e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

EJERCICIOS DE SERIES NUMÉRICAS PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- Estudie el carácter de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. *(Febrero 2002, ex. or.)*

Solución.- Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, n = 1, 2, 3, ...y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, la serie propuesta será divergente.

2.- Estudiar el carácter de $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ln n}$.*(Febrero 2002, ex. res.)*

Solución.- $2^{\ln n} < e^{\ln n} = n \Rightarrow \frac{1}{2^{\ln n}} \geq \frac{1}{n}$, n = 1, 2, 3, ..., luego la serie propuesta diverge.

3.- Utilizando el criterio de D'Alembert, demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^n}{n!}\right)$ es divergente. *(Septiembre 2002, ex. or.)*

Solución.- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1$, luego por el criterio de D'Alembert, la serie dada es divergente.

4.- Utilizando el criterio de D'Alembert, demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right)$ es convergente. *(Septiembre 2002, ex. res.)*

Solución.- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ luego por el criterio de D'Alembert, la serie dada es convergente.

5.- Demuestre si es **convergente o no** la siguiente **serie numérica:** $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ *(Enero 2003, ex. or.)*

Solución.-

Por el criterio de D'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{e^{(n+1)}}}{\frac{n}{e^{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{n^2}}{ne^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^{2n}}\right) = 0 < 1$$

luego la serie es convergente.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
http://telefonica.net/web/imm

6.- Demuestre si es **convergente o no** la siguiente **serie numérica:** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ *(Enero 2003, ex. res)*

Solución.-

Es divergente ya que no cumple la condición necesaria de convergencia. En efecto:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = 1 \neq 0$$

7. Estudiar el carácter de la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$ *(Septiembre 2003, ex. res)*

Solución.-

Aplicamos el criterio de Cauchy: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} - 1 = 1-1 = 0 < 1$ luego la serie es convergente.

8. Estudiar el carácter de la siguiente serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{na^n}$, $a > 0$. *(Septiembre 2004, ex. res)*

Solución.-

Aplicamos el criterio de D'Alembert: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)a^{n+1}}}{\frac{n^2+1}{na^n}} \lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)^2+1\right]n}{a(n+1)(n^2+1)} = \frac{1}{a}$.

Hay tres casos:

- si $0 < a < 1 \rightarrow$ DIVERGENTE
- si $a > 1 \rightarrow$ CONVERGENTE
- si $a = 1 \rightarrow$ DIVERGENTE, por que el término general $\frac{n^2+1}{n} \rightarrow \infty$.