i$$

$$\rho_i = \rho \cos^2 I + \tau \text{Sen } i \cos i$$

Si no hay cohesión, la resistencia al cortante es:

El esfuerzo cortante se determina así:

$$\tau = \rho \tan (\varpi + i)$$

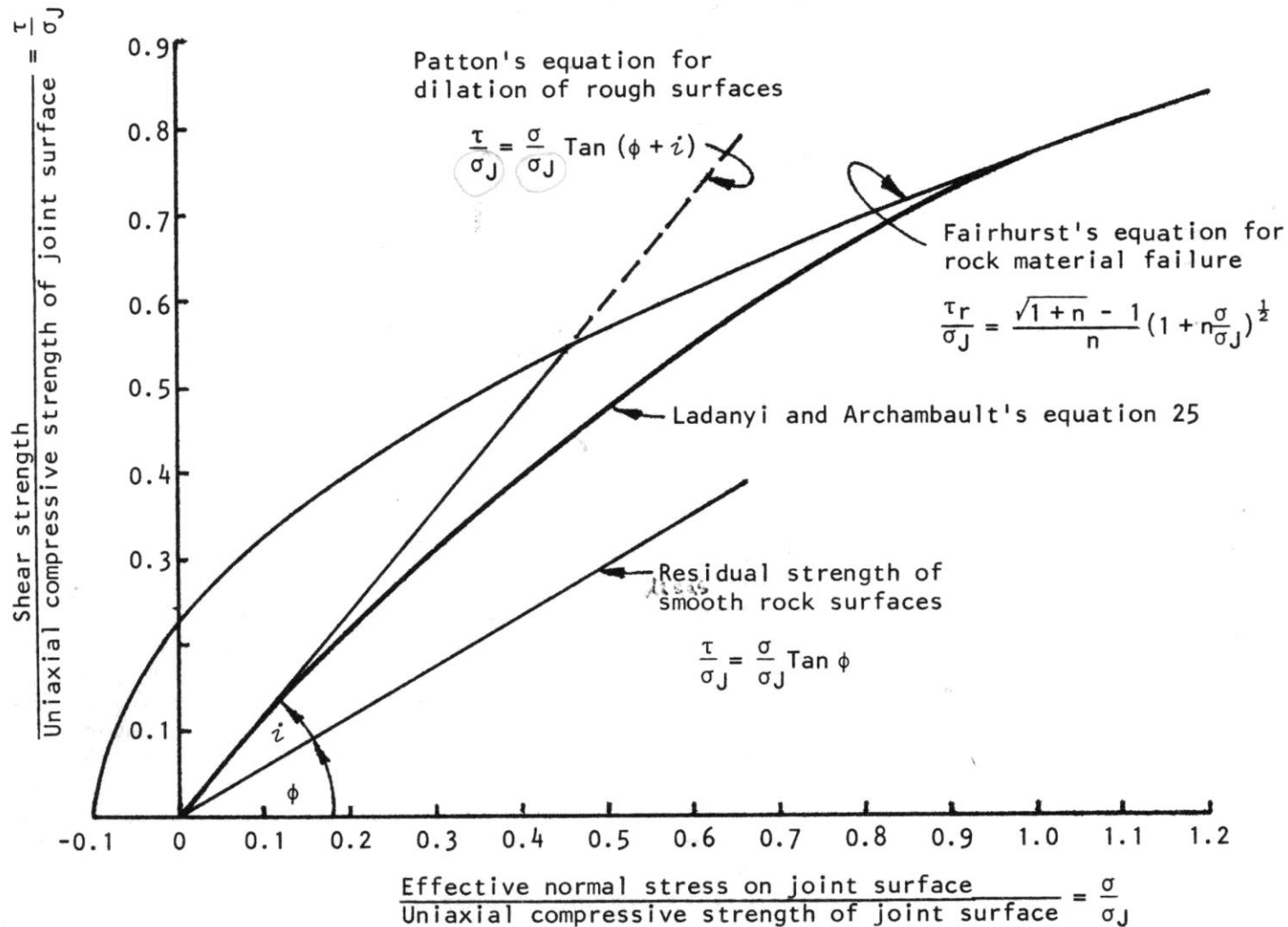
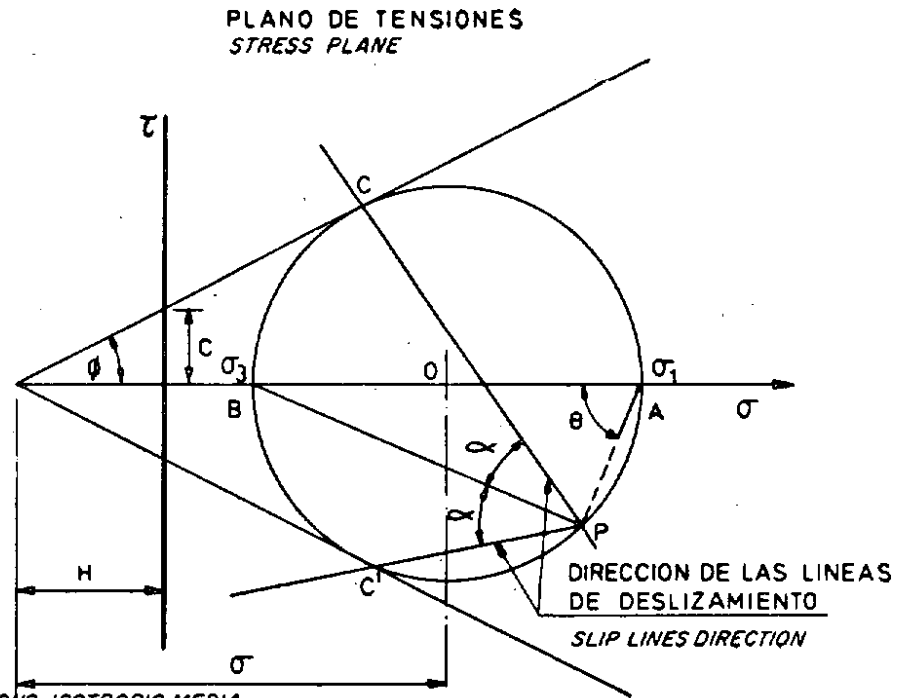
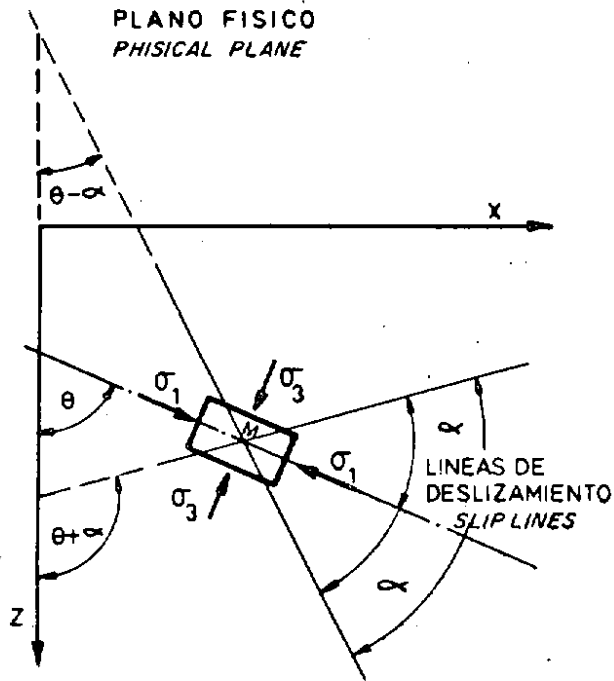


Figure 27 : Transition from dilation to shearing predicted by Ladanyi and Archambault's equation. Plotted for $i = 20^\circ$ and $\phi = 30^\circ$.

$$n = \frac{\sigma_j}{\sigma_t}$$

τ_r = Resistencia al corte del material adyacente a la discontinuidad

ANALISIS DE ESFUERZOS



PLASTIC EQUILIBRIUM CONDITIONS, ISOTROPIC MEDIA
CONDICIONES DE EQUILIBRIO PLASTICO EN MEDIO ISOTROPO

$$(1) \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} = 0$$

$$(2) \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_z}{\delta z} = \gamma$$

$$(3) \sigma_x = \sigma (1 - \text{sen } \phi \cos 2\theta) - H$$

$$(4) \sigma_z = \sigma (1 + \text{sen } \phi \cos 2\theta) - H$$

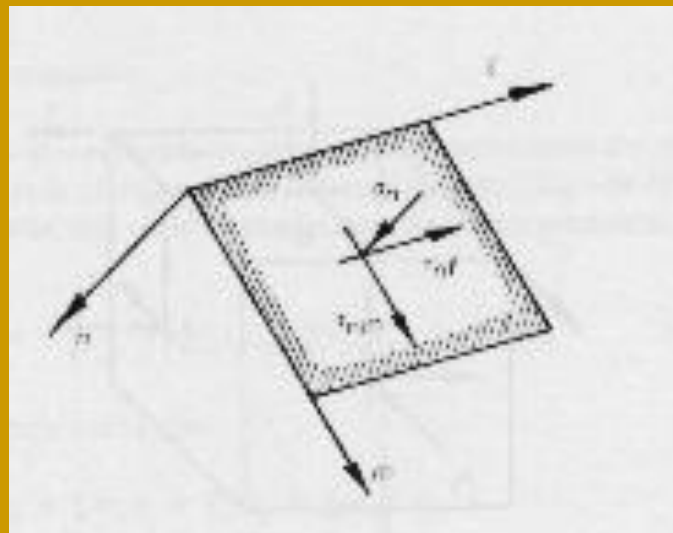
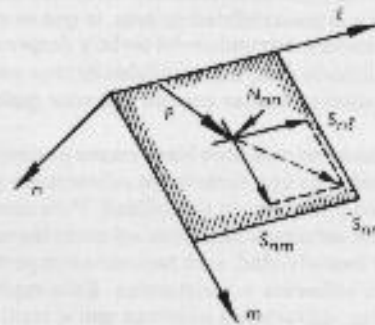
$$(5) \tau_{xz} = \sigma \text{sen } \phi \text{sen } 2\theta$$

Condiciones de equilibrio plástico en medio isótopo.

COMPONENTES DE LOS ESFUERZOS*

Fuerzas de superficie

Supongamos que sea P la fuerza total aplicada al elemento de superficie. En general esta fuerza estará inclinada con respecto a la superficie pero se puede resolver en (i) un componente normal N_{nm} , que actúa perpendicularmente a la superficie, y (ii) un compo-

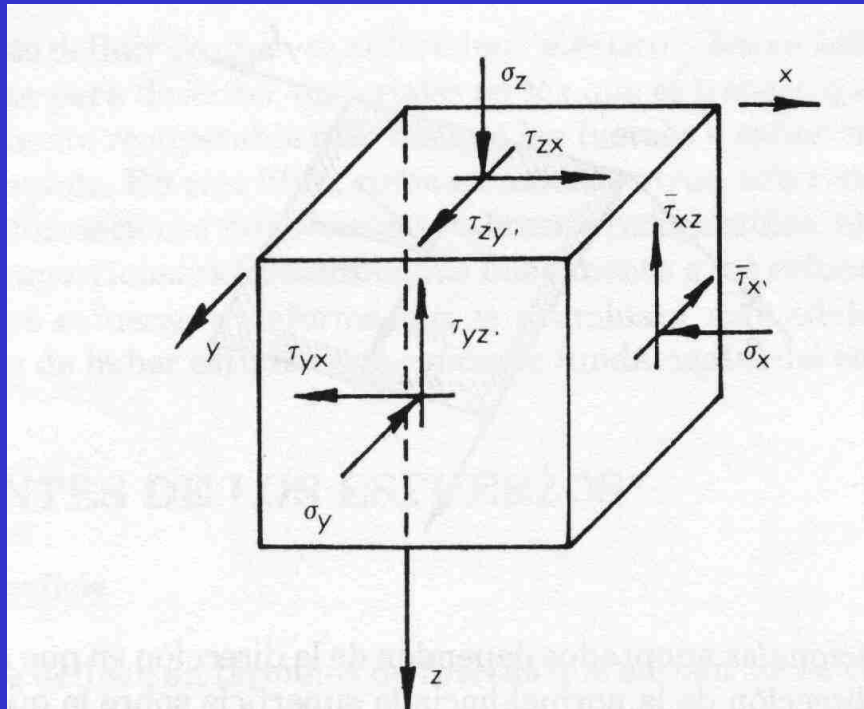


Tracciones de superficie

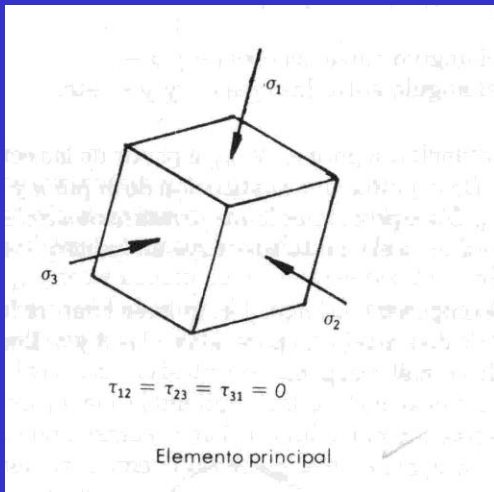
La intensidad de una fuerza aplicada a una superficie elemental se obtiene dividiendo la fuerza entre el área del elemento, A . En términos de las fuerzas componentes que se definieron arriba, podemos escribir

$$p_n = \frac{N_n}{A}, \tau_{nt} = \frac{S_{nt}}{A}, p_{tn} = \frac{S_{tn}}{A} \quad (1)$$

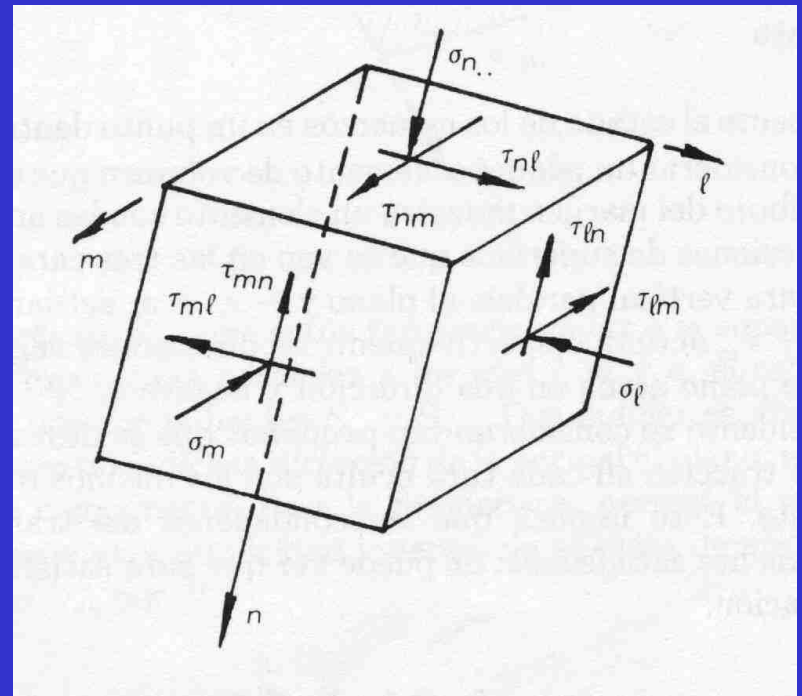
ESFUERZOS EN UN PUNTO



ESFUERZOS PRINCIPALES



ROTACION DE EJES



Ecuaciones de transformación

Sucede muchas veces que el ingeniero conoce los componentes del esfuerzo relacionado con una serie de ejes (x, y, z) y que desea determinar otro juego de componentes (l, m, n). Para lograrlo se necesita una serie de ecuaciones de transformación, tres para esfuerzos normales

$$\sigma_l = l \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x + l \frac{\partial}{\partial y} \sigma_y + l \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z + 2(l_x l_y \tau_{xy} + l_y l_z \tau_{yz} + l_z l_x \tau_{zx}) \quad (3)$$

y tres para los esfuerzos cortantes

$$\tau_{lm} = l_x m_x \sigma_x + l_y m_y \sigma_y + l_z m_z \sigma_z + (l_x m_y + l_y m_x) \tau_{xy} + (l_y m_z + l_z m_y) \tau_{yz} + (l_z m_x + l_x m_z) \tau_{zx} \quad (4)$$

donde $l_x = \text{coseno del ángulo entre los ejes } l- \text{ y } x-$
 $l_y = \text{coseno del ángulo entre los ejes } l- \text{ y } y-, \text{ etc.}$

Para obtener las ecuaciones para σ_m y τ_{mn} a partir de las ecuaciones 3 y 4, se sustituye l por m y m por n . En seguida, una sustitución de m por n y de n por l proporciona las expresiones de σ_n y τ_{nl} . Este proceso se llama *permutación cíclica*. En el margen se muestra con un dibujo el orden en el cual se sustituye un índice por otro para dar la secuencia correcta de ecuaciones.

Si se conocen los componentes l, m, n y se quieren conocer los componentes x, y, z , se podrá utilizar una serie de ecuaciones parecidas a las 3 y 4. Los ejes x, y, z permutan según el diagrama cíclico en el margen.

Ecuaciones de transformación

Sucede muchas veces que el ingeniero conoce los componentes del esfuerzo relacionado con una serie de ejes (x, y, z) y que desea determinar otro juego de componentes (l, m, n). Para lograrlo se necesita una serie de ecuaciones de transformación, tres para esfuerzos normales

$$\sigma_l = l \frac{2}{x} \sigma_x + l \frac{2}{y} \sigma_y + l \frac{2}{z} \sigma_z + 2(l_x l_y \tau_{xy} + l_y l_z \tau_{yz} + l_z l_x \tau_{zx}) \quad (3)$$

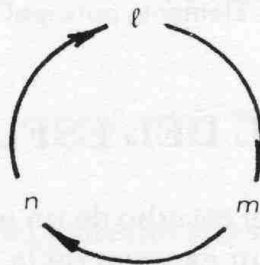
y tres para los esfuerzos cortantes

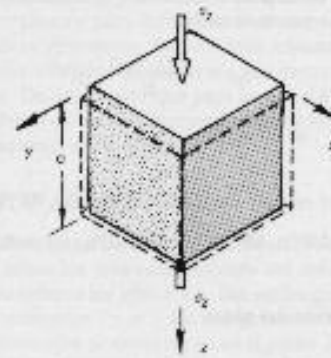
$$\tau_{lm} = l_x m_x \sigma_x + l_y m_y \sigma_y + l_z m_z \sigma_z + (l_x m_y + l_y m_x) \tau_{xy} + (l_y m_z + l_z m_y) \tau_{yz} + (l_z m_x + l_x m_z) \tau_{zx} \quad (4)$$

donde $l_x = \text{coseno del ángulo entre los ejes } l- \text{ y } x-$
 $l_y = \text{coseno del ángulo entre los ejes } l- \text{ y } y-, \text{ etc.}$

Para obtener las ecuaciones para σ_m y τ_{mn} a partir de las ecuaciones 3 y 4, se sustituye l por m y m por n . En seguida, una sustitución de m por n y de n por l proporciona las expresiones de σ_n y τ_{nl} . Este proceso se llama *permutación cíclica*. En el margen se muestra con un dibujo el orden en el cual se sustituye un índice por otro para dar la secuencia correcta de ecuaciones.

Si se conocen los componentes l, m, n y se quieren conocer los componentes x, y, z , se podrá utilizar una serie de ecuaciones parecidas a las 3 y 4. Los ejes x, y, z permutan según el diagrama cíclico en el margen.





La deformación lineal vertical en el cubo se define como la deformación por unidad de longitud y corresponde a $\epsilon_z = \Delta a/a$. Para un material elástico lineal, esta deformación está relacionada al esfuerzo vertical por la ecuación

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad (6)$$

donde E es el *módulo de Young* del material.

La deformación lateral $\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu}{a}$ se relaciona con el esfuerzo vertical por la ecuación

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\frac{\nu \sigma_z}{E} \quad (7)$$

donde ν es la *relación de Poisson* del material y las deformaciones por compresión se toman como positivas.

El módulo de Young y la relación de Poisson son propiedades del material a las que generalmente se refieren como *constantes elásticas*. Para materiales típicos de roca tenaz, el módulo de Young se sitúa en el orden de 5 a 15×10^6 lb/pulg² (35 a 105×10^3 MPa), y la relación de Poisson varía aproximadamente de 0.15 a 0.30.

Si en vez de estar libre para deformarse lateralmente, el cubo está deformado en la dirección x por la aplicación de un esfuerzo normal, σ_x , las deformaciones lineales serán

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_x) \quad (8)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_x) \quad (9)$$

$$\text{y} \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_x) \quad (10)$$

Si el estado general de los esfuerzos en un plano aplicado a un cubo de piedra se complementa ahora con la aplicación de un par de esfuerzos cortantes conjugados $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, se verá que existe una deformación al cortante en el plano $x - z$. Esta deformación al cortante, γ_{xz} , puede definirse como el cambio, medido en radianes, en ángulo que origi-

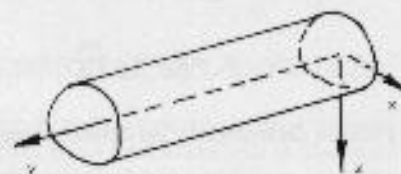
$$\gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz} \quad (11)$$

$$\text{o} \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (12)$$

donde $G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ es el módulo cortante o el módulo de rigidez del material. Para una roca tenaz típica $E = 100 \times 10^9$ MPa o 100 GPa, y $\nu = 0.25$, luego $G = 40 \times 10^9$ MPa o 40 GPa.

Condiciones de la deformación del plano

Consideremos una situación en la que antes de cualquier excavación, los esfuerzos principales a cierta profundidad bajo la superficie son constantes en p_x , p_y y p_z . Supongamos que un túnel de sección transversal arbitraria pero constante está perforado paralelo al eje y . Evidentemente la excavación del túnel originará una redistribución de los esfuerzos. Sin embargo, excepto por las regiones cercanas a los portales del túnel, el modelo de los esfuerzos alrededor del túnel será virtualmente el mismo para todas las secciones transversales. Esta situación se aproxima bastante al ideal teórico conocido como deformación de un plano. Las características de la formación de un plano son aquellos desplazamientos que se presentan durante el proceso de la excavación en un plano (tomado como el plano $x - z$ en este caso), y cuyo modelo de desplazamiento es el mismo para todas las secciones transversales. Si en el caso que se ilustra en el siguiente dibujo,



u , v y w son los componentes x , y , z del desplazamiento que resulta de la excavación, luego $v = 0$, y u , w , son funciones de x , z , pero no de y en el caso de la deformación del plano. Para materiales elásticos lineales, esto genera las relaciones siguientes entre las deformaciones y los esfuerzos inducidos por la excavación:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E'} (\sigma_x - \nu' \sigma_z) \quad (13)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E'} (\sigma_z - \nu' \sigma_x) \quad (14)$$

$$\epsilon_y = 0 \quad (15)$$

$$\text{y} \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu')}{E'} \tau_{xz} \quad (16)$$

$$\text{donde} \quad E' = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (17)$$

$$\text{y} \quad \nu' = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (18)$$

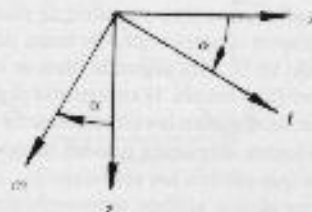
Transformación bidimensional de los esfuerzos

Se ha visto que en condiciones de esfuerzos y de deformación en un plano, podemos concentrar nuestra atención sobre los tres componentes del esfuerzo ligados a un par de ejes, a saber σ_x y σ_z y τ_{xz} asociados a los ejes x y z . Sin embargo, en algunas ocasiones es necesario introducir ejes inclinados l y m y los componentes del esfuerzo asociados con ellos σ_l , σ_m y τ_{lm} . Si los nuevos ejes se encuentran en el plano $x - z$ y el ángulo entre los ejes l y x es α como se muestra en el croquis siguiente, las ecuaciones de transformación dadas por las ecuaciones 3 y 4 se convierten en

$$\sigma_l = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha \quad (19)$$

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \cos 2\alpha - \tau_{xz} \sin 2\alpha \quad (20)$$

$$\tau_{lm} = \tau_{xz} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha \quad (21)$$



Las magnitudes de los esfuerzos principales se obtienen cuando se determina el valor de α en el que $\tau_{lm} = 0$ y σ_l y σ_m logran los valores máximo y mínimo. Se verá que los esfuerzos principales son:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (22)$$

$$\text{y } \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (23)$$

y sus direcciones quedan determinadas por

$$\alpha_{1,x} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \right) \quad (24)$$

$$\text{o } \alpha_1 = \tan^{-1} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xz}} \right) \quad (25)$$

$$\text{donde } \alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ \quad (26)$$

Diagrama circular de Mohr

Las relaciones que se obtienen con las ecuaciones 19 a 26 se pueden representar gráficamente por una construcción conocida como *diagrama circular de esfuerzos de Mohr*, que se muestra en la figura 39. Se construye el círculo sobre los ejes vertical y horizontal de τ y σ , siendo vaciado el sentido de τ arriba del eje x cuando es en contra del movimiento del reloj y abajo del eje x , cuando sigue el sentido del reloj. Es necesario usar la misma escala de esfuerzos para ambos ejes.

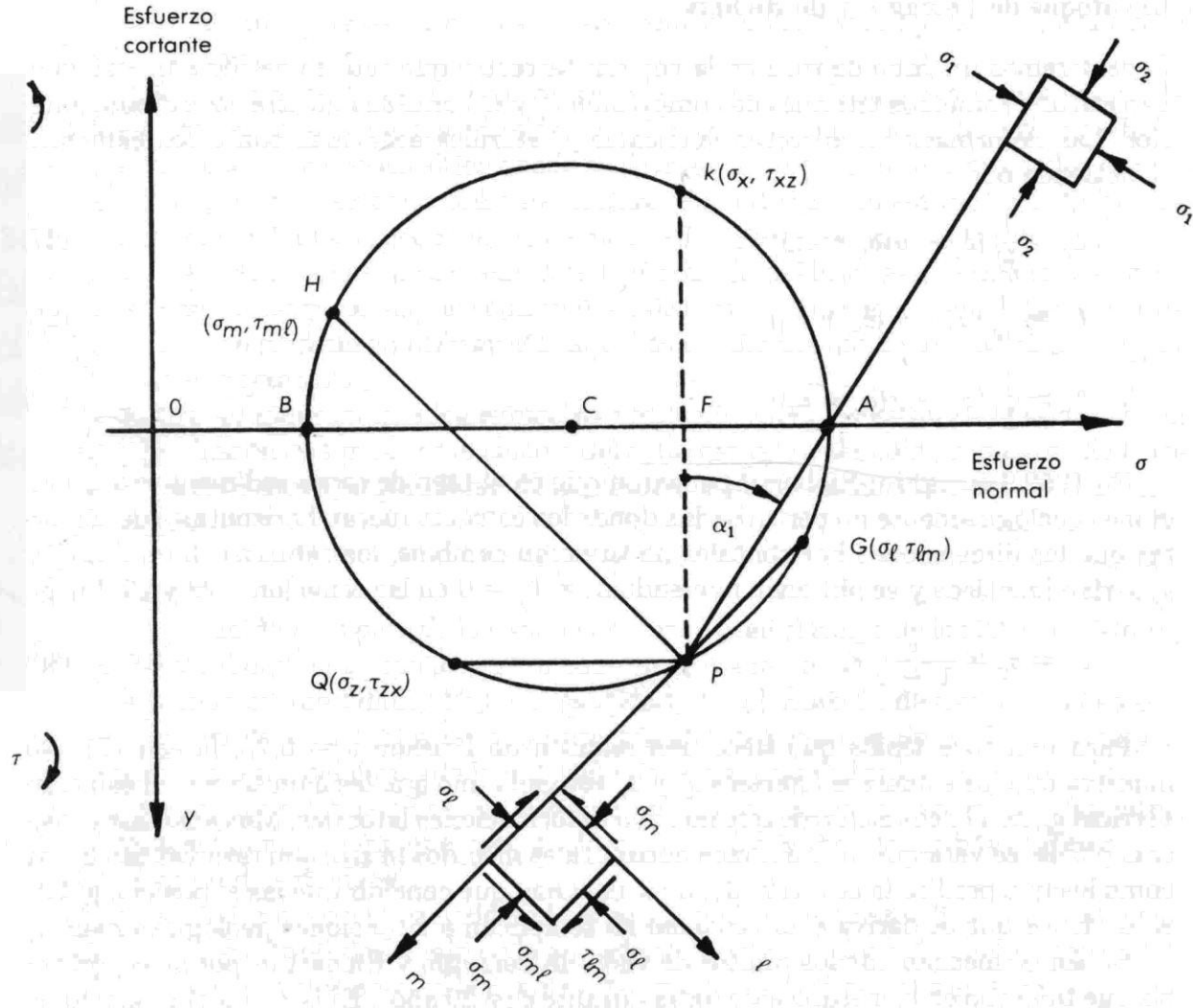
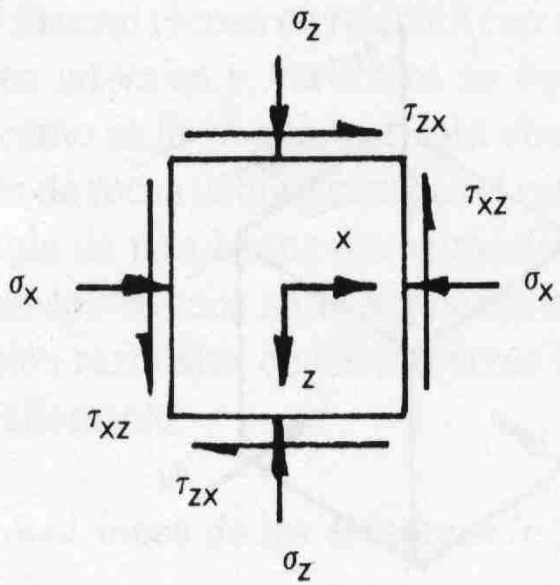
Los esfuerzos normal y cortante que actúan sobre cualquier plano se marcan como $OF = \sigma_x$ y $FK = \tau_{xz}$. El centro del círculo se sitúa haciendo $OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$ y el círculo se dibuja con centro en C y pasando por K . El punto P , que se obtiene por la intersección del círculo y una línea que pasa por K paralelo al plano en el que actúan σ_x y τ_{xz} , se llama *origen de los planos*.

Si se necesita conocer los esfuerzos sobre una serie de planos ubicados sobre los ejes ℓ y m , se puede utilizar la siguiente construcción. Se traza una línea P paralela al eje m que pasa por P y corta el círculo en G . Una segunda línea se traza pasando por P paralela al eje ℓ , cortando el círculo en H . A escala, G representa el punto $(\sigma_\ell, \tau_{\ell m})$ y H representa el punto $(\sigma_m, \tau_{m\ell})$. Cuando se determinan las direcciones de los esfuerzos dados por los puntos G y H , es importante tomar en cuenta que las líneas PG y PH indican la orientación de los planos sobre los que actúan los esfuerzos $(\sigma_\ell, \tau_{\ell m})$ y $(\sigma_m, \tau_{m\ell})$. Un elemento con orientación correcta sobre el que actúan estos esfuerzos se muestra en la figura 39.

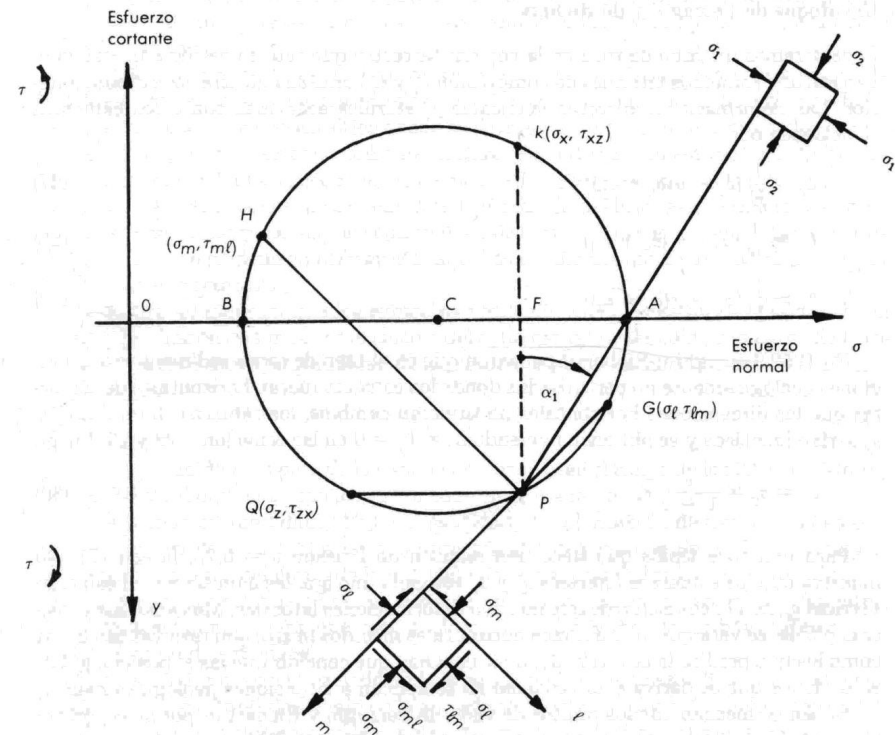
La figura 39 también proporciona las magnitudes y direcciones de los esfuerzos principales. Evidentemente, los esfuerzos principales son los esfuerzos normales máximo y mínimo indicados por los puntos A y B en los que los esfuerzos cortantes son cero. Una línea que se traza desde el punto P pasando por A , proporciona la orientación del plano sobre el que actúa σ_1 . Un elemento principal correctamente orientado y que se basa en esta línea, se muestra en la figura 39.

ESTADO BIDIMENSIONAL DE ESFUERZOS

EL CIRCULO DE MOHR



CIRCULO DE ESFUERZOS DE MOHR



$$OF = \sigma_x, FK = \tau_{xz}$$

$$OC = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$OA = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \left\{ \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$OB = \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) - \left\{ \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{zx}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\tan \alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_x) / \tau_{zx}$$