10.5 Ejercicios con ecuaciones diferenciales parciales

1. Dada la siguiente ecuación diferencial parcial de tipo parabólico

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C\frac{\partial u}{\partial t}, u = u(x,t), 0 < x < 2, t > 0,$$ con las condiciones

a) u(x,0)=25 sen(x), 0<x<2

b) u(0,t)=10 t, t≥0

c) $\frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 5, t \geq 0$

1.a) Calcule manualmente dos niveles de la solución con el método explícito de diferencias finitas

Utilice **Δx=0.5, C=1.6**

Para que el método sea estable use la condición $\frac{\Delta t}{C(\Delta x)^2} = \frac{1}{2}$

Use una aproximación de diferencias finitas de segundo orden para la condición c)

1.b) Calcule dos niveles de la solución con el método implícito de diferencias finitas. Use las mismas especificaciones que en 1).

2. Con el criterio de Von Newman, analice la estabilidad del método implícito de diferencias finitas para resolver la EDP de tipo parabólico. Demuestre que es incondicionalmente estable.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$cu_{i-1,j} + (-1-2c)u_{i,j} + cu_{i+1,j} = -u_{i,j-1}, \quad c = \frac{\Delta t}{C(\Delta x)^2}$$

3. Resuelva la siguiente ecuación diferencial parcial de tipo elíptico con el método de diferencias finitas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

u(0, y) = 10, **0≤y≤3**

u(2, y) = 20 sen (πy), **0≤y≤3**

u_y (x, 0) = 20, **0≤x≤2**

u(x, 3) = 25x, **0≤x≤2**

Determine **u** en los puntos interiores. Use **Δx = Δy = 0.5**

4. La siguiente ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico describe la posición **u** de cierta cuerda en cada punto **x**, en cada instante **t**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (1+2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0<x<1, t>0$$

Use las siguientes condiciones iniciales y de borde:

u(x, 0) = 0; 0≤x≤1

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x(1-x)$$

Use **Δx = Δt = 0.25**, y encuentre la solución cuando **t = 1**