ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

INGENIERÍA TÉCNICA EN INFORMÁTICA DE GESTIÓN

Apuntes de

ÁLGEBRA LINEAL

por

Fco. Javier Cobos Gavala
Amparo Osuna Lucena
Rafael Robles Arias
Beatriz Silva Gallardo

departamento de matemática aplicada I

Contenido

1. Matrices y determinantes

1.1 Notación y definiciones

Una *matriz* es una tabla de $m \times n$ elementos dispuestos en m filas y n columnas. Se suelen representar por letras mayúsculas A, $B, \ldots$, etc. y a sus *elementos* de la forma a_{ij} donde el primer subíndice indica la fila a la que pertenece y el segundo la columna en la que se encuentra dicho elemento.

Así pues, una matriz $A = (a_{ij})$ con $1 \leq i \leq m \quad 1 \leq j \leq n$ es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz de m filas y n columnas se dice que tiene *dimensión* o que es de *orden* $m \times n$, y al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ lo denotaremos por $\mathbf{R}^{m \times n}$ (en el supuesto de que los elementos de la matriz A sean elementos de $\mathbf{R}$).

Dos matrices $A,\ B \in \mathbf{R}^{m \times n}$ se dice que son *equidimensionales.*

Dos matrices $A,\ B \in \mathbf{R}^{m \times n}$, se dice que son *iguales* si:

$$a_{ij} = b_{ij} \ \forall\ i = 1,\ 2, \ldots,\ m \text{ y } \forall\ j = 1,\ 2, \ldots,\ n$$

- Se denomina *matriz fila* a aquella que consta de una única fila.

$$A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_n) \in \mathbf{R}^{1 \times n}$$

- Se denomina *matriz columna* a aquella que consta de una única columna.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$$

- Se denomina *matriz cuadrada de orden* n a aquella que tiene n filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

- Se denomina *diagonal principal* de una matriz cuadrada a la formada por los elementos $a_{ii}\ \ i = 1,\ 2, \ldots,\ n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Se denomina *matriz diagonal* a aquella matriz cuadrada cuyos elementos no diagonales son todos nulos. Es decir $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Se denomina *matriz escalar* a aquella matriz diagonal cuyos elementos diagonales son todos iguales.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

- Se denomina *matriz unidad de orden* n a aquella matriz escalar cuyos elementos diagonales son todos unos. Es decir,

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- Se denomina *matriz triangular superior (inferior)* a aquella matriz cuadrada cuyos elementos situados por debajo (encima) de su diagonal principal son todos nulos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Triangular superior: $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Triangular inferior: $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

1.2 Aritmética de matrices

1.2.1 Suma de matrices

Sean $A,\ B \in \mathbf{R}^{m\times n}$, se denomina *matriz suma* de A y B a la matriz $C \in \mathbf{R}^{m\times n}$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, \dots,\ m \quad j = 1, \dots,\ n.$$

Se denota por $C = A + B$.

Propiedades:

a) Asociativa: $\forall\ A,\ B,\ C \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow (A+B)+C = A+(B+C)$.

b) Conmutativa: $\forall\ A,\ B \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow A+B = B+A$.

c) Elemento neutro: $\exists\ 0 \in \mathbf{R}^{m\times n}\ :\ \forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow A+0 = 0+A = A$.

   La matriz 0 es aquella que tiene todos sus elementos nulos.

d) Elemento opuesto: $\forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ existe una matriz $-A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ tal que $A + (-A) = -A + A = 0$.

Por tanto, $(\mathbf{R}^{m\times n}, +)$ es un *grupo conmutativo*.

1.2.2 Producto por un escalar

Sean $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y $\alpha \in \mathbf{R}$, se define *producto por un escalar* a la aplicación del tipo $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow \mathbf{R}^{m\times n}$ tal que al par (α, A) le asocia la matriz αA definida por:

$$\alpha A = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Es decir, la matriz resultante de multiplicar por α todos los elementos de la matriz A.

Propiedades:

a) Asociativa: $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $\forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

b) Distributivas: $\begin{cases} \forall\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \text{ y } \forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A. \\ \forall \alpha \in \mathbf{R} \text{ y } \forall\ A, B \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B. \end{cases}$

c) Elemento unidad: $\forall\ A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow 1 \cdot A = A$.

Por tanto, $(\mathbf{R}^{m\times n}, +, \cdot)$ es un *espacio vectorial* sobre el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales.

(Si se trabaja con matrices complejas, $a_{ij} \in \mathbf{C}$, $(\mathbf{C}^{m\times n}, +, \cdot)$ sería un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{C}$ de los números complejos).

1.2.3 Producto de matrices

Si $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbf{R}^{n\times p}$ (número de columnas de A igual al número de filas de B), se define la *matriz producto* de A por B como la matriz $C \in \mathbf{R}^{m\times p}$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le p$$

Propiedades:

a) Asociativa: $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $B \in \mathbf{R}^{n\times p}$ $C \in \mathbf{R}^{p\times q} \Longrightarrow (AB)C = A(BC)$.

b) Distributiva: $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ $B, C \in \mathbf{R}^{n\times p} \Longrightarrow A(B+C) = AB + AC$.

c) No conmutativa: en general, es $AB \neq BA$.

d) No cancelativa: $AB = AC \not\Longrightarrow B = C$.

Para el caso de matrices cuadradas de orden n:

e) Elemento neutro: $\exists I_n \in \mathbf{R}^{n\times n}\ :\ \forall\, A \in \mathbf{R}^{n\times n} \Longrightarrow I_nA = AI_n = A$.

Si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ diremos que es *regular* o *no singular* si posee matriz inversa, es decir, si existe $A^{-1} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.

1.2.4 Trasposición

Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Se denomina *matriz traspuesta de* A y se denota por A^t a la matriz resultante de cambiar, ordenadamente, las filas por las columnas de la matriz A de tal manera, que si llamamos $A = (a_{ij})$ y $A^t = (a'_{ij})$ tenemos:

$$a'_{ij} = a_{ji} \quad 1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n$$

por lo que si $A \in \mathbf{R}^{m\times n} \Longrightarrow A^t \in \mathbf{R}^{n\times m}$.

Propiedades:

a) $(A^t)^t = A$.

b) $(A+B)^t = A^t + B^t$ o generalizando, $(\sum_{i=1}^{n} A_i)^t = \sum_{i=1}^{n} A_i^t$.

c) $(AB)^t = B^tA^t$ o generalizando, $(\prod_{i=1}^{n} A_i)^t = \prod_{i=n}^{1} A_i^t$.

1.2.5 Otras definiciones.

- Una matriz cuadrada A se dice que es *simétrica* si coincide con su traspuesta. (Es simétrica respecto a su diagonal principal).

$$A \text{ simétrica} \iff A = A^t$$

- Una matriz cuadrada A se dice que es *antisimétrica* si coincide con la opuesta de su traspuesta. (Los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos y su diagonal es de ceros).

$$A \text{ antisimétrica} \iff A = -A^t$$

- Una matriz cuadrada y no singular se dice *ortogonal* si su traspuesta coincide con su inversa, es decir, si $A^t = A^{-1}$ o lo que es lo mismo:

$$A \text{ ortogonal} \iff AA^t = I_n$$

- Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Se define *traza de* A y se denota por $\mathrm{Tr}(A)$ o $\mathrm{tr}(A)$ como la suma de los elementos de su diagonal principal.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propiedades:

a) $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$.

b) $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$.

1.3 Transformaciones elementales.

Se denominan *transformaciones elementales* a ciertas transformaciones que se realizan en una matriz y que nos serán de gran utilidad en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales así como en otras operaciones con matrices que estudiaremos en temas posteriores.

Estas transformaciones modifican, de determinadas formas, los elementos de una fila o una columna de la matriz o intercambian dos filas o columnas de ésta. Las clasificaremos en dos grupos:

- Transformaciones elementales fila.
- Transformaciones elementales columna.

1.3.1 Transformaciones elementales fila.

Pueden ser de tres tipos:

a) Intercambiar las filas i y j: la denotaremos por F_{ij}.

Este efecto se produce al multiplicar, por la izquierda, la matriz A por la matriz E_{ij}, siendo ésta el resultado de intercambiar las filas i y j de la matriz I_m.

Ejemplo 1.1 Consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para intercambiar las filas 2ª y 3ª aplicamos F_{23} cuya matriz es
$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (en I_3 se han permutado las filas segunda y tercera).

$$E_{23}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

observándose que han quedado permutadas las filas segunda y tercera de la matriz A. □

b) Multiplicar la fila i por un número $\alpha \neq 0$: la denotaremos por $F_i(\alpha)$.

Este efecto se produce al multiplicar, por la izquierda, la matriz A por la matriz $E_i(\alpha)$, siendo ésta el resultado de multiplicar por α la fila i de la matriz I_m.

Ejemplo 1.2 Para multiplicar por 3 la segunda fila de A (véase el Ejemplo 1.1), aplicamos $F_2(3)$ cuya matriz asociada es $E_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha multiplicado por 3 la segunda fila de I_3).

$$E_2(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 12 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pudiéndose ver que ha quedado multiplicada por 3 la segunda fila de la matriz A. □

c) Sumar a la fila i la fila j multiplicada por $\alpha \neq 0$: la denotamos por $F_{ij}(\alpha)$.

Este efecto se produce al multiplicar, por la izquierda, la matriz A por la matriz $E_{ij}(\alpha)$, siendo ésta la resultante de sumar a la fila i de la matriz I_m su fila j multiplicada por α, es decir, la matriz resultante de sustituir el elemento $a_{ij} = 0$ por α.

Ejemplo 1.3 Si queremos restar a la segunda fila de A (véase el Ejemplo 1.1) el doble de la primera, aplicamos $F_{21}(-2)$ cuya matriz asociada es $E_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha sustituido el elemento a_{21} de I_3 por -2).

$$E_{21}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

observándose que se ha producido en la matriz A el efecto deseado. □

1.3.2 Transformaciones elementales columna.

Son las mismas que las transformaciones elementales fila pero operando por columnas:

a) Intercambiar las columnas i y j: la denotaremos por C_{ij}.

Este efecto se produce al multiplicar, por la derecha, la matriz A por la matriz $\tilde{E}_{ij}$, siendo ésta el resultado de intercambiar las columnas i y j de la matriz I_n.

Ejemplo 1.4 Si deseamos intercambiar las columnas primera y cuarta de la matriz A (véase el Ejemplo 1.1), aplicamos C_{14} cuya matriz asociada es $\tilde{E}_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (se han permutado las columnas 1 y 4 de la matriz I_4).

$$A\tilde{E}_{14} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde puede verse que se han permutado las columnas 1 y 4 de la matriz A. □

b) Multiplicar la columna i por un número $\alpha \neq 0$: la denotaremos por $C_i(\alpha)$.

Este efecto se produce al multiplicar, por la derecha, la matriz A por la matriz $\tilde{E}_i(\alpha)$, siendo ésta el resultado de multiplicar por α la columna i de la matriz I_n.

Ejemplo 1.5 Para multiplicar por 2 la tercera columna de la matriz A (véase el Ejemplo 1.1) aplicamos $C_3(2)$, cuya matriz asociada es $\tilde{E}_3(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha multiplicado por 2 la tercera columna de I_4).

$$A\tilde{E}_3(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

habiendo quedado multiplicada por 2 la tercera columna de la matriz original A □

c) Sumar a la columna i la columna j multiplicada por $\alpha \neq 0$: la denotamos por $C_{ij}(\alpha)$.

Este efecto se produce al multiplicar, por la derecha, la matriz A por la matriz $\tilde{E}_{ij}(\alpha)$, siendo ésta la resultante de sumar a la columna i de la matriz I_n su columna j multiplicada por α, es decir, la matriz resultante de sustituir el elemento $a_{ji} = 0$ por α.

Ejemplo 1.6 Para sumar a la tercera columna de A (véase el Ejemplo 1.1) el doble de la primera aplicamos $C_{31}(2)$ cuya matriz asociada es $\tilde{E}_{31}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (se ha sustituido el elemento a_{13} de la matriz I_4 por 2).

$$A\tilde{E}_{31}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

donde puede observarse que se ha producido en A el efecto deseado. □

1.4 Algoritmo de Gauss-Jordan.

Se denomina **matriz escalonada** a una matriz en la que las filas posteriores a una fila cuyos elementos son todos ceros, tienen todos sus elementos igual a cero, y el número de elementos nulos al comienzo de cada fila no nula es estrictamente menor que en la siguiente.

Teorema 1.1 *Dada una matriz cualquiera $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ existen matrices F y U tales que $FA = U$ siendo U una matriz escalonada.*

Demostración. Probaremos el teorema de forma constructiva.

a) Si $a_{11} \neq 0$, mediante transformaciones elementales filas $F_{ij}(\alpha)$ podemos anular todos los elementos de la primera columna, salvo el a_{11}. Estas transformaciones serían de la forma $F_{i1}(-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}})$.

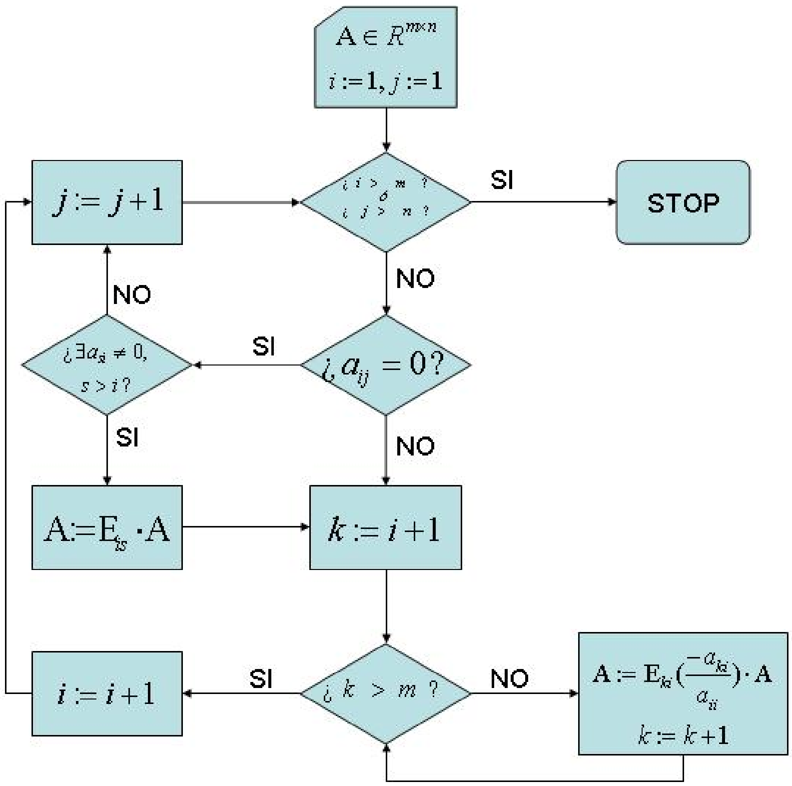
b) Si $a_{11} = 0$ y algún elemento de la primera columna es no nulo, podemos llevarlo al lugar (11) mediante una transformación F_{ij} y proceder después como en el caso anterior.

c) Si $a_{i1} = 0 \;\; \forall\, i = 1, \ldots,\ m$, la primera columna es de ceros y por tanto, $a_{i1} = 0 \;\forall\, i > 1$, es decir, se trata de una columna del tipo de las matrices escalonadas.

Procedemos después con a_{22} (el elemento a_{22} resultante de las transformaciones anteriores) al igual que procedimos con a_{11} anteriormente, es decir, si $a_{22} \neq 0$ lo utilizamos para hacer ceros por debajo de él en la segunda columna. Si fuese $a_{22} = 0$ vemos si existe por debajo de él algún elemento $a_{i2} \neq 0$ y, en caso de haberlo, realizamos la transformación F_{2i}, etc.

Reiterando el proceso, llegamos a una matriz escalonada U. La matriz F no es más que el producto de las matrices de las transformaciones elementales filas realizadas para pasar de A a U. ■

El siguiente organigrama, muestra el algoritmo de escalonamiento de una matriz $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, mediante transformaciones elementales filas. Cuando se alcanza la condición de parada, la nueva matriz A es escalonada.



Algoritmo de escalonamiento de una matriz.

Ejemplo 1.7 Consideremos la matriz A del Ejemplo 1.1.

$$A \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} = U$$

siendo U una matriz escalonada. Dado que

$$E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})E_{21}(-2)A = U \Longrightarrow FA = U$$

con

$$F = E_{23}E_{31}(-\frac{1}{2})E_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

□

Se denomina **forma escalonada canónica** a una matriz escalonada con la propiedad de que el primer elemento no nulo de una fila es un uno y además, es el único elemento no nulo de su columna.

Teorema 1.2 *Toda matriz puede ser reducida mediante transformaciones elementales fila a una escalonada canónica.*

Demostración. Basta con observar que una vez obtenida la matriz U, si en una fila hay algún elemento no nulo, la dividimos por el primer elemento no nulo de ella mediante $F_i(\alpha)$ y lo utilizamos para hacer ceros todos los de su columna (que se encontrarán por encima de él). ■

Ejemplo 1.8 En el Ejemplo 1.7 se vió que

$$A \longrightarrow U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{12}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_{13}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

que se trata de una escalonada canónica. □

Los elementos que utilizamos para anular a los demás elementos de una columna se denominan *pivotes*. Si en un determinado paso del proceso de pasar de A a U alguna columna es de ceros, diremos que el correspondiente pivote es nulo.

Teorema 1.3 *Toda matriz $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ puede, mediante transformaciones elementales, transformarse en una del tipo*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta que para ello es necesario realizar tanto transformaciones fila como transformaciones columna.

Ejemplo 1.9 Si nos fijamos en la matriz del Ejemplo 1.7 que transformamos, mediante transformaciones elementales fila (ver Ejemplo 1.8) en la escalonada canónica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9/5 \\ 0 & 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \end{pmatrix}$$

podemos ahora, mediante la composición de las transformaciones columna

$C_{41}(-\frac{9}{5})C_{42}(\frac{7}{5})C_{43}(-\frac{3}{5})$ llevarla a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_3 & \mid & 0 \end{pmatrix}$. □

Teorema 1.4 *Una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada posea inversa es que su forma escalonada canónica sea la matriz unidad.*

Demostración. Si su forma escalonada canónica es I_n, existe $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ tal que $FA = I_n \Longrightarrow F = A^{-1}$.

Si existe A^{-1} tal que $A^{-1}A = I_n \Longrightarrow \exists\ F = A^{-1}$ tal que $FA = I_n$ y por tanto, I_n es la forma escalonada canónica de A. ■

Este teorema nos permite calcular la matriz inversa, de una matriz dada, mediante transformaciones elementales (filas o columnas, pero no ambas simultáneamente), es decir, aplicando el **Algoritmo de Gauss-Jordan** tomando como matriz inicial$(A \mid I_n)$

Ejemplo 1.10 Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{31}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{12}(-3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{32}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{13}(3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_{23}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que: $\qquad F_{23}(-1)F_{13}(3)F_{32}(1)F_{12}(-3)F_{31}(-1)(A) = I_3 \Longrightarrow$

$$[E_{23}(-1)E_{13}(3)E_{32}(1)E_{12}(-3)E_{31}(-1)]A = I_3 \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A = I_3 \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

□

1.5 Determinante de una matriz cuadrada.

Los determinantes nos proporcionan un método para el cálculo de la matriz inversa de una dada (en caso de existir) y un criterio para estudiar si una matriz es o no invertible.

Sus aplicaciones son múltiples en todas las ramas de las ciencias que tratan problemas lineales en los que necesariamente aparecen matrices y por tanto, determinantes.

1.5.1 Definiciones.

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de dimensión n. A cada matriz cuadrada A se le asigna un número real que llamaremos determinante de A y representaremos por $\det(A)$ o $|A|$. Su cálculo se obtiene mediante la siguiente fórmula recurrente sobre el tamaño n:

- para $n = 1 \;\rightarrow\; A = (a_{11})$, se define $\det(A) = a_{11}$
- para $n > 1 \;\rightarrow\; \det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ki}A_{ki}$

para k fijo, con $1 \leq k \leq n$, donde A_{ki} se define como el *adjunto del elemento* a_{ki}, siendo $A_{ki} = (-1)^{k+i}\det(M_{ki})$ y M_{ki} es la matriz resultante de eliminar en A la fila k-ésima y la columna i-ésima; su determinante se denomina *menor complementario* del elemento a_{ki}.

Obsérvese que mediante esta fórmula recurrente, el cálculo de un determinante de una matriz de orden n se traslada al cálculo de n determinantes de otras tantas matrices de orden $n-1$, los menores complementarios de todos los elementos de la fila k-ésima.

Ejemplo 1.11 (Caso $n = 2$).
Sea A una matriz cuadrada de orden 2: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\square$

Ejemplo 1.12 (Caso $n = 3$).
Sea A una matriz cuadrada de orden 3: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(denominada regla de Sarrus).

$\square$

1.5.2 Propiedades

a) el valor de $\det(A)$ no depende del valor k (fila) elegido.

b) $\det(A^t) = \det(A)$.
Como consecuencia de esta propiedad, podemos dar una definición equivalente del determinante cambiando el papel de las filas por el de las columnas:
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}$$
con k fijo y $1 \leq k \leq n$.

c) Si la matriz A posee una línea (fila o columna) de ceros, su determinante es nulo.

d) Si se intercambian dos líneas de A, el determinante cambia de signo.

e) Si la matriz A tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es nulo.

f) Si todos los elementos de una línea se multiplican por un número α, todo el determinante queda multiplicado por dicho número.

g) Si la matriz A posee dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es nulo.

h) Si descomponemos una línea en suma de dos, podemos descomponer el determinante en suma de dos determinantes de la forma:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que denotaremos por $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

NOTA: No confundir con $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

i) El determinante de una matriz no varía si a una línea se le suma una combinación lineal de líneas paralelas.

j) Si una línea de la matriz A es combinación lineal de otras paralelas, su determinante es nulo.

Teorema 1.5 *Si $A, B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ se verifica que:*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

1.6 Factorización triangular.

El Teorema 1.1 nos garantizaba la existencia de una matriz F tal que $FA = U$ siendo U una matriz triangular superior.

Ampliaremos ahora ese resultado mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.6 *Dada una matriz cuadrada A cualquiera, existen matrices P, L y U' tales que $PA = LU'$ siendo L triangular inferior y U' triangular superior.*

Demostración. La matriz F es el producto de intercambios del tipo F_{ij} y transformaciones del tipo $F_{ij}(\alpha)$. Dado que:

$$\begin{aligned} F_{ij}F_{ik}(\alpha) &= F_{jk}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{kj}(\alpha) &= F_{ki}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{hk}(\alpha) &= F_{hk}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{ki}(\alpha) &= F_{kj}(\alpha)F_{ij} \\ F_{ij}F_{jk}(\alpha) &= F_{ik}(\alpha)F_{ij} \end{aligned}$$

podemos llevar en F todas las transformaciones a la izquierda y todos los intercambios a la derecha:

$$F = (\text{Matriz de las transformaciones})\cdot(\text{Matriz de los intercambios})$$

llamando P a la matriz de los intercambios y L^{-1} a la de las transformaciones, tenemos:

$$L^{-1}PA = U' \Rightarrow PA = LU'$$

L^{-1} es una triangular inferior con unos en la diagonal principal y su inversa L es una matriz del mismo tipo.

U' es una matriz triangular superior con los pivotes en la diagonal principal.■

Observación:si las transformaciones realizadas fueran sólo del tipo $F_{ij}(\alpha)$ tendríamos que: $A = LU'$.

Ejemplo 1.13 Considérese la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ □

$$A \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{23}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U'$$

que es una matriz triangular sup.

$$F = E_{23}E_{31}(-3)E_{21}(-2) = E_{21}(-3)E_{23}E_{21}(-2) = E_{21}(-3)E_{32}(-2)E_{23} \Rightarrow$$

$$F = L^{-1}P \quad \text{con} \quad L^{-1} = E_{21}(-3)E_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ y } \ P = E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se comprueba que:

$$PA = LU'$$

Como P es un producto de matrices del tipo E_{ij} (intercambios) y dado que $\det(E_{ij}) = -1$, tenemos que $\det(P) = \pm 1$.

Por otra parte, sabemos que L es triangular inferior y su diagonal está formada por unos, entonces

$$\det(L) = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm \det(U')$$

.

U' es triangular superior y tiene a los *pivotes* en su diagonal $\Rightarrow \det(A) = \pm$ *producto de los pivotes*

Por todo ello, tenemos que:

$$\det(A) = \pm \textit{ producto de los pivotes}$$

1.7 Inversa de una matriz cuadrada

Dada una matriz cuadrada A habíamos visto que era invertible si y sólo si su forma escalonada canónica era la matriz unidad. Esto era posible si y sólo si todos los pivotes eran no nulos.

Al ser $\det(A) = \pm$ *producto de los pivotes* $\Rightarrow$

$$\text{A es invertible si y sólo si } \det(A) \neq 0$$

Teorema 1.7 *Una matriz es singular (*$\det(A) = 0$*) si y sólo si tiene una línea combinación lineal de las paralelas.*

Demostración.

a) Si $\det(A) = 0 \Rightarrow$ algún pivote es nulo, por lo que su forma escalonada canónica tiene una fila de ceros. Deshaciendo las transformaciones efectuadas, esa fila era necesariamente combinación lineal de las demás.

b) Si una fila es combinación lineal de las demás, por la propiedad i) de los determinantes se tiene que $\det(A) = 0$ y por tanto, A es singular. ■

Propiedades:

a) La matriz inversa A^{-1}, en caso de existir, es única.

En efecto:

Supongamos que existieran dos inversas A_1 y A_2 de la matriz A. Entonces,

$$(A_1A)A_2 = A_1(AA_2) \Rightarrow IA_2 = A_1I \Rightarrow A_1 = A_2.$$

b) Si AB posee inversa, A y B también las tienen y se verifica que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

En efecto:

AB invertible $\Rightarrow \det(AB) \neq 0 \Rightarrow \det(A)\det(B) \neq 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \det(A) \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1} \\ \det(B) \neq 0 \Rightarrow \exists\, B^{-1} \end{cases}$$

$$(AB)^{-1}AB = I \Rightarrow (AB)^{-1}ABB^{-1} = IB^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1}A = B^{-1} \Rightarrow$$
$$(AB)^{-1}AA^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

c) Si A posee inversa A^{-1} se verifica que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

En efecto:

$A^{-1}A = I \Rightarrow \det(A^{-1}A) = \det I \Rightarrow \det(A^{-1})\det(A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

1.7.1 Cálculo de la matriz inversa.

a) La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela es cero.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad k \neq i$$

Este sumatorio correspondería al desarrollo de un determinante con las filas k e i iguales.

b) Se denomina *matriz adjunta* de A y se denota por $\mathrm{Adj}(A)$ a la matriz resultante de sustituir cada elemento de la matriz cuadrada A por su adjunto.

c) $A \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \det(A) \cdot I$. En efecto:

Sea $C = A \cdot \mathrm{Adj}(A)^t$. Entonces, $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ con $b_{kj} = A_{jk}$. Por tanto,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}$$

Si $i \neq j \Rightarrow c_{ij} = 0$ (suma de los productos de los elementos de la fila i por los adjuntos de los de la fila j).

Si $i = j \Rightarrow c_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \det(A) \Rightarrow C = \det(A) \cdot I \Rightarrow$

$$A \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = \det(A) \cdot I.$$

d) Al ser A invertible $\Rightarrow \det(A) \neq 0 \Rightarrow A \cdot \dfrac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t = I \Rightarrow$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A)^t.$$

1.8 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1 Demostrar que el producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. ¿Es conmutativo este producto?

Ejercicio 1.2 Hallar todas las matrices cuadradas de orden 2 cuyo cuadrado sea nulo.

Ejercicio 1.3 Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Hallar una fórmula para A^n, siendo n un entero positivo.

Ejercicio 1.4 Hallar las potencias n-ésimas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.5 Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas, dando en cada caso una demostración o un contraejemplo, según corresponda:

a) Si A y B son simétricas, entonces $A \cdot B$ es simétrica.

b) Si A es simétrica y P es cuadrada, entonces $P \cdot A \cdot P^t$ es simétrica.

c) Si A es una matriz cualquiera, entonces $A \cdot A^t$ y $A^t \cdot A$ son simétricas.

d) Si $A \cdot B$ es simétrica, entonces A y B también lo son.

Ejercicio 1.6 Demostrar que una matriz cuadrada de orden n puede descomponerse de forma única como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica. Realizar la descomposición de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 1.7 Sea A una matriz antisimétrica. Demostrar:

a) A^2 es simétrica.

b) Si B es simétrica, entonces $A \cdot B$ es simétrica si, y sólo si $A \cdot B = -B \cdot A$.

Ejercicio 1.8 Hallar todas las matrices que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1.9 Dada la matriz $A = I_n - \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, probar que:

a) Es simétrica.

b) $A^2 = A$.

c) La traza de A es $n - 1$.

Ejercicio 1.10 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \\ 1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.11 Calcular los siguientes determinantes por dos procedimientos: desarrollando por los elementos de la primera fila y mediante triangularización por transformaciones elementales.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 7 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.12 Demostrar que el determinante del producto de una matriz 2×1 por otra 1×2 es siempre cero.

Ejercicio 1.13 ¿Es cierto que el determinante de una matriz *antisimétrica* es siempre cero?

Ejercicio 1.14 Demostrar que el determinante de una matriz de orden $n \geq 2$ con todos sus elementos iguales a ± 1 es siempre un número par.

Ejercicio 1.15 Sabiendo que los números 23715, 23529, 21359, 19437 y 17453 son múltiplos de 31, probar que el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

es divisible por 31, *sin calcular el determinante*.

Ejercicio 1.16 Hallar los posibles valores del determinante de una matriz A en cada uno de los casos siguientes:

a) A es *idempotente*, es decir $A^2 = A$.

b) A es *ortogonal*, es decir $A \cdot A^t = I$.

c) A es *nilpotente*, es decir existe k tal que $A^k = 0$.

Ejercicio 1.17 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.18 Resolver la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$$

Ejercicio 1.19 Calcular el valor de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.20 Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & \cdots & b & b \\ b & b & a & \cdots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a & b \\ b & b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Ejercicio 1.21 Los *determinantes de Vandermonde* son de la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Demostrar que el valor de este determinante es

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

2. Sistemas de ecuaciones lineales. Espacios vectoriales.

Uno de los problemas fundamentales del Álgebra Lineal es la resolución simultánea de ecuaciones lineales, siendo el caso más simple aquel en el que el número de incógnitas coincide con el número de ecuaciones.

Desde los textos de secundaria se proponen dos métodos para resolver tales sistemas de ecuaciones lineales: *eliminación* y *determinantes*.

El primer método, eliminación, consiste en sustraer múltiplos de la primera ecuación de las restantes, de tal manera que sea posible eliminar una misma incógnita en el resto de las ecuaciones, con lo que se obtiene un sistema con una ecuación y una incógnita menos. El proceso se repite una y otra vez hasta que sólo queda una ecuación con una incógnita, que se resuelve inmediatamente. No es difícil recorrer los pasos seguidos en sentido contrario y calcular el resto de las incógnitas. El procedimiento permite además detectar aquellos casos en que no existe solución o, por el contrario, existe infinidad de ellas.

El segundo método, determinantes, más complicado, introduce la idea de los determinantes y mediante la *regla de Cramer* se obtienen las soluciones como cocientes de dos determinantes. Su estudio no será abordado en esta asignatura. El coste de cálculo de dicho método lo hace viable para tamaño $n = 2$ o 3, pero cuando se trata de resolver sistemas con un número grande de incógnitas, se utiliza el método de eliminación, de coste bastante inferior.

Esta primera parte corresponde al Álgebra Clásica que se ocupa, fundamentalmente, de la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. La segunda parte corresponde al Álgebra Moderna, que estudia las llamadas estructuras algebraicas. Éstas se pueden interpretar como sistemas de elementos entre los que se definen operaciones similares a las que podemos realizar con números. El estudio abstracto de tales estructuras permite su aplicación casi inmediata en numerosos áreas donde aparecen estructuras particulares de forma natural, lo que pone de manifiesto la unidad profunda entre los diversos campos de la matemática. Una de las estructuras algebraicas más relevantes, dentro del álgebra lineal, es la estructura de *espacio vectorial*, íntimamente ligada al estudio y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.1 Notación y definiciones

- Se denomina *sistema de m-ecuaciones lineales con n-incógnitas* a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

  siendo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ las incógnitas del sistema y todos los a_{ij} y b_i representan valores escalares pertenecientes a un cuerpo de números, $\mathbf{K}$, que para nuestros propósitos en esta asignatura corresponderá con el cuerpo de los números reales, $\mathbf{R}$.

- Una *solución del sistema* consiste en la asignación de valores de $\mathbf{R}$ a cada una de las incógnitas de tal forma que se verifique cada una de las ecuaciones que componen el sistema.

- Sea $\mathcal{S}(S)$ el conjunto de todas las posibles soluciones de un sistema S. Se pueden presentar los siguientes casos:

  a) Si $\mathcal{S}(S) = \emptyset \Rightarrow$ *Sistema Incompatible*

  b) Si $\mathcal{S}(S) \neq \emptyset \Rightarrow$ *S. Compatible* $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}(S) \text{ unitario} \Rightarrow \text{Determinado} \\ \mathcal{S}(S) \text{ no unitario} \Rightarrow \text{Indeterminado} \end{array} \right.$

- Dos ecuaciones se dicen *equivalentes* cuando las soluciones de la primera lo son también de la segunda y viceversa. Por extensión, dos sistemas se dicen *equivalentes* cuando sus conjuntos de soluciones son idénticos.

Propiedades:

a) Si se multiplican los dos miembros de una ecuación por un escalar (real) no nulo, la ecuación resultante es equivalente a la primitiva.

b) Si se suman, miembro a miembro, dos ecuaciones con soluciones comunes, la ecuación resultante conserva las soluciones comunes.

Los sistemas lineales admiten una sencilla representación matricial. Así, podemos denotar $Ax = b$ siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad y \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

gracias a la definición dada para el producto entre matrices y la de igualdad entre matrices. Es importante observar que en esta notación matricial se establece un orden para las variables del sistema ya que los coeficientes asociados a una variable se corresponden con una columna de la matriz A, llamada por ello *matriz de los coeficientes del sistema*; x es la matriz columna de las variables del sistema y b es la matriz columna de los *términos independientes* del sistema.

Para hacer más operativa la notación a la hora de resolver sistemas lineales, podemos prescindir de la matriz columna de las variables del sistema y en su lugar representar el sistema mediante una única *matriz ampliada*, $(A|b)$, que consiste en añadir a la matriz A una última columna correspondiente a la matriz b. De esta forma, una vez ordenadas las variables del sistema podemos identificar visualmente cada fila de la nueva matriz con una de las ecuaciones del sistema. Las propiedades enunciadas anteriormente pueden expresarse ahora en términos de las transformaciones elementales fila.

Propiedades:

a) Si se aplica a la matriz ampliada de un sistema una transformación elemental fila $F_i(\alpha)$, con α no nulo, la matriz resultante representa un sistema lineal equivalente al anterior.

b) Si se aplica a la matriz ampliada de un sistema una transformación elemental fila $F_{ij}(1)$, la matriz resultante representa un sistema lineal equivalente al anterior.

Evidentemente, la combinación de ambos tipos de transformaciones elementales, nos permite aplicar transformaciones fila del tipo $F_{ij}(\alpha)$, obteniéndose sistemas equivalentes. Finalmente, la transformación elemental $F_{i,j}$ tan solo representa una permuta entre las ecuaciones i-ésima y j-ésima, por lo que resulta un sistema equivalente.

Estamos en condiciones de abordar el primer método para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.2 Método de eliminación gaussiana

Este método de resolución de sistemas de ecuaciones admite una fácil programación, lo que permite resolver un sistema con la ayuda del ordenador.

La idea del método consiste en aplicar a la matriz ampliada del sistema transformaciones elementales sobre las filas (no pueden realizarse transformaciones columna) obteniendo, de esta forma, sistemas equivalentes al dado pero cada vez más manejables. Mediante transformaciones, se consigue obtener un sistema equivalente al dado que tiene por matriz de los coeficientes una matriz escalonada. La notación quedará simplificada empleando matrices ampliadas para representar en todo momento a los sistemas lineales equivalentes que resultan tras las transformaciones.

Vamos a iniciar el método con un ejemplo de orden tres.

Ejemplo 2.1 Sea el sistema:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 4x & + & y & & & = & -2 \\ -2x & + & 2y & + & z & = & 7 \end{array} \right. \tag{2.1}$$

y nuestro problema es determinar los valores de $x,\ y,\ z.$ □

En primer lugar, tomaremos la matriz ampliada del sistema, siguiendo el orden natural para las variables de mismo:

$$(A|b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Este método, también conocido como de *eliminaciones sucesivas o método de escalonamiento* comienza restando múltiplos de la primera ecuación (fila) a las restantes, con el fin de eliminar una incógnita, la x de las últimas ecuaciones. Para ello:

- Sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por -2.
- Sumamos a la tercera ecuación la primera multiplicada por 1.

$$(A|b) \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

El resultado es un sistema equivalente al dado:

$$S' \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & -y & - & 2z & = & -4 \\ & & 3y & + & 2z & = & 8 \end{array} \right.$$

El coeficiente de x en la primera ecuación se denomina *pivote*.

En el segundo paso, ignoramos la primera ecuación y aplicamos el proceso a las dos ecuaciones restantes, donde las incógnitas son y y z. En este caso, el pivote es -1 (coeficiente de y en la segunda ecuación).

- Sumamos a la tercera ecuación la segunda multiplicada por 3

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(3)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

y llegamos al sistema equivalente:

$$S'' \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & -4 \\ & & & - & 4z & = & -4 \end{array} \right.$$

Ahora, el proceso de eliminación está completo.

Hay un orden evidente para resolver este sistema: de la última ecuación obtenemos $z = 1$. Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación obtenemos $-y - 2 = -4 \Rightarrow y = 2$ y por último, sustituyendo ambos resultados en la primera ecuación, se obtiene $2x + 2 + 1 = 1 \Rightarrow x = -1$.

Este proceso para obtener los valores de las incógnitas, se conoce con el nombre de *sustitución regresiva*.

Es fácil entender cómo podemos extender la idea de la eliminación gaussiana a un sistema de n-ecuaciones con n-incógnitas:

a) En un primer paso, utilizamos múltiplos de la primera ecuación para anular todos los coeficientes bajo el primer pivote.

b) A continuación, se anula la segunda columna bajo el segundo pivote, etc.

c) La última columna contiene sólo a la última de las incógnitas.

d) La sustitución regresiva conduce a la solución en sentido contrario, es decir, comenzando por la última incógnita hasta llegar a la primera.

Cabe preguntarse, sin embargo, si este proceso de eliminación gaussiana conduce siempre a una solución y bajo qué condiciones puede fallar el proceso. Veamos dos ejemplos más.

Ejemplo 2.2 Resolver el sistema:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.2}$$

□

Procedemos a escalonar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La presencia de la última fila de ceros indica que existían dos ecuaciones proporcionales en el último paso (la segunda y tercera ecuaciones son idénticas) por lo que puede ser eliminada del sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & & & & -z & = & 0 \end{array} \right.$$

La sustitución regresiva, proporciona los valores $z = 0$ y $x = 1-y$. Obsérvese que en este ejemplo existe una relación de dependencia entre las variables x e y. Si tomamos un valor cualquiera para y, éste determina otro para la x. Existen infinitas soluciones en este caso, que podemos expresar de forma paramétrica como $x = 1-\lambda$, $y = \lambda$ y $z = 0$. Se dice que y actúa como *variable independiente* y $\{x, z\}$ son *variables dependientes*. Estamos ante un sistema compatible indeterminado.

Ejemplo 2.3 Resolver el sistema:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 3 \\ x & - & 5y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 1 \end{array} \right. \tag{2.3}$$

□

Una vez más procedemos a escalonar la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La última fila representa la ecuación $0x + 0y + 0z = 3$ lo que produce un sistema incompatible ya que $0 \neq 3$. Por tanto no hay soluciones para nuestro sistema original.

Tras estos tres ejemplos, podemos analizar el comportamiento del método de eliminación gaussiana en relación con los pivotes del método de escalonamiento de Gauss-Jordan. El caso de sistema incompatible (tercer ejemplo) se identifica fácilmente por el hecho de que existe un pivote en la última columna de la matriz ampliada. En caso contrario, el sistema resulta compatible, siendo determinado si el número de pivotes coincide con el número de variables y compatible indeterminado si el número de pivotes es menor que el número de variables.

¿Cuántas operaciones aritméticas requiere el algoritmo de eliminación para resolver un sistema $n \times n$?.

En el primer paso, una por cada término de la primera ecuación para cada una de las $n-1$ ecuaciones que hay debajo: $n(n-1) = n^2 - n$.

En el segundo paso $(n-1)^2 - (n-1)$, etc. hasta $(2-1)^2 - (2-1)$. Es decir, en total:

$$(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) - (1 + 2 + \cdots + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^3 - n}{3}$$

por lo que es de orden $O(n^3)$.

La sustitución regresiva requiere $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{(n+1)n}{2} \Rightarrow O(n^2)$.

Por lo que en total, podemos decir que el método de eliminación gaussiana es de orden $O(n^3)$. Aunque no incluiremos aquí su demostración, el orden del método de Cramer es $O(n\ n!)$, si para resolver los determinantes sólo empleamos su definición por permutaciones. Resulta evidente el considerable ahorro de cálculo que supone el método de eliminación gaussiana frente a la regla de Cramer.

2.2.1 Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es *homogéneo* cuando todos sus términos independientes son nulos, es decir, es un sistema del tipo:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = 0 \end{array} \right.$$

Del apartado anterior se deduce que si aplicamos el método de eliminación gaussiana, puesto que la matriz ampliada tiene su última columna nula, por más transformaciones elementales fila que hagamos, siempre resultará otra columna nula. En conclusión, nunca habrá un pivote en esa columna y por tanto el sistema siempre es compatible. Si el número de pivotes es igual al número de variables, el sistema es compatible determinado con solución única trivial (todas las variables toman el valor nulo) mientras que si el número de pivotes es menor, habrá infinitas soluciones y el sistema es compatible indeterminado. En estos casos, los sistemas homogéneos se definen como *sistemas homogéneos incompatibles* (solución única trivial) y *sistemas homogéneos compatibles*, con infinitas soluciones.

Al resolver un sistema homogéneo compatible mediante eliminación gaussiana, las variables asociadas a las columnas que contienen a los pivotes se denominan *variables dependientes*, siendo todas las demás *variables independientes*. Podemos despejar, mediante sustitución regresiva, las variables dependientes en función de las independientes. Las infinitas soluciones pueden expresarse mediante una serie de parámetros, tantos como variables independientes haya. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2.4 Resolver el sistema homogéneo:

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 0 \\ 3x & - & y & & & - & 2t & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.4}$$

□

Como ya comentamos, la matriz ampliada tiene su última columna llena de ceros y éstos permanecerán por muchas transformaciones elementales fila que hagamos. Así pues, para resolver sistemas homogéneos mediante escalonamiento se prescinde de emplear la matriz ampliada y en su lugar tomamos simplemente la matriz de los coeficientes. Procedemos a escalonar dicha matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{21}(-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{31}(-\frac{3}{2})}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{32}(\frac{5}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Aunque el proceso de escalonamiento ha concluido, podemos simplificar algunas ecuaciones aplicando ahora

$$\xrightarrow{F_2(\frac{2}{3})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

con lo que resulta el sistema equivalente

$$S \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 \\ & & & & 2z & - & 3t & = & 0 \end{array} \right.$$

Los pivotes se encuentran sobre las tres primeras columnas por lo que tomaremos como variables dependientes $\{x,\ y,\ z\}$, resultando t la única variable independiente. El sistema homogéneo es compatible; presenta infinitas soluciones que podemos expresar, paramétricamente, como $x = \frac{1}{2}\lambda$, $y = -\frac{1}{2}\lambda$, $z = \frac{3}{2}\lambda$, $t = \lambda$.

Habitualmente, cuando los cálculos se realizan a mano, con objeto de reducir la cantidad de anotaciones, se realizan transformaciones elementales paralelamente a varias filas a la vez. Por otra parte, también es deseable evitar, en la medida de lo posible, la manipulación de fracciones. Para ello, realizaremos transformaciones entre las filas que denotaremos $a\ F_i - b\ F_j$ y que representan el equivalente a dos transformaciones elementales filas consecutivas: $F_i(a)$ seguida de $F_{ij}(-b)$. Así, el procedimiento de escalonamiento de la matriz de coeficientes, puede expresarme más abreviadamente

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ 2F_2 - F_1 \\ 2F_3 - 3F_1 \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ 3F_3 + 5F_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 24 & -36 \end{pmatrix}$$

Aunque no se sigue el método de Gauss-Jordan en sentido estricto, los sistemas resultantes también son equivalentes. En nuestro ejemplo, las dos últimas filas son proporcionales a las obtenidas anteriormente.

2.3 Espacios Vectoriales

El estudio de los sistemas de ecuaciones lineales y del conjunto de sus soluciones nos llevará a definir la estructura algebraica de espacio vectorial. Para ello, vamos en primer lugar a interpretar los sistemas bajo otra notación, de tipo vectorial.

Dado un sistema de ecuaciones lineales

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

podemos escribirlo de la forma:

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \iff$$

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = b$$

donde $a_i,\ b \in \mathbf{R}^{m\times 1}\ \forall\, i = 1,\ 2, \cdots,\ n$

En definitiva, $a_i,\ b \in \mathbf{R}^m$ y se denominan *vectores*, mientras que a los x_i $i = 1, \cdots,\ n$ se les denomina *escalares*.

En la expresión anterior existen dos tipos de operaciones:

* Producto de escalar por vector.

* Suma de vectores.

Dichas operaciones verifican las siguientes propiedades:

Suma:

a) Ley de composición interna: $\forall\, x,\ y \in \mathbf{R}^n \Rightarrow x + y \in \mathbf{R}^n$.

b) Asociativa: $(x+y)+z = x+(y+z) \;\; \forall\, x,\ y,\ z \in \mathbf{R}^n$.

c) Elemento neutro: $\exists\, 0 \in \mathbf{R}^n : 0+x = x+0 \;\; \forall\, x \in \mathbf{R}^n$.

d) Elemento opuesto: $\forall\, x \in \mathbf{R}^n \;\; \exists\, -x \in \mathbf{R}^n \; : \; x+(-x) = (-x)+x = 0$.

e) Conmutativa: $x+y = y+x \;\; \forall\, x,\ y \in \mathbf{R}^n$.
Se define $(\mathbf{R}^n,\ +)$ como un Grupo Conmutativo.

Producto por un escalar:

f) Ley de composición externa: $\forall\, \lambda \in \mathbf{R},\ \forall\, x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \lambda \cdot x \in \mathbf{R}^n$.

g) $\forall\, \alpha \in \mathbf{R},\ \forall\, x,\ y \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

h) $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbf{R},\ \forall\, x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

i) $\forall\, \alpha,\ \beta \in \mathbf{R},\ \forall\, x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

j) $\forall\, x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow 1 \cdot x = x$.

Se define $(\mathbf{R}^n,\ +,\ \cdot)$ como un Espacio Vectorial.

La definición anterior se puede extender a cualquier conjunto V, diferente de $\mathbf{R}^n$. Dado un conjunto V en el que se han definido dos operaciones, una interna, la suma, y otra externa, producto por un escalar, verificando las diez propiedades anteriores, se dice que $(V,\ +,\ \cdot)$ es un *espacio vectorial* real (o sobre $\mathbf{R}$). Así, por ejemplo, son espacios vectoriales:

a) El conjunto de las matrices cuadradas de orden 3, $\mathbf{R}^{3\times 3}$, junto a las operaciones de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz.

b) Los polinomios en una variable x, $P[x]$, junto a las operaciones de suma de polinomios y producto de un polinomio por un escalar.

c) El conjunto de las sucesiones de números reales, $\mathbf{R}^\infty$, junto a la suma de sucesiones (término a término) y producto de una sucesión por un escalar (que se realiza, igualmente, término a término).

d) El espacio de las funciones, $f(x)$, reales de una variable real, x, definidas en el intervalo $[0,1]$, junto a la suma de funciones, definida como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, y al producto de una función por un escalar, definido como $(\alpha f)(x) = \alpha\ f(x)$.

e) Si en $\mathbf{R}^2$ consideramos: $\left\{ \begin{array}{l} (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \\ \alpha(x,y)=(\alpha^2x,\alpha^2y) \end{array} \right.$

$$(\mathbf{R}^2,\ +,\ \cdot) \text{ es un espacio vectorial sobre } \mathbf{R}.$$

Sin embargo, si en $\mathbf{R}^2$ consideramos: $\left\{ \begin{array}{l} (x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \\ \alpha(x,y)=(\alpha x,0) \end{array} \right.$

$$(\mathbf{R}^2,\ +\ \cdot) \quad \text{no es un espacio vectorial sobre } \mathbf{R}$$

ya que $1\cdot x \neq x$, pues $1\cdot(x_1,x_2)=(1\cdot x_1,0)=(x_1,0)\neq(x_1,x_2)$.

La definición formal de espacio vectorial nos permite pensar en otros entes como vectores, siempre y cuando la suma y el producto por un escalar cumplan las 10 propiedades exigidas. Así, por ejemplo, pueden tratarse como vectores las matrices, las sucesiones, los polinomios y las funciones, entre otros muchos.

Propiedades:

Un espacio vectorial real $(V,\ +,\ \cdot)$ cumple las siguientes propiedades:

a) Unicidad de los elementos neutro y opuesto.

b) $\alpha\cdot 0=0 \ \ \forall\,\alpha\in\mathbf{R}$.

c) $0\cdot x=0 \ \ \forall\,x\in V$.

d) $\alpha\cdot x=0 \Rightarrow \alpha=0 \ \text{ o } \ x=0$.

e) $\alpha\cdot x=\alpha\cdot y \ \text{ y } \ \alpha\neq 0\Rightarrow x=y$.

f) $\alpha\cdot x=\beta\cdot x \ \text{ y } \ x\neq 0\Rightarrow\alpha=\beta$.

g) $(-\alpha)\cdot x=\alpha\cdot(-x)=-(\alpha\cdot x)$.

Demostración.

a) Sean 0 y $0'$ elementos neutro:

$$\left. \begin{array}{l} 0=0+0' \ \ \text{por ser } 0' \text{ neutro} \\ 0'=0+0' \ \ \text{por ser } 0 \text{ neutro} \end{array} \right\} \Rightarrow 0=0'$$

Sean x' y x'' opuestos de x.

$(x'+x)+x''=x'+(x+x'')\Rightarrow 0+x''=x'+0\Rightarrow x''=x'$.

b) $\alpha \cdot x = \alpha(x + 0) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot 0 \Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0$.

c) $\alpha \cdot x = (0 + \alpha) \cdot x = 0 \cdot x + \alpha \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = 0$.

d) $\alpha \cdot x = 0$ y $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists\ \alpha^{-1} \ : \ \alpha^{-1}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^{-1}\alpha x = \alpha^{-1}0 \Rightarrow 1 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$.

e) $\alpha \cdot x = \alpha \cdot y$ y $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot x + (-\alpha \cdot y) = 0 \Rightarrow \alpha^{-1}\alpha x + \alpha^{-1}(-\alpha y) = 0 \Rightarrow x + (-y) = 0 \Rightarrow x = y$.

f) $\alpha \cdot x = \beta \cdot x$ y $x \neq o \Rightarrow \alpha \cdot x - \beta \cdot x = 0 \Rightarrow (\alpha - \beta) \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$.

g) $\alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot (0 - x) = \alpha \cdot 0 - \alpha \cdot x = 0 - \alpha \cdot x = -\alpha \cdot x$.

$(-\alpha) \cdot x = (0 - \alpha) \cdot x = 0 \cdot x - \alpha \cdot x = 0 - \alpha \cdot x = -\alpha \cdot x$. ■

2.4 Dependencia lineal

Los siguientes conceptos son fundamentales para el estudio de los espacios vectoriales, ya que la idea de independencia lineal nos llevará a las definiciones de base, rango, dimensión, etc., de capital importancia para dicho estudio. A partir de estos conceptos podremos profundizar en el análisis de estas estructuras algebraicas, encontrando formas alternativas de representación y caracterizando los posibles subconjuntos del espacio vectorial que conservan las mismas propiedades. En lo sucesivo consideraremos un espacio vectorial real cualquiera, $(V, +, \cdot)$.

- Dados los vectores $x_i \in V \;\; 1 \leq i \leq n$ y los escalares $\alpha_i \in \mathbf{R} \;\; 1 \leq i \leq n$, se denomina *combinación lineal* de los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ a toda expresión del tipo:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \ \text{ ó en notación abreviada } \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

- Se dice que $x \in V$ es una combinación lineal de los vectores $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de V si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

- Un conjunto finito de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ siendo $H \subset V$ se dice **linealmente dependiente** o que forman un **sistema ligado**, si existen $\alpha_1,\ \alpha_2, \dots,\ \alpha_k \in \mathbf{R}$, *no todos nulos*, tales que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$$

Teorema 2.1 *Un conjunto finito de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ es linealmente dependiente si y sólo si, al menos, uno de ellos depende linealmente de los restantes.*

Demostración. Si $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ son linealmente dependientes existe x_i con $i = 1,\ 2, \dots,\ k$ tal que $x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k$. En efecto:

Por ser linealmente dependientes existen $\lambda_1,\ \lambda_2, \dots,\ \lambda_k \in \mathbf{R}$ no todos nulos tales que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0$. Sea $\lambda_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq k$. Entonces

$$x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} x_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} x_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k \Rightarrow$$

$$x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k \Rightarrow$$

x_i es combinación lineal de los demás.

Recíprocamente, si algún x_i es combinación lineal de los demás, el conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ es un sistema ligado. En efecto:

Si x_i es combinación lineal de los demás, implica que

$$x_i = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1} x_{i-1} + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k \Rightarrow$$

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{i-1} x_{i-1} - 1 \cdot x_i + \alpha_{i+1} x_{i+1} + \cdots + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow$$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = 0$ con $\alpha_i = -1$ y por tanto $\{x_1, \dots,\ x_k\}$ es un sistema ligado. ∎

- Se dice que $H \subset V$ **depende linealmente** de $H' \subset V$ si cualquier vector de H depende linealmente de los vectores de H'.

Teorema 2.2 Propiedades de la dependencia lineal.

a) *Si un conjunto de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ contiene al vector nulo, es un sistema ligado.*

b) Si en un conjunto de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ *hay dos proporcionales entonces,* H *es un sistema ligado.*

c) Si $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_r\}$ *es un sistema ligado y* $H' = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ *es tal que* $H \subset H'$*, entonces* H' *es también un sistema ligado.*

d) Si un vector x *es una combinación lineal de los vectores* $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_m\}$ *y cada uno de estos depende linealmente de* $\{y_1,\ y_2, \dots,\ y_k\}$ *entonces,* x *depende linealmente de* $\{y_1,\ y_2, \dots,\ y_k\}$

Demostración.

a) $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 1 \cdot 0 + \cdots + 0x_k = 0$ siendo $1 \neq 0$.

b) Sea $x_i = kx_j$. Entonces,

$$0x_1 + \cdots + 0x_{i-1} + kx_j + 0x_{i+1} + \cdots + (-k)x_j + \cdots + 0x_k = 0$$

con $k \neq 0$, por lo que $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\}$ es un sistema ligado.

c) $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0$ con algún $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + 0x_{r+1} + \cdots + 0x_k = 0 \text{ con } \lambda_i \neq 0.$$

d) $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{k} (\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \alpha_{ij}) y_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j y_j.$ ∎

- Se dice que un conjunto finito de vectores $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_k\} \subset V$ es **linealmente independiente** o que constituye un **sistema libre** si no es un sistema ligado, es decir, si de cualquier combinación lineal de ellos igualada a cero, se deduce que todos los coeficientes han de ser nulos.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

En el caso particular del espacio vectorial $(\mathbf{R}^n,\ +,\ \cdot)$ esta definición es equivalente a decir que el sistema homogéneo $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$ es incompatible, es decir, sólo admite la solución trivial. Por tanto, para comprobar si un conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_n\} \subset \mathbf{R}^n$ es un sistema libre o ligado, se plantea el sistema de ecuaciones $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ y al resolver,

- si sólo admite la solución trivial $\Leftrightarrow$ sistema libre.
- si admite solución distinta de la trivial $\Leftrightarrow$ sistema ligado.

También se puede estudiar la dependencia o independencia lineal mediante escalonamiento o triangularización.

Teorema 2.3 Propiedades de la independencia lineal.

a) Un conjunto formado por un único vector no nulo, es un sistema libre.

b) Si $H = \{x_1,\ x_2, \dots,\ x_n\}$ es un sistema libre, cualquier subconjunto no vacío de H es también un sistema libre.

c) Ningún sistema libre puede contener al vector nulo.

Demostración.

a) Si $x \neq 0$ y $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \{x\}$ es un sistema libre.

b) Sea $\{x_1, \dots,\ x_r\} \subset \{x_1, \dots,\ x_k\}$. Si $\{x_1, \dots,\ x_r\}$ fuese ligado entonces, $\{x_1, \dots,\ x_k\}$ sería ligado en contra de la hipótesis (ver el apartado c) del Teorema 2.2).

c) Si contuviese al 0, sería un sistema ligado (ver el apartado a) del Teorema 2.2). ■

2.4.1 Espacios vectoriales de tipo finito

Un espacio vectorial V se dice *de tipo finito* si posee un sistema finito de generadores es decir, si existe un conjunto finito $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ de vectores de V tales que

$$\forall\, x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \quad \text{con} \quad \alpha_i \in \mathbf{K}$$

donde $\mathbf{K}$ es el cuerpo de definición de V; a efectos prácticos $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

Evidentemente, el conjunto de generadores de un espacio vectorial no es único.

Existen numerosos espacios vectoriales que no están engendrados por un número finito de generadores, por ejemplo, el espacio vectorial de los polinomios, pues cualquier conjunto finito de polinomios $\{p_1(x),\ p_2(x), \dots,\ p_n(x)\}$, cualesquiera que sean sus grados, generan a un subconjunto de $P[x]$ pero no a todo $P[x]$.

Otros espacios vectoriales están generados por un número finito de generadores, como por ejemplo $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^{m\times n}$ ó $P_n[x]$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n en la variable x.

2.4.2 Bases de un espacio vectorial

Un conjunto $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ de vectores de un espacio vectorial V de tipo finito y definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ se dice que constituye una *base* si cumple:

a) $\mathcal{B}$ es un sistema generador de V.

b) $\mathcal{B}$ es un sistema libre.

Teorema 2.4 *Todo espacio vectorial V finito y no nulo posee, al menos, una base.*

Demostración. Por tratarse de un espacio vectorial de tipo finito, existe un sistema generador finito $H = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ tal que $V = \mathcal{L}(H)$ y como $V \neq \{0\}$ uno, al menos, de estos vectores generadores es no nulo, es decir, existen subconjuntos de H formados por vectores linealmente independientes.

Entre todos estos subconjuntos de H elegimos uno cuyo número de vectores sea máximo. Sea este $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_r\}$ con $1 \leq r \leq n$ y veamos que constituye una base.

a) Es un sistema libre por construcción.

b) Veamos que es un sistema generador de V. En efecto: como el conjunto de vectores $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ es un sistema generador de V, cualquier vector $x \in V$ es combinación lineal de ellos.

   Como por otra parte, todos ellos son combinación lineal de los vectores $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_r\}$, cualquier vector $x \in V$ puede ser expresado como combinación lineal de $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_r\}$ (ver el apartado 4 del Teorema 2.2), por lo que es un sistema generador de V.

Al ser $\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_r\}$ un sistema generador y libre, constituye una base de V. ■

Teorema 2.5 *Todas las bases de un espacio vectorial V poseen el mismo número de vectores.*

Demostración. Sean $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_p\}$ dos bases de un mismo espacio vectorial V.

a) Supongamos que $n > p$

   Por ser $\mathcal{B}'$ una base de V, existen $\alpha_{ij} \in \mathbf{K}$ tales que

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1p}v_p \\ &\vdots \\ u_n &= \alpha_{n1}v_1 + \cdots + \alpha_{np}v_p \end{aligned}$$

   Entonces, como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \ \forall\, i = 1,\ 2, \ldots,\ n$ por ser $\mathcal{B}$ un sistema libre se tiene que

$$\lambda_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1p}v_p) + \cdots + \lambda_n(\alpha_{n1}v_1 + \cdots + \alpha_{np}v_p) = 0 \Rightarrow$$

   los coeficientes de $v_1,\ v_2, \ldots,\ v_p$ han de ser nulos por ser $\mathcal{B}'$ otra base, y por tanto $\left.\begin{array}{l} \lambda_1\alpha_{11} + \cdots + \lambda_n\alpha_{n1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1\alpha_{1p} + \cdots + \lambda_n\alpha_{np} = 0 \end{array}\right\}$ y como $n > p$ el sistema homogéneo es compatible, por lo que admite solución $(\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n)$ distinta de la trivial, en contra de que $\lambda_i = 0 \ \ \forall\, i = 1,\ 2, \ldots,\ n$. Deducimos pues que $n \not> p$ o lo que es lo mismo, que $n \leq p$

b) Supongamos que $p > n$

   Un razonamiento análogo al anterior nos conduce a que $p \not> n$ es decir, a que $n \geq p$

Como hemos llegado a que $n \leq p$ y $n \geq p$ tenemos que necesariamente es $n = p$. ■

- Se define **dimensión** de un espacio vectorial V de tipo finito y se denota por $\dim V$ como el número de vectores que posee una base cualquiera del mismo.

Hay que destacar que si $\mathcal{B}$ es una base de V significa que cualquier vector $x \in V$ puede ser expresado como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$, es decir

$$\forall\, x \in V \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i = x_1u_1 + x_2u_2 + \cdots + x_nu_n \quad \text{con} \quad x_i \in \mathbf{K}$$

- A los escalares $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ se les denomina **coordenadas** o **componentes** del vector x respecto de la base $\mathcal{B}$. Para no confundir el vector con sus coordenadas o incluso un elemento de $\mathbf{R}^n$ con sus coordenadas respecto de una determinada base $\mathcal{B}$, denotaremos las coordenadas de la forma $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)_{\mathcal{B}}$. A veces se prescinde del subíndice cuando por el contexto se sobreentiende que en todo momento nos referimos a las coordenadas respecto de una base fijada previamente.

Teorema 2.6 *Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.*

Demostración. Sea V un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y consideremos una base $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ de dicho espacio.

$\forall\, x \in V \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ donde $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ son unas coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}$.

Supongamos que existieran otras coordenadas $(y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n)$ de x respecto de la misma base $\mathcal{B}$, es decir

$$x = \sum_{i=1}^{n} y_i u_i$$

Entonces, $x - x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i - \sum_{i=1}^{n} y_i u_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) u_i = 0$ y al ser $\{u_i\}_{i=1,\ 2,\ldots,\ n}$ un sistema libre, $x_i - y_i = 0\ \ \forall\, i$, por lo que $x_i = y_i\ \ i = 1,\ 2, \ldots,\ n$. Es decir, las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas. ■

- De entre todas las bases del espacio vectorial $(\mathbf{R}^n,\ +,\ \cdot)$ hay una que recibe el nombre especial de **base canónica** y suele denotarse por $\mathbf{C} = \{e_1,\ e_2, \ldots,\ e_n\}$, siendo

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

  La demostración de que realmente constituye una base es trivial, dada la sencillez en la estructura de sus elementos:

  - se trata de un sistema generador ya que cualquier vector $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ puede obtenerse como $x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \ldots + x_n e_n$

– es un sistema libre de vectores pues

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$$

Obsérvese que las coordenadas de un vector respecto de la base canónica coinciden con los n valores que componen el vector.

- Dado un espacio vectorial V de dimensión finita, $\dim V = n$, una vez elegida una base B para dicho espacio, podemos establecer un isomorfismo entre el espacio V y el espacio $\mathbf{R}^n$. Es decir, podemos asociar (identificar) cada vector de V con un único elemento de $\mathbf{R}^n$ que representa sus coordenadas respecto de la base elegida. Con esta idea, podemos prescindir de trabajar con los vectores originales (matrices, polinomios, funciones, etc.) y trabajar con sus coordenadas.

Teorema 2.7 *Fijada una base B en un espacio vectorial V de dimensión n, el conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ es un sistema libre si y solo si lo es el conjunto de sus coordenadas como vectores de $\mathbf{R}^n$.*

Demostración. Sean $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$, para $i = 1, \ldots, m$, las coordenadas del vector $x_i \in V$ respecto de la base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Nótese que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_j) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_{ij}) v_j = 0 \Leftrightarrow \text{ por ser } B \text{ base}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} \alpha_1 x_{11} & + & \alpha_2 x_{21} & + & \ldots & + & \alpha_m x_{m1} & = & 0 \\ \alpha_1 x_{12} & + & \alpha_2 x_{22} & + & \ldots & + & \alpha_m x_{m2} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 x_{1n} & + & \alpha_2 x_{2n} & + & \ldots & + & \alpha_m x_{mn} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_m \begin{pmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

por tanto, los vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ son linealmente independientes si y solo si lo son los vectores de $\mathbf{R}^n$: $\{(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}), (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}), \ldots, (x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn})\}$ ■

2.4.3 Rango de un conjunto de vectores

Llamamos **rango** de un conjunto de vectores al mayor número de ellos linealmente independientes.

¿Qué operaciones o modificaciones se pueden realizar en un conjunto de vectores de forma que no se altere la dependencia lineal, es decir, sin que se altere su rango?

a) Si en un conjunto de vectores $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ se aplican transformaciones elementales, su rango no se altera. La transformación F_{ij} consiste simplemente en cambiar de orden dos vectores; la transformación $F_i(\alpha)$ (para $\alpha \neq 0$) consiste en reemplazar el vector x_i por un múltiplo de él, αx_i. Obviamente este reemplazamiento no cambia el número de vectores linealmente independientes que existe en el conjunto. Finalmente, la transformación $F_{ij}(\alpha)$ reemplaza el vector x_i por el nuevo vector $v = x_i + \alpha x_j$. Veamos que esto tampoco cambia el número de vectores linealmente independientes:

- Si x_i es combinación lineal de los restantes vectores, $x_i = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k$, entonces resulta $v = x_i + \alpha x_j = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k \ + \alpha x_j$, de donde v también es combinación lineal de los restantes.
- Si x_i es linealmente independiente de los demás, necesariamente v también pues en caso contrario, si $v = x_i + \alpha x_j = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k$, despejando x_i resulta $x_i = \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k x_k \ - \alpha x_j$ con lo que tendríamos que x_i es combinación de los demás también, lo cual es imposible.

b) La dependencia o independencia lineal del conjunto $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ de vectores, equivale a la compatibilidad o incompatibilidad del sistema de ecuaciones lineales homogéneo dado por $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 x_{11} + \cdots + \alpha_m x_{1m} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{n1} + \cdots + \alpha_m x_{nm} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow Ax = 0$$

donde las columnas de A son las componentes de los vectores $x_i \in \mathbf{R}^m$ con $1 \leq i \leq m$.

Como el rango de $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_n\}$ no varía al hacer transformaciones elementales, esto equivale a que el rango de A no se altera al hacerle transformaciones elementales. Más específicamente, si consideramos una matriz cuyas columnas las forman los vectores $x_1,\ x_2, \dots,\ x_m \in \mathbf{R}^n$, el rango de dicho conjunto de vectores no varía si en la matriz A (cuyas columnas son dichos vectores) realizamos

- Transformaciones columnas, como consecuencia de a).
- Transformaciones filas, como consecuencia de b).

Por tanto, el rango de un conjunto de vectores se puede calcular escalonando la matriz A mediante transformaciones filas o columnas. Sin embargo, los subespacios generados por las filas o las columnas son distintos.

Sea $L = \mathcal{L}(\{u_1,\ u_2, \dots,\ u_r\})$ y sea $A = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_r \end{pmatrix}$ la matriz cuyas filas son los vectores $u_1,\ u_2, \dots,\ u_r$.

Triangularizando por filas obtenemos otros vectores $\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_r\}$ y consideremos $L_1 = \mathcal{L}(\{x_1,\ x_2, \dots,\ x_r\})$. Realizando el mismo proceso por columnas obtenemos $L_2 = \mathcal{L}(\{y_1,\ y_2, \dots,\ y_r\})$.

En general se cumple que $L \equiv L_1$ y $L \not\equiv L_2$. Comprobémoslo con un ejemplo:

Ejemplo 2.5 Consideramos los vectores $u_1 = (1, 1, 1, 1)$ y $u_2 = (2, 1, 1, 1)$ de $\mathbf{R}^4$ y sea $L = \mathcal{L}(\{u_1,\ u_2\})$.

Si realizamos transformaciones filas tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$L_1 = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$$

Mientras que realizando transformaciones columnas obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$L_2 = \mathcal{L}(\{(1,0,0,0),(2,-1,0,0)\}$$

obteniéndose que $L_1 \equiv L$ y $L_2 \not\equiv L$. □

2.4.4 Rango de una matriz

Sea $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Se define *rango fila* de A y lo denotamos por $\mathrm{r}_f(A)$ como el rango del conjunto de vectores de $\mathbf{R}^n$ formado por las filas de la matriz A.

Análogamente, se define *rango columna* de A y se denota por $\mathrm{r}_c(A)$ como el rango del conjunto de vectores de $\mathbf{R}^m$ formado por sus columnas.

Teorema 2.8 [Teorema del rango] *En toda matriz se verifica que los rangos fila y columna coinciden.*

$$\mathrm{r}_f(A) = \mathrm{r}_c(A)$$

Demostración.

a) Sabemos que el rango no se altera si realizamos transformaciones filas o columnas.

b) Sabemos que mediante transformaciones elementales podemos reducir la matriz A a una de la forma

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{r}_f(A) = \mathrm{r}_f(D) = r \\ \mathrm{r}_c(A) = \mathrm{r}_c(D) = r \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{r}_f(A) = \mathrm{r}_c(A) = r.$$

Podemos entonces hablar de **rango** de una matriz sin especificar si se trata del rango fila o del rango columna y lo representaremos por $\mathrm{r}(A)$. Por otra parte ha quedado demostrado que el rango de una matriz coincide con el número de pivotes en cualquier forma escalonada obtenida a partir de dicha matriz.

Corolario 2.9 *Cualquiera que sea la matriz* $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ *se verifica que* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^t)$.

Demostración. Dado que $\mathrm{r}_f(A) = \mathrm{r}_c(A^t)$ y $\mathrm{r}_c(A) = \mathrm{r}_f(A^t)$ y que $\mathrm{r}_f(A) = \mathrm{r}_c(A) = \mathrm{r}(A)$ se tiene que

$$\mathrm{r}_f(A^t) = \mathrm{r}_c(A^t) = \mathrm{r}(A^t) = \mathrm{r}(A).$$

Teorema 2.10 *Dadas las matrices* $A \in \mathbf{R}^{m\times p}$ *y* $B \in \mathbf{R}^{p\times n}$ *se cumple que*

$$\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A)\mathrm{r}(B)$$

verificándose además que

$$\mathrm{r}(AB) \leq \min\{\mathrm{r}(A),\ \mathrm{r}(B)\}.$$

Demostración. Cualquier columna de la matriz $C = AB$ es una combinación lineal de los vectores columna de la matriz A.

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p a_{1i}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{1i}b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p a_{mi}b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^p a_{mi}b_{in} \end{pmatrix}$$

Fijándonos ahora en la primera columna de $C = AB$ observamos que

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1p}b_{p1} \\ \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mp}b_{p1} \end{pmatrix} = b_{11}\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + b_{p1}\begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix}$$

es decir, las columnas de $C = AB$ son combinaciones lineales de las de A, por lo que

$$\mathrm{r}_c(AB) \leq \mathrm{r}_c(A) \Leftrightarrow \mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A) \tag{2.5}$$

Análogamente, fijándonos en la k-ésima fila de $C = AB$ observamos que

$$(a_{k1}b_{11} + \cdots + a_{kp}b_{1n} \quad \cdots \quad a_{k1}b_{1n} + \cdots + a_{kp}b_{pn}) = a_{k1}(b_{11} \ \cdots \ b_{1n}) + \cdots + a_{kp}(b_{p1} \ \cdots \ b_{pn})$$

es decir, es una combinación de las filas de B y por tanto,

$$\mathrm{r}_f(AB) \leq \mathrm{r}_f(B) \iff \mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(B) \tag{2.6}$$

Fijándonos ahora en las ecuaciones (2.5) y (2.6) deducimos que

$$\mathrm{r}(AB) \leq \min\{\mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)\}.$$

Además, observando que $\mathrm{r}(AB) \leq [\mathrm{r}(AB)]^2 = \mathrm{r}(AB)\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A)\mathrm{r}(B)$ podemos asegurar que

$$\mathrm{r}(AB) \leq \mathrm{r}(A)\mathrm{r}(B)$$

2.5 Variedades lineales

Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial y $L \subset V$. Decimos que L es un **subespacio vectorial** o **variedad lineal** de V si L tiene estructura de espacio vectorial para las mismas operaciones de V y sobre el mismo cuerpo ($\mathbf{R}$), es decir:

$$L \text{ subespacio vectorial de } V \Leftrightarrow \begin{cases} 1.\ \forall\, x, y \in L & \Rightarrow \quad x + y \in L \\ 2.\ \forall\, x \in L \ \text{ y } \ \forall\, \alpha \in \mathbf{R} & \Rightarrow \quad \alpha x \in L \end{cases}$$

2.5.1 Caracterización de los subespacios vectoriales

De la propia definición de subespacio vectorial se deduce que L es un subespacio de V si y sólo si $\forall\, x, y \in L$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ se verifica que

$$\alpha x + \beta y \in L$$

Teorema 2.11 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) *L es subespacio vectorial de V.*

b) *$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ y $\forall\, x, y \in L \Rightarrow \alpha x + \beta y \in L$.*

c) *$\forall\, \alpha \in \mathbf{R}$ y $\forall\, x, y \in L \Rightarrow \begin{cases} x + y \in L \\ \alpha x \in L \end{cases}$*

Demostración.

$1 \Rightarrow 2$: ya que por ser L espacio vectorial $\begin{cases} \forall\, \alpha \in \mathbf{R} \ \ \forall\, x \in L \Rightarrow \alpha x \in L \\ \forall\, \beta \in \mathbf{R} \ \ \forall\, y \in L \Rightarrow \beta y \in L \end{cases} \Rightarrow$ $\alpha x + \beta y \in L$.

$2 \Rightarrow 3$: para $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow x + y \in L$ y para $\beta = 0 \Rightarrow \alpha x \in L$.

$3 \Rightarrow 1$: ya que al ser $x + y \in L$ (interna), todas las propiedades de la suma se verifican por ser $x,\ y \in V$, y análogamente ocurre con la ley externa. ■

Ejemplo 2.6

a) Sea $L \subset \mathbf{R}^3$, $\quad L = \{x = (x_1,\ x_2,\ 0) \ : \ x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$

L es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

b) Sea $L \subset \mathbf{R}^2$, $\quad L = \{x = (-\alpha,\ \alpha) \ : \ \alpha \in \mathbf{R}\}$

L es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$.

c) Sea $L \subset \mathbf{R}^2$, $L = \{x = (\alpha,\ 3\alpha)\ :\ \alpha \in \mathbf{R}\}$

L es subespacio vectorial de $\mathbf{R}^2$

□

2.5.2 Variedad engendrada por un conjunto finito de vectores

Sean $V \subset \mathbf{R}^n$ un espacio vectorial real y $H \subset V$. Se denomina **variedad lineal engendrada por** H y la denotamos por $\mathcal{L}(H)$ al conjunto de vectores de V que son combinación lineal de los vectores de H. Al conjunto H se le denomina **sistema generador de** $\mathcal{L}(H)$.

Teorema 2.12 *$\mathcal{L}(H)$ es una variedad lineal de V.*

Demostración. $x, y \in \mathcal{L}(H) \implies$ existen $\left\{ \begin{array}{l} x_1, \dots,\ x_k,\ y_1, \dots,\ y_p \in H \\ \alpha_1, \dots,\ \alpha_k,\ \beta_1, \dots,\ \beta_p \in \mathbf{R} \end{array} \right.$
tales que:

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \qquad y = \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j$$

de donde

$$\alpha x + \beta y = \alpha \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i + \beta \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j = \sum_{i=1}^{k} (\alpha\alpha_i) x_i + \sum_{j=1}^{p} (\beta\beta_j) y_j,$$

es decir, $\alpha x + \beta y$ es combinación lineal de $x_1, \dots,\ x_k,\ y_1, \dots,\ y_p \in H$, por lo que $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}(H)$ y por tanto, $\mathcal{L}(H)$ es una variedad lineal de V. ■

Propiedades:

Sea $V \in \mathbf{R}^n$ un espacio vectorial y sean $H,\ H' \subset V$. Se cumplen:

a) $H \subseteq \mathcal{L}(H)$.

b) Si $H \subset H' \Rightarrow \mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(H')$.

c) $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H)$.

En efecto:

a) $\forall\, x \in H$, como $1 \in \mathbf{R} \Rightarrow 1 \cdot x \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow x \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow H \subseteq \mathcal{L}(H)$.

b) $\forall\, x \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ con $x_i \in H \subset H' \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ con $x_i \in H' \Rightarrow x \in \mathcal{L}(H') \Rightarrow \mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(H')$.

c) $H \subseteq \mathcal{L}(H) \Rightarrow \mathcal{L}(H) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{L}(H))$.
Veamos ahora que $\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) \subseteq \mathcal{L}(H)$.
$x \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$ con $x_i \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} x_j$ con $x_j \in H \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{p} (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \beta_{ij}) x_j = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j x_j$ con $x_j \in H \Rightarrow x \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) \subseteq \mathcal{L}(H)$ y por tanto,

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(H)) = \mathcal{L}(H).$$

2.6 Operaciones con variedades lineales

2.6.1 Intersección

Sea V un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$ y sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de V.

$L = L_1 \cap L_2$ es otra variedad lineal de V. En efecto:

$$\forall\, x, y \in L \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x, y \in L_1 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in L_1 \\ x, y \in L_2 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in L_2 \end{array} \right. \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \Rightarrow \lambda x + \mu y \in L_1 \cap L_2$$

Por tanto, $L_1 \cap L_2$ es una variedad lineal de V.

Si $L_i \;\; i \in I$ es un conjunto de variedades lineales de V entonces, $L = \displaystyle\bigcap_{i \in I} L_i$ es también una variedad lineal de V. Este resultado es fácil probarlo utilizando para ello el método de inducción.

2.6.2 Unión

La unión de dos variedades lineales no es, en general, otra variedad lineal.

En efecto: sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

$$\forall\, x, y \in L_1 \cup L_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in L_1 \quad \text{o} \quad x \in L_2 \\ y \in L_1 \quad \text{o} \quad y \in L_2 \end{cases}$$

Supongamos $x \in L_1$ e $y \in L_2$ ($y \notin L_1,\ x \notin L_2$). Entonces, $x + y \notin L_1$ y $x + y \notin L_2$ por lo que $x + y \notin L_1 \cup L_2$ y por tanto, $L_1 \cup L_2$ no es una variedad lineal.

2.6.3 Suma

Sean L_1 y L_2 dos variedades lineales de un espacio vectorial V definido sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$. Consideremos el conjunto

$$L = L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \ :\ x_1 \in L_1 \ \wedge\ x_2 \in L_2\}$$

El conjunto L de vectores de V tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbf{K}$ y recibe el nombre de **subespacio suma**. En efecto:

$$\forall\, x, y \in L = L_1 + L_2 \Rightarrow \begin{cases} x = x_1 + x_2 \quad \text{con} \quad x_1 \in L_1 \quad x_2 \in L_2 \\ y = y_1 + y_2 \quad \text{con} \quad y_1 \in L_1 \quad y_2 \in L_2 \end{cases}$$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{K}$ es $\lambda x + \mu y = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$

Como $\begin{cases} x_1,\ y_1 \in L_1 \Rightarrow \lambda x_1 + \mu y_1 \in L_1 \\ x_2,\ y_2 \in L_2 \Rightarrow \lambda x_2 + \mu y_2 n L_2 \end{cases}$

Por lo que $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) \in L_1 + L_2 = L$

Es decir, $L = L_1 + L_2$ es una variedad lineal de V.

Propiedades:

a) Toda variedad L que contenga a L_1 y a L_2, también contiene a $L_1 + L_2$ y viceversa.

b) $L_1 + L_2$ es la variedad lineal más pequeña que contiene a las variedades L_1 y L_2.

En efecto:

a) Sea L una variedad que contenga a L_1 y a L_2.

$$\forall\, z \in L_1 + L_2 \Rightarrow z = x + y \ \begin{cases} x \in L_1 \Rightarrow x \in L \\ y \in L_2 \Rightarrow y \in L \end{cases}$$

y como L es una variedad lineal

$$x, y \in L \Rightarrow z = x + y \in L \Rightarrow L_1 + L_2 \subset L$$

Recíprocamente si $L_1 + L_2 \subset L$

$\forall\, x \in L_1 \Rightarrow x = x + 0$ con $x \in L_1$ $0 \in L_2 \Rightarrow L_1 \subset L_1 + L_2 \subset L$

$\forall\, y \in L_2 \Rightarrow y = 0 + y$ con $0 \in L_1$ $y \in L_2 \Rightarrow L_2 \subset L_1 + L_2 \subset L$

b) Sea $L = L_1 + L_2$ y sea L' una variedad lineal de V tal que $L_1,\ L_2 \subset L'$. Veamos entonces que $L \subset L'$.

$\forall\, x \in L \Rightarrow x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2 \Rightarrow x_1 \in L',\ x_2 \in L'$ y por ser L' una variedad lineal $x_1 + x_2 \in L' \Rightarrow x \in L' \Rightarrow L \subset L'$. ■

2.6.4 Suma directa

Si dos variedades lineales L_1 y L_2 de un espacio vectorial V son disjuntas, es decir, si $L_1 \cap L_2 = \{0\}$ su suma se denomina *suma directa* y se denota por $L_1 \oplus L_2$

Teorema 2.13 *Si la suma de dos variedades es directa, cualquier vector de dicha suma se puede expresar de manera única como suma de un vector de cada una de las variedades. Es decir:* $\forall\, x \in L = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow$ *existen unos únicos vectores* $x_1 \in L_1,\ x_2 \in L_2$ *tales que* $x = x_1 + x_2$.

Recíprocamente si la descomposición es única, la suma es directa.

Demostración. Supongamos que $x \in L_1 \oplus L_2$ admitiese dos descomposiciones

$$\left.\begin{array}{l} x = x_1 + x_2 \ :\ x_1 \in L_1\ x_2 \in L_2 \\ x = y_1 + y_2 \ :\ y_1 \in L_1\ y_2 \in L_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1 + x_2 = y_1 + y_2 \Rightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Como $x_1 - y_1 \in L_1$ y $x_2 - y_2 \in L_2$, $x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \in L_1 \cap L_2 = \{0\} \Rightarrow x_1 - y_1 = x_2 - y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2$
y por tanto, la descomposición es única.

Recíprocamente si la descomposición es única, como

$$\forall\, x \in L_1 \cap L_2 \Rightarrow x = x + 0 = 0 + x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} x = x + 0 & \text{con} & x \in L_1\ 0 \in L_2 \\ x = 0 + x & \text{con} & 0 \in L_1\ x \in L_2 \end{array}\right.$$

y al ser única la descomposición $x = 0 \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$, por lo que la suma es directa. ■

2.7 Ecuaciones de los subespacios.

Sean V un espacio vectorial de dimensión n, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, L un subespacio de V de dimensión $r < n$ y $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ una base de L.

Se llaman **ecuaciones paramétricas** de L a las relaciones que ligan las coordenadas de un vector cualquiera $x \in L$ respecto de las bases $\mathcal{B}'$ de L y $\mathcal{B}$ de V.

$$\forall\, x \in L \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i \qquad \forall\, x \in L \subset V \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

$$u_1,\ u_2, \ldots,\ u_r \in V \Rightarrow u_i = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{ni}v_n \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ r$$

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n \Rightarrow$$

$$\lambda_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{n1}v_n) + \cdots + \lambda_r(a_{1r}v_1 + \cdots + a_{nr}v_n) = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{1r})v_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_r a_{nr})v_n = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$$

y al ser únicas las coordenadas de un vector respecto de una base, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_r a_{1r} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{n1} + \cdots + \lambda_r a_{nr} \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } L.$$

Se trata pues, de un sistema de n ecuaciones con r incógnitas siendo $r < n$.

Si en el sistema anterior eliminamos los parámetros $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_r$, se obtienen las denominadas **ecuaciones implícitas** de la variedad lineal L. Visto de otra forma, un vector $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertenece a la variedad L si y solo si el sistema anterior es compatible determinado en los parámetros $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$. Por tanto, si escalonamos la matriz ampliada del sistema, no debe haber pivotes en la última columna. Al igualar a cero esos pivotes obtenemos las ecuaciones implícitas de L.

Ejemplo 2.7 Para hallar las ecuaciones paramétricas e implícitas de la variedad L de $\mathbf{R}^5$ engendrada por los vectores

$$(1, 2, 1, 0, 0), (0, -1, 1, 1, 0), (1, 0, -1, 0, 1), (1, 1, 2, 1, 0).$$

Determinamos, en primer lugar, una base de L.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ F_{13}(-1) \\ F_{41}(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ F_{32}(-2) \\ F_{42}(-1) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto, una base de L es $\mathcal{B} = \{(1,2,1,0,0),(0,-1,1,1,0),(1,0,-1,0,1)\}$ y $\dim L = 3$. Debido a ello, cualquier vector $x \in L$ puede expresarse de la forma:

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \lambda_1(1,2,1,0,0) + \lambda_2(0,-1,1,1,0) + \lambda_3(1,0,-1,0,1)$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \\ x_4 = \lambda_2 \\ x_5 = \lambda_3 \end{array}\right\} \text{ Ecuaciones paramétricas de } L.$$

Obsérvese que las ecuaciones paramétricas no son únicas, dependen de las bases elegidas. Por ejemplo, otra base de L está formada por las filas no nulas y finales de la matriz escalonada resultante:

$$\mathcal{B}' = \{(1,2,1,0,0),(0,-1,1,1,0),(0,0,-4,-2,1)\},$$

por lo que podemos elegir libremente la base que mejor nos convenga. Vamos a hallar ahora unas ecuaciones implícitas a partir de las anteriores ecuaciones paramétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_{21}(-2) \\ F_{31}(-1) \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & -2 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \longrightarrow \\ F_{32}(1) \\ F_{42}(1) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & -3x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2 & -2x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 1 & x_5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \longrightarrow \\ 2F_4 + F_3 \\ 4F_5 + F_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & -3x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_5 = 0 \end{array}\right\}$$

Estas dos últimas son unas ecuaciones implícitas de L. $\square$

Analicemos una forma alternativa de resolver el ejercicio anterior. Puesto que el objetivo del primer escalonamiento en el ejercicio es sólo determinar vectores linealmente independientes en L, podemos ahorrar esfuerzos y pasar directamente al segundo escalonamiento para hallar simultáneamente las ecuaciones implícitas y una base de L. Basta tomar desde el principio todos los vectores generadores de L:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & x_3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ F_{21}(-2) \\ F_{31}(-1) \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \longrightarrow \\ F_{32}(1) \\ F_{42}(1) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \longrightarrow \\ 2F_4 + F_3 \\ 4F_5 + F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1 + x_2 + x_3 + 4x_5 \end{pmatrix}$$

Como puede observarse se han obtenido las mismas ecuaciones implícitas para L. Por otra parte, puesto que los pivotes del escalonamiento se encuentran en las tres primeras columnas de la matriz, una base de L está formada por los tres primeros vectores del sistema generador inicial. Esto nos llevaría a construir las mismas ecuaciones paramétricas que en la resolución anterior.

2.7.1 Ecuaciones del subespacio suma

Sean dos subespacios vectoriales L_1 y L_2 de un mismo espacio vectorial V. Supongamos que disponemos de una base para cada uno de los subespacios: $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ base de L_1 y $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ base de L_2. Queremos caracterizar el subespacio suma $L_1 + L_2$, proporcionando sus ecuaciones.

Sea $x \in L_1 + L_2 \Longrightarrow x = x_1 + x_2$ con $x_i \in L_i$. De donde resulta que

$$x = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \; + \; \sum_{j=1}^{s} \beta_j v_j$$

es una combinación lineal de los vectores $\{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$. Tenemos por tanto un sistema generador de L_1+L_2 sin más que juntar las dos bases. A partir de este sistema generador podemos eliminar vectores linealmente dependientes y obtener una base de $L_1 + L_2$. Con esa base, ya sabemos cómo obtener las ecuaciones paramétricas e implícitas que caracterizan al subespacio suma.

2.7.2 Ecuaciones del subespacio intersección

Sean dos subespacios vectoriales L_1 y L_2 de un mismo espacio vectorial V. Supongamos que disponemos de unas ecuaciones implícitas para cada uno de los subespacios, referidas a una misma base del espacio V:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}x_1 & + & a_{r2}x_2 & + & \dots & a_{rn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \dots & b_{1n}x_n & = & 0 \\ b_{21}x_1 & + & b_{22}x_2 & + & \dots & b_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ b_{s1}x_1 & + & b_{s2}x_2 & + & \dots & b_{sn}x_n & = & 0 \end{array} \right.$$

Queremos caracterizar el subespacio intersección $L_1 \cap L_2$, proporcionando sus ecuaciones.

Sea $x \in L_1 \cap L_2$. Como $x \in L_i,\ i = 1, 2$ entonces ha de verificar las ecuaciones implícitas de ambos subespacios. Tenemos entonces un nuevo sistema formado por la unión de los dos sistemas de ecuaciones anteriores. Si obtenemos, mediante escalonamiento, un sistema equivalente al anterior, las nuevas ecuaciones no nulas del sistema resultante constituyen unas ecuaciones implícitas del subespacio intersección $L_1 \cap L_2$. A partir de tales ecuaciones implícitas podemos obtener, resolviendo el sistema, una base del subespacio y con ésta, unas ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 2.8 Sean los subespacios vectoriales $L_1 = \mathcal{L}(\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\})$ y $L_2 = \mathcal{L}(\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 1)\})$. Hallar bases, ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas de las variedades: L_1, L_2, $L_1 \cap L_2$ y $L_1 + L_2$.

Calculamos en primer lugar unas ecuaciones implícitas de L_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_{21}(-1) \\ \\ F_{41}(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_{32}(-1) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Como los pivotes se encuentran sobre las dos primeras columnas, los dos vectores del sistema generador de L_1 son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de L_1. A partir de esta base obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 \\ x_2 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 & = & \lambda_2 \\ x_4 & = & \lambda_1 \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } L_1$$

De manera análoga, para L_2 tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{42}(-1)]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & x_3 & & & = & 0 \\ - & x_2 & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Como los pivotes se encuentran sobre las dos primeras columnas, los dos vectores del sistema generador de L_2 son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de L_2. A partir de esta base obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 \\ x_2 & = & \lambda_2 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & \lambda_2 \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } L_2$$

El subespacio intersección, $L_1 \cap L_2$, viene determinado por las ecuaciones

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ -x_1 & & & & & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si escalonamos dicho sistema resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{21}(1)]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_{42}(-1)]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_{43}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$L_1 \cap L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

que constituyen sus ecuaciones implícitas. Resolviendo el sistema, tenemos $x_3 = 0$, $x_2 = x_4$ y $x_1 = x_4$. Una base de $L_1 \cap L_2$ está formada (para $x_4 = 1$) por el vector $(1, 1, 0, 1)$ y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda \\ x_2 & = & \lambda \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & \lambda \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } L_1 \cap L_2$$

Finalmente, un sistema generador de $L_1 + L_2$ está formado por la unión de las bases de L_1 y L_2. A partir de éste, obtenemos las ecuaciones implícitas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ F_{21}(-1) \\ \\ F_{41}(-1) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \underset{F_{32}(-1)}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \underset{F_{43}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & x_3 - x_2 + x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 + x_3 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \text{ ecuación implícita de } L_1 + L_2 : \quad -x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

Como los pivotes se encuentran en las tres primeras columnas de la matriz, una base de $L_1 + L_2$ está formada por los tres primeros vectores del sistema generador: $\{(1, 1, 0, 1), \ (0, 1, 1, 0), \ (0, 1, 0, 0)\}$. Las ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 & = & \lambda_1 + \lambda_3 \\ x_2 & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_3 & = & \lambda_2 \\ x_4 & = & \lambda_1 \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas de } L_1 + L_2$$

$\square$

2.8 Propiedades de los espacios vectoriales de tipo finito.

Sea V un espacio vectorial de tipo finito con $\dim V = n$.

Teorema 2.14 *Todo subespacio propio H de V ($H \subset V$ siendo $H \neq V$) tiene dimensión menor que la de V.*

Demostración. $\dim H \leq \dim V$ ya que si V tiene dimensión n, no podemos encontrar $n+1$ vectores linealmente independientes. Veamos entonces que si H es un subespacio propio de V es $\dim H \neq \dim V$.

H subespacio propio de $V \Rightarrow \exists\ x \in V \ :\ x \notin H$. Si $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ es una base de H, $H' = \mathcal{L}(\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k,\ x\}$ es otro subespacio de V con $\dim H' = k+1$
$\dim V \geq \dim H' > \dim H \Rightarrow \dim V > \dim H$
Por tanto, la dimensión de H es estrictamente menor que la de V. ■

Teorema 2.15 *Dado un conjunto de vectores linealmente independientes*

$$\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$$

siendo $k < n = \dim V$, se pueden encontrar $n-k$ vectores $u_{k+1},\ u_{k+2}, \ldots, u_n$ tales que el conjunto $\{u_1, \ldots,\ u_k,\ u_{k+1}, \ldots,\ u_n\}$ constituya una base de V.

Demostración. $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\}$ genera un subespacio de V de dimensión $k < n$ $H_1 = \mathcal{L}(\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_k\})$ es decir, H_1 es un subespacio propio de V por lo que existe, al menos, un vector $u_{k+1} \in V$ tal que $u_{k+1} \notin H_1$.

$\{u_1, \ldots,\ u_k,\ u_{k+1}\}$ es un sistema libre (ya que $u_{k+1} \notin H$) que genera a la variedad $H_2 = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots,\ u_k,\ u_{k+1}\})$, que es otro subespacio de V de dimensión $k+1$.

Si $k+1 = n$ queda probada el Teorema. Si $k+1 < n$, H_2 es un subespacio propio de V por lo que existe otro vector $u_{k+2} \notin H_2$ y hacemos un razonamiento análogo al anterior.

Este proceso podrá continuarse $n-k$ veces, por lo que podrán encontrarse los $n-k$ vectores indicados. ■

Teorema 2.16 *Si $\{u_1, \ldots,\ u_r,\ v_1, \ldots,\ v_p\}$ es un sistema libre, los subespacios H_1* y *H_2 dados por $H_1 = \mathcal{L}(\{u_1, \ldots,\ u_r\})$ y $H_2 = \mathcal{L}(\{v_1, \ldots,\ v_p\})$ son disjuntos, es decir, $H_1 \cap H_2 = \{0\}$.*

Demostración. $x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in H_1 \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i \\ x \in H_2 \Rightarrow x = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \beta_j v_j \end{cases}$

$0 = x - x = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j v_j$ y como $\{u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_p\}$ es un sistema libre, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow H_1 \cap H_2 = \{0\}$. ■

Teorema 2.17 *Si H_1 y H_2 son dos subespacios de V, se verifica que*

$$\dim(H_1 + H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Demostración. Sea $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ una base de $H_1 \cap H_2$ y ampliémosla hasta obtener una base $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}\}$ de H_1 y otra base de H_2 $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, b_1, \ldots, b_{m-r}\}$.

Veamos que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}, b_1, \ldots, b_{m-r}\}$ es una base de $H_1 + H_2$.

a) El conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}, b_1, \ldots, b_{m-r}\}$ es un sistema libre ya que $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}\}$ lo es por ser una base de H_1 y los vectores $b_1, \ldots, b_{m-r}$ son linealmente independientes con ellos, pues si algún b_i dependiera de ellos sería $b_i \in H_1$, y como $b_i \in H_2$ se tendría que $b_i \in H_1 \cap H_2$, por lo que b_i sería combinación lineal de los $u_1, \ldots, u_r$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, b_1, \ldots, b_{m-r}\}$ no sería un sistema libre, en contra de que constituye una base de H_2.

b) $\{u_1, u_2, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}, b_1, \ldots, b_{m-r}\}$ generan a $H_1 + H_2$. En efecto:

   $\forall\, x \in H_1 + H_2 \Rightarrow x = u + v$ con $u \in H_1$ $v \in H_2 \Rightarrow$

   $$\left.\begin{array}{l} u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} a_1 + \cdots + \alpha_n a_{n-r} \\ v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \beta_{r+1} b_1 + \cdots + \beta_m b_{m-r} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

   $x = (\alpha_1 + \beta_1) u_1 + \cdots + (\alpha_r + \beta_r) u_r + \alpha_{r+1} a_1 + \cdots + \alpha_n a_{n-r} + \beta_{r+1} b_1 + \cdots + \beta_m b_{m-r} \Rightarrow$

   $\{u_1, \ldots, u_r, a_1, \ldots, a_{n-r}, b_1, \ldots, b_{m-r}\}$ genera a $H_1 + H_2$.

   Por tanto, $\dim(H_1 + H_2) = n + m - r = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$.
   ■

Teorema 2.18 *Si H_1 y H_2 son dos subespacios complementarios de un espacio vectorial V, es decir tales que $H_1 + H_2 = V$ y $H_1 \cap H_2 = \{0\}$, se verifica que*

$$\dim V = \dim H_1 + \dim H_2$$

Demostración. $H_1 + H_2 = V \Rightarrow \dim V = \dim(H_1 + H_2)$

$H_1 \cap H_2 = \{0\} \Rightarrow \dim(H_1 \cap H_2) = 0$

Por el Teorema anterior nos queda entonces que:

$$\dim V = \dim H_1 + \dim H_2$$

2.9 Cambio de bases

Sea V un espacio vectorial finito y consideremos dos bases cualesquiera $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \dots,\ u_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_n\}$ del espacio V.

Se llaman **ecuaciones de cambio de bases** en V a las relaciones que ligan las coordenadas de un mismo vector $x \in V$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

$$\forall\, x \in V \Rightarrow \begin{cases} x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \Rightarrow (\lambda_1, \dots,\ \lambda_n)_{\mathcal{B}} & \text{coord. de } x \text{ respecto a } \mathcal{B} \\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \Rightarrow (\mu_1, \dots,\ \mu_n)_{\mathcal{B}'} & \text{coord. de } x \text{ respecto a } \mathcal{B}' \end{cases}$$

Como $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \dots,\ v_n\} \subset V$ podemos expresar cada uno de los vectores de $\mathcal{B}'$ en función de la base $\mathcal{B}$, es decir, $(a_{1j},\ a_{2j}, \dots,\ a_{nj})_{\mathcal{B}}$ serán las coordenadas de v_j respecto de la base $\mathcal{B}$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j v_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mu_j \right) u_i \Rightarrow$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mu_j \qquad i = 1,\ 2, \dots,\ n$$

o en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \text{es decir} \quad x_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}'}$$

donde $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es la matriz del cambio de bases, llamada también *matriz de paso*, $x_{\mathcal{B}}$ es el vector de coordenadas referido a la base $\mathcal{B}$ y $x_{\mathcal{B}'}$ el vector de coordenadas referido a la base $\mathcal{B}'$. Obsérvese que las columnas de la matriz $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ están formadas por las coordenadas de cada vector de $\mathcal{B}'$ respecto de la base $\mathcal{B}$. Veamos dos propiedades interesantes de las matrices de paso:

- $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es una matriz regular ya que sus columnas son las coordenadas de los vectores de una base y éstos son linealmente independientes.

- $(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$. Puesto que las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}x_{\mathcal{B}'} \implies x_{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1}x_{\mathcal{B}} \text{ por ser matriz regular} \\ x_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}x_{\mathcal{B}} \text{ ecuación del cambio de } \mathcal{B} \text{ a } \mathcal{B}' \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$(P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}})^{-1} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Ejemplo 2.9 Dadas las bases de $\mathbf{R}^4$

$$\begin{array}{l} \mathcal{B} = \{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\} \\ \text{y} \\ \mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\} \end{array}$$

donde $v_1 = u_1 - 2u_2 + u_3\ ,\ v_2 = u_1 - u_3\ ,\ v_3 = u_2 + u_4\ ,\ v_4 = u_2 + u_3$
se desea conocer:

a) Ecuaciones del cambio de bases.

b) Si x tiene de coordenadas $(1, 2, 0, -1)_{\mathcal{B}}$, ¿qué coordenadas tendrá respecto a $\mathcal{B}'$?

c) Si x tiene de coordenadas $(0, 0, -1, 1)_{\mathcal{B}'}$, ¿qué coordenadas tendrá respecto a $\mathcal{B}$?

Para resolverlo, nos basta con:

a)

$$\begin{array}{lll} v_1 = u_1 - 2u_2 + u_3 & \rightarrow & v_1 = (1, -2, 1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_2 = u_1 - u_3 & \rightarrow & v_2 = (1, 0, -1, 0)_{\mathcal{B}} \\ v_3 = u_2 + u_4 & \rightarrow & v_3 = (0, 1, 0, 1)_{\mathcal{B}} \\ v_4 = u_2 + u_3 & \rightarrow & v_4 = (0, 1, 1, 0)_{\mathcal{B}} \end{array}$$

y estamos en condiciones de escribir la ecuación matricial del cambio de base $x_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}x_{\mathcal{B}'}$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos una vez resuelta la matriz inversa:

$$x'_1 = -1/2 \quad , \quad x'_2 = 3/2 \quad , \quad x'_3 = -1 \quad , \quad x'_4 = 2$$

Es decir, las coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}'$ son $x = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -1, 2)_{\mathcal{B}'}$

c) $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es decir, las coordenadas de x respecto de la base $\mathcal{B}$ son $x = (0, 0, 1, -1)_{\mathcal{B}}$.

□

2.10 Espacios fundamentales asociados a una matriz.

Generalmente los subespacios vectoriales pueden ser descritos de dos formas: dando un conjunto de vectores que generen a dicho subespacio, tal como sucede con el espacio columna (o el espacio fila) de una matriz, donde se especifican las columnas (o filas) o dando una lista de restricciones que debe cumplir el subespacio, es decir, en lugar de dar los vectores que lo generan, dar las propiedades que deben cumplir. Por ejemplo, el espacio nulo de una matriz

A consta de todos los vectores que verifican $Ax = 0$ donde cada una de las ecuaciones de este sistema representa una restricción.

En el primer tipo de descripción puede haber filas o columnas combinaciones lineales de las demás y por ello, no sería necesario darlas para definir al subespacio. En la segunda, pueden existir restricciones a las que les ocurra lo mismo, es decir, que puedan evitarse por estar implícitamente exigidas en las demás. En ambos casos es difícil dar una base a simple vista, siendo necesario un procedimiento sistemático.

La idea consiste en dar una base para cada uno de los subespacios asociados a una matriz A a partir de una matriz escalonada U, obtenida por eliminación gaussiana.

2.10.1 Espacio fila de A: $[R(A^t)]$.

Al aplicar la eliminación gaussiana a una matriz A se produce una matriz escalonada U. El *espacio fila* de U o espacio generado por las filas de U, se obtiene directamente. Su dimensión es el número de filas linealmente independientes y las filas no nulas constituyen una base.

El espacio fila de A tiene la misma dimensión que el de U así como la misma base, ya que ambos espacios fila son el mismo, pues las transformaciones elementales filas no alteran el espacio fila, ya que cada fila de U es una combinación lineal de las de A por lo que el nuevo espacio fila está contenido en el primitivo. Como cada paso puede anularse al mismo tiempo mediante una transformación elemental inversa, el espacio original está contenido en el nuevo espacio fila.

2.10.2 Espacio nulo de A: $[N(A)]$.

Se denomina *espacio nulo* de una matriz A a la variedad formada por todos los vectores $x \in \mathbf{R}^n$ tales que $Ax = 0$.

El propósito original de la eliminación gaussiana es el de simplificar un sistema de ecuaciones lineales haciéndolo más manejable y sin alterar sus soluciones.

Dado el sistema $Ax = 0$ y mediante eliminación obtenemos $Ux = 0$ siendo el proceso reversible y por tanto, el espacio nulo de A es el mismo que el de U.

Dado el sistema con m-ecuaciones, de las m-aparentes restricciones de $Ax = 0$ suponemos que sólo r son independientes $(r < m)$ y estarán especificada por cualesquiera r-filas de A que sean independientes, o lo que es lo mismo, por las r-filas de U no nulas.

El espacio nulo de A, $N(A)$ tendrá dimensión $n-r$ y podemos obtener una base mediante la reducción al sistema $Ux=0$ que tiene $(n-r)$-variables libres correspondientes a las columnas de U sin pivotes. Dando alternativamente los valores 1 y 0 para cada una de las variables libres y resolviendo $Ux=0$ para las restantes variables, mediante sustitución regresiva obtenemos los $(n-r)$-vectores que forman una base de $N(A)$.

Ejemplo 2.10 Para hallar una base del espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dado que $U=A$, $Ux=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$

$$\left.\begin{array}{r} x_1+3x_2+3x_3+2x_4=0 \\ 3x_3+x_4=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x_4=-3x_3 \\ x_1=-3x_2+3x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{llclll} x_2=1 & x_3=0 & \Rightarrow & x_1=-3 & x_4=0 & (-3,1,0,0) \\ x_2=0 & x_3=1 & \Rightarrow & x_1=3 & x_4=-3 & (3,0,1,-3) \end{array}$$

$$\mathcal{B}_{N(A)} = \{(-3,1,0,0),(3,0,1,-3)\}$$

□

2.10.3 Espacio columna de A. $[R(A)]$.

Es frecuente denominarlo *recorrido de A* y se denota por $R(A)$, siendo consistente con la idea usual de recorrido de una función f como el conjunto de todos los posibles valores de $f(x)$. Si $f(x)$ está definida, x está en el dominio y $f(x)$ es el recorrido.

En nuestro caso, el dominio de la función $f(x)=Ax$ consta de todos los vectores $x \in \mathbf{R}^n$ y su recorrido, de todos los posibles valores Ax. En definitiva, los valores b para los que puede resolverse $Ax=b$.

El problema que pretendemos resolver es encontrar una base de $R(A)$ así como su dimensión. Una idea razonable es calcular el espacio fila de A^t que coincide con el espacio columna de A pero vamos a relacionarlo a continuación con la eliminación gaussiana.

Hay que destacar que los espacios columnas de A y de U no coinciden. La eliminación gaussiana no altera ni el espacio nulo ni el fila, pero las columnas son completamente diferentes. Si por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es cierto que, cada vez que ciertas columnas de U forman una base del espacio columna de U, las correspondientes columnas de A forman una base del espacio columna de A. La razón es que el sistema $Ax = 0$ es equivalente al $Ux = 0$, teniendo por tanto las mismas soluciones.

Encontrar una base de $R(A)$ consistirá en encontrar una base del espacio columna de U y como sabemos que al ser linealmente independientes las r-filas distintas de cero de la matriz escalonada U también lo son las r-columnas que contienen a los pivotes no nulos, podemos asegurar que una base de $R(U)$ está constituida por las r-columnas de U que contienen a los pivotes no nulos.

Conclusión:

La dimensión del espacio columna de A es igual a la dimensión del espacio fila $R(A^t)$, el número de columnas independientes es igual al número de filas independientes, es decir, una base de $R(A)$ está formada por aquellas r-columnas de A correspondientes en U a las que contienen a los pivotes no nulos.

El hecho de que tanto el espacio fila como el espacio columna tengan la misma dimensión, expresa uno de los teoremas más importantes del Álgebra Lineal denominado *teorema del rango*: el rango fila es igual al rango columna.

2.11 Teorema de Rouche-Fröbenius

Consideremos el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$S \equiv \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow Ax = b$$

donde $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbf{R}^{n\times 1}$, $b \in \mathbf{R}^{m\times 1}$.

Se denomina **matriz ampliada** con los términos independientes y se denota por $(A|b)$ a la matriz

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Teorema 2.19 [Teorema de Rouche-Fröbenius.]

a) El sistema $Ax = b$ es compatible, es decir, tiene solución si y sólo si $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|b)$.

a.1) Si $b = 0$ el conjunto de soluciones de $Ax = 0$ constituye un subespacio vectorial L de $\mathbf{R}^n$.

a.2) Si $b \neq 0$ el conjunto de soluciones, si existen, es de la forma $x_1 + L$ donde x_1 es una solución particular de $Ax = b$ y L es la variedad lineal de los vectores soluciones de $Ax = 0$, es decir, del espacio nulo de A.

b) Si $\mathrm{r}(A) = r \Rightarrow \dim L = n - r$.

Demostración.

a) Si $Ax = b$ tiene solución, equivale a que b es una combinación lineal de las columnas de A, es decir, al añadir a la matriz A la columna b, no se altera su rango y por tanto $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|b)$.

a.1) Si $x,\ y$ verifican que $Ax = 0\ ,\ Ay = 0 \Rightarrow, \forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}, A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = \lambda 0 + \mu 0 = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu y \in L \Rightarrow$ el conjunto L de las soluciones de $Ax = 0$ es una variedad lineal de $\mathbf{R}^n$.

a.2) Si $x,\ x_1$ verifican $Ax = b\ ,\ Ax_1 = b\ \Rightarrow A(x - x_1) = Ax - Ax_1 = b - b = 0 \Rightarrow x - x_1 \in L \Rightarrow x \in x_1 + L$.

b) $\mathrm{r}(A) = r$ equivale a decir que el sistema $Ax = 0$ posee $n - r$ variables libres, es decir, que $\dim L = n - r$. ■

Observaciones:

- De a) se deduce que $Ax = b$ es incompatible si y solo si $\mathrm{r}(A) \neq \mathrm{r}(A|b)$

- De b) se deduce que si $\mathrm{r}(A) = r = n$ entonces $\dim L = 0$ y por tanto el espacio nulo está formado sólo por la solución trivial. El sistema homogéneo $Ax = 0$ es incompatible.

2.12 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1 Resolver, utilizando el método de reducción de Gauss, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & + & z & + & 2t & + & 4u & = & 4 \\ -2x & - & 4y & - & z & - & 3t & - & 6u & = & -6 \\ 2x & + & 4y & & & + & t & + & 4u & = & 4 \\ 3x & + & 6y & + & z & + & 4t & + & 7u & = & 8 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.2 Resolver, utilizando el método de reducción de Gauss, el siguiente sistema homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & - & t & = & 0 \\ 3x & - & y & & & - & 2t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.3 Discutir, y resolver en su caso, según los valores de a, los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 2 \\ 3x & + & 2y & = & 4 \\ 4x & + & y & = & a \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & ay & + & z & = & a \\ x & + & y & + & az & = & a \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.4 Discutir, y resolver en su caso, según los valores de a y c, el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & z & + & at & = & c \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 12 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & -8 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.5 Estudiar, según los valores de m, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 18y & - & 2mz & = & 0 \\ 7x & - & 2y & - & 4z & = & 0 \\ 4x & + & 10y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.6 Estudiar, y resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 2y & + & z & = & \lambda\, x \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & \lambda\, y \\ 2x & + & 4y & + & 8z & = & \lambda\, z \end{array}\right.$$

Ejercicio 2.7 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Encontrar m para que existan matrices cuadradas B y no nulas tales que $A \cdot B = 0$.

b) Probar que el conjunto de todas estas matrices B, es una variedad lineal de las matrices cuadradas de orden 2.

Ejercicio 2.8 Se dice que una matriz $M \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ es mágica si las ocho sumas siguientes son iguales:

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \quad (j = 1,2,3) \qquad \sum_{j=1}^{3} a_{ij} \quad (i = 1,2,3) \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ii} \qquad a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

Designando por s el valor de estas sumas y por $M(s)$ a las matrices correspondientes:

a) Probar que las matrices mágicas $M(s)$ cualquiera que sea $s \in \mathbf{R}$ constituyen una variedad lineal de $\mathbf{R}^{3\times 3}$.

b) Construir todas las matrices mágicas antisimétricas, así como todas las simétricas.

Ejercicio 2.9 De un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas se sabe que admite las soluciones $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ y que además uno de los coeficientes del sistema es no nulo. Hallar, en función de los parámetros que sean necesarios, todas las soluciones del sistema.

Ejercicio 2.10 Factorizar A en LU y escribir el sistema triangular superior $Ux = c$ que aparece después de la eliminación, resolviéndolo, para:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.11 En $\mathbf{R}^3$ se considera el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & (\alpha+8)y & & & = & 3\alpha - 6 \\ \alpha x & - & 2\alpha y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & + & 8y & - & z & = & 2\alpha - 4 \end{array} \right.$$

Discutirlo y resolverlo según los valores del parámetro α.

Ejercicio 2.12 Dados los vectores $v_1 = (-1, 0, 4, 1)$, $v_2 = (3, -2, 0, 2)$ y $v_3 = (2, a, -2, 0)$ de $\mathbf{R}^4$, determinar qué condición ha de verificar a para que $v = (2, -3, -2, 3)$ sea combinación lineal de v_1, v_2 y v_3.

Ejercicio 2.13 Determinar si los vectores del espacio vectorial $\mathbf{R}^4$:

$$v_1 = (0, 1, -2, 1), \ v_2 = (-1, 7, 2, -4), \ v_3 = (1, 3, 2, -1) \text{ y } v_4 = (1, 0, 0, 1)$$

son linealmente independientes. En caso de no serlo, encontrar la relación de dependencia.

Ejercicio 2.14 Sean u, v, y w tres vectores, linealmente independientes, de un espacio vectorial. Demostrar que los vectores $u + v$, $u - v$, y $u - 2v + w$, también son linealmente independientes.

Ejercicio 2.15 Estudiar, según los valores de m y n, la dependencia, o independencia, lineal de los siguientes vectores:

a) $u = (1, 1, 0, m)$, $v = (3, -1, n, -1)$ y $w = (-3, 5, m, -4)$

b) $(1, -2, 1, 0)$, $(1, -3, -2, 2)$, $(0, -2, 1, -5)$, $(2, 0, 7, 1)$ y $(4, -5, 6, m)$

Ejercicio 2.16 Sea $\{u_1, ..., u_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V.
Demostrar que el conjunto de vectores $\{v_1, ..., v_n\}$, donde $v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 - u_2$, $v_3 = u_1 - u_2 - u_3, \ldots, v_n = u_1 - u_2 - \cdots - u_n$, es linealmente independiente.

Ejercicio 2.17 Sea V un espacio vectorial, L un subespacio de V y $\{u_1, ..., u_n\}$ un sistema generador de L formado por vectores linealmente independientes. Demostrar que si x es un vector de V que no pertenece a L, entonces $\{u_1, ..., u_n, x\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

Ejercicio 2.18 Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.19 En $\mathbf{R}^3$, consideremos el subconjunto $A = \{(0, x, y) : \ x, y \in \mathbf{R}\}$. Se pide:

a) Demostrar que A es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^3$.

b) Probar que si $B = \{(0,1,0),(0,1,1)\}$ y $C = \{(0,1,1),(0,1,2),(0,2,1)\}$ entonces $A = \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(C)$.

Ejercicio 2.20 En $\mathbf{R}^3$ se consideran los conjuntos:

$$A = \{(1,0,1)\},\ B = \{(1,0,0),(0,1,1)\} \text{ y } C = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$$

Sean $U = \mathcal{L}(A)$, $V = \mathcal{L}(B)$ y $W = \mathcal{L}(C)$. Se pide:

a) Estudiar si U y V son subespacios suplementarios. Análogamente, para V y W.

b) Expresar, si es posible, $(2,1,2)$ como suma de un vector de U y otro de V. ¿La descomposición es única?

c) Expresar, si es posible, $(3,0,3)$ como suma de un vector de V y otro de W. ¿La descomposición es única?

Ejercicio 2.21 Sea $P_n[x]$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales.

a) Demostrar que $P_n[x]$ es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial.

b) Demostrar que $\{1,\ x,\ x^2\}$ es una base de $P_2[x]$. Generalizar a una base de $P_n[x]$.

Ejercicio 2.22 En $\mathbf{R}^4$ se consideran los vectores $\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\}$, siendo:

$$u_1 = (1,2,3,4),\ u_2 = (2,3,4,1),\ u_3 = (3,4,1,2) \text{ y } u_4 = (4,1,2,3)$$

Probar que forman una base de $\mathbf{R}^4$ y hallar, respecto de ella, las coordenadas de $v = (1,1,1,1)$.

Ejercicio 2.23 Probar que el conjunto de las matrices de orden $m\times n$, con elementos reales, es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial. Determinar una base y la dimensión de dicho espacio vectorial.

Ejercicio 2.24 Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del $\mathbf{R}$-espacio vectorial V. Se consideran los conjuntos $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $B'' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$, donde:

$$v_1 = (0, 1, 0, 3),\ v_2 = (-1, 1, 0, 0),\ v_3 = (-2, 0, -1, 2),\ v_4 = (-1, -1, -1, 1)$$

$$w_1 = (2, -2, 0, 1),\ w_2 = (1, 1, 1, 0),\ w_3 = (3, 0, 1, -1),\ w_4 = (0, -2, -1, 1)$$

respecto de la base B. Se pide:

a) Probar que B y B' son bases de V.

b) Hallar la matriz del cambio de base de B' a B''.

c) Determinar las coordenadas respecto de B' del vector x cuyas coordenadas respecto de B'' son $(2, 1, 0, -1)$.

Ejercicio 2.25 Sea $B = \{u, v, w\}$ una base del espacio vectorial V. Sean $u' = 2u - v + w$, $v' = u + w$ y $w' = 3u - v + 3w$.

a) Probar que $B' = \{u', v', w'\}$ es una base de V.

b) Establecer las ecuaciones del cambio de base de B a B'.

c) Hallar las coordenadas respecto de B del vector $z = -2u' + 3v' + w'$.

Ejercicio 2.26 Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial y $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base de V. Para cada uno de los subespacios engendrados por los vectores que se expresan calcular, la dimensión, una base contenida en el sistema de generadores dado y la expresión de los restantes vectores respecto de la base.

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} v_1 & = & 2e_1 & - & 3e_2 & + & e_3 & & \\ v_2 & = & 6e_1 & - & 5e_2 & & & + & 2e_4 \\ v_3 & = & 2e_1 & + & e_2 & - & 2e_3 & + & 2e_4 \end{array} \right.$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} u_1 & = & e_1 & - & e_2 & + & e_3 & - & e_4 \\ u_2 & = & e_1 & + & e_2 & + & e_3 & + & e_4 \\ u_3 & = & & - & e_2 & + & e_3 & + & e_4 \\ u_4 & = & e_1 & + & e_2 & + & & & e_4 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.27 En $\mathbf{R}^4$ se consideran los vectores, $u_1 = (1, -2, 1, 3)$, $u_2 = (2, -4, 0, 2)$, $u_3 = (3, -6, 1, 5)$ y $u_4 = (2, -4, -4, -6)$. Se pide:

a) Ecuaciones implícitas de $L = \mathcal{L}(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

b) Dimensión y base de L.

c) Coordenadas de los vectores dados respecto de la base formada.

d) Prolongación de la base de L a una de $\mathbf{R}^4$.

Ejercicio 2.28 Determinar en $\mathbf{R}^3$ un subespacio suplementario de cada uno de los subespacios engendrados por los siguientes vectores:

a) $u = (-3, 1, 0)$

b) $u = (-1, 2, 1),\ v = (2, -4, 3)$

c) $u = (-1, 2, 1),\ v = (2, 1, -2),\ w = (1, 1, -1)$

Ejercicio 2.29 Construir en $\mathbf{R}^5$, un subespacio suplementario del subespacio:

$$L : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & + & & & 2x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.30 Sea V un $\mathbf{R}$-espacio vectorial de dimensión 5 y B una base de V

$$B = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$$

Se consideran los subespacios:

$$F : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

respecto de B, y

$$G =< v_1, v_2, v_3, v_4 >$$

donde los vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ y v_4 vienen dados por:

$$\begin{array}{ll} v_1 = (1, 0, 0, -1, 0)_B & v_2 = (0, -1, -1, 4, -1)_B \\ v_3 = (1, 1, 0, -4, 0)_B & v_4 = (3, -2, 4, -1, 4)_B \end{array}$$

Determinar la dimensión, una base, ecuaciones implícitas y paramétricas de F, G, $F \cap G$ y $F + G$, respecto de la base B.

Ejercicio 2.31 Dados los siguientes subespacios de $\mathbf{R}^4$ por sus ecuaciones paramétricas, obtener sus ecuaciones implícitas:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & \alpha & + & \beta & & \\ x_2 & = & & & \beta & + & \mu \\ x_3 & = & \alpha & & & + & \mu \\ x_4 & = & \alpha & + & \beta & + & \mu \end{array} \right. \qquad L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 2\alpha & - & \beta \\ x_2 & = & \alpha & + & 2\beta \\ x_3 & = & -\alpha & + & \beta \\ x_4 & = & & & \beta \end{array} \right.$$

Ejercicio 2.32 Se consideran en $\mathbf{R}^4$ los subespacios F y G engendrados respectivamente por $< u_1, u_2, u_3 >$ y $< v_1, v_2, v_3 >$, siendo:

$$u_1 = (3,3,1,1) \qquad u_2 = (1,-3,1,1) \qquad u_3 = (3,1,-1,3)$$

$$v_1 = (2,2,0,1) \qquad v_2 = (2,0,1,1) \qquad v_3 = (1,1,-1,-1)$$

Hallar las ecuaciones de $F \cap G$ y de $F + G$.

Ejercicio 2.33 Dar una condición necesaria y suficiente para que:

$$\mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n) \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}(v_1, v_2, \cdots, v_n, w)$$

sean las mismas variedades lineales.

Ejercicio 2.34 Sean F, L_1 y L_2, variedades lineales de $\mathbf{R}^n$, y $F \subset L_1 + L_2$.
¿Es siempre cierto que $F = (F \cap L_1) + (F \cap L_2)$?
¿Qué se puede decir acerca de esta relación, en el caso particular en que $L_1 \subset F$?

Ejercicio 2.35 Sean F y G variedades lineales de $\mathbf{R}^n$. ¿Existe alguna condición para que $F \cup G$ sea variedad lineal?

Ejercicio 2.36 En $\mathbf{R}^4$ se consideran las variedades lineales:

$$L_1 =< (1,-1,2,0), (1,2,-1,3), (2, 2+\alpha, 3+2\alpha, 3) >$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & (\beta-1)x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2\beta x_3 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Estudiar, en función de los valores de α y β, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$, dando sus ecuaciones, dimensiones y bases.

Ejercicio 2.37 En $\mathbf{R}^4$ se consideran las variedades lineales:

$$L_1 =< (1,-1,0,2), (0,2,1,-1), (2,0,1,\alpha) >$$

$$L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 5x_3 & + & \alpha x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Hallar α para que $L_1 \cap L_2$ esté engendrado por un único vector. ¿Existe algún α para el cuál $L_1 \cap L_2$ tenga una base de dos elementos?

b) Para los valores anteriores de α, hallar tres bases B_0, B_1 *y* B_2 de $L_1 \cap L_2$, L_1 y $L_1 + L_2$, respectivamente, de modo que $B_0 \subset B_1 \subset B_2$.

Ejercicio 2.38 Dadas las variedades lineales de $\mathbf{R}^4$:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_2 : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & - & \alpha x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Hallar, en función de α, una base de $L_1 \cap L_2$ y unas ecuaciones de $L_1 + L_2$.

3. Aplicaciones lineales.

A menudo el concepto de aplicación se confunde con el de función. A diferencia de una aplicación, no todos los elementos del conjunto de partida de una función tienen necesariamente una imagen en el conjunto de llegada. Por ejemplo, la función $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ / \ x \longmapsto x^2$ es aplicación, sin embargo $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \ / \ x \longmapsto \frac{1}{x}$ no lo es pues el 0 no tiene imagen.

En otras palabras, una aplicación de un conjunto en otro es cualquier regla mediante la cual a cada elemento del conjunto de partida se le asocia un único elemento del conjunto de llegada.

Sean U y V dos espacios vectoriales definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$ (normalmente trabajaremos en $\mathbf{R}$) y sea $f : U \to V$ una aplicación.

Se dice que f es una *aplicación lineal* u *homomorfismo* entre los espacios vectoriales U y V si cumple:

a) $\forall\, x, y \in U \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$ *aditividad.*

b) $\forall\, \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall\, x \in U \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *homogeneidad.*

Es fácil probar la siguiente caracterización de las aplicaciones lineales.

Teorema 3.1 *Una aplicación f entre dos espacios vectoriales U y V definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$ es un homomorfismo si, y sólo si,*

$$\forall\, \lambda, \mu \in \mathbf{K} \quad \forall\, x, y \in V \Rightarrow f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

- Si $U \equiv V$ y $f : U \to V$ es lineal se dice que f es un *endomorfismo.*
- Si $f : U \to V$ es lineal y biyectiva se dice que es un *isomorfismo.*

- Si $U \equiv V$ y f es un isomorfismo se dice que f es un *automorfismo.*

Nota: Recordemos que una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva. Es inyectiva si todo elemento de V es imagen, a lo sumo, de un elemento de U o dicho de otra forma, no puede haber dos elementos distintos en U con la misma imagen en V. Es sobreyectiva si todo elemento de V es imagen al menos, de un elemento de U.

Ejemplo 3.1

a) $f : \mathbf{P}_2[x] \rightarrow \mathbf{P}_1[x]$ definida por $f(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$ es un homomorfismo.

   Veámoslo:

   Según el Teorema 3.1, tendríamos que probar que

   $f(\lambda(ax^2+bx+c)+\mu(ax^2+bx+c)) = \lambda f(ax^2+bx+c)+\mu f(ax^2+bx+c)$

   $f(\lambda(ax^2+bx+c)+\mu(ax^2+bx+c)) = 2a\lambda x+b\lambda+2\mu ax+\mu b = \lambda(2ax+b)+\mu(2ax+b) = \lambda f(ax^2+bx+c)+\mu f(ax^2+bx+c)$ ■

b) $\theta : U \rightarrow V$ definida por $\theta(u) = 0 \ \ \forall\, u \in U$ es un homomorfismo y se dice que es el homomorfismo nulo.

c) $I : U \rightarrow U$ definida por $I(u) = u \ \ \forall\, u \in U$ es un automorfismo y se dice que es el automorfismo identidad.

□

Propiedades:

Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y E' definidos sobre el mismo cuerpo $\mathbf{K}$. Se verifican las siguientes propiedades:

a) $f(0_E) = 0_{E'}$ y $f(-x) = -f(x) \ \ \forall\, x \in E$

   ya que

   $f(x) = f(x + 0_E) = f(x) + f(0_E) \Rightarrow f(0_E) = 0_{E'}$

   $0_{E'} = f(0_E) = f(x+(-x)) = f(x)+f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \ \ \forall\, x \in E.$

b) Si U es un subespacio vectorial de E, $f(U)$ lo es de E', puesto que

$\forall\, x, y \in f(U) \Rightarrow \exists\, u, v \in U \;:\; f(u) = x,\; f(v) = y$

$u, v \in U$ y U subespacio de $E \Rightarrow \forall\, \lambda,\; \mu \in \mathbf{K}$ es $\lambda u + \mu v \in U \Rightarrow$

$f(\lambda u + \mu v) \in f(U) \Rightarrow \lambda f(u) + \mu f(v) \in f(U) \Rightarrow \lambda x + \mu y \in f(U) \Rightarrow$

$f(U)$ es un subespacio vectorial de E'.

c) Si V es un subespacio vectorial de E', $f^{-1}(V)$ lo es de E ya que

$\forall\, x, y \in f^{-1}(V) = \{x \in E \;:\; f(x) \in V\} \Rightarrow f(x),\; f(y) \in V \Rightarrow$

$\forall\, \lambda,\; \mu \in \mathbf{K}\;\; \lambda f(x) + \mu f(y) \in V$ (por ser V subespacio de E') $\Rightarrow$

$f(\lambda x + \mu y) \in V \Rightarrow \lambda x + \mu y \in f^{-1}(V) \Rightarrow$

$f^{-1}(V)$ es un subespacio vectorial de E.

d) Si $v_1,\; v_2, \ldots,\; v_n$ son vectores linealmente dependientes en el espacio E, $f(u_1),\; f(u_2), \ldots,\; f(u_n)$ son vectores linealmente dependientes en E'.

En efecto:

Si los vectores $\{v_1,\; v_2, \ldots,\; v_n\}$ son linealmente dependientes, existen $\alpha_1, \ldots,\; \alpha_n \in \mathbf{K}$ con algún $\alpha_i \neq 0$ tales que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, por lo que $f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = f(0) = 0$.

Por ser f lineal, se tiene que $\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_n f(v_n) = 0$ con algún $\alpha_i \neq 0$, por lo que $\{f(v_1),\; f(v_2), \ldots,\; f(v_n)\}$ son linealmente dependientes.

e) Si $\{v_1,\; v_2, \ldots,\; v_n\}$ es un sistema generador de E, el conjunto de vectores $\{f(u_1),\; f(u_2), \ldots,\; f(u_n)\}$ es un sistema generador de $f(E) \subset E'$.

En efecto:

$\forall\, x \in f(E) \Rightarrow \exists\, y \in E \;:\; f(y) = x$

$$y \in E \Rightarrow y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \Rightarrow x = f(y) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) \Rightarrow$$

$\{f(v_1),\; f(v_2), \ldots,\; f(v_n)\}$ es un sistema generador de $f(E)$.

3.1 Núcleo e Imagen de una aplicación lineal.

Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal. Se denomina *imagen de f* y se denota por Imf o $f(U)$ al conjunto

$$\text{Im}f = f(U) = \{v \in V \ : \ v = f(u) \ \text{ con } \ u \in U\}$$

Se denomina *núcleo de f* y se denota por Ker$f$ al conjunto

$$\text{Ker}f = \{x \in U \ : \ f(x) = 0\} = f^{-1}(0)$$

Teorema 3.2

a) La imagen de f es una variedad lineal de V.

b) El núcleo de f es una variedad lineal de U.

Demostración.

a) Es una consecuencia inmediata de la segunda propiedad de las aplicaciones lineales.

b) Es consecuencia de la tercera propiedad, ya que $\{0\}$ es una variedad lineal de U y Ker$f = f^{-1}(0)$. ■

Teorema 3.3 *Una aplicación lineal f entre dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$ es inyectiva si, y sólo si, Ker$f = \{0\}$.*

Demostración. Si f es inyectiva y $x \in \text{Ker}f \Rightarrow f(x) = 0$. Al ser $f(0) = 0$, se tiene que $f(x) = f(0)$ y por ser f inyectiva es $x = 0$, por lo que Ker$f = \{0\}$.

Recíprocamente, si Ker$f = \{0\}$ y $f(x) = f(y) \Rightarrow f(x - y) = 0 \Rightarrow x - y \in \text{Ker}f \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$ es decir, f es inyectiva. ■

Teorema 3.4 *Una aplicación lineal $f : U \to V$ es inyectiva si, y sólo si, cualquier sistema de vectores linealmente independientes de U se transforma mediante f en un sistema linealmente independiente de vectores de V.*

Demostración. Sea f inyectiva y sea $\{u_1, \ u_2, \ldots, \ u_n\}$ un sistema libre de vectores. Vamos a probar que $\{f(u_1), \ f(u_2), \ldots, \ f(u_n)\}$ es también un sistema libre. En efecto:

$$0 = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \cdots + \alpha_n f(u_n) \Leftrightarrow 0 = f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n) \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

y como $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ es un sistema libre de vectores, han de ser nulos todos los α_i $1 \le i \le n$, por lo que $\{f(u_1),\ f(u_2), \ldots,\ f(u_n)\}$ es un sistema libre.

Recíprocamente, si para cualquier sistema libre $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ es también libre el sistema $\{f(u_1),\ f(u_2), \ldots,\ f(u_n)\}$ entonces f es inyectivo. En efecto:

Por ser para *cualquier* sistema libre, ha de verificarse para $\{u\}$ con $u \neq 0$, por lo que entonces $\{f(u)\}$ es un sistema libre, es decir, $f(u) \neq 0$ lo que implica que $u \notin \mathrm{Ker} f$ de donde se deduce que si $u \neq 0 \Rightarrow u \notin \mathrm{Ker} f$ es decir, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ lo que nos lleva a que f es inyectivo. ■

Teorema 3.5 *Una aplicación lineal $f : U \to V$ es sobreyectiva si, y sólo si, cualquier sistema generador de U se transforma mediante f en un sistema generador de V.*

Demostración. f sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall\, v \in V \ \ \exists\, u \in U \ : \ f(u) = v$

Si $\{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ es un sistema generador de U $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \Rightarrow$

$v = f(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(u_i) \Leftrightarrow \{f(u_1),\ f(u_2), \ldots,\ f(u_n)\}$ es un sistema generador de V. ■

Teorema 3.6 *Si $f : U \to V$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$ se verifica que:*

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$$

Demostración. Sean $\dim U = n$ y $\dim V = m$. Si $\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r\}$ es una base de $\mathrm{Ker} f$ podemos ampliarla hasta formar una base de U. Sean $\{b_1,\ b_2, \ldots,\ b_{n-r}\}$ los vectores necesarios para la ampliación. Entonces, los vectores $\{b_1,\ b_2, \ldots,\ b_{n-r}\}$ constituyen una base de un subespacio vectorial H de U complementario del $\mathrm{Ker} f$

$$\mathrm{Ker} f + H = U \qquad \mathrm{Ker} f \cap H = \{0\}$$

$f(\{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r,\ b_1, \ldots,\ b_{n-r}\}) = \{0,\ 0, \ldots,\ 0,\ f(b_1), \ldots,\ f(b_{n-r})\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im} f = f(U)$ y por tanto, $\{f(b_1), \ldots,\ f(b_{n-r})\}$ es un sistema generador de $\mathrm{Im} f$. Veamos que son linealmente independientes. Si

$$\lambda_1 f(b_1) + \cdots + \lambda_{n-r} f(b_{n-r}) = 0 \Rightarrow f(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r}) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} \in \mathrm{Ker} f$$

Como además

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} \in H \Rightarrow$$

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} \in \mathrm{Ker} f \cap H = \{0\} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_{n-r} b_{n-r} = 0$$

y como $\{b_1, \ldots, b_{n-r}\}$ son linealmente independientes, han de ser necesariamente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0 \Rightarrow \{f(b_1), \ldots, f(b_{n-r})\}$ son linealmente independientes y por tanto, constituyen una base de $\mathrm{Im} f \Rightarrow$

$$\dim(\mathrm{Im} f) = n - r = \dim U - \dim(\mathrm{Ker} f) \Rightarrow$$

$$\dim(U) = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f).$$

3.2 Ecuaciones de una aplicación lineal.

Sean U y V dos espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base de U, $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ una base de V y sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vectores de V.

$$w_i = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{mi}v_m \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$$

Existe una única aplicación lineal $f : U \to V$ tal que $f(u_i) = w_i$ por lo que $\forall\, x \in U \Rightarrow f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$.

Por otra parte, como $x' = f(x) \in V \Rightarrow x' = f(x) = \sum_{j=1}^{m} x'_j v_j \Rightarrow$

$$\sum_{j=1}^{m} x'_j v_j = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}) v_j \Rightarrow$$

$$x'_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} \quad 1 \le j \le m$$

$$\left.\begin{array}{l} x'_1 = x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots x_n a_{1n} \\ x'_2 = x_1 a_{21} + x_2 a_{22} + \cdots x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x'_m = x_1 a_{m1} + x_2 a_{m2} + \cdots x_n a_{mn} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x' = Ax$$

donde $(x'_1, \ldots, x'_m)$ representan las coordenadas de los vectores de $\mathrm{Im}f$ respecto de la base $\{v_1, \ldots, v_m\}$ de V y $(x_1, \ldots, x_n)$ las de los vectores de U respecto de la base $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Así pues, para poder determinar una aplicación lineal es necesario y suficiente conocer los transformados de una base.

- Se denomina **rango** de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales a la dimensión del subespacio imagen.

$$r(f) = \dim(\mathrm{Im}f)$$

Como la dimensión de $\mathrm{Im}f$ es única, el rango de la aplicación no depende de las bases elegidas de U y de V.

El rango de una aplicación lineal f es, por tanto, el rango del conjunto de vectores $\{f(u_1), \ldots, f(u_n)\}$ donde $\{u_1, \ldots, u_n\}$ constituye una base de U.

3.2.1 Matriz asociada a una aplicación lineal.

Sean U y V espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$ y consideremos las bases $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de U y $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ del espacio V.

Se denomina *matriz asociada* a la aplicación lineal $f : U \to V$ respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ a la matriz que tiene por columnas a las coordenadas de los transformados de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto a la base $\mathcal{B}'$ de V. Es decir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $f(u_i) = a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{mi}v_m \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$

Ejemplo 3.1 Determinar una aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, cuya imagen esté engendrada por $(2, 0, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. □

$$\left.\begin{array}{rcl} f(1,0,0,0) & = & (2,0,1) \\ f(0,1,0,0) & = & (-1,3,1) \\ f(0,0,1,0) & = & (0,0,0) \\ f(0,0,0,1) & = & (0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

■

Como el rango de una aplicación lineal es el rango de los vectores transformados de una base de U y este es el rango de la matriz de la aplicación, se tiene que:

El rango de una aplicación lineal es el rango de su matriz asociada respecto de dos bases cualesquiera.

Como $\dim U = \dim(\mathrm{Ker} f) + \dim(\mathrm{Im} f)$, si denotamos por $n = \dim U$ y $r = \dim(\mathrm{Im} f) = r(A) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker} f) = n - r$, siendo A cualquier matriz asociada a f.

3.2.2 Matrices equivalentes.

Sean U y V espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo $\mathbf{K}$ y sean $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ una base de U y $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_2, \ldots,\ v_m\}$ una de V. La aplicación $f : U \to V$ es una aplicación lineal si, y sólo si, existe una única matriz A asociada a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tal que $x' = Ax$ donde las matrices columnas x y x' son las coordenadas de los vectores x y $f(x)$ respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente.

Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ bases respectivas de U y V y sea A' la matriz asociada a f respecto de las bases anteriores. Entonces $y' = A'y$ donde las matrices columnas y e y' son las coordenadas de y y $f(y)$ respecto a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$. Veamos qué relación existe entre las matrices A y A'.

Sean P la matriz regular del cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ y Q la del cambio de base de $\mathcal{C}'$ a $\mathcal{B}'$ también regular. Entonces, $x = Py$ y $x' = Qy'$.

$$\left.\begin{array}{l} x' = Ax = APy \\ x' = Qy' = QA'y \end{array}\right\} \Rightarrow QA'y = APy \quad \forall\, y \Rightarrow QA' = AP \Rightarrow$$

$$A' = Q^{-1}AP$$

- Dos matrices A y B, del mismo orden, se dicen **equivalentes** cuando existen dos matrices regulares Q y P tales que

$$A = Q^{-1}BP$$

Es decir, dos matrices A y B son equivalentes si están asociadas a la misma aplicación lineal y viceversa.

La equivalencia de matrices es una relación de equivalencia. Los elementos de una misma clase de equivalencia son todas las matrices asociadas a una misma aplicación lineal y por tanto, todas ellas tienen el mismo rango.

Puede probarse también el teorema recíproco.

Teorema 3.7 *Si dos matrices tienen el mismo rango, son equivalentes.*

- Puede ser considerado como un caso particular de la equivalencia aquel en que las matrices sean cuadradas. En este caso, dos matrices cuadradas A y B, del mismo orden, se dice que son **semejantes** si existe otra matriz P regular tal que
$$B = P^{-1}AP$$

De la propia definición de semejanza de matrices, se deduce el siguiente teorema:

Teorema 3.8 *Dos matrices cuadradas son semejantes si, y sólo si, están asociadas a un mismo endomorfismo.*

3.2.3 Imagen inversa de una variedad lineal.

Si L es una variedad lineal, su imagen inversa por la aplicación lineal f, $f^{-1}(L)$ es otra variedad lineal que se obtiene de la siguiente forma: $x \in f^{-1}(L) \Leftrightarrow f(x) \in L$ y como f será conocido, impondremos que el vector $f(x)$ verifique las ecuaciones implícitas de L, así obtendremos las ec. implícitas de $f^{-1}(L)$

Matricialmente podemos también resolver esta cuestión de la siguiente forma:

Sea L una variedad lineal dada por sus ecuaciones implícitas respecto de una base fijada. A la matriz asociada al sistema de ecuaciones que constituye dichas ecuaciones implícitas, la llamaremos B, con lo que las ecuaciones implícitas de L las representamos matricialmente como $Bx = 0$. Sea f la aplicación lineal dada por $f(x) = y$ y llamando A a la matriz de f, dichas ecuaciones matricialmente serían $Ax = y$.

Obtengamos unas ecuaciones implícitas de $f^{-1}(L)$:

$x \in f^{-1}(L) \Leftrightarrow f(x) \in L \Leftrightarrow Ax \in L$ como Ax es un vector, la condición para que pertenezca a L es que verifique sus ecuaciones implícitas, es decir que $B(Ax) = 0$ y esta nueva matriz BA es la matriz asociada a las ec. implícitas de $f^{-1}(L)$. Desde luego nada garantiza que esas ecuaciones sean linealmente independientes entre sí, habría que eliminar las que no lo sean.

Ejemplo 3.2 Sea la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ de ecuaciones respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$: $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, -x_1 + x_3)$ y sea $L = \langle(1, 3)\rangle$ Hallar $f^{-1}(L)$ □

L es una variedad lineal de dimensión 1 y estamos en el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, por lo tanto la variedad lineal $f^{-1}(L)$ tendrá dimensión 2 es decir una ecuación implícita.

$x \in f^{-1}(L) \Longleftrightarrow f(x) \in L \Longleftrightarrow (2x_1 - x_2, -x_1 + x_3)$ verifica las ecuaciones implícitas de $L \equiv 3x_1 - x_2 = 0$ por tanto $f^{-1}(L) \equiv -3(2x_1 - x_2) + (-x_1 + x_3) = 0$ es decir $f^{-1}(L) \equiv 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

3.2.4 Operaciones con aplicaciones lineales.

Trataremos las operaciones usuales entre aplicaciones lineales: suma de dos aplicaciones lineales, producto de un escalar por una aplicación lineal y composición de dos aplicaciones lineales.

Sean $f : U \longrightarrow V$ y $g : U \longrightarrow V$ dos aplicaciones lineales cualesquiera definidas sobre un mismo cuerpo K. Se definen las aplicaciones $f + g$ y λf como

- $f + g : U \longrightarrow V$ tal que $(f + g)(u) = f(u) + g(u) \forall u \in U$.
- $\lambda f : U \longrightarrow V$ tal que $(\lambda f)(u) = \lambda \cdot f(u) \;\; \forall u \in U, \forall \;\; \lambda \in K$.

Es sencillo demostrar que ambas aplicaciones son lineales.

Si llamamos A a la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de una base de U y otra de V y B a la matriz asociada a la aplicación lineal g respecto de las mismas bases anteriores, la matriz asociada a la aplicación lineal $f + g$ es $A + B$ y la matriz asociada a la aplicación lineal (λf) es λA.

Sean ahora otras dos aplicaciones lineales: $f : V \longrightarrow W$ y $g : W \longrightarrow U$, la aplicación lineal $(g \circ f) : V \longrightarrow U$ tal que $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$ recibe el nombre de aplicación lineal compuesta (g compuesta con f).

Observación: no es lo mismo $f \circ g$ que $g \circ f$, podría incluso tener sentido una de ellas y la otra no.

Si continuamos llamando A a la matriz asociada a la aplicación lineal f y B a la matriz asociada a la aplicación lineal g, la matriz asociada a la aplicación lineal $(g \circ f)$ es $B \cdot A$.

Siempre que las siguientes composiciones tengan sentido, y siendo f, g,y h homomorfismos y λ escalar, se verifica que:

$$\begin{array}{lcl} (f \circ g) \circ h & = & f \circ (g \circ h) \\ (f + g) \circ h & = & f \circ h + g \circ h \\ h \circ (f + g) & = & h \circ f + h \circ g \\ \lambda (f \circ g) & = & (\lambda f) \circ g = f \circ (\lambda g) \end{array}$$

Ejemplo 3.3 Sean $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ y $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ las aplicaciones lineales que tienen por ecuaciones:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, -x_1 + x_2 + 5x_3)$$

$$g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 - 4x_2)$$

Hallar las ecuaciones matriciales respecto de las correspondientes bases canónicas de $g \circ f$ y $f \circ g$. Obsérvese que, en este caso, ambas composiciones son posibles.

$\square$

Denotemos por A_f la matriz asociada a f cuyas columnas serán las imágenes por f de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^3$
$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Análogamente B_g es la matriz asociada a g y sus columnas son las imágenes por g de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^2$
$B_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

La matriz asociada a $g \circ f$ será
$B_g \cdot A_f = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -11 \end{pmatrix}$

La matriz asociada a $f \circ g$ será
$A_f \cdot B_g = \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 16 & -22 \end{pmatrix}$

Entonces las ecuaciones pedidas son:

$$g \circ f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Análogamente,

$$f \circ g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 14 & -13 \\ 16 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.4 Sean los homomorfismos $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tales que:

1. $f(e_1) = (1, 2, -3)$, $f(e_2) = (2, 1, 3)$, $f(e_3) = (1, 3, -3)$.
2. $(1, 0, 0, 1) \in f^{-1}(L)$, siendo $L \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1' - 2x_2' = 0 \\ x_2' - x_3' = 0 \end{array} \right.$
3. $g(0, 0, 1) = (1, 1, -1)$
4. Ker $g \circ f \equiv x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$

Determinar:

a) f, g y $g \circ f$.

$\square$

Para conocer la matriz asociada a f sólo nos hace falta conocer la imagen por f de e_4 ya que al ser $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ su matriz asociada tiene por columnas las imágenes por f de los vectores de una base de $\mathbf{R}^4$, en este caso nos dan como dato las imágenes de los tres primeros vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^4$, así pues basta conocer $f(e_4)$ para tener dicha matriz.

Con el primer dato dado y, llamando $f(e_4) = (x, y, z)$ sabemos que la matriz asociada a f, A_f es de la forma: $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 1 & 3 & y \\ -3 & 3 & -3 & z \end{pmatrix}$

El segundo dato $(1, 0, 0, 1) \in f^{-1}(L)$, equivale a decir que $f(1, 0, 0, 1) \in L$, es decir que verifica las ecuaciones implícitas de L siendo $L \equiv \left\{ \begin{array}{r} x_1' - 2x_2' = 0 \\ x_2' - x_3' = 0 \end{array} \right.$ y $f(1, 0, 0, 1)$ es un vector de $\mathbf{R}^3$ luego $f(1, 0, 0, 1) = (a, b, c)$ impongamos que

verifique las ecuaciones implícitas de L con lo que tendremos: $\left\{ \begin{array}{r} a-2b=0 \\ b-c=0 \end{array} \right.$
$\Longrightarrow f(1,0,0,1)=(2b,b,b)$

Seguimos sin saber cuánto vale $f(0,0,0,1)$ pero como f es una aplicación lineal podemos expresar
$f(1,0,0,1)=f((1,0,0,0)+(0,0,0,1))=f(1,0,0,0)+f(0,0,0,1)\Longrightarrow$
$f(e_4)=f(1,0,0,1)-f(1,0,0,0)$ de lo que se deduce: $f(e_4)=(2b-1,b-2,b+3)$

Luego hasta ahora la matriz asociada a f es

$$A_f=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2b-1 \\ 2 & 1 & 3 & b-2 \\ -3 & 3 & -3 & b+3 \end{pmatrix}$$

El cuarto dato nos permite obtener fácilmente una base del núcleo de $g\circ f$ $B_{\text{Ker }g\circ f}=\{(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(2,0,0,1)\}$ y por definición del núcleo de una variedad lineal, si $x\in(\text{Ker }g\circ f)\Rightarrow(g\circ f)(x)=0$ entonces:

- $0=g[f(1,1,0,0)]=g[f(1,0,0,0)+f(0,1,0,0)]=g[(1,2,-3)+(2,1,3)]=g[3,3,0]=3\cdot g(1,1,0)$ Es decir, $g(1,1,0)=(0,0,0)$
- $0=g[f(-1,0,1,0)]=g[-f(e_1)+f(e_3)]=g(0,1,0)$ Es decir $g(0,1,0)=(0,0,0)$
- $0=g[f(2,0,0,1)]=g[2f(e_1)+f(e_4))]\Longrightarrow g(2b+1,b+2,b-3)=(0,0,0)$

Pero ya podemos averiguar el valor de b porque la matriz asociada a g es conocida ya que sabemos las imágenes por g de los tres vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^3$

Es decir

- $g(1,0,0)=(0,0,0)$
- $g(0,1,0)=(0,0,0)$
- $g(0,0,1)=(1,1,-1)$

$\Longrightarrow$

$$B_g=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$g(2b+1, b+2, b-3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2b+1 \\ b+2 \\ b-3 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow g(2b+1, b+2, b-3) = (b-3, b-3, -b+3) = (0,0,0) \Longrightarrow b = 3$$

Tenemos también ya la matriz asociada a f:

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Y llamando $C_{g\circ f}$ a la matriz de $g \circ f$ resulta $C_{g\circ f} = B_g \cdot A_f$ es decir:

$$C_{g\circ f} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ Así, } C_{g\circ f} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

Nota: Este ejemplo es la resolución del apartado a) del ejercicio propuesto 3.13

3.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1 Determinar una aplicación lineal $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$, sabiendo que $(-1,0,0,1)$ y $(1,3,2,0)$ constituyen un sistema generador de $\mathrm{Ker} f$ y que los vectores $(1,1,1)$ y $(0,-2,1)$ generan a $\mathrm{Img} f$.

Ejercicio 3.2 Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (2x+y, -z, 0)$$

a) Determinar $\mathrm{Ker} f$ y hallar una base de dicho subespacio.

b) Hallar el rango de f.

c) ¿Pertenece $(6,-2,0)$ a $\mathrm{Ker} f$?

Ejercicio 3.3 Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensiones 3 y 4 respectivamente, $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V, $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una de W y f la aplicación lineal determinada por:

$$\begin{array}{rclcrcrcr} f(v_1) & = & 2w_1 & - & w_2 & + & w_3 & + & w_4 \\ f(v_2) & = & & & w_2 & - & 2w_3 & + & w_4 \\ f(v_3) & = & 4w_1 & - & w_2 & & & + & 3w_4 \end{array}$$

a) Obtener las ecuaciones de f.

b) Determinar $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Img} f$.

Ejercicio 3.4 Consideremos la aplicación lineal $f : P_2[x] \to \mathbf{R}^4$ que a cada polinomio $p \in P_2[x]$ le asigna $(p(0), p(1), p(2), p(3))$. Se pide:

a) Calcular las ecuaciones de f respecto de las bases canónicas.

b) Obtener las coordenadas de $f(2x^2 - x + 1)$ respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

c) Determinar $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Img} f$.

Ejercicio 3.5 Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, definida por $f(x,y,z) = (-2x+y, 3z)$. Calcular las ecuaciones de f

a) Respecto de las bases canónicas.

b) Respecto de las bases $\left\{\begin{array}{lr} B = \{(1,2,-1),(0,1,0),(3,1,1)\} & \text{de } \mathbf{R}^3 \\ \text{y} & \\ B' = \{(0,2),(-1,1)\} & \text{de } \mathbf{R}^2 \end{array}\right.$

c) Respecto de las bases $\left\{\begin{array}{lr} C = \{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\} & \text{de } \mathbf{R}^3 \\ \text{y} & \\ C' = \{f(1,1,1),f(0,1,0)\} & \text{de } \mathbf{R}^2 \end{array}\right.$

Ejercicio 3.6 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ tal que Ker$f$ viene dado por $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y unas ecuaciones de Img$f$ son $\left\{\begin{array}{r} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{array}\right.$ respecto de una base B de $\mathbf{R}^3$

a) Hallar las ecuaciones de f respecto de B.

b) Determinar f^2.

Ejercicio 3.7 Sean $f : E \to F$ una aplicación lineal cuyas ecuaciones, respecto de las bases B y B', son

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

y L un subespacio de E. Determinar $f(L)$ en los siguientes casos:

a) Una base de L está formada por los vectores v y w, cuyas coordenadas respecto de B son $(3,0,2,1)$ y $(4,2,2,2)$ respectivamente.

b) Unas ecuaciones implícitas de L son:

$$L = \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 3.8 Sea f la aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^4$ que respecto de las bases canónicas tiene por ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Determinar $f^{-1}(L)$ para los siguientes subespacios L de $\mathbf{R}^4$:

a) Las ecuaciones implícitas de L son $ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$.

b) Las ecuaciones de L son: $\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & & & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}\right.$

c) L está engendrado por los vectores $(1, 0, -1, -1)$ y $(1, -1, 0, 2)$.

Ejercicio 3.9 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = (1, 1, 0, 1)\ ,\ f(e_2) = (-1, 2, 0, 0)\ ,\ f(e_3) = (0, 3, 0, 1)$$

Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases

$$B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 1)\} \text{ y } B' = \{(2, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 3)\}.$$

Ejercicio 3.10 Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $\mathbf{R}^4$ y sean f y g los endomorfismos de $\mathbf{R}^4$ determinados por:

$$\begin{array}{ll} f(u_1) = (-1, 2, 0, -1) & \qquad g(u_1) = (2, 0, 0, 1) \\ f(u_2) = (0, 0, -1, 0) & \qquad g(u_2) = (0, 1, -1, 0) \\ f(u_3) = (-2, 4, -1, -2) & \qquad g(u_3) = (2, 1, -1, 1) \\ f(u_4) = (0, 0, 0, 1) & \qquad g(u_4) = (4, 0, 0, 2) \end{array}$$

a) Determinar las matrices asociadas a f y g, respecto de la base $\mathcal{B}$.

b) Idem para $3f,\ 2f - g,\ g \circ f\ y\ f \circ g$.

Ejercicio 3.11 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por

1. $f(1, 1, 0) = (3, 6, 9)$.
2. Si $L =< (1, 2, 3) >$ entonces $x_1 = x_3$ es una ecuación implícita de $f^{-1}(L)$.
3. En la matriz asociada a f respecto de la base canónica $a_{11} = 1$ y $a_{33} = 3$.

Se pide:

a) La matriz asociada a f, respecto de las bases canónicas.

b) La dimensión, una base y unas ecuaciones implícitas de Ker$f$ e Img$f$.

Ejercicio 3.12 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ determinado por

$$f(1,1,1) = (1+a,1,1+a),\ \ f(0,1,1) = (a,1,1+a),\ \ f(0,0,1) = (0,1,a)$$

y sean L_1, L_2 las variedades lineales de $\mathbf{R}^3$ definidas por:

$$L_1 \equiv x_2 - x_3 = 0 \qquad L_2 \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Hallar la matriz de f respecto de la base canónica.

b) Estudiar para qué valores de a es f un automorfismo.

c) Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de la variedad lineal

$$L_3 = f^{-1}(f(L_1) + L_1)$$

d) Determinar para qué valores de a es $\mathbf{R}^3 = L_2 \oplus L_3$.

Ejercicio 3.13 Sean los homomorfismos $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tales que:

1. $f(e_1) = (1,2,-3),\ \ f(e_2) = (2,1,3),\ \ f(e_3) = (1,3,-3)$.
2. $(1,0,0,1) \in f^{-1}(L)$, siendo $L \equiv \left\{ \begin{array}{r} x'_1 - 2x'_2 = 0 \\ x'_2 - x'_3 = 0 \end{array} \right.$
3. $g(0,0,1) = (1,1,-1)$
4. Ker $g \circ f \equiv x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$

Determinar:

a) f, g y $g \circ f$.

b) Unas ecuaciones implícitas de Img $g \circ f$.

c) Una base de $(g \circ f)(L_1)$, siendo $L_1 \equiv x_1 - x_2 + x_4 = 0$

Ejercicio 3.14 Sean $f, g \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ tales que:

1. $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_2)$
2. $g(1,0,0) = (1,1,1)$

3. $g(f(x_1, x_2, x_3)) = (0, 0, 0) \qquad \forall\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$.

Se pide:

a) Demostrar que $\mathrm{Ker}g = \mathrm{Img}f$.

b) Hallar las matrices asociadas a g y $f \circ g$, respecto de la base canónica.

c) Hallar unas ecuaciones implícitas de Img $f \circ g$ respecto de la base canónica, y una base de Ker $f \circ g$.

Ejercicio 3.15 En $\mathbf{R}^3$, respecto de la base canónica, se consideran las variedades lineales:

$$L_1 : x - y = 0 \qquad L_2 =< (1, -1, 1) >$$

a) Probar que $\mathbf{R}^3 = L_1 \oplus L_2$.

b) Calcular, respecto de la base canónica, la matriz de todos los endomorfismos f de $\mathbf{R}^3$ tales que $f(L_1) \subset L_2$ y $f(0, 1, 0) = (1, 0, -1)$.

c) Comprobar que todos los endomorfismos del apartado anterior tienen, a lo sumo, rango 2. ¿Existe algún endomorfismo de rango 1?

d) Encontrar $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ que cumple las condiciones del segundo apartado y que además $(1, 1, 1) \in \mathrm{Ker}(f)$, $f(1, 0, -1) = (-3, 2, -1)$. ¿Es único? En tal caso, calcular una base de los subespacios $f^{-1}(L_1)$ y $f(L_2)$.

Ejercicio 3.16 Sean $f, g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ definidas por:

$$f(x, y, z) = (x, -y, z, x + y + z) \quad y \quad g(x, y, z) = (-x, y, 2x, -x - y + z)$$

a) Hallar la expresión matricial de $f + g$ respecto de las bases canónicas.

b) Idem para $3f - 2g$.

c) Determinar $\mathrm{Ker}f$ y $\mathrm{Ker}g$. ¿Es $\mathrm{Ker}f + \mathrm{Ker}g = \mathrm{Ker}(f + g)$?

Ejercicio 3.17 En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ y respecto a la base canónica se consideran las variedades lineales siguientes:

$$L =< (1, 4, 1, -1), (2, 3, 2, 3) > \qquad R =< (0, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 2) >$$

$$M =< (1,1,1,-3),(3,-2,3,-4),(3,-2,3,-4) > \qquad K : \begin{cases} x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Sea f el endomorfismo dado por:

$$f(0,1,0,0) = (-1,3,0,-1) \qquad f(1,-1,1,-1) = (1,-2,a,b)$$
$$f(1,1,0,-3) = (m,-5,n,2) \qquad \text{Ker}(f) = L \cap M \qquad f(K) = R$$

a) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base canónica.

b) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base:

$$B = \{(-1,2,0,-1),(0,1,0,0),(1,-2,1,0),(0,1,0,-1)\}$$

Ejercicio 3.18 Para cada $\lambda \in \mathbf{R}$ se define la aplicación lineal

$$f_\lambda : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3, \quad f_\lambda(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\lambda x_1 + x_2, x_1 + \lambda x_3, x_2 + x_4)$$

a) Estudiar los valores de λ que hacen que f_λ sea inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

b) Hallar una base de $N(f_\lambda)$ para $\lambda = 2$.

c) Sea la variedad lineal L de $\mathbf{R}^4$ de ecuaciones $x_1 = x_3 = 0$, calcular $f_\lambda(L)$ para $\lambda = 0$.

d) Dada la base de $\mathbf{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,0)\}$, hallar la matriz de $f_\lambda(L)$, para $\lambda = 1$, respecto a la base canónica de $\mathbf{R}^4$ y $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 3.19 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por:

1) El vector $(1,0,1)$ se transforma, mediante f, en sí mismo.

2) La variedad lineal de ecuación $x_1 - x_2 = 0$ también se transforma en sí misma mediante f.

3) La matriz asociada a f, respecto de la base canónica, es simétrica y de traza nula.

Se pide:

a) Hallar la matriz A asociada a f respecto de la base canónica.

b) ¿Es posible determinar una base del núcleo *sin necesidad de hallar sus ecuaciones*? Razona la respuesta.

c) Siendo H la variedad lineal generada por los vectores $(1,1,1)$ y $(2,2,0)$, hallar una base de $f^{1996}(H)$.

d) Determinar una base de $f(L) \cap H$ donde L es la variedad de ecuación $x_3 = 0$

4. Ortogonalidad.

El concepto de *espacio vectorial* surgió como una generalización del espacio de los vectores geométricos tomando como punto de partida las propiedades de dichos vectores geométricos, que provenían de la suma y el producto por un escalar. Así se definieron: subespacios vectoriales, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales, etc.

Para los vectores geométricos hay otros conceptos como los de *longitud o norma, ángulo de dos vectores, etc.*, que no se contemplan al hacer la anterior abstracción y que, por tanto, hasta ahora no tienen significado alguno en un espacio vectorial abstracto.

Se trata ahora de superponer a una estructura de espacio vectorial una nueva estructura que nos permita hablar de ángulos y distancias y conviene tener en cuenta que a partir de este momento el cuerpo base del espacio vectorial, que antes era un cuerpo $\mathbf{K}$ cualquiera, será el cuerpo $\mathbf{R}$ de los números reales o $\mathbf{C}$ de los números complejos.

En el estudio de los vectores geométricos, se definen ángulos y distancias y, a partir de ellos, se introduce el concepto de *producto escalar* o *producto interior* de vectores. En el proceso de abstracción se tomarán como axiomas para definir un producto escalar las propiedades que caracterizan al producto escalar de los vectores geométricos y, a partir de él, se introducirán los conceptos métricos de ángulos y distancias.

4.1 Formas bilineales.

Sea V un espacio vectorial real. Una *forma bilineal* b sobre V es una aplicación

$$b : (x, y) \in V \times V \mapsto b(x, y) \in \mathbf{R}$$

cumpliendo:

a) $b(x + x', y) = b(x, y) + b(x', y)$

b) $b(x, y + y') = b(x, y) + b(x, y')$

c) $b(\alpha x, y) = b(x, \alpha y) = \alpha \cdot b(x, y)$

Cualesquiera que sean $x,\ y,\ x',\ y' \in V$ y para cualquiera que sea $\alpha \in \mathbf{R}$

4.1.1 Matriz asociada a una forma bilineal.

Sea $\mathcal{B} = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ una base de V y $b : V \times V \to \mathbf{R}$ una forma bilineal.

$$\forall\, x, y \in V \Rightarrow \begin{cases} x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i u_i \\ y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j u_j \end{cases}$$

$b(x, y) = b(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j b(u_i, u_j)$ y en forma matricial

$$b(x, y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(u_1, u_1) & b(u_1, u_2) & \cdots & b(u_1, u_n) \\ b(u_2, u_1) & b(u_2, u_2) & \cdots & b(u_2, u_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b(u_n, u_1) & b(u_n, u_2) & \cdots & b(u_n, u_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

o bien $b(x, y) = x^t A_b y$ siendo $A_b = [b(u_i, u_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$.

A esta matriz A_b se le denomina *matriz asociada a la forma bilineal* b respecto de la base $\mathcal{B}$.

Este resultado tiene el correspondiente recíproco.

Sea V un espacio vectorial real y b una forma bilineal sobre V.

- Se dice que b es **simétrica** si $b(x, y) = b(y, x) \quad \forall\, x, y \in V$

  Si b es simétrica $b(u_i, u_j) = b(u_j, u_i)$ y por tanto, la matriz asociada A_b es una matriz simétrica.

- Se dice que b es **definida positiva** si $\begin{cases} b(x, x) > 0 \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ b(x, x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \end{cases}$

4.2 Producto escalar.

Se define *producto escalar* sobre un espacio vectorial real V como una forma bilineal, simétrica y definida positiva.

El producto escalar no es único pues pueden definirse numerosas formas bilineales simétricas y definidas positivas sobre un mismo espacio vectorial.

4.2.1 Espacio vectorial euclídeo.

Un espacio vectorial euclídeo es un par (V, b) en el que V es un $\mathbf{R}$-espacio vectorial y b un producto escalar sobre V.

Designando el producto escalar por $b(x, y) =< x, y >$ respecto de una base $\mathcal{B}$ de V, su expresión viene dada por:

$$< x, y >= x^t A y$$

siendo A la matriz asociada a b respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$A = [< u_i, u_j >]_{1 \leq i,j \leq n}$$

Ejemplo 4.1 Los productos definidos a continuación son productos escalares en $\mathbf{R}^2$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ $\square$

a) $< x, y >= 2x_1y_1 + 3x_2y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

b) $< x, y >= 8x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

c) $< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Este último ejemplo en el que la matriz asociada es la matriz unidad recibe el nombre de *producto escalar canónico*.

Como la expresión matricial de un producto escalar depende de la base utilizada, cabe preguntarse si para cualquier producto escalar existirá siempre una base respecto de la cual su matriz asociada sea la matriz unidad. El propósito del tema consiste en encontrar dicha base, que da lugar a la expresión canónica del producto escalar.

Teorema 4.1 *La matriz asociada a un producto escalar, respecto de cualquier base, es simétrica y regular. El recíproco no es cierto.*

Demostración.

a) Es simétrica por ser el producto escalar una forma bilineal simétrica.

b) Sea $x \in V$ y consideremos $< x, y >= 0 \quad \forall\, y \in V$ entonces $x = 0$ ya que de lo contrario se tendría $< x, x >= 0$ con $x \neq 0$ lo que contradice la hipótesis de ser definida positiva. Es decir, el único vector $x \in V$ tal que $< x, y >= 0 \quad \forall\, y \in V$ es $x = 0$.

Consideremos el sistema $Ax = 0$ y veamos que la única solución que posee es la trivial, lo que equivale a que $\det A \neq 0$, es decir, a que A es regular.

Supongamos que existe algún vector no nulo $z \in V$ tal que $Az = 0$. Entonces, $\forall\, y \in V \quad (Az)^t y = 0 \Leftrightarrow z^t A^T y = z^t A y =< z, y >= 0$.

Como $< z, y >= 0 \quad \forall\, y \in V \Rightarrow z = 0$ lo que contradice la hipótesis de ser $z \neq 0$ y por tanto, no existe ningún vector no nulo $z \in V$ tal que $Az = 0$ es decir, $Ax = 0$ sólo admite la solución trivial.

c) El recíproco no es cierto ya que $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ no es la matriz de un producto escalar a pesar de ser simétrica y regular, pues

$$(1 \ \ -1)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2 \ \ 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

y por tanto A no representa a una forma bilineal definida positiva. ■

- Sea $(V, \ <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Se denomina **norma** del vector $x \in V$ al número real positivo

$$\|x\| = +\sqrt{< x, x >}$$

que tiene sentido ya que $< x, x > \geq 0 \quad \forall\, x \in V$.

Propiedades:

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

c) *Ley del paralelogramo*: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

d) *Desigualdad de Cauchy-Schwartz*: $| < x, y > | \leq \|x\| \cdot \|y\|$

e) *Desigualdad de Minkowski*: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

f) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$

Cualesquiera que sean $x, y \in V \quad \alpha \in \mathbf{R}$.

NOTA: Sean $x, y \in V$ no nulos. De la desigualdad de Cauchy-Schwartz se deduce que

$$-\|x\| \cdot \|y\| \leq < x, y > \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

y como $\|x\| \neq 0 \quad \|y\| \neq 0 \Rightarrow$

$$-1 \leq \frac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

Al número $\dfrac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$ se le define como $\cos \alpha$ diciéndose que α es el ángulo que forman los vectores x e y.

$$< x, y > = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \widehat{(x, y)}$$

Teorema 4.2 *Para determinar el producto escalar de dos vectores cualesquiera es necesario y suficiente conocer los productos escalares de los vectores de una base.*

Demostración. Sea $(V, \; <, >)$ un espacio euclídeo y $\mathcal{B} = \{u_1, \; u_2, \ldots, \; u_n\}$ una base V.

$$\forall \; x, y \in V \implies x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=i}^{n} y_j u_j \Rightarrow$$

$$< x, y > = < \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j > = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j < u_i, u_j >$$

Si $< u_i, u_j > = a_{ij}$ son conocidos, es conocido el producto de dos vectores cualesquiera, siendo

$$< x, y > = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^t A y$$

Además está determinado de manera única. ■

La matriz A es única respecto de la base $\mathcal{B}$ y se le denomina *matriz de Gram* correspondiente al producto escalar considerado respecto de la base $\mathcal{B}$ de V y, por consiguiente, es simétrica y regular.

4.3 Ortogonalidad.

a) Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que los vectores $x, y \in V$ son *ortogonales* respecto del producto escalar $<,>$ si se verifica que $< x, y >= 0$ (x, y no nulos, ya que si uno de ellos fuese nulo, el producto escalar sería nulo cualquiera que fuese el otro vector).

b) Sea $A \subset V$ no vacío. Definimos el *conjunto ortogonal* de A respecto a $<,>$ y lo denotamos por $A^\perp$ como

$$A^\perp = \{x \in V \ : < x, y >= 0 \ \ \forall\, y \in A\}$$

Teorema 4.3 *Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y $A \subset V$ no vacío. El conjunto $A^\perp$ ortogonal de A es un subespacio vectorial de V que llamaremos* subespacio ortogonal de A *o* variedad ortogonal a A.

Demostración. $\forall\, x_1, x_2 \in A^\perp \Rightarrow \alpha x_1 + \beta x_2 \in A^\perp \ \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{R}$. En efecto:

$$\forall\, y \in A \quad < \alpha x_1 + \beta x_2, y >= \alpha < x_1, y > + \beta < x_2, y >= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$$\text{ya que } \begin{cases} x_1 \in A^\perp \Rightarrow < x_1, y >= 0 & \forall\, y \in A \\ \\ x_2 \in A^\perp \Rightarrow < x_2, y >= 0 & \forall\, y \in A. \end{cases}$$

■

Estudiemos ahora algunas propiedades de la ortogonalidad relacionadas con la dependencia lineal y, posteriormente introduciremos unas bases especiales que denominaremos bases ortonormales.

Teorema 4.4 Teorema de Pitágoras.

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores $x, y \in V$ son ortogonales si y sólo si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Demostración.

a) $x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. En efecto:

$$\|x + y\|^2 =< (x + y), (x + y) >=$$
$$< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >= \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ya que $< x, y >=< y, x >= 0$ por ser $x \perp y$.

b) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow x \perp y$. En efecto:
$\|x+y\|^2 =< (x+y), (x+y) >= \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2$
Si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Rightarrow < x, y >= 0 \Rightarrow x \perp y$. ■

Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y sean H y H' dos subconjuntos no vacíos de V.

- Se dice que H es ortogonal a H' si $< x, y >= 0 \ \ \forall\, x \in H \ \ \forall\, y \in H'$
- Se dice que H es un conjunto ortogonal si $< x, y >= 0 \ \ \forall\, x, y \in H$ con $x \neq y$
- Se dice que H es un conjunto ortonormal si es ortogonal y verifica además que $\|x\| = 1 \ \ \forall\, x \in H$

Ejemplo:

Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$ con el producto escalar que respecto a la base canónica tiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el valor de a para que los vectores $(1, 2, a)$ y $(a, -1, 1)$ sean ortogonales.

b) Si L es la variedad lineal de ecuaciones $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, hallar unas ecuaciones implícitas de $L^{\perp}$.

Nota: Este ejemplo son los apartados a) y b) del ejercicio 4.9

Apartado a)
Los dos vectores serán ortogonales respecto al producto escalar dado si y sólo si su producto escalar es cero

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$
$\Longleftrightarrow$

$4a - 5 + a = 5a - 5 = 0 \Longleftrightarrow a = 1$

Apartado b)

El número de ecuaciones implícitas l.i. de la variedad lineal dada L es uno y, como el espacio vectorial al que pertenece tiene dimensión tres, se deduce que la dimensión de L es dos. Calculemos dos vectores de $\mathbf{R}^3$ que constituyan una base de L:

$L \equiv -x_1 + x_2 + x_3 = 0$ considerando los parámetros x_2 y x_3 y dándoles los valores $\begin{array}{l} x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{array} \Longrightarrow x_1 = 1$ $\begin{array}{l} x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array} \Longrightarrow x_1 = 1$

Por tanto $L = \langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$

Como $dim(L) = 2 \Longrightarrow dim(L^{\perp}) = 1$

Llamemos (a_1, a_2, a_3) al vector de una base de $L^{\perp}$.

Para que esto sea cierto, tendrá que ser ortogonal a los dos vectores de la base de L, respecto del producto escalar dado, es decir $\langle((a_1,a_2,a_3),(1,1,0))\rangle = 0$ y $\langle((a_1,a_2,a_3),(1,0,1))\rangle = 0$ O sea:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 & a_1 + 2a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3(a_1 + a_2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 & a_1 + 2a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$\Longrightarrow L^{\perp} = \langle(1,-1,-1)\rangle$

Teorema 4.5 *Si dos subespacios H y H' de un espacio vectorial euclídeo $(V,\ <,>)$ son ortogonales, entonces son disjuntos, es decir $H \cap H' = \{0\}$.*

Demostración. $\forall\ z \in H \cap H' \Rightarrow \begin{cases} z \in H \\ \text{y} \\ z \in H' \end{cases}$

Como $z \in H$, $z \in H'$ y $H \perp H' \Rightarrow < z, z >= 0 \Rightarrow z = 0$. Esto prueba que $H \cap H' = \{0\}$. ■

Teorema 4.6 *Sean H y H' dos subconjuntos ortogonales de un espacio vectorial euclídeo $(V,\ <,>)$. Las variedades $\mathcal{L}(H)$ y $\mathcal{L}(H')$ son también ortogonales.*

Demostración.

$$\text{Sean} \begin{cases} y \in \mathcal{L}(H) \quad \Rightarrow \quad y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \quad \text{con} \quad x_i \in H \\ z \in \mathcal{L}(H') \quad \Rightarrow \quad z = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \beta_j x'_j \quad \text{con} \quad x'_j \in H' \end{cases}$$

$$< y, z >=< \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j x'_j >= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j < x_i, x'_j >$$

y como $H \perp H' \Rightarrow < x_i, x'_j >= 0,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m \Rightarrow < y, z >= 0$ y por tanto, $\mathcal{L}(H) \perp \mathcal{L}(H')$. ■

Teorema 4.7 *Sea $H = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ un subconjunto ortogonal de un espacio vectorial euclídeo $(V,\ <,>)$. Entonces, $\{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$ es un sistema libre. Es decir, son linealmente independientes.*

Demostración. Sea $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Tenemos que probar que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \cdots = \alpha_n = 0$$

$$< \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k + \cdots + \alpha_n x_n, x_k >=< 0, x_k >= 0 \quad \forall k = 1,\ 2, \ldots,\ n \Rightarrow$$

$$\alpha_1 < x_1, x_k > + \cdots + \alpha_k < x_k, x_k > + \cdots + \alpha_n < x_n, x_k >= 0$$

Como H es ortogonal, $< x_i, x_k >= 0 \quad \forall\ i \neq k \Rightarrow \alpha_k < x_k, x_k >= 0$ y como $< x_k, x_k >\neq 0 \Rightarrow \alpha_k = 0 \quad \forall\ k = 1,\ 2, \ldots,\ n$. ■

Consideremos un espacio vectorial euclídeo $(V,\ <,>)$ y dos bases suyas $\mathcal{B}_1 = \{u_i\}_{i=1,\ 2,\ldots,\ n}$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_i\}_{i=1,\ 2,\ldots,\ n}$. Llamemos A_1 y A_2 a las matrices asociadas al producto escalar $<,>$ respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ y veamos la relación existente entre ellas.

$$A_1 = (< u_i, u_j >) = (a_{ij})_{i,j=1\dots n} \qquad A_2 = (< v_h, v_k >) = (a'_{hk})_{h,k=1\dots n}$$

Como $\{v_i\} \subset V$ podemos expresarlos en función de los u_i.

$$v_h = c_{ih}u_i \quad v_k = c_{jk}u_j$$

$a'_{hk} =< v_h, v_k >=< c_{ih}u_i, c_{jk}u_j >= c_{ih}c_{jk} < u_i, u_j >= c_{ih}c_{jk}a_{ij}$

Si $C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n} \Rightarrow A_2 = C^t A_1 C$

Las matrices asociadas a un producto escalar referidas a distintas bases son *congruentes* entre sí, es decir

$$A_2 = C^t A_1 C$$

Si queremos que $A_2 = I_n = (< v_i, v_j >)_{i,j=1\dots n} \iff \begin{cases} < v_i, v_j >= 0 & i \neq j \\ \\ < v_i, v_i >= 1 \end{cases}$

que equivale a que $\mathcal{B}_2$ sea ortonormal.

Si $(V, \ <,>)$ es un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{u_1, \ u_2, \dots, \ u_n\}$ es una base ortonormal de V

$$< x, y >= x^t Ay = x^t I_n y = x^t y \Leftrightarrow < x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

Así pues, para que la matriz asociada a un producto escalar sea la identidad, es decir, podamos usar la expresión canónica del producto escalar, ha de estar referida a una base ortonormal.

Cabe preguntarse ahora si siempre será posible encontrar una base ortonormal cualquiera que sea el producto escalar definido.

Teorema 4.8 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Todo espacio vectorial euclídeo $(V, \ <,>)$ *admite una base ortonormal.*

En otras palabras, cualquier espacio vectorial euclídeo admite siempre una base respecto de la cual, la expresión del producto escalar es

$$< x, y >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

siendo $x_i, \ y_i$ las coordenadas de x e y respectivamente, referidas a dicha base.

Demostración. La demostración del teorema es constructiva, es decir, veamos como a partir de una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ v_2, \dots, \ v_n\}$ cualquiera de V podemos construir otra base ortonormal $\mathcal{B}^* = \{u_1, \ u_2, \dots, \ u_n\}$.

a) A partir de $\mathcal{B}$ vamos a construir primero otra base $\mathcal{B}' = \{w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n\}$ ortogonal. Para ello tomemos $w_1 = v_1$

Consideremos $w_2 = v_2 + \alpha_{21} w_1$ con $< w_1, w_2 >= 0$. ¿Existe w_2?

$< w_1, w_2 >=< w_1, v_2 + \alpha_{21} w_1 >=< w_1, v_2 > + \alpha_{21} < w_1, w_1 >= 0 \Rightarrow$

$$\alpha_{21} = -\frac{< w_1, v_2 >}{\|w_1\|^2}$$

ya que $\|w_1\| \neq 0$ por ser $w_1 = v_1 \neq 0$.

Tomando ahora $w_3 = v_3 + \alpha_{32} w_2 + \alpha_{31} w_1$ con $< w_1, w_3 >=< w_2, w_3 >= 0$, tenemos

$$\alpha_{32} = -\frac{< w_2, v_3 >}{\|w_2\|^2} \qquad \alpha_{31} = -\frac{< w_1, v_3 >}{\|w_1\|^2}$$

Si hemos calculado, en general $w_1,\ w_2, \ldots,\ w_k$, hacemos entonces,

$$w_{k+1} = v_{k+1} + \alpha_{k+1\,k} w_k + \cdots + \alpha_{k+1\,2} w_2 + \alpha_{k+1\,1} w_1$$

con la condición $< w_{k+1}, w_i >= 0 \ \ \forall\, i = 1, \ldots,\ k$, obteniéndose:

$$\alpha_{k+1\,i} = -\frac{< w_i, v_{k+1} >}{\|w_i\|^2} \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ k$$

Se obtiene así la base ortogonal $\mathcal{B}'\{w_1,\ w_2, \ldots,\ w_n\}$.

b) A partir de $\mathcal{B}'$ vamos a construir la base $\mathcal{B}^* = \{u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n\}$ ortonormal.

Para ello, $u_i = \dfrac{w_i}{\|w_i\|}$ lo que implica que $\|u_i\| = 1 \quad i = 1,\ 2, \ldots,\ n$ y por tanto

$$\begin{cases} < u_i, u_j >= 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ < u_i, u_i >= 1 & \end{cases}$$

por lo que $\mathcal{B}^*$ es una base ortonormal de V. $\blacksquare$

4.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1 Se considera, en el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$, la base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, tal que:

$$e_1 \cdot e_1 = 2 \ , \ e_1 \cdot e_2 = 0 \ , \ e_1 \cdot e_3 = 1 \ , \ e_2 \cdot e_2 = 1 \ , \ e_2 \cdot e_3 = -1 \text{ y } e_3 \cdot e_3 = 2$$

a) Hallar la matriz de dicho producto escalar respecto de la base B.

b) A partir de $B' = \{(1,1,1), (0,1,-1), (0,2,0)\}$ de $\mathbf{R}^3$ hallar una base ortonormal.

Ejercicio 4.2 Dado, en el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$, el producto escalar cuya matriz asociada con respecto a la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Utilizando el método de Gram-Schmidt, obtener una base ortonormal asociada a la base $\{e_1 + e_2, \ e_2, \ e_1 + e_3\}$.

Ejercicio 4.3 En el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^4$, con el producto escalar

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

se considera el subespacio L engendrado por los vectores

$$(1, 0, -1, 0) \qquad \text{y} \qquad (0, 2, 3, 1).$$

Determinar un subespacio suplementario y ortogonal de L.

Ejercicio 4.4 Sea V un espacio vectorial euclídeo de dimensión tres y consideremos la base $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ en la que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_1\| = 1, \ \|u_2\| = 1, \ \|u_3\|^2 = 5 \\[2mm] u_1 \cdot u_2 = 0 \\[2mm] \text{el vector } 2u_1 - u_3 \text{ es ortogonal a los vectores } u_1 \ y \ u_2. \end{array} \right.$$

Calcular:

a) La matriz del producto escalar, respecto de la base B.

b) Una base ortonormal de V, asociada a la base B.

Ejercicio 4.5 Dado un producto escalar en $\mathbf{R}^3$, cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Respecto a ese producto escalar, hallar la variedad lineal ortogonal a la generada por los vectores $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

b) Respecto a ese producto escalar, encontrar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 4.6 Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 y una base
$B = \{e_1 = x^2, e_2 = x, e_3 = 1\}$. Se considera el producto escalar definido por: $e_i \cdot e_j = \dfrac{1}{i+j+1}$. Se pide:

a) El ángulo de los vectores 1 y x.

b) Estudiar, para qué valores de a, son ortogonales $x + a$ y $x - a$.

c) Ortonormalizar la base B.

Ejercicio 4.7 En el espacio vectorial euclídeo $(\mathbf{R}^3, \cdot)$, respecto de una base ortonormal, se consideran $a = (1, 1, 1)$ y el subespacio
$H = \{x \in \mathbf{R}^3 : 6x = 4y = 3z\}$.

a) Obtener una base ortonormal de $H^\perp$.

b) Expresar a como $x + y$ donde $x \in H$, $y \in H^\perp$.

Ejercicio 4.8 Dada la forma bilineal de $\mathbf{R}^3$ definida por

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + \alpha x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$$

se pide:

a) Calcular α para que sea un producto escalar.

b) Para $\alpha = 3$, hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

c) Para $\alpha = 3$, $L \equiv x_1 - x_2 = 0$ y $M \equiv x_2 - x_3 = 0$, hallar una variedad lineal de dimensión 2 que contenga a $L^\perp$ y a $M^\perp$.

Ejercicio 4.9 Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$ con el producto escalar que respecto a la base canónica tiene la matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcular el valor de a para que los vectores $(1, 2, a)$ y $(a, -1, 1)$ sean ortogonales.

b) Si L es la variedad lineal de ecuaciones $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$, hallar unas ecuaciones implícitas de $L^\perp$.

c) Dado el vector $v = (3, 1, -1)$, descomponerlo en suma de dos vectores, uno de L y otro de $L^\perp$.

d) Obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$, $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, siendo $u_1 \in L^\perp$.

Ejercicio 4.10 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_2)$$

y sea L la variedad lineal

$$L \equiv \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si se define en $\mathbf{R}^3$ el producto escalar cuya matriz, respecto de la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Descomponer el vector $(3, 3, 3)$ en suma de uno de $f(L)$ y otro de $[f(L)]^\perp$.

b) Hallar una base de la variedad $L^\perp + f(L)$.

c) Hallar unas ecuaciones implícitas de $L^\perp \cap f(L)$.

Ejercicio 4.11 Sea f una forma bilineal de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz, respecto de la base canónica, es

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de α para que f sea un producto escalar.

b) Determinar α para que además, los vectores $u = (1, 1, 1)$ y $v = (0, 3, -1)$ sean ortogonales.

c) Para el valor de α calculado anteriormente, determinar la variedad ortogonal a la variedad lineal L definida por $x - y - z = 0$.

d) A partir de las bases de L y $L^\perp$, obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 4.12 En un espacio vectorial euclídeo V se considera una base $B = \{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ y se sabe que

$$u_i \cdot u_j = \frac{1}{i + j - 1} \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$$

a) Dada la variedad lineal $L : x + y = 0$, encontrar $L^\perp$.

b) Hallar una base ortonormal aplicando Gram-Schmidt a la base B.

Ejercicio 4.13 En el espacio vectorial euclídeo $\mathbf{R}^3$ y respecto a una base ortonormal se consideran las variedades lineales:

$$L_1 : \left\{ \begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

$$L_2 : \{x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 = 0$$

a) Hallar α y β sabiendo que L_1 es ortogonal a L_2.

b) Obtener una base B_1 de L_1, y otra B_2 de L_2, tales que su unión $B = B_1 \cup B_2$ sea una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 4.14 Sean las variedades lineales de $\mathbf{R}^3$:
$L : x_1 - x_2 - x_3 = 0$ y $L' : \{2x_2 - 5x_3 = 0;\ 2x_1 + 4x_3 = 0\}$.

Sea b una forma bilineal de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica tiene por filas (3,2,0), (2,2,0), (0,0,a). Se pide:

a) Calcular a para que b sea un producto escalar.

b) Hallar a para que las variedades L y L' sean ortogonales.

c) Base y ecuaciones implícitas de $L^\perp$.

d) A partir de las bases de L y $L^{\perp}$, obtener una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

Ejercicio 4.15 Se considera en $\mathbf{R}^3$ la forma bilineal simétrica definida por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix}$, respecto de la base canónica.

a) ¿Para qué valores de a se trata de un producto escalar?

b) Calcular a sabiendo que, además, las variedades $L \equiv \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ y $L' \equiv x_2 - 2x_3 = 0$ son ortogonales.

c) Obtener, para el valor de a obtenido en el apartado anterior, y a partir de L y L', una base ortonormal B de $\mathbf{R}^3$.

5. Autovalores y autovectores

Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ donde V es un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbf{K}$.

- Se dice que $\lambda \in \mathbf{K}$ es un **autovalor** o **valor propio** del endomorfismo f si existe algún vector no nulo $x \in V$ tal que $f(x) = \lambda x$. A dicho vector x no nulo se le denomina **autovector** o **vector propio** de f asociado al autovalor λ.

Análogamente, si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es una matriz cuadrada cualquiera asociada a $f \in \mathrm{End}(V)$, con $\dim(V) = n$, se define $\lambda \in \mathbf{K}$ como un autovalor de A si existe algún vector no nulo x tal que $Ax = \lambda x$, en cuyo caso diremos que x es un autovector de A asociado al autovalor λ.

Teorema 5.1 *Todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo tienen los mismos autovalores.*

Demostración. Sean A y A' dos matrices asociadas a $f \in \mathrm{End}(V)$ respecto a dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de V respectivamente.

Sabemos que la relación que existe entre A y A' viene dada por

$$A' = P^{-1}AP$$

donde P representa a la matriz no singular del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Si λ es un autovalor de A, existe un vector $x \in V$ no nulo tal que $Ax = \lambda x$.

Como $A = PA'P^{-1} \Rightarrow \lambda x = Ax = (PA'P^{-1})x = PA'(P^{-1}x) \Rightarrow$

$$P^{-1}(\lambda x) = A'(P^{-1}x) \Rightarrow \lambda(P^{-1}x) = A'(P^{-1}x)$$

y llamando $y = P^{-1}x$ tenemos que $A'y = \lambda y$.

Al ser $x \neq 0 \Rightarrow y = P^{-1}x \neq 0$ y por tanto, λ es un autovalor de A'.

Recíprocamente, si λ es un autovalor de A' existe un vector $x \neq 0$ tal que $A'x = \lambda x$ y por tanto,

$$\lambda x = A'x = P^{-1}APx \Rightarrow P\lambda x = APx \Rightarrow A(Px) = \lambda(Px) \quad \text{con } Px \neq 0$$

por lo que λ es un autovalor de A. ■

Teorema 5.2 *Sea $f \in \operatorname{End}(V)$ y sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matriz asociada a f. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) Si λ es un autovalor de A $V_\lambda = \{x \in V \ : \ Ax = \lambda x\}$ es un subespacio vectorial de V denominado subespacio propio *de A asociado al autovalor λ.*

b) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son autovalores de A, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

c) Si $\lambda_1, \ \lambda_2, \dots, \ \lambda_r$ son autovalores distintos de A y $x_1, \ x_2, \dots, \ x_r$ son autovectores de A asociados a $\lambda_1, \ \lambda_2, \dots, \ \lambda_r$ respectivamente, dichos autovectores son linealmente independientes.

Demostración.

a) $\forall\, x, y \in V_\lambda$ y $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{K} \Rightarrow A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y \in V_\lambda \Rightarrow V_\lambda$ es un subespacio vectorial de V.

b) $x \in V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} \Rightarrow \begin{cases} x \in V_{\lambda_1} \Rightarrow Ax = \lambda_1 x \\ \text{y} \\ x \in V_{\lambda_2} \Rightarrow Ax = \lambda_2 x \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 x = \lambda_2 x \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$

y al ser $\lambda_1 \neq \lambda_2$ se tiene que $x = 0$ y por tanto, $V_{\lambda_1} \cap V_{\lambda_2} = \{0\}$.

c) Lo demostraremos por inducción en r.

c.1) Si $r = 1$ sólo tenemos x_1 que por ser autovector asociado a λ_1 es $x_1 \neq 0$ y por tanto, $\{x_1\}$ es un sistema libre.

c.2) Supongamos la propiedad cierta hasta $r - 1$ y probémosla para r. Es decir, supongamos que $x_1, \ x_2, \dots, \ x_{r-1}$ son linealmente independientes y probemos que $x_1, \ x_2, \dots, \ x_{r-1}, \ x_r$ también lo son.

De la combinación lineal:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{r-1} x_{r-1} + \alpha_r x_r = 0 \tag{5.1}$$

se tiene que $A(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_{r-1}x_{r-1} + \alpha_rx_r) = 0 \Rightarrow$

$$\alpha_1Ax_1 + \alpha_2Ax_2 + \cdots + \alpha_{r-1}Ax_{r-1} + \alpha_rAx_r = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_1\lambda_1x_1 + \alpha_2\lambda_2x_2 + \cdots + \alpha_{r-1}\lambda_{r-1}x_{r-1} + \alpha_r\lambda_rx_r = 0 \qquad (5.2)$$

Multiplicando (5.1) por λ_r obtenemos:

$$\alpha_1\lambda_rx_1 + \alpha_2\lambda_rx_2 + \cdots + \alpha_{r-1}\lambda_rx_{r-1} + \alpha_r\lambda_rx_r = 0 \qquad (5.3)$$

y restando la ecuación (5.3) a la ecuación (5.2) obtenemos

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_r)x_2 + \cdots + \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r)x_{r-1} = 0$$

Al ser, por hipótesis de inducción, $x_1\ x_2, \ldots,\ x_{r-1}$ linealmente independientes, se tiene que

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_r) = 0, \quad \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_r), \ \cdots \ , \quad \alpha_{r-1}(\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$$

y como $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ que llevados a (5.1) nos reduce esta ecuación a $\alpha_rx_r = 0$ de la que al ser $x_r \neq 0$ se deduce que $\alpha_r = 0$. Es decir,

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_{r-1}x_{r-1} + \alpha_rx_r = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ 1 \leq i \leq r$$

Por tanto, $x_1,\ x_2, \cdots,\ x_{r-1},\ x_r$ son linealmente independientes. ■

Como consecuencia de las propiedades anteriores tenemos que si los autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_r$ son todos distintos, la suma $V_{\lambda_1} + V_{\lambda_2} + \cdots + V_{\lambda_r}$ es directa.

Propiedades de los autovalores

a) λ es un autovalor de f si y sólo si $\det(A - \lambda I) = 0$ donde A es una matriz cualquiera asociada a f.

En efecto:

λ autovalor de $f \Rightarrow \exists\ x \in V$ no nulo tal que $f(x) = \lambda x$ o bien, $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$ admite solución x no trivial y por tanto, la matriz del sistema es singular, es decir, $\det(A - \lambda I) = 0$

Si $\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)x = 0$ admite solución x no trivial, por lo que $(A - \lambda I)x = 0 \Rightarrow \lambda$ es autovalor de A y por tanto, de f.

b) $\lambda = 0$ es autovalor de f si y sólo si f es no inyectivo.

Basta con ver que si $\lambda = 0$ es un autovalor de f, existen vectores $x \in V$ no nulos tales que $f(x) = 0x = 0$, por lo que $\text{Ker} f \neq \{0\}$ y, por tanto, f es no inyectivo.

Recíprocamente, si f es no inyectivo $\text{Ker} f \neq \{0\}$, por lo que existen vectores x no nulos tales que $f(x) = 0 = 0x$, de donde se deduce que 0 es un autovalor de f.

c) λ es autovalor de f si y sólo si para cualquiera que sea k, $\lambda - k$ es autovalor de $f - k\mathcal{I}$ donde $\mathcal{I} : V \to V$ es la identidad en V.

Puesto que si λ es un autovalor, no nulo, de $f \Rightarrow \exists\, x \in V$ tal que $f(x) = \lambda x \Rightarrow \forall\, k \in \mathbf{K}\;\; f(x) - kx = \lambda x - kx \Rightarrow (f - k\mathcal{I})(x) = (\lambda - k)x \Rightarrow \lambda - k$ es autovalor de $f - k\mathcal{I}$.

Si $\forall\, k \in \mathbf{K}\;\; \lambda - k$ es autovalor de $f - k\mathcal{I}$, como $0 \in \mathbf{K} \Rightarrow \lambda - 0 = \lambda$ es autovalor de $f - 0\mathcal{I} = f \Rightarrow \lambda$ es autovalor de f.

d) λ es autovalor de f si y sólo si $f - \lambda\mathcal{I}$ es no inyectivo.

Basta observar que si λ es un autovalor de f entonces $0 = \lambda - \lambda$ lo es de $f - \lambda\mathcal{I}$ (tercera propiedad), por lo que $f - \lambda\mathcal{I}$ es no inyectivo (segunda propiedad). ■

Como consecuencia tenemos que:

- $V(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda\mathcal{I}) = V_\lambda$
- Las ecuaciones del subespacio propio $V(\lambda)$ se obtienen del sistema homogéneo
$$(A - \lambda I)x = 0$$
y por tanto, si n representa la dimensión del espacio V se tiene que
$$\dim V_\lambda = n - \text{rg}(A - \lambda I)$$

5.1 Polinomio característico.

Se denomina **polinomio característico** de una matriz $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ al polinomio de grado n que se obtiene desarrollando el determinante de la matriz $\lambda I - A$.

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) \tag{5.4}$$

Teorema 5.3 *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.*

Demostración. Si A y B son dos matrices semejantes, existe una matriz P no singular tal que $B = P^{-1}AP$ y por tanto, $\lambda I - B = P^{-1}\lambda P - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P$ por lo que

$$\det(\lambda I - B) = \det(P^{-1}(\lambda I - A)P) = \det P^{-1} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det P = \det(\lambda I - A)$$

por lo que ambas matrices tienen el mismo polinomio característico. ∎

Análogamente, se denomina **polinomio característico** de un endomorfismo f de V al polinomio de grado $n = \dim V$ que se obtiene desarrollando el determinante de la matriz $\lambda I - A$, donde A es la matriz asociada al endomorfismo f.

Corolario 5.4 *El polinomio característico de una transformación no depende de la matriz representación que se tome.*

Demostración. Si A y B son dos matrices que representan al mismo endomorfismo f, sabemos que son semejantes y por el Teorema 5.3 tienen el mismo polinomio característico. ∎

Teorema 5.5 *Los autovalores de un endomorfismo f (o de una matriz A) son las raíces de su polinomio característico.*

Demostración. Si λ_0 es un autovalor de f equivale a la existencia de vectores $x \in V - \{0\}$ tales que $f(x) = \lambda_0 x$ es decir, $Ax = \lambda_0 x$ o lo que es lo mismo, $(\lambda_0 I - A)x = 0$ que equivale a decir que $(\lambda_0 I - A)x = 0$ posee solución no trivial, es decir, $\det(\lambda_0 I - A) = 0$ que es lo mismo que asegurar que λ_0 es una raíz de $P(\lambda)$. ∎

Desde el punto de vista matricial, podemos asegurar que todas las matrices semejantes, al tener el mismo polinomio característico, tienen los mismos autovalores.

5.1.1 Multiplicidad de un autovalor.

Se define *multiplicidad* de un autovalor λ_0 de un endomorfismo f, como la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico de f. Es decir, como el número de veces que aparece el factor $\lambda - \lambda_0$ en la factorización de $P(\lambda)$.

Teorema 5.6 *Sea λ_0 un autovalor del endomorfismo f de multiplicidad α, se verifica que:*

$$1 \leq dim V_{\lambda_0} \leq \alpha$$

5.1.2 Propiedades.

- Si $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ es el polinomio característico de una matriz A, se tiene que

$$a_i = (-1)^i \sum M_i(A)$$

  donde $M_i(A)$ representan a los menores principales de orden i de la matriz A.

- La suma de los autovalores coincide con la traza de la matriz, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i =$ tr$A$

- El producto de los autovalores es igual al determinante de la matriz $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$

Ejemplo 5.1 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, podemos calcular el polinomio característico de la siguiente forma:

$a_1 = (-1)^1(1 - 1 + 0) = 0$

$a_2 = (-1)^2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = -1 - 2 - 6 = -9$

$a_3 = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$ $\square$

El polinomio característico de A es entonces

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda - 4$$

5.2 Diagonalización por semejanza

- Una matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ se dice **diagonalizable** si es semejante a otra matriz diagonal D, es decir, si existe una matriz $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$ no singular tal que
$$P^{-1}AP = D \tag{5.5}$$
donde D es una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$. En este caso se dice que D es una **forma diagonal** de A y que P es la **matriz de paso**.

De la relación (5.5) se tiene que $AP = PD$ y si P_i representa la columna i-ésima de P tenemos

$$AP_i = d_iP_i \quad i = 1,\ 2, \dots,\ n$$

por lo que los elementos $d_i \;\; i = 1,\ 2, \dots,\ n$ de la diagonal de D son los autovalores de la matriz A. Por tanto, salvo reordenación de los elementos diagonales, la matriz D está determinada.

5.2.1 Endomorfismos diagonalizables.

- Un endomorfismo $f : V \to V$ se dice **diagonalizable** si lo es cualquier matriz A representación de f.

Esta definición no tendría validez de no verificarse el siguiente teorema.

Teorema 5.7 *Si A es una representación diagonalizable de f entonces, cualquier matriz B representación de f es también diagonalizable.*

Demostración. Si A es diagonalizable existe una matriz P, no singular, que verifica la ecuación (5.5).

El ser A y B representaciones de $f \Rightarrow A \approx B$ es decir, existe una matriz Q no singular tal que $A = Q^{-1}BQ$ y de ambas condiciones se tiene que $D = P^{-1}AP = P^{-1}Q^{-1}BQP = (QP)^{-1}B(QP) \Rightarrow B$ es diagonalizable. ■

Obsérvese que cuando una matriz A es considerada como una representación de un endomorfismo f, no es válida su diagonalización mediante transformaciones elementales, ya que el sistema de vectores columnas que se obtiene no es equivalente al original, es decir, no genera el mismo espacio vectorial que el sistema original de vectores columnas.

Podemos decir entonces que un endomorfismo $f : V \to V$ es diagonalizable cuando existe una base de V respecto a la cual la matriz asociada a f es diagonal.

Análogamente podemos decir que una matriz cuadrada A es diagonalizable si está asociada a un endomorfismo diagonalizable.

Teorema 5.8 *Sea $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matriz con n autovectores linealmente independientes $x_1, \dots, x_n$ y sea $S = (x_1 \ \cdots \ x_n)$ la matriz cuyas columnas son dichos autovectores. Entonces $S^{-1}AS = D$ donde D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los autovalores de la matriz A.*

Demostración.
$AS = A(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) = (Ax_1 \ Ax_2 \ \cdots \ Ax_n) = (\lambda_1 x_1 \ \lambda_2 x_2 \ \cdots \ \lambda_n x_n) =$

$$(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = SD$$

Como los vectores $x_1, \ x_2, \dots, \ x_n$ son linealmente independientes, S es no singular y por tanto invertible. Entonces,

$$AS = SD \Rightarrow S^{-1}AS = D.$$

Obsérvese que si sustituimos x_i por ax_i con $a \in \mathbf{K}, \ a \neq 0$ sigue siendo libre el sistema $\{x_1, \ x_2, \dots, \ ax_i, \dots, \ x_n\}$, por lo que S no es única.

Como sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes, podemos dar el siguiente corolario.

Corolario 5.9 *Toda matriz cuadrada $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ que posea n autovalores reales y distintos es diagonalizable.*

Como no todas las matrices poseen n autovectores linealmente independientes, no todas las matrices serán diagonalizables.

Ejemplo 5.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Su polinomio característico es $P(\lambda) = \lambda^2$ por lo que sus autovalores son $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\square$

Los autovectores asociados a su único autovalor $\lambda = 0$ vienen determinados por $Ax = 0x = 0$ por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x = (x_1, 0) = x_1(1, 0)$$

es decir, no posee dos autovectores linealmente independientes.

Si A fuese diagonalizable su forma diagonal sería:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow P^{-1}AP = 0 \Rightarrow A = P0P^{-1} = 0$$

y al ser $A \neq 0$ no puede ser diagonalizable.

En este ejemplo vemos que A no posee n (en este caso 2) autovectores linealmente independientes y que A no es diagonalizable (con una matriz diagonal formada por sus autovalores) pero ¿podemos asegurar que si A no posee n autovectores linealmente independientes no es diagonalizable? La respuesta es *sí* pero para ello veamos algunos resultados previos.

Teorema 5.10 [Caracterización de las matrices diagonales] *Una matriz $D \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es diagonal si y sólo si admite por autovectores a los vectores e_i de la base canónica de $\mathbf{R}^n$. Además, cada e_i es autovector de D asociado al autovalor d_i (elemento i-ésimo de la diagonal).*

Demostración.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow De_i = d_i e_i \Rightarrow$$

d_i es autovalor de D y e_i es un autovector asociado a d_i.

Recíprocamente, si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ son autovectores de D asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivamente, $De_i = \lambda_i e_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Ahora bien, $De_i = i$-ésima columna de D y por tanto

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow D \text{ es diagonal.}$$

Teorema 5.11 *Toda matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ diagonalizable posee n autovalores, no necesariamente distintos.*

Demostración. Si A es diagonalizable existe una matriz P no singular tal que se verifica la ecuación (5.5).

Como A y D son semejantes, poseen los mismos autovalores y dado que D tiene n autovalores ($d_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$), A también tiene n autovalores. ■

Obsérvese que si $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, como $P(\lambda)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales, puede no tener n raíces reales, es decir, puede tener raíces complejas y por tanto existirán matrices $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ que no posean n autovalores reales.

Nos encontramos ahora en condiciones de dar respuesta a la pregunta que nos planteábamos anteriormente.

Teorema 5.12 [Caracterización de las matrices diagonalizables] *Una matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de $\mathbf{R}^n$ constituida por autovectores de A, es decir, si A admite n autovectores linealmente independientes.*

La matriz de paso P tiene por columnas las coordenadas de dichos autovectores.

Demostración. La condición suficiente quedó probada en el Teorema 5.8. Veamos entonces que si A es diagonalizable posee n autovectores linealmente independientes.

A diagonalizable $\Rightarrow \exists\, P$ no singular tal que $P^{-1}AP = D$ con D diagonal.

Al ser D diagonal, admite n autovalores ($d_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$) y n autovectores linealmente independientes ($e_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$, vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^n$).

Por ser A y D semejantes poseen el mismo polinomio característico y por tanto, los mismos autovalores con las mismas multiplicidades.

Dado que P es no singular $\operatorname{rg}(A - d_i I) = \operatorname{rg}(P^{-1}(A - d_i I)P) = \operatorname{rg}(D - d_i I)$ y por tanto:

$$\dim V_A(d_i) = n - \operatorname{rg}(A - d_i I) = n - \operatorname{rg}(D - d_i I) = \dim V_D(d_i)$$

es decir, poseen también las mismas dimensiones.

Como sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes, tenemos que el número de autovectores linealmente independientes de una matriz viene dado por la suma de las dimensiones de los subespacios propios asociados a cada autovalor, es decir, por

$$\sum_{i=1}^{r} \dim V_A(\lambda_i)$$

Al ser $\dim V_A(d_i) = \dim V_D(d_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, r$ con $r =$ número de autovalores distintos, y dado que D es diagonal se tiene que

$$\sum_{i=1}^{r} \dim V_D(d_i) = n \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \dim V_A(d_i) = n$$

es decir, A posee n autovectores linealmente independientes. ■

Corolario 5.13 *Una matriz $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ es diagonalizable si y sólo si:*

a) Tiene todos sus autovalores reales

b) Para cada autovalor λ de A la dimensión del subespacio propio V_λ coincide con la multiplicidad (α) de λ, es decir: $dimV_\lambda = \alpha$

5.2.2 Diagonalización de matrices simétricas.

Hemos visto bajo qué condiciones es diagonalizable una matriz cuadrada. En esta sección veremos que si la matriz considerada es simétrica siempre es diagonalizable y además la matriz de paso puede ser ortogonal.

Teorema 5.14 *Los autovalores de una matriz real y simétrica son todos reales.*

Demostración. Denotemos por:

- A^* como la matriz traspuesta conjugada de A, siendo el elemento a^*_{ij} de A^* el complejo conjugado del elemento a_{ij} de A.
- v^* como el vector conjugado traspuesto de v.
- $\overline{\lambda}$ como el conjugado de λ

Por ser A real y simétrica, es $A = A^*$.

Si λ es un autovector de A y $v \neq 0$ un autovector de A asociado a λ se tiene que $Av = \lambda v$. Entonces:

$$v^*Av = v^*\lambda v \Rightarrow$$
$$(v^*Av)^* = (v^*\lambda v)^* \Rightarrow$$
$$v^*A^*v = v^*\lambda^*v \Rightarrow v^*Av = v^*\overline{\lambda}v \Rightarrow$$
$$v^*\lambda v = v^*Av = v^*\overline{\lambda}v \Rightarrow$$
$$\lambda v^*v = \overline{\lambda}v^*v \Rightarrow$$
$$(\lambda - \overline{\lambda})v^*v = 0$$

Como $v^*v \neq 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbf{R}$. ■

Teorema 5.15 *Autovectores correspondientes a autovalores distintos de una matriz real y simétrica son ortogonales.*

Demostración. Sean v_1 y v_2 autovectores asociados a los autovalores λ_1 y λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\begin{array}{lcl} Av_1 = \lambda_1 v_1 & & v_2^t A v_1 = v_2^t \lambda_1 v_1 & & v_2^t A v_1 = \lambda_1 v_2^t v_1 \quad (1) \\ & \Rightarrow & & \Rightarrow & \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 & & v_1^t A v_2 = v_1^t \lambda_2 v_2 & & v_1^t A v_2 = \lambda_2 v_1^t v_2 \quad (2) \end{array}$$

Trasponiendo (1) tenemos $v_1^t A v_2 = \lambda_1 v_1^t v_2 \Rightarrow v_1^t A v_2 = \lambda_1 v_1^t v_2$

y restándola de (2) se obtiene:

$$(\lambda_2 - \lambda_1) v_1^t v_2 = 0$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v_1^t v_2 = 0 \Rightarrow v_1$ y v_2 son ortogonales. ■

Teorema 5.16 *Toda matriz real y simétrica es diagonalizable con una matriz de paso ortogonal.*

Es decir, toda matriz simétrica real A puede ser diagonalizada de la forma $D = P^t AP$.

Teniendo en cuenta que cuando la matriz es simétrica los subespacios propios, además de ser disjuntos, son ortogonales dos a dos, para encontrar la matriz de paso P basta encontrar en cada subespacio propio $V(\lambda)$ una base y ortonormalizarla. La unión de las bases así buscadas es la base de $\mathbf{R}^n$ ortonormal de autovectores que nos definen P,verificándose además que $P^{-1} = P^t$, es decir, que P es ortogonal. Por tanto, $D = P^t AP$.

5.2.3 Aplicaciones de la diagonalización.

- **Potencias.**

  Si A es una matriz diagonalizable, existe otra matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D \Rightarrow A = PDP^{-1}$. Entonces:

  $$A^m = (PDP^{-1})^m = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \overset{m}{\cdots} PDP^{-1} = PD^m P^{-1} \Rightarrow$$

  $$A^m = PD^m P^{-1}$$

  siendo $m \in \mathbf{N}$

- **Inversa.**

  $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

  Si $D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

  $$A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

  Se define: $A^{-n} = (A^{-1})^n$ con $n \in \mathbf{N}$

5.3 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1 Hallar el polinomio característico, los autovalores y autovectores de cada una de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.2 Probar que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

no son semejantes, pero poseen los mismos autovalores.

Ejercicio 5.3 Se conocen los tres vectores propios

$$v_1 = (0,1,1) \qquad v_2 = (1,-1,0) \quad \text{y} \quad v_3 = (1,0,-1)$$

de una aplicación lineal $f : V \to V$.
Determinar la matriz asociada a dicha aplicación sabiendo que es una matriz 3×3 y que su primera columna es $(1\ 2\ 3)^t$.

Ejercicio 5.4 Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^3)$ el endomorfismo que admite los autovalores 1, 2 y -1 con los vectores propios correspondientes $(1,1,1)$, $(0,1,2)$ y $(1,2,1)$ respectivamente. Obtener la matriz asociada a f, respecto de la base canónica.

Ejercicio 5.5 Estudiar si las matrices siguientes son diagonalizables. Si lo son, encontrar la forma diagonal y la matriz de paso:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -3 \\ 6 & -6 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.6 Estudiar para qué valores de α y β, es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 3 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.7 Se considera el endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ que, respecto de la base canónica, tiene por matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Hallar los autovalores de f.

b) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, encontrar una base, respecto de la cual, la matriz de f sea diagonal.

Ejercicio 5.8 ¿Bajo qué condiciones es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}?$$

Ejercicio 5.9 Encontrar la forma diagonal y una matriz de paso ortogonal para la matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.10 Diagonalizar por semejanza, con matriz de paso ortogonal, las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.11 Estudiar, según los valores de α, si son diagonalizables las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha+2 & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.12 Determinar, según $a, b \in \mathbf{R}$, los subespacios propios del endomorfismo $f \in End(\mathbf{R}^3)$ que, respecto de la base canónica, tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analícese cuándo es diagonalizable.

Ejercicio 5.13 Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^4)$ definido por $f(x, y, z, t) = (x, 2x, x, x + ay)$. Hallar a para que sea diagonalizable, obteniendo una base de $\mathbf{R}^4$ en la que la matriz asociada a f sea diagonal.

Ejercicio 5.14 Sabiendo que $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ es diagonalizable, que admite por vectores propios a

$$(-1, 2, 2),\ (2, 2, -1) \text{ y } (2, -1, 2)$$

y que el vector $(5, 2, 5)$ se transforma, mediante f en $(0, 0, 7)$, hallar los autovalores de f y su ecuación en la base canónica.

Ejercicio 5.15 Diagonalizar, ortogonalmente, las matrices simétricas:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5.16 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Hallar sus autovalores y autovectores.

b) Calcular a y b para que A sea diagonalizable, obteniendo su matriz diagonal y una matriz de paso.

Ejercicio 5.17 Sea $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^3)$ dado por: $f(x, y, z) = (x + \alpha y + (\alpha - 2)z,\ y + z,\ \alpha z)$

a) Hallar los valores de α para los que la matriz de f, respecto de la base canónica, es diagonalizable, encontrando una matriz de paso.

b) Para los valores de α anteriores:

b.1) Estudiar si f es inyectiva o sobreyectiva.

b.2) Dada $L =< (1, 2, -1), (0, 3, 1) >$, hallar $L \cap \text{Ker}(f)$.

b.3) Hallar L', suplementario de $\text{Img}(f)$.

c) Dar un subespacio H de dimensión 2, tal que $f(H) = H$.

Ejercicio 5.18 Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^4)$ cuya matriz y núcleo son respecto a la base canónica los siguientes:

$$\text{Ker}(f) \equiv \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & z & + & 3t & = & 0 \\ & & 5z & - & 3t & = & 0 \end{array} \right. \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & a & b & c \\ d & 0 & 0 & 0 \\ e & f & 5 & -3 \\ 4 & 0 & -3 & g \end{pmatrix}$$

Sabiendo que f admite por autovalor $\lambda = 5$, se pide:

a) Determinar la matriz A.

b) Calcular los autovalores y autovectores.

c) Hallar la forma diagonal y una matriz de paso.

Ejercicio 5.19 Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un endomorfismo tal que $f(2, 3, 4) = (6, 3, 6)$, los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 1)$ son autovectores y la traza de la matriz asociada a f respecto de la base canónica es 5. Se pide:

a) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$ en los siguientes casos:

a.1) Sabiendo que f no es diagonalizable.

a.2) Sabiendo que el menor de sus autovalores es doble.

b) En las condiciones del apartado a.2 hallar, si es posible, una base de $\mathbf{R}^3$ respecto de la cual, la matriz asociada a f sea diagonal.

Ejercicio 5.20 Sean las variedades lineales de $\mathbf{R}^4$:

$$L : x_1 + x_3 = x_2 + x_4 = 0 \qquad y \qquad L' =< (1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$$

Sea f un endomorfismo del que se sabe:

a) $f(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 1, 1)$.

b) $(0,0,0,1) \in N(f)$.

c) $f(L) \subseteq L'$.

d) $f(f(0,1,0,-1)) = (0,2,1,1)$.

e) $rg(f) = 2$.

Determinar f, sus autovalores y decidir si es, o no, diagonalizable.

Ejercicio 5.21 Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por:

$$f(1,0,0) = (5,-4,2) \qquad f(1,1,0) = (1,1,4) \qquad f(0,0,1) = (a,a,b)$$

Sabiendo que f posee un autovalor doble y que el otro autovalor es 0:

a) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base canónica.

b) Estudiar si f es diagonalizable y, en caso de serlo, hallar su forma diagonal y la matriz de paso.

c) Hallar, si es posible, una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto de la cual la matriz asociada a f sea diagonal.

Ejercicio 5.22 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2\alpha-\beta & 0 & 2\alpha-2\beta \\ 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha+\beta & 0 & -\alpha+2\beta \end{pmatrix}$ se pide:

a) Estudiar, en función de los parámetros α y β, cuándo es diagonalizable.

b) En los casos en que sea diagonalizable, hallar una forma diagonal y su matriz de paso.

c) Hallar A^{1994} para $|\alpha| = 1$ y $|\beta| = 1$. ¿Depende este resultado de los valores que tomen α y β? Justifica la respuesta.

Ejercicio 5.23 Sean las variedades lineales de $\mathbf{R}^4$ siguientes:

$$F_1 =< (-4,0,1,1),(-5,1,1,1),(1,-1,0,0) > \quad L_1 : x+y+z+t=0$$
$$F_2 =< (-3,1,1,0),(-1,1,0,0),(0,-2,1,0) > \quad L_2 = F_1 + F_2$$
$$L =< (0,0,1,0),(0,0,0,1) >$$

y la de $\mathbf{R}^3$ $\quad L' = \begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x-2y-z=0 \end{cases}$

Sean $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ y $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ aplicaciones lineales que cumplen:

$$g(1,-1,1) = (-1,-1,-1,3) \qquad g(0,1,-2) = (2,-1,1,-1)$$
$$g(1,1,0) = (3,0,1,1) \qquad f(0,1,0,0) = (0,2,1)$$

$N(f) = L_1 \cap L_2$; $f(L) = L'$; $\sum_{ij} a_{ij}^2 = 14$; $a_{ij} \geq 0 \ \forall\ i,j$, siendo a_{ij} los elementos de la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas.

a) Hallar las matrices asociadas a f y g respecto de las bases canónicas.

b) ¿Es diagonalizable la matriz que representa a $f \circ g$ respecto a la base canónica? Razonar la respuesta.

c) Determinar dos números reales α, β y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$ de forma que la matriz de $g \circ f$ respecto de $\mathcal{B}$ sea diagonal con su diagonal igual a $(0,0,\alpha,\beta)$.

Ejercicio 5.24 Sea $\alpha \in \mathbf{R}$. Se considera la matriz

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Estudiar para qué valores de α es A una matriz diagonalizable.

b) Para $\alpha = 0$, diagonalizar A con una matriz de paso ortogonal.

c) Para $\alpha = 0$, ¿hay algún $n \in \mathbf{N}$ tal que A^n sea la matriz unidad? Razonar la respuesta.

Ejercicio 5.25 Sea la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar

a) Los valores de α para los que los autovalores son reales.

b) Los valores de α para que tenga autovalores dobles.

c) Los valores de α para que la matriz sea diagonalizable.

d) La forma diagonal y la matriz de paso para $\alpha = -4$.

Ejercicio 5.26 Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^3)$ y A la matriz asociada a f respecto de la base canónica. Sabiendo que una base del núcleo de la aplicación lineal que tiene por matriz asociada, respecto de la base canónica, $A-I$ es $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ y que el vector $(0,2,1)$ se transforma en el $(1,1,0)$, se pide:

a) autovalores y subespacios propios de A,

b) matriz diagonal asociada a A y su matriz de paso,

c) ¿es inyectivo el endomorfismo f? (justifica la respuesta) y

d) subespacios propios de A^n.

Ejercicio 5.27 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \alpha+1 \\ 0 & -1 & \alpha+1 \\ \beta+2 & -\beta & \beta-1 \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores de α y β para que A sea diagonalizable y tenga el autovalor -1 doble.

b) Hallar una forma diagonal dando la matriz de paso correspondiente.

c) ¿Es posible encontrar una matriz de paso ortogonal? Razona la respuesta.

Bibliografía

[1] J. de Burgos. *Álgebra Lineal.* Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1993.

[2] B. de Diego, E. Gordillo y G. Valeiras. *Problemas de Álgebra Lineal.* Ed. Deimos, Madrid, 1986.

[3] F. Granero Rodríguez. *Álgebra y Geometría Analítica.* Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1985.

[4] J. Heinhold y B. Riedmtller. *Álgebra Lineal y Geometría Analítica.* 2 vulúmenes. Ed. Reverté, Barcalona, 1980.

[5] B. Noble y J. W. Daniel. *Álgebra Lineal Aplicada.* Ed. Prentice-Hall, 1989.

[6] C. Pita Ruiz. *Álgebra Lineal.* Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1992.

[7] J. Rojo. *Álgebra Lineal.* Ed. AC, 1986.

[8] G. Strang. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano, México, 1986.

[9] J. R. Torregrosa Sánchez y C. Jordan Lluch. *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Serie Schaum. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 1987.

Índice