

OTROS LIBROS DE INTERES

Fitzgerald - Fundamentos de ingeniería eléctrica
Hayt - Análisis de circuitos en ingeniería
Cutler - Análisis de circuitos con semiconductores
Millman - Circuitos digitales y de pulsos
Kip - Principios de electricidad y magnetismo

Novedad en inglés

Millman. Microelectronics

ANÁLISIS DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

WILLIAM D. STEVENSON

ANÁLISIS DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

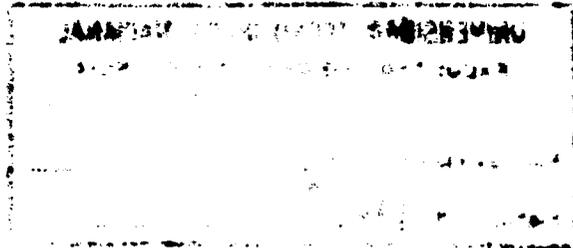
WILLIAM D. STEVENSON

321.54
Sme
C.10

SA
Sme

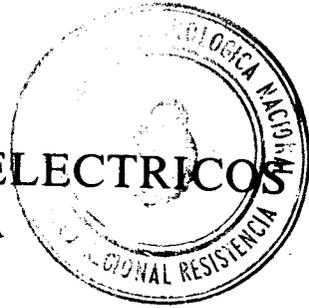
ANALISIS DE SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA

Segunda Edición



UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL		
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA		
Nro. de identificación:	6432	
Fecha:	20	10/86

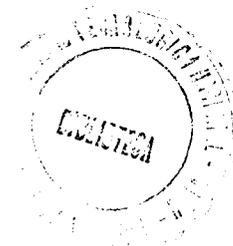
ANALISIS DE SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA



Segunda edición

WILLIAM D. STEVENSON, JR.
Universidad del Estado de Carolina del Norte

Traducción:
Jairo Osuna Suárez
Universidad Distrital de Bogotá



McGRAW-HILL

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MADRID
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

ANÁLISIS DE SISTEMAS ELÉCTRICOS DE POTENCIA

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1979, respecto a la segunda edición en español por
LIBROS MCGRAW-HILL DE MÉXICO, S. A. de C. V.

Atacomulco 499-501, Fracc. Industrial Sn. Andrés Atoto

53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-6046-98-4 (segunda edición)
(ISBN 0-07-091971-2 primera edición)

Traducido de la tercera edición en inglés de
ELEMENTS OF POWER SYSTEM ANALYSIS

Copyright © 1975, by McGraw-Hill Book Co., U. S. A.

ISBN 0-07-061285-4

6789012345 LINS-A-79 8012346795

Impreso en México Printed in Mexico

Esta obra se terminó de
imprimir en abril de 1985
en Fuentes Impresores, S. A.
Centeno No. 109
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
09810 México, D.F.

Se tiraron 2 550 ejemplares

PROLOGO

El objetivo de la tercera edición de este texto, como el de las ediciones anteriores, es infundir en el estudiante un entendimiento y confianza en un amplio campo de conceptos teóricos que deben estar en la reserva del conocimiento de los jóvenes estudiantes de ingeniería que ingresan a la industria de potencia eléctrica. No se ha tratado de profundizar demasiado, pero la presentación es completa para el nivel de visualización del estudiante de pregrado. Los ejemplos de sistemas sencillos ilustran plenamente los principios que el estudiante puede aplicar. Estos principios conducen a la comprensión de sistemas de potencia complejos que proveen los requisitos de energía delineados por una sociedad industrializada. Con este comienzo el estudiante adquiere las bases para continuar su educación mientras trabaja en el campo o ingresa a la escuela de graduados y se beneficia de algunos de los excelentes textos y cursos avanzados que tratan diversos temas en detalle. El objetivo es despertar el interés del estudiante y nutrir y acrecentar su apetito por el conocimiento mientras adquiere una formación firme.

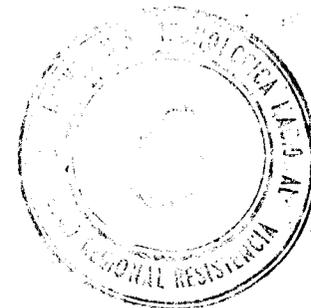
Aunque los cuatro temas principales —estudio de cargas, distribución económica, cálculo de fallos y estabilidad del sistema— son aún puntos focales de la teoría desarrollada anteriormente en el texto, la práctica moderna ha impuesto algunos cambios en esta edición. Algunas omisiones se hicieron necesarias para incluir nuevo material. La teoría del efecto piel se omite completamente y desaparecen los capítulos sobre diagramas de círculo y constantes generalizadas de un circuito. Permanece un tratamiento muy breve de los diagramas de círculo debido a que representa un mecanismo excelente de enseñanza. Las constantes *ABCD* escasamente se mencionan. Los capítulos sobre inductancia y capacitancia permanecen, atendiendo a la solicitud de muchos de los usuarios del texto, aunque se eliminó parte del material. Un resumen pequeño al final de estos capítulos puede suministrar todo el contenido que muchos de los usuarios desean para continuar con tópicos más interesantes.

Puesto que la mayoría de los estudiantes reciben una instrucción deficiente sobre el estado estacionario de los circuitos de c.a. y casi nada sobre los circuitos trifásicos o la potencia real y reactiva, se ha incluido un capítulo sobre estos conceptos básicos. He llegado a la convicción de que el tiempo empleado en este tipo de repaso es necesario para entender el material siguiente. Los computadores, obviamente, desempeñan un papel siempre creciente en la ingeniería de redes, y a eso se presta atención en la

edición de este texto. La programación no tiene cabida en este texto, pero la disponibilidad y utilidad de los computadores se destaca de principio a fin. Un número de ejemplos aprovechan el computador y no podrían resolverse razonablemente por otro medio. El sistema de cinco barras se introduce como ayuda para comprender el estudio de cargas y se examina en cuatro capítulos de esta edición, de tal manera que el estudiante se familiariza con él a medida que avanza en su estudio. Un capítulo nuevo sobre el control del flujo de la potencia real y reactiva debe interesar al estudiante. Otro cambio es la inclusión de la matriz de impedancias de barra, introducida en el capítulo sobre las ecuaciones de redes pero que muestra su verdadero valor cuando se estudian los cálculos de fallas. Muchas secciones de las ediciones previas se han revisado, y un gran número de problemas nuevos aparecen junto con los mejores de las ediciones anteriores. Al igual que en las ediciones anteriores, he sido animado por la voz de aliento de todos aquellos que sabían de la preparación de esta revisión del texto. Todas aquellas personas a quienes envié el cuestionario para que me ayudaran en la planeación de esta edición, respondieron con prontitud, y les agradezco altamente su generosidad por el tiempo y los consejos que me han brindado. El gran número de sugerencias respecto a nuevos temas no puede adoptarse en un texto de esta magnitud, pero reconozco el aporte de quienes enseñaron basándose en las ediciones anteriores, al agregar a sus cursos tópicos adicionales. Creo que esto debe ser siempre así, y deseo que la nueva edición suministre las bases sobre las cuales desarrollarse, de acuerdo con los intereses de cada instructor y de sus estudiantes.

Estoy en deuda especialmente, con un número de ingenieros de la Carolina Power and Light Company y otras compañías de potencia, muchos de ellos alumnos míos, quienes han suministrado sugerencias valiosas. El aliento continuo del profesor E.T.B. Gross, del Rensselaer Polytechnic Institute, me persuadió para realizar esta revisión. De ayuda especial fueron las múltiples ideas del profesor W.H. Kersting, de New Mexico State University, y de mi colega profesor A.J. Goetze, quien durante varios años ha enseñado con base en este texto en una de las secciones de los cursos dictados en North Carolina State University. Finalmente, debo agregar que el clima académico de la Engineering School of North Carolina State University siempre ha sido una fuente de gran satisfacción para mí.

William D. Stevenson, Jr.



CONTENIDO

PROLOGO

1 ASPECTOS GENERALES

1.1	Estructura de las redes eléctricas	1
1.2	Crecimiento de las redes eléctricas	1
1.3	Estudio de cargas	3
1.4	Distribución económica de cargas	5
1.5	Cálculo de fallos	6
1.6	Estudios de estabilidad	8
1.7	Ingeniero de redes	8
		9

2 CONCEPTOS BASICOS

2.1	Introducción	11
2.2	Anotación con subíndice simple	11
2.3	Anotación con subíndice doble	12
2.4	Potencia en circuitos monofásicos de corriente alterna	13
2.5	Potencia compleja	15
2.6	Triángulo de potencia	19
2.7	Dirección del flujo de potencia	19
2.8	Voltaje y corriente en circuitos trifásicos balanceados	20
2.9	Potencia en circuitos trifásicos balanceados	23
	Problemas	28
		30

3 IMPEDANCIA EN SERIE DE LAS LINEAS DE TRANSMISION

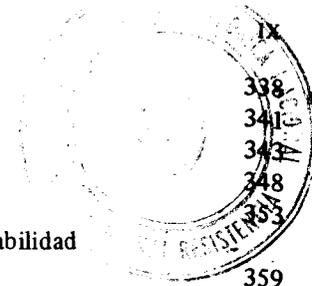
3.1	Tipos de conductores	32
3.2	Resistencia	33
3.3	Influencia del efecto piel sobre la resistencia	34
3.4	Valores tabulados de resistencia	36
3.5	Definición de inductancia	37
3.6	Inductancia de un conductor debido a flujo interno	38
3.7	Enlaces de flujo entre dos puntos externos a un conductor aislado	40
3.8	Inductancia de una línea bifilar monofásica	42
3.9	Enlaces de flujo de un conductor en un grupo	43
		46

3.10	Inductancia de líneas de conductores compuestos	47
3.11	Ejemplo de las tablas	53
3.12	Inductancia de líneas trifásicas con disposición equilátera	55
3.13	Inductancia de las líneas trifásicas con disposición asimétrica	56
3.14	Conductores múltiples	58
3.15	Líneas trifásicas de circuitos paralelos	59
3.16	Resumen de los cálculos de inductancia para líneas trifásicas	61
	Problemas	62
4	CAPACITANCIA DE LAS LINEAS DE TRANSMISION	64
4.1	Campo eléctrico de un conductor recto de gran longitud	65
4.2	Diferencia de potencial entre dos puntos debida a una carga	66
4.3	Capacitancia de una línea bifilar	67
4.4	Capacitancia de una línea trifásica con disposición equilátera	71
4.5	Capacitancia de una línea trifásica con disposición asimétrica	74
4.6	Efecto del suelo sobre la capacitancia de las líneas trifásicas de transmisión	76
4.7	Conductores agrupados	78
4.8	Líneas trifásicas de circuitos paralelos	80
4.9	Resumen	81
	Problemas	82
5	RELACIONES ENTRE LA TENSION Y LA CORRIENTE DE UNA LINEA DE TRANSMISION	84
5.1	Representación de las líneas	84
5.2	Líneas de transmisión cortas	86
5.3	Líneas de longitud media	87
5.4	Líneas de transmisión largas: solución de las ecuaciones diferenciales	90
5.5	Líneas de transmisión largas: interpretación de las ecuaciones	92
5.6	Líneas de transmisión largas: forma hiperbólica de las ecuaciones	96
5.7	Circuito equivalente de una línea larga	99
5.8	Flujo de potencia en la línea de transmisión	101
	Problemas	105
6	REPRESENTACION DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA	108
6.1	Diagrama unifilar	108
6.2	Diagramas de impedancia y reactancia	111
6.3	Cantidades por unidad	114
6.4	Cambio de base para los valores por unidad	117
6.5	Selección de la base para los valores por unidad	118
6.6	Impedancia por unidad de transformadores de tres devanados	125
6.7	Ventajas de los cálculos por unidad	128
6.8	Cuadros de cálculo C. C.	129
6.9	Métodos de cálculo	132
	Problemas	132

7	ECUACIONES DE REDES Y SOLUCIONES	137
7.1	Eliminación de nudos por transformaciones estrella-malla	138
7.2	Ecuaciones de los lazos	143
7.3	Equivalencia de fuentes	148
7.4	Ecuaciones de nudo	149
7.5	Matrices	153
7.6	Suma de matrices	156
7.7	Multiplicación de matrices	156
7.8	Inversa de una matriz	158
7.9	Participación de matrices	162
7.10	Eliminación de nudos por álgebra matricial	164
7.11	Matrices de admitancias e impedancias de barra	167
7.12	Resumen	172
	Problemas	172
8	ESTUDIOS DE CARGAS	175
8.1	Datos para los estudios de cargas	176
8.2	Método de Gauss-Seidel	176
8.3	Método de Newton-Raphson	182
8.4	Programas de computador digital	185
8.5	Información obtenida de un estudio de cargas	186
8.6	Resultados numéricos	188
	Problemas	189
9	ALGUNOS PRINCIPIOS DE CONTROL DE CARGA	190
9.1	Máquina sincrónica	190
9.2	Efectos de la excitación en la máquina sincrónica	194
9.3	Angulo de potencia de la máquina sincrónica	195
9.4	Especificación de los voltajes de barra	197
9.5	Bancos de condensadores	200
9.6	Control por medio de transformadores	203
9.7	Resumen	212
	Problemas	213
10	FUNCIONAMIENTO ECONOMICO DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA	216
10.1	Distribución de cargas entre unidades de una misma central	217
10.2	Pérdidas por transmisión en función de la producción de la central	224
10.3	Cálculo de los coeficientes de pérdidas	227
10.4	Distribución de la carga entre centrales	232
10.5	Métodos alternos para calcular los factores de penalización	236
10.6	Suministro automático de carga	237
	Problemas	239

VIII	CONTENIDO	
11 FALLOS TRIFASICOS SIMETRICOS EN MAQUINAS SINCRONICAS		242
11.1 Transiente en circuitos RL en serie		243
11.2 Corrientes de cortocircuito y reactancias de las máquinas sincrónicas		245
11.3 Tensiones internas de máquinas en carga en condiciones de régimen transitorio		249
11.4 Matriz de impedancias de barra en los cálculos de fallos		255
11.5 Circuito equivalente de la matriz de impedancias de barra		258
11.6 Selección de interruptores		261
Problemas		267
		270
12 COMPONENTES SIMETRICOS		
12.1 Síntesis de vectores desequilibrados a partir de sus componentes simétricos		270
12.2 Operadores		272
12.3 Componentes simétricos de vectores asimétricos		274
12.4 Desfase en grupos de transformadores Y- Δ		276
12.5 Potencia en función de los componentes simétricos		284
12.6 Impedancias asimétricas en serie		285
12.7 Impedancias de secuencia y redes de secuencia		287
12.8 Redes de secuencia de generadores sin carga		287
12.9 Redes de secuencia de generadores con carga		290
12.10 Impedancias de secuencia de elementos de circuito		291
12.11 Redes de secuencia positiva y negativa		292
12.12 Redes de secuencia cero		298
12.13 Conclusiones		301
13 FALLOS ASIMETRICOS		
13.1 Fallo simple línea-tierra en un generador en vacío		302
13.2 Fallo de línea a línea en un generador en vacío		305
13.3 Fallo de línea a línea en un generador en vacío		308
13.4 Fallo doble línea-tierra en un generador en vacío		312
13.5 Fallos asimétricos en sistemas de potencia		314
13.6 Fallo simple línea-tierra en un sistema de potencia		315
13.7 Fallo línea-línea en un sistema de potencia		315
13.8 Fallo doble línea-tierra en un sistema de potencia		315
13.9 Interpretación de las redes de secuencia interconectadas		323
13.10 Análisis de fallos asimétricos empleando la matriz de impedancias de barra		326
13.11 Fallos a través de impedancias		329
Cálculos digitales de las corrientes de fallo		330
Problemas		
14 ESTABILIDAD DE SISTEMA		332
14.1 El problema de la estabilidad		333
14.2 Estabilidad en régimen permanente		334

CONTENIDO	
14.3 Estabilidad en régimen transitorio: repaso de mecánica	338
14.4 Ecuación de oscilación	341
14.5 Criterio de la igualdad de las áreas para la estabilidad	344
14.6 Otras aplicaciones del criterio de la igualdad de las áreas	348
14.7 Construcción paso a paso de la curva de oscilación	359
14.8 Programas del computador digital para determinar la estabilidad transiente	363
14.9 Algunos factores que afectan la estabilidad en régimen transitorio	365
Problemas	375
Indice	



ASPECTOS GENERALES

El desarrollo de fuentes de energía para ejecutar trabajos útiles es la clave del progreso industrial y esencial para el mejoramiento continuo del nivel de vida de las gentes. Descubrir nuevas fuentes de energía, obtener un suministro esencialmente inagotable para el futuro, distribuirla a donde se requiera, convertirla de una forma a otra y emplearla sin provocar la contaminación ambiental que destruye nuestra biosfera constituye uno de los grandes problemas que actualmente afronta el mundo. La red eléctrica es un elemento para convertir y transportar energía y desempeña un papel importante en la solución de este problema. La industria se enfrenta con problemas creados por el rápido crecimiento. Se necesitan ingenieros altamente especializados para desarrollar e implementar los progresos de la ciencia y solucionar estos problemas, garantizando un sistema altamente confiable y considerando al mismo tiempo la protección de nuestra ecología.

1.1 ESTRUCTURA DE LAS REDES ELECTRICAS

Una red eléctrica se compone de tres partes principales: las centrales generadoras, las líneas de transmisión y las redes de distribución. Las líneas de transmisión constituyen los eslabones de conexión entre las centrales generadoras y las redes de distribución y conduce a otras redes de potencia por medio de interconexiones. Una red de distribución conecta las cargas aisladas de una zona determinada con las líneas de transmisión.

La situación de las centrales hidroeléctricas está condicionada por la existencia del salto de agua; la elección del emplazamiento de centrales térmicas que emplean combustibles fósiles o nucleares es más flexible. Las centrales térmicas que emplean combustibles fósiles corrientemente se reparten por la red de manera que la planta generadora esté próxima a uno de los grandes centros de consumo. Con frecuencia las nuevas plantas nucleares son muy grandes. Comúnmente en los planes para una planta nuclear se especifica un tamaño igual a la capacidad total de la red en el momento de iniciar el diseño. En resumen, las plantas nucleares pueden necesitar el transporte de grandes cantidades de potencia sobre distancias considerablemente largas, una planta hidroeléctrica también puede requerir de líneas de transmisión largas desde la planta hasta los centros de consumo, y las plantas térmicas que emplean combustibles fósiles alimentan cargas a distancias más cortas.

Más del 80 % de la potencia eléctrica que se consume en los EE.UU. se genera en plantas de turbina a vapor. La potencia hidroeléctrica cuenta con menos del 20 %. El carbón es el combustible de casi el 50 % de las plantas térmicas; el combustible restante es aceite, gas natural y combustibles nucleares. Varias plantas pasaron del carbón al petróleo entre 1970 y 1972 para cumplir normas contra la contaminación ambiental. La escasez de petróleo originada a partir de ese momento aumentó el precio de éste y la necesidad de reservar los suministros de petróleo para otros usos ocasionaron el regreso al carbón.

Se prevé que, aun si nuestra actual tasa de consumo de petróleo se redujese, sus suministros en los EE. UU. se agotarían hacia 1995 si no se lo pudiera importar de países extranjeros. En el caso de que se importe, puede contarse con petróleo solamente por otros 25 años (hasta el 2020) cuando todo el aceite del mundo se habrá agotado. Los EE.UU. tienen afortunadamente, amplias reservas de carbón; pero si pensamos en un futuro lejano, concluimos que los combustibles fósiles de todas las clases deben conservarse como provisión para generaciones futuras. Deben desarrollarse otras fuentes primarias de energía. En los EE.UU. y algunos países extranjeros se ha empleado la energía geotérmica en forma de vapor directo, que brota del subsuelo. Varias centrales geotérmicas se encuentran funcionando en California, pero la cantidad que aportan es insignificante para nuestras necesidades. La energía solar podría convertirse en una práctica a gran escala; sin embargo, nuestra mejor esperanza es la energía nuclear. Se prevé que los reactores nucleares alcanzarán un grado de desarrollo que nos permitirá llegar a fines del siglo veinte y que a partir de ese mismo momento la fusión nuclear controlada nos proporcionará un suministro básicamente ilimitado de energía. Si esto sucede, la red eléctrica debe continuar su crecimiento y dominar sobre las aplicaciones de combustible directo. Por ejemplo, el auto eléctrico probablemente será utilizado ampliamente a fin de preservar los combustibles fósiles (incluyendo el petróleo y el gas sintetizado del carbón) para la aviación y los transportes terrestres de largas distancias.

Una desventaja de las plantas nucleares es que su energía debe usarse a un nivel aproximadamente constante. El almacenamiento por bombeo hidráulico, una solución a este problema, incluye el empleo de una turbina de agua reversible para bombear el agua de niveles bajos a estanques cuando la demanda de energía eléctrica es baja y emplear esta agua para atender la demanda durante el consumo máximo, cuando los costos de producción son los más elevados. El almacenamiento por bombeo puede compararse a la carga y descarga de una batería.

La tensión de los generadores se eleva a los niveles de transmisión en el intervalo de

110 a 765 kV. Actualmente la investigación se encamina a obtener niveles de tensión de transmisión de 1.100 a 1.500 kV. La ventaja de niveles superiores de tensión en la línea de transmisión se evidencia cuando se tiene en cuenta la capacidad de transmisión en megavoltamperios (MVA) de una línea, la cual varía con el cuadrado de la tensión. La tabla 1.1 muestra la capacidad de potencia de líneas abiertas para las tensiones de líneas comunes basadas en la capacidad proporcional al cuadrado de la tensión, principiando con una capacidad de 50 MVA a 115 kV.

La transmisión por cable subterráneo para una tensión específica se desarrolla aproximadamente 10 años después de iniciada la operación a esa tensión sobre líneas abiertas. La transmisión subterránea es irrisoria en términos de distancia, pero está aumentando considerablemente. Está prácticamente restringida a áreas urbanas densamente pobladas.

La primera disminución de tensión de los niveles de transmisión se efectúa en la subestación de transformación, donde se reducen desde 34.5 a 138 kV, dependiendo, lógicamente, de la tensión de la línea de transmisión.

Algunos usuarios industriales consumen a estos niveles de tensión. La próxima disminución de tensión ocurre en la subestación de distribución, donde las tensiones de las líneas salientes de la subestación varían de 4 a 34.5 kV y con frecuencia entre 11 y 15 kV. Este es el sistema de distribución primario. Una tensión muy común en este nivel es 12470 V línea a línea, lo que significa 7200 V de línea a tierra, o neutro. Esta tensión se describe como 12470 Y/7200 V. Una tensión inferior en sistemas primarios, que se emplean menos, es la de 4160 Y/2400 V. La mayoría de las cargas industriales se alimentan del sistema primario, que también suministra los transformadores de distribución dando tensiones secundarias sobre circuitos trifilares, monofásicos para empleo residencial. En este caso la tensión es de 240 V entre dos líneas y 120 V entre cada una de ellas y la tercera línea, que está conectada a tierra. Otros circuitos secundarios son 208 Y/120 V, o sistemas trifásicos de cuatro líneas de 480 Y/277 V.

1.2 CRECIMIENTO DE LAS REDES ELÉCTRICAS

El desarrollo de las redes de corriente alterna, empezó en los EE.UU., en 1885, cuando George Westinghouse compró las patentes americanas que protegían el sistema de transporte de corriente alterna, desarrollado por L. Gaulard y J. D. Gibbs, de París. William

Tabla 1.1 Comparación de la capacidad de transmisión en líneas trifásicas abiertas.

Tensión línea-a-línea kV	Capacidad de transmisión MVA
115	50
138	72
230	200
345	450
500	945
765	2200

Stanley, un antiguo socio de Westinghouse probaba transformadores en su laboratorio de Great Barrington, Massachusetts. Allí, en el invierno de 1885-1886, instaló Stanley la primera red experimental de distribución de corriente alterna que alimentaba 150 lámparas de la ciudad. La primera línea de transporte de corriente alterna en los EE.UU., se puso en funcionamiento en 1890, para llevar energía eléctrica, generada en una central hidroeléctrica desde Willamette Falls, hasta Portland, Oregón, distantes una de la otra, 13 millas.

Las primeras líneas de transporte fueron monofásicas y la energía se consumía, generalmente, sólo en alumbrado. Incluso los primeros motores fueron monofásicos; pero el 16 de mayo de 1888, Nikola Tesla, presentó una memoria en la que describía los motores bifásicos de inducción y los síncronos. Las ventajas de los motores polifásicos se pusieron de manifiesto inmediatamente y en la Columbian Exposition de Chicago de 1893 se mostró al público una red de distribución de corriente alterna bifásica. A partir de entonces, la transmisión de energía eléctrica, especialmente trifásica, fue sustituyendo gradualmente a los sistemas de corriente continua. En enero de 1894, había en EE.UU. cinco centrales generadoras polifásicas, de las cuales una era bifásica y las restantes trifásicas. El transporte de energía eléctrica en los EE. UU. se hace actualmente sólo por corriente alterna.

Uno de los motivos de la rápida aceptación de los sistemas de la corriente alterna fue la existencia del transformador que hace posible el transporte de energía eléctrica a una tensión más alta que la de generación o utilización con la ventaja de una mayor capacidad de transmisión, como se indica en la sección anterior.

En el sistema de transporte de corriente continua, los generadores de corriente alterna suministran corriente continua a la línea por medio de un transformador y un rectificador electrónico. Un convertidor electrónico transforma, al final de la línea, la corriente continua en alterna, pudiendo reducir la tensión por medio de un transformador. Estudios económicos han demostrado que el transporte aéreo de corriente continua no es económico en los EE.UU. para distancias menores de 350 millas. En Europa, donde las líneas de transmisión son, generalmente, mucho más largas que en los EE.UU., existen en funcionamiento, en varios sitios, líneas de transmisión en corriente continua, tanto aéreas como subterráneas. En California, grandes cantidades de potencia hidroeléctrica se transportan desde el noroeste del Pacífico hasta el sur de California en línea de corriente alterna de 500 kV a lo largo de la costa y hacia el interior a través de Nevada por corriente directa a 800 kV entre líneas.

Las estadísticas aparecidas desde 1920 indican un porcentaje de aumento casi constante tanto en la capacidad de generadores instalados como en la producción de energía anual revelando que estos valores casi se duplican cada 10 años. Realmente la producción de energía ha aumentado en los 50 años siguientes a 1920 más rápidamente que la capacidad instalada, probablemente debido a las interconexiones, como se explica posteriormente, y a una mejor distribución total de carga durante el año. Duplicar cada 10 años significa que al final de un período de 50 años la capacidad instalada y la producción anuales son 32 veces las del comienzo del período. El factor real de multiplicación para la capacidad instalada sobre el período de 50 años iniciado en 1920 es de 28 y para la producción de energía de 39. Este crecimiento acusa algunas muestras de lentitud debidos a una menor tasa de nacimientos y a escasez de combustible; pero, si la red eléctrica, con la ayuda de la energía nuclear, asume tareas adicionales cumplidas ahora con el empleo de combustibles directos, la tendencia continuará.

Desde los primeros transportes de corriente alterna en los EE. UU., la tensión de fun-

cionamiento se ha ido incrementando con rapidez. En 1890, la línea Willamette-Portland funcionaba a 3.300 V. En 1907, funcionaba ya una línea a 100 kV. La tensión creció a 150 kV en 1913, a 220 kV en 1923, a 244 kV en 1926 y a 287 kV en la línea de Hoover Dam a Los Angeles que entró en servicio en 1936. En 1953 se puso en funcionamiento la primera línea de 345 kV. En 1965 se puso en funcionamiento la primera línea de 500 kV; cuatro años más tarde, en 1969, se puso en funcionamiento la primera línea de 765 kV.

Hasta 1917, las redes eléctricas funcionaron, corrientemente, como unidades separadas, porque empezaron como sistemas aislados extendiéndose gradualmente para cubrir el país. La demanda de grandes bloques de potencia y de mayor seguridad de funcionamiento sugirió la interconexión de los sistemas cercanos. La interconexión es ventajosa económicamente debido a que se necesita menor número de máquinas de reserva para atender a las cargas punta (capacidad de reserva) y a que funcionan menor número de máquinas sin carga para tener en cuenta las repentinas e inesperadas elevaciones del consumo (reserva en carga). La reducción de máquinas se hace posible, porque, generalmente, una compañía puede pedir a otra la potencia adicional que necesite. La interconexión, además, permite a las empresas aprovechar las fuentes de energía más económicas, pudiendo ser más barato a una compañía el comprar energía que el producirla en una central anticuada. La interconexión se ha incrementado de tal manera, que se ha convertido en rutinario cambio de energía entre las redes de diferentes compañías. La continuidad de servicio de los sistemas que dependen de centrales hidroeléctricas en su mayor parte, es posible, en tiempo de extrema sequía anormal, gracias a la energía obtenida de otros sistemas a través de la interconexión.

La interconexión planteó muchos problemas nuevos, de los cuales se han resuelto la mayor parte; incrementa la intensidad de la corriente en la red cuando se produce un cortocircuito y exige la instalación de interruptores de mayor corriente nominal. La perturbación causada por un cortocircuito en un sistema puede extenderse a los con él interconectados, a menos que se hayan previsto, en el punto de interconexión, los adecuados relés e interruptores automáticos. Las redes interconectadas no solo tienen que tener la misma frecuencia nominal, sino que los generadores síncronos de una red deben estar en fase con los de las demás.

La programación del funcionamiento, perfeccionamiento y expansión de una red eléctrica exige el estudio de cargas y de estabilidad y el cálculo de fallos. Un problema importante en el funcionamiento correcto del sistema es el de fijar cómo se ha de repartir entre las distintas centrales generadoras y, dentro de éstas, entre las distintas máquinas, la potencia a producir en un momento determinado. Consideraremos la naturaleza general de estos problemas y, a continuación, expondremos algunos conceptos fundamentales en la teoría de líneas de transmisión. Después estudiaremos las soluciones de los problemas descritos y veremos la gran contribución de las calculadoras a la programación y funcionamiento de los sistemas de redes eléctricas.

1.3 ESTUDIO DE CARGAS

Un estudio de cargas es la determinación de la tensión, intensidad, potencia y factor de potencia o potencia reactiva en varios puntos de una red eléctrica, en condiciones normales de funcionamiento. Los estudios de cargas son fundamentales en la programación del futuro desarrollo del sistema, puesto que su funcionamiento satisfactorio depende del conoci-

to de los efectos de la interconexión con otras redes, de las nuevas cargas, de las nuevas centrales generadoras y de las nuevas líneas de transporte, antes de que se instalen.

Antes del desarrollo de grandes computadores digitales el estudio de cargas se ejecutaba en analizadores de redes de corriente alterna, los cuales suministraban una reproducción a pequeña escala y monofásica, de la red real al interconectar los elementos de circuito y fuentes de tensión. Efectuar las conexiones, hacer los ajustes y leer los datos era tedioso y requería de mucho tiempo. Ahora los computadores digitales suministran las soluciones del estudio de cargas de sistemas complejos; por ejemplo, un programa de computador puede manipular 1 500 barras de tensión, 2 500 líneas, 500 transformadores con derivación variable bajo carga, y 25 transformadores de desplazamiento de fase. Los resultados completos se imprimen rápida y económicamente.

Los diseñadores de redes están interesados en el estudio de una red que funcione en 10 o 20 años. Más de 10 años transcurren entre la iniciación del proyecto para una nueva planta nuclear y su conexión a la línea. Una compañía de redes debe conocer con anterioridad los problemas relacionados con la localización de la planta y la mejor distribución de las líneas para transmitir la energía a centros de consumo que no existirán cuando se elabore el proyecto.

La hoja de impresión ilustrada en la fig. 1.1 es típica de los resultados obtenidos de los estudios de carga elaborados en 1974 por la *Carolina Power and Light Company* para investigar las posibles combinaciones futuras de plantas generadoras, líneas de transmisión y cargas. Se ha hecho la lista de algunas barras de tensión que pueden existir en 1986 en una pequeña parte del sistema de la compañía. El estudio se efectuó para 1.318 barras de tensión incluyendo partes de los sistemas de las compañías vecinas. El tiempo empleado por el computador para la solución fue de 46 S.

En el Cap. 8 veremos cómo se efectúan estos estudios en el computador y examinaremos los resultados impresos de los estudios de carga de un sistema pequeño en más detalle.

1.4 DISTRIBUCION ECONOMICA DE CARGAS

A primera vista, puede parecer que las industrias eléctricas no han de hacer frente a la competencia. Esta idea nace del hecho de que cada compañía opera en una zona no servida por otras. Sin embargo, la competencia actúa atrayendo nuevas industrias a una determinada zona. La obtención de tarifas eléctricas más ventajosas es un factor muy estimulante para la ubicación de industrias. Aunque este factor es de menor importancia en épocas de costos crecientes y tarifas inciertas que en períodos de condiciones económicas estables. La regulación de tarifas por las comisiones municipales de servicios presiona fuertemente sobre las empresas, para que hagan el máximo de economías y obtengan beneficio, manteniendo las tarifas constantes para los costos crecientes.

Distribución económica es el nombre dado al proceso de repartir la carga total sobre un sistema entre las diferentes fuentes para realizar la mayor economía de funcionamiento. Veremos que las plantas en un sistema están controladas continuamente por un computador a medida que cambia el consumo de tal manera que la generación se distribuye a efectos de un funcionamiento más económico.

1.5 CALCULO DE FALLOS

Un fallo en un conductor es cualquier desperfecto que interfiera la circulación normal de

PAGE 53.

5/24/74

ATS 001

6 ITERATIONS, SWING BUS IS 1460.

REPORT OF POWER FLOW CALCULATIONS FOR AREA 7, CAROLINA POWER & LIGHT CO.-EAST DIV.

BUS NAME VOLTAGE ANGLE P Q S T X Y Z W U V TAP SHIFT

BUS	NAME	VOLTS	ANGLE	P	Q	S	T	X	Y	Z	W	U	V	TAP	SHIFT
1	ROXBORO 230	1.020	10.7	2486.3	576.0	0.0	0.0								
2	PERSON 500	1.020	12.1	1440.0	-33.5	0.0	0.0								
3	ROXBORO 500	1.022	11.7	0.0	0.0	0.0	0.0								
4	YAN TAP	0.930	4.9	0.0	0.0	0.0	0.0								
5	VANCEVIL	0.914	3.4	0.0	0.0	31.8	10.6	12.1							
6	ROY N	0.934	2.5	0.0	0.0	62.0	20.5	24.2							
7	ROY S	0.943	3.2	0.0	0.0	0.0	0.0	18.7							
8	LEESVL	0.993	1.1	0.0	0.0	143.2	89.6	103.6							
9	ROY S 230	1.012	8.5	0.0	0.0	47.9	14.7	13.6							
10	OXFES TAP	0.960	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							
11	OXFD N	0.980	4.9	0.0	0.0	36.3	12.3	4.6							
12	OXFD S	0.962	-0.3	0.0	0.0	59.5	13.1	9.2							
13	ROX115	0.930	2.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0							

3 ROXBORO 500 277.93 -67.02
 11 OXF S 285.93 47.30
 11 OXF N 505.58 07.28
 28 N RAL 271.25 69.15
 475 NEUS 230 213.70 28.30
 475 NEUS 500 213.70 28.30
 793 EM0230 434.39 134.06
 1100 WLF230 226.37 51.30
 3 ROXBORO 500 269.19 -113.44
 19 N RAL 500 1170.81 79.98
 1 ROXBORO 230 278.14 32.04 1.000
 2 PERSON 500 -269.11 94.02
 1430 AXTN 500 -9.02 -126.05
 5 VANCEVIL 32.29 -1.51
 7 ROX S 34.00 -30.98
 1403 O50ANVIL -66.28 32.49
 4 YAN TAP -31.78 1.47
 13 ROX115 -3.61 -21.19 1.012
 1404 O5E DANY -58.38 24.87
 4 YAN TAP -33.57 31.17
 13 ROX115 31.57 -12.45 1.018
 9 ROX S 230 -314.02 -11.51
 470 BLU RDGE 230 170.81 25.66
 1 ROXBORO 230 -366.86 -39.06
 8 LEESVL 317.02 38.00
 12 OXF S 59.31 3.81
 13 ROX115 -28.52 35.48
 21 WED 115 -9.79 -39.24
 1 ROXBORO 230 -289.49 -26.74
 20 WED 230 253.18 53.04
 10 OXFES TAP -39.27 -3.86
 6 ROX N 3.61 21.35
 7 ROX S -33.57 12.92
 10 OXFES TAP 29.95 -36.27

Fig. 1.1 Una de las 106 páginas del estudio de cargas que corresponde a una pequeña parte del sistema de la *Carolina Power and Light Company* proyectada para 1986.

corriente. La mayor parte de las averías en líneas de transporte de 115 kV y superiores son producidas por los rayos que dan lugar a descargas en los aisladores. La alta tensión que existe entre un conductor y la torre derivada a tierra que lo soporta, provoca la ionización del aire proporcionando un paso hacia tierra a la carga inducida por el rayo. Una vez establecido el paso a tierra, la baja impedancia resultante permite el paso de corriente desde el conductor a tierra y de aquí al neutro conectado a tierra del transformador o generador, completando así el circuito. Los fallos de línea a línea sin intervención de tierra son menos corrientes. La apertura de los interruptores para aislar la sección de la línea que tiene fugas, del resto de la red, hace cesar el flujo de la corriente por la zona ionizada, permitiendo la desionización. Después de un intervalo de unos 20 ciclos, para lograr la desionización, pueden cerrarse los interruptores sin que, corrientemente, se restablezca el arco. La experiencia en el funcionamiento de líneas de transporte indica que los interruptores ultrarrápidos reconectan debidamente después de la mayor parte de los cortes por fallos. De los casos en que no reconectaron debidamente, un número apreciable fueron por fugas permanentes, en los que la reconexión era imposible, independientemente del intervalo entre la apertura y la reconexión. Las fugas o fallos permanentes son producidas por líneas derivadas a tierra, cadenas de aisladores rotas por cargas de hielo, desperfectos en las torres y averías en los pararrayos. La práctica demuestra que entre el 70 y el 80 % de las fugas de las líneas de transporte son fugas de un solo conductor a tierra producidos por el salto de un arco desde uno de los conductores a la torre y a tierra. La proporción mínima de fugas, aproximadamente un 5 %, comprenden las tres fases, llamándose fugas trifásicas. Otros tipos de fugas en las líneas de transporte son los contactos entre conductores, que no implica la puesta a tierra, y las fugas dobles que suponen los contactos entre conductores y simultáneamente la puesta a tierra. Todas las fugas mencionadas, excepto las del tipo trifásico, son asimétricas por lo que provocan el desequilibrio entre fases.

La corriente que circula por los distintos puntos de una red, inmediatamente después de presentarse una fuga, difiere de la que circula unos pocos ciclos más tarde poco antes de avisar para que los interruptores corten la corriente a los dos lados de la fuga, y ambas corrientes son muy distintas de la de régimen estacionario, si la fuga no se hubiera aislado del resto de la red haciendo funcionar los interruptores. Dos de los factores sobre los que se basa la elección adecuada de los interruptores son la corriente que pasa inmediatamente después de presentarse la fuga y la que el interruptor tiene que cortar. El cálculo de las fugas tiene por objeto determinar estas corrientes para varios tipos de fugas en distintos puntos de la red. Los datos obtenidos de este cálculo también sirven para la colocación de los relés que controlan los interruptores.

El análisis de componentes simétricas es una valiosa ayuda que se estudiará más adelante y que calcula las fugas asimétricas casi tan fácilmente como las trifásicas. De nuevo el computador digital es invaluable al efectuar los cálculos de fallos. Estudiaremos las operaciones fundamentales requeridas por los programas de computador.

1.6 ESTUDIOS DE ESTABILIDAD

La corriente que circula por un generador de c-a, o por un motor síncrono, depende de la tensión generada o de la f.c.e.m., del ángulo de fase de dicha f.e.m. con respecto al ángulo de fase de las f.e.m. de cada una de las otras máquinas de la red, y de las características de ésta y de las cargas. Por ejemplo, dos generadores de c-a funcionando en paralelo, pero sin

más conexiones exteriores que las que forman el circuito de unión, no proporcionarán corriente si sus f.e.m. son iguales en amplitud y fase. Si sus f.e.m. son iguales, pero de fase diferente, su diferencia no será nula y circulará una corriente determinada por aquella diferencia y la impedancia del circuito. Un generador suministrará potencia al otro que funcionará como motor en lugar de como generador.

Los ángulos de fase de las f.e.m. dependen de la posición relativa de los rotores de las máquinas. Si no se mantuviera el sincronismo entre los generadores de una red, los ángulos de fase de sus f.e.m. cambiarían constantemente respecto a las de los demás y sería imposible un funcionamiento satisfactorio.

Los ángulos de fase de las f.e.m. de las máquinas síncronas permanecen constantes tan solo cuando sus velocidades son constantes e iguales a la correspondiente a la del vector de referencia. Cuando cambia la carga de cualquiera de los generadores o de la red, también lo hace la corriente que circula por el generador o la red. Si la variación de corriente no da lugar a un cambio de las f.e.m. de las máquinas entonces cambiarán los ángulos de fase de éstas. Por esta razón son necesarias las variaciones momentáneas de velocidad para lograr el ajuste de los ángulos de fase de las f.e.m. de las distintas máquinas, puesto que dichos ángulos están determinados por las posiciones relativas de los rotores. Una vez las máquinas se han ajustado a los nuevos ángulos de fase, o cuando ha desaparecido la perturbación que provocó el momentáneo cambio de velocidad, las máquinas volverán a funcionar a la velocidad de sincronismo. Si alguna no permaneciera en sincronismo con las demás, aparecerán grandes corrientes que provocan, en una red correctamente proyectada, su desconexión por la acción de los relés e interruptores. El problema de estabilidad consiste en mantener en sincronismo el conjunto de generadores y motores de la red.

Los estudios de estabilidad se clasifican según consideren estados estacionarios o transitorios. Existe un límite definido de la potencia que es capaz de suministrar un generador de c-a y de la carga que puede llevar un motor síncrono. La inestabilidad se presenta al pretender aumentar la energía mecánica suministrada a un generador, o la carga mecánica de un motor, por encima de la potencia determinada conocida bajo el nombre de *límite de estabilidad*. El valor límite de potencia se alcanza incluso cuando el cambio se hace gradualmente. En las perturbaciones que se presentan en una red, cuando se aplican cargas repentinamente, se producen fugas, hay pérdida de excitación en el campo de un generador o se realizan conexiones, pueden presentarse pérdidas de sincronismo, aun cuando el cambio producido en la red por la perturbación no exceda del límite de estabilidad si el cambio se hizo gradualmente. El valor límite de potencia se llama *límite de estabilidad en régimen transitorio o límite de estabilidad en régimen permanente*, según que el punto de inestabilidad se alcance por una variación, repentina o gradual, de las condiciones del sistema.

Afortunadamente, los ingenieros han encontrado métodos para mejorar la estabilidad y predecir los límites de funcionamiento estable, tanto en condiciones estacionarias como transitorias. El estudio de la estabilidad de una red con dos máquinas es menos complejo que el estudio de redes con muchas, pero, de los métodos para mejorar la estabilidad, muchos pueden verse por el análisis de una red con dos máquinas. Los computadores digitales se utilizan para predecir los límites de estabilidad de una red compleja.

1.7 INGENIERO DE REDES

Este capítulo ha intentado bosquejar algo de la historia de los desarrollos básicos de las re-

des eléctricas y describir algunos de los estudios analíticos importantes para programar el funcionamiento, mejora y expansión de una red eléctrica moderna. El ingeniero de redes deberá conocer los métodos para hacer estudios de cargas, análisis de fugas, estudios de estabilidad y aquellos otros que afecten al diseño y funcionamiento de las redes, así como a la selección de aparatos para su control. Antes de considerar estos problemas con más detalle, estudiaremos algunos conceptos fundamentales relativos a redes para apreciar cómo influyen sobre problemas de más envergadura.

CONCEPTOS BASICOS

Al ingeniero de redes le incumbe tanto la operación normal del sistema como con las circunstancias anormales que puedan sobrevenir. Por tanto, debe estar familiarizado con los circuitos c.a. en estado estacionario, particularmente circuitos trifásicos. El propósito de este capítulo es revisar algunas de las ideas fundamentales de tales circuitos y al mismo tiempo establecer la notación que se usa a lo largo del texto.

2.1 INTRODUCCION

Se puede suponer que las formas de onda de voltaje en las barras de una red son puramente sinusoidales, de frecuencia constante. Gran parte de la teoría de este texto se desarrolla con representaciones vectoriales de voltajes y corrientes y usamos las letras mayúsculas V e I para indicar estos vectores (con los subíndices adecuados cuando sea necesario). La magnitud de los vectores será indicada en barras verticales encerrando V e I , esto es $|V|$ e $|I|$. Las letras minúsculas indican valores instantáneos. Donde se especifique un voltaje generado (fuerza electromotriz), se usa la letra E en vez de la V para resaltar el hecho de que es una fem y no una diferencia de potencial la cual está entre los dos puntos considerados.

Si el voltaje y la corriente se expresan como funciones del tiempo, tales como

$$v = 141.4 \cos (\omega t + 30^\circ)$$

y

$$i = 7.07 \cos \omega t$$

sus máximos valores son obviamente $V_{m\acute{a}x} = 141.4 \text{ V}$, $I_{m\acute{a}x} = 7.07 \text{ A}$, respectivamente. Cuando los subíndices máx con V e I se usan para indicar valores máximos las barras verticales no son necesarias. El término magnitud se refiere al valor cuadrático medio (vcm), el cual es igual al valor máximo dividido por $\sqrt{2}$. Es decir, para las expresiones de arriba para V e I .

$$|V| = 100 \text{ V} \quad \text{y} \quad |I| = 5 \text{ A}$$

Estos son los valores leídos por los voltímetros y amperímetros comunes. Otro nombre, para el valor rms es *valor efectivo*. La potencia media disipada en una resistencia es $|I|^2 R$. Para expresar estas cantidades como vectores se requiere de una referencia. Si la corriente es el vector referencia

$$I = 5/0^\circ = 5 + j0 \text{ A}$$

El voltaje que adelanta el vector referencia en 30° es

$$V = 100/30^\circ = 86.6 + j50 \text{ V}$$

Por supuesto, puede no escogerse como vector referencia el voltaje a la corriente cuyas expresiones instantáneas son v e i , en cuyo caso sus expresiones vectoriales incluyen otros ángulos.

En los diagramas de los circuitos, por lo general es más conveniente usar marcas de polaridad en forma de signos más y menos para indicar el término supuesto positivo cuando se especifica. Una flecha en el diagrama especifica la dirección supuesta positiva para el flujo de corriente. En el circuito monofásico equivalente de un circuito trifásico la anotación de subíndices es usualmente suficiente, pero la anotación de doble subíndice es generalmente más simple cuando se trata de las tres fases.

2.2 NOTACION CON SUBÍNDICE SIMPLE

La fig. 2.1 muestra un circuito c.a. con una fem representada por un círculo. La fem es E_g y el voltaje entre los nodos a y o se identifica como V_t . La corriente en el circuito es I_L y el voltaje a través de Z_L es V_L . Sin embargo, para especificar estos voltajes como vectores son necesarias las marcas $+$ y $-$ llamadas marcas de polaridad, y una flecha para la dirección de la corriente.

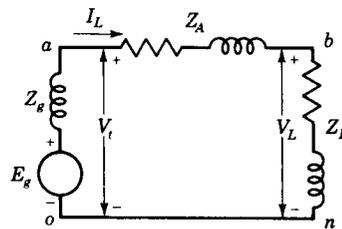


Fig. 2.1 Un circuito c.a. con fem E_g e impedancia de carga Z_L .

En un circuito c.a. el terminal marcado $+$ es positivo con respecto al terminal marcado $-$ para la mitad de un ciclo de voltaje y es negativo con respecto al otro terminal

durante el siguiente medio ciclo. Marcamos los terminales para indicar que el voltaje entre los terminales es positivo en cualquier instante, cuando el terminal marcado como más está realmente a un mayor potencial que el terminal marcado como menos. Por ejemplo, en la fig. 2.1 el voltaje instantáneo v_t es positivo cuando el terminal marcado más está realmente a un mayor potencial que el terminal marcado con el signo negativo. Durante el siguiente medio ciclo el terminal marcado positivamente realmente es negativo, y v_t es negativo. Algunos autores usan una flecha pero deben especificar si la punta de la flecha está indicando el terminal denominado menos o el denominado más de acuerdo con la convención descrita anteriormente.

Las flechas de corriente conforman una situación semejante. El subíndice L no es necesario a menos que existan otras corrientes. Obviamente la dirección real de la corriente en un circuito ca se invierte en cada medio ciclo. La flecha indica la dirección que se llama positiva para la corriente. Cuando la corriente circula en la dirección opuesta a la de la flecha, es negativa. El vector de la corriente es

$$I_L = \frac{V_t - V_L}{Z_A} \quad (2.1)$$

y

$$V_t = E_g - I_L Z_A \quad (2.2)$$

Puesto que a ciertos nodos en el circuito se les han asignado letras, los voltajes pueden designarse por la letra que identifica el nodo cuyos voltajes van a expresarse con respecto al nodo de referencia. En la fig. 2.1 el voltaje instantáneo v_a y el vector voltaje V_a expresan el voltaje del nodo a con respecto al nodo de referencia o , y V_a es positivo cuando a está a un mayor potencial que o , es decir.

$$v_a = v_t \quad v_b = v_L$$

$$V_a = V_t \quad V_b = V_L$$

2.3 NOTACION CON SUBÍNDICE DOBLE

El uso de marcas de polaridad para voltajes y flechas para la dirección de las corrientes puede evitarse con notación de subíndice doble. La comprensión de los circuitos trifásicos es considerablemente clara adoptando el sistema de doble subíndice. La convención a seguir es muy sencilla.

Cuando se señala una corriente el orden de los subíndices asignados al símbolo para la corriente define la dirección del flujo de corriente cuando la corriente considerada es positiva. En la fig. 2.1 la flecha de a hacia b define la dirección positiva para la corriente asociada con la flecha. La corriente instantánea I_L es positiva cuando la corriente realmente está en la dirección de a hacia b , y en notación de doble subíndice la corriente es i_{ab} , es igual a $-i_{ba}$.

En la notación de doble subíndice las letras de los subíndices en un voltaje indican los nodos del circuito entre los cuales existe el voltaje. Seguiremos la convención que dice

que el primer subíndice señala el voltaje de ese nodo con respecto al nodo identificado por el segundo subíndice. Esto significa que el voltaje instantáneo v_{ab} a través de Z_A del circuito de la fig. 2.1 es el voltaje del nodo con respecto al nodo A y que v_{ab} es positivo durante ese medio ciclo cuando a está a un mayor potencial que b . el vector del voltaje correspondiente es V_{ab} y

$$V_{ab} = I_{ab}Z_A \quad (2.3)$$

donde Z_A es la impedancia compleja a través de la cual I_{ab} fluye entre los nodos a y b , la cual puede también llamarse Z_{ab} .

Invirtiendo el orden de los subíndices de corriente o de voltaje da una corriente a un voltaje 180° fuera de fase con el original; es decir

$$V_{ab} = V_{ba}/180^\circ = -V_{ba}$$

La relación de las anotaciones de subíndices doble y simple para la fig. 2.1 se resume como sigue:

$$V_t = V_a = V_{ao} \quad V_L = V_b = V_{bo}$$

$$I_L = I_{ab}$$

En la escritura de las leyes de Kirchhoff, el orden de los subíndices es el orden en el cual se traza un paso cerrado alrededor del circuito para la fig. 2.1.

$$V_{oa} + V_{ab} + V_{bn} = 0 \quad (2.4)$$

Los nodos n y o son los mismos en este circuito; se ha introducido n para identificar el paso con mayor precisión. Reemplazando V_{oa} por $-V_{ao}$ y observando que $V_{ab} = I_{ab}Z_A$ encontramos

$$-V_{ao} + I_{ab}Z_A + V_{bn} = 0 \quad (2.5)$$

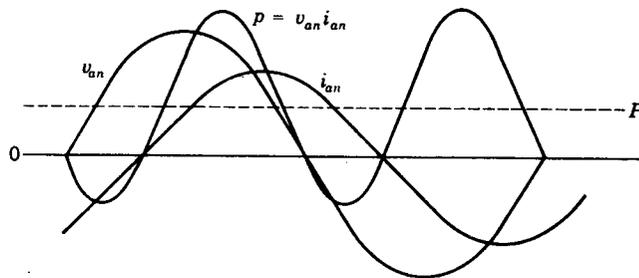


Fig. 2.2 Corriente, voltaje y potencia dibujados con respecto al tiempo.

$$I_{ab} = \frac{V_{ao} - V_{bn}}{Z_A} \quad (2.6)$$

y así

2.4 POTENCIA EN CIRCUITOS MONOFÁSICOS DE CORRIENTE ALTERNA

Aunque la teoría fundamental de la transmisión de energía describe el transporte de la energía en términos de la interacción de los campos eléctricos y magnéticos, los sistemas de potencia que el ingeniero maneja casi siempre se refieren a la descripción de la razón de cambio de la energía con respecto al tiempo (lo cual es la definición de potencia) en términos de voltaje y corriente. La unidad de potencia es el vatio. La potencia en vatios que absorbe la carga en cualquier instante es el producto de la caída de tensión instantánea en voltios a través de la carga y la corriente instantánea en amperios dentro de la carga. Si los terminales de la carga se designan a y n y si el voltaje y la corriente se expresan por

$$v_{an} = V_{\text{máx}} \cos \omega t \quad \text{y} \quad i_{an} = I_{\text{máx}} \cos(\omega t - \theta)$$

la potencia instantánea es

$$p = v_{an}i_{an} = V_{\text{máx}}I_{\text{máx}} \cos \omega t \cos(\omega t - \theta) \quad (2.7)$$

El ángulo θ en estas ecuaciones es positivo para atraso en corriente con respecto al voltaje y negativo para adelanto en corriente. Un valor positivo de p expresa la razón a la cual la energía es absorbida por la parte del sistema entre los puntos a y n . La potencia instantánea es obviamente positiva cuando v_{an} e i_{an} son positivas pero es negativa cuando v_{an} o i_{an} son opuestas en signo. La fig. 2.2 ilustra este punto. La potencia positiva calculada como $v_{an}i_{an}$ resulta cuando la corriente circula en la dirección de una caída de voltaje y en la razón

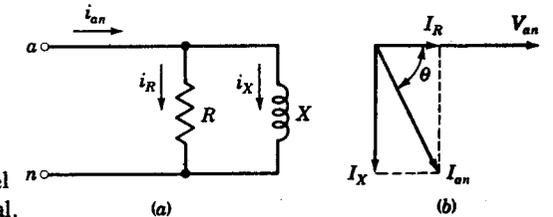


Fig. 2.3 Circuito RL paralelo y el correspondiente diagrama vectorial.

de transferencia de energía a la carga. Alternativamente, la potencia negativa calculada como $v_{an}i_{an}$ resulta cuando la corriente circula en la dirección de un voltaje superior y significa que la energía se transfiere de la carga al sistema al cual está conectada la carga. Si v_{an} e i_{an} están en fase, y puesto que están en una carga puramente resistiva, la potencia instantánea nunca es negativa. Si la corriente y el voltaje están fuera de fase 90° , como en un elemento de circuito puramente inductivo o puramente capacitivo, la potencia instantánea tiene una mitad positiva y otra mitad igualmente negativa y el valor promedio es cero.

Usando identidades trigonométricas la expresión de la ec. (2.7) se reduce a:

$$p = \frac{V_{\text{máx}}I_{\text{máx}}}{2} \cos \theta (1 + \cos 2\omega t) + \frac{V_{\text{máx}}I_{\text{máx}}}{2} \sin \theta \sin 2\omega t \quad (2.8)$$

donde $V_{\text{máx}}I_{\text{máx}}/2$ puede reemplazarse por el producto del voltaje y la corriente rms $|V_{an}| \cdot |I_{an}|$ o $|V| \cdot |I|$.

Otra forma de interpretar la expresión para la potencia instantánea es considerar la componente de corriente en fase con v_{an} y la componente 90° fuera de fase con v_{an} . La fig. 2.3a muestra un circuito paralelo para el que la fig. 2.3b es el diagrama vectorial. La

componente de i_{an} en fase con v_{an} es i_R , y de la fig. 2.3 b, $|I_R| = |I_{an}| \cos \theta$. Si el máximo valor de i_{an} es $I_{m\acute{a}x}$, el máximo valor de I_R es $I_{m\acute{a}x} \cos \theta$. La corriente instantánea i_R debe estar en fase con v_{an} . Para $v_{an} = V_{m\acute{a}x} \cos \omega t$,

$$i_R = \underbrace{I_m \cos \theta}_{m\acute{a}x i_R} \cos \omega t \quad (2.9)$$

Análogamente la componente de i_{an} con un atraso respecto de 90° es i_x cuyo máximo valor es $I_{m\acute{a}x} \sin \theta$. Puesto que i_x debe atrasar v_{an} por 90°

$$i_x = \underbrace{I_{m\acute{a}x} \sin \theta}_{m\acute{a}x i_x} \sin \omega t \quad (2.10)$$

Entonces

$$\begin{aligned} v_{an} i_R &= V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x} \cos \theta \cos^2 \omega t \\ &= \frac{V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x}}{2} \cos \theta (1 + \cos 2\omega t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

la cual es la potencia instantánea en la resistencia y es el primer término en la ec. (2.8). La fig. 2.4 muestra v_{an} , i_R dibujada con respecto a t . De igual forma,

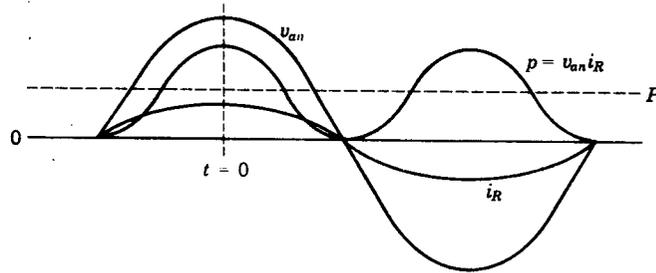


Fig. 2.4 Voltaje, corriente en fase con el voltaje, y la potencia resultante dibujados con respecto al tiempo.

$$\begin{aligned} v_{an} i_x &= V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x} \sin \theta \sin \omega t \cos \omega t \\ &= \frac{V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x}}{2} \sin \theta \sin 2\omega t \end{aligned} \quad (2.12)$$

que es la potencia instantánea en la inductancia y es el segundo término en la ec. (2.8). La fig. 2.5 muestra v_{an} , i_x y su producto dibujado con respecto a t .

Un examen de la ec. (2.8) muestra que el primer término, el que contiene a $\cos \theta$, siempre es positivo y tiene un valor promedio de

$$P = \frac{V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x}}{2} \cos \theta \quad (2.13)$$

o cuando se substituyen los valores rms de corriente y voltaje

$$P = |V| \cdot |I| \cos \theta \quad (2.14)$$

P es la cantidad a la cual la palabra potencia se refiere cuando no se modifique por algún adjetivo que indique otra cosa. P , la potencia media, también se llama potencia real. La

unidad fundamental para la potencia instantánea y promedio es el vatio, pero es una unidad muy pequeña con respecto a las cantidades en sistemas de potencia, así que P es medida generalmente en kilovatios o megavatios.

El coseno del ángulo de fase θ entre el voltaje y la corriente se conoce como el *factor de potencia*. Un circuito inductivo se dice que tiene un factor de potencia en atraso y un circuito capacitivo se dice que tiene un factor de potencia en adelanto. En otras palabras, los términos factor de potencia en atraso y factor de potencia en adelanto, respectivamente, indican cuando la corriente está atrasando o adelantando el voltaje aplicado.

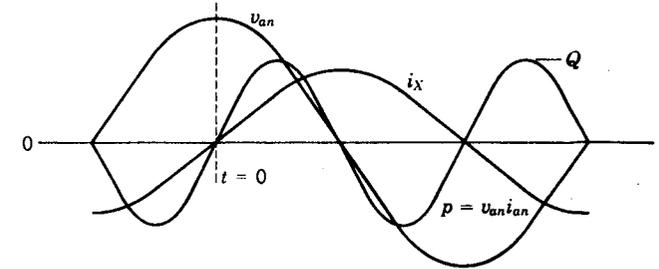


Fig. 2.5 Voltaje, corriente atrasando el voltaje en 90° , y la potencia resultante dibujados con respecto al tiempo.

El segundo término de la ec. (2.8), el que contiene $\sin \theta$, es alternativamente positivo o negativo y tiene un valor promedio de cero. Esta componente de la potencia instantánea p se denomina *potencia instantánea reactiva* y expresa el flujo de energía desde la carga y hacia la carga alternadamente.

El máximo valor de esta potencia pulsante, designada por Q , se llama la potencia reactiva o voltiamperios reactivos y es muy útil en la descripción de la operación de un sistema de potencia, como se evidenciará en el avance del estudio. La potencia reactiva es

$$Q = \frac{V_{m\acute{a}x} I_{m\acute{a}x}}{2} \sin \theta \quad (2.15)$$

o

$$Q = |V| \cdot |I| \sin \theta \quad (2.16)$$

La raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de P y Q es igual al producto de $|V|$ e $|I|$, para

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{(|V| \cdot |I| \cos \theta)^2 + (|V| \cdot |I| \sin \theta)^2} = |V| \cdot |I| \quad (2.17)$$

Es claro que P y Q tienen las mismas unidades, pero es usual designar las unidades de Q como vars (de voltioamperios reactivos). Las unidades de Q son más prácticas en kilovars o megavars.

En un simple circuito serie donde Z es igual a $R + jX$, podemos substituir $|I| \cdot |Z|$ por $|V|$ en las ecs. (2.14) y (2.16) para obtener

$$P = |I|^2 \cdot |Z| \cos \theta \quad (2.18)$$

y

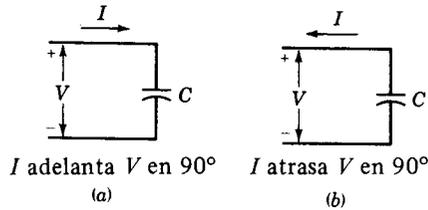
$$Q = |I|^2 \cdot |Z| \sin \theta \quad (2.19)$$

Entonces, reconociendo que $R = |Z| \cos \theta$ y $X = |Z| \sin \theta$, encontramos

$$P = |I|^2 R \quad \text{y} \quad Q = |I|^2 X \quad (2.20)$$

como era de esperarse.

Fig. 2.6 Condensador considerado (a) como elemento pasivo de un circuito llevando una corriente en adelante y (b) como generador alimentando una corriente en atraso.



Las ecs. (2.14) y (2.16) suministran otro método de cálculo del factor de potencia ya que vemos que $Q/P = \tan \theta$. El factor de potencia es, por tanto,

$$\cos \theta = \cos \tan^{-1} \frac{Q}{P}$$

o de las ecs. (2.14) y (2.17)

$$\cos \theta = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Si la potencia instantánea expresada por la ec. (2.8) es la potencia en un circuito predominante capacitivo con el mismo voltaje que el impreso, θ sería negativo, haciendo $\sin \theta$ y Q negativo; si los circuitos capacitivo e inductivo están en paralelo, la potencia reactiva instantánea para el circuito RL estaría 180° fuera de fase con la potencia reactiva instantánea del circuito RC . La potencia reactiva neta es la diferencia entre Q para el circuito RL y Q para el circuito RC . Se asigna a Q un valor positivo para una carga inductiva y uno negativo para una carga capacitiva.

Los ingenieros de redes corrientemente consideran que un condensador es un generador de potencia reactiva positiva en vez de una carga que requiere potencia reactiva negativa. Este concepto es perfectamente lógico; para un condensador que lleva Q negativa en paralelo con una carga inductiva reduce Q , lo cual de otra manera, tendría, que suministrarse a la carga inductiva. Esto es lo mismo que considerar un condensador como un dispositivo que entrega una corriente en atraso en vez de un dispositivo que lleva una corriente en adelante, como se muestra en la fig. 2.6. Un condensador ajustable en paralelo con una carga inductiva, por ejemplo, puede ajustarse de tal manera que en adelante la corriente en el condensador sea exactamente igual en magnitud a la componente de corriente en la carga inductiva, la cual está atrasando el voltaje en 90° . Es decir, la corriente resultante está en fase con el voltaje. Aún así, el circuito inductivo requiere potencia reactiva positiva, pero la potencia reactiva neta es cero. Es por esta razón que el ingeniero de redes encuentra conveniente considerar que el condensador esté suministrando esta potencia reactiva a la carga inductiva. Cuando las palabras positiva y negativa no se usan se supone potencia reactiva positiva.

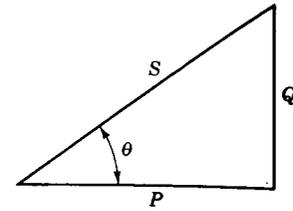


Fig. 2.7 Triángulo de potencia para una carga inductiva.

2.5 POTENCIA COMPLEJA

Si se conocen las expresiones vectoriales para el voltaje y corriente, se logra convenientemente el cálculo de potencia real y reactiva en forma compleja. Si el voltaje a través y la corriente en determinada carga o parte de un circuito se expresan por $V = |V|/\alpha$ e $I = |I|/\beta$ el producto del voltaje por el conjugado de la corriente es

$$VI^* = V/\alpha \times I/(-\beta) = |V| \cdot |I| / \alpha - \beta \quad (2.21)$$

Esta cantidad, conocida como la *potencia compleja*, comúnmente se designa por S . En forma rectangular

$$S = |V| \cdot |I| \cos(\alpha - \beta) + j |V| \cdot |I| \sin(\alpha - \beta) \quad (2.22)$$

Puesto que $\alpha - \beta$, el ángulo de fase entre el voltaje y la corriente, es θ en las ecuaciones anteriores,

$$S = P + jQ \quad (2.23)$$

La potencia reactiva Q es positiva cuando el ángulo de fase $\alpha - \beta$, entre el voltaje y la corriente, es positiva, esto es cuando $\alpha > \beta$, lo que significa que la corriente está atrasando el voltaje. Alternativamente, Q es negativa para $\beta > \alpha$, lo cual indica que la corriente adelanta el voltaje. Esto está de acuerdo con la selección de un signo positivo para la potencia reactiva de un circuito inductivo y un signo negativo para la potencia reactiva de un circuito capacitivo. Para obtener el signo adecuado de Q , es necesario calcular S como VI^* , en lugar de V^*I lo cual invierte el signo de Q .

2.6 TRIÁNGULO DE POTENCIA

La ec. (2.23) sugiere un método gráfico de obtener P , Q , y el ángulo de fase para varias cargas en paralelo donde $\cos \theta$ es $P/|S|$. Un triángulo de potencia puede dibujarse para una carga inductiva, como se muestra en la fig. 2.7. Para varias cargas en paralelo, la potencia total P es la suma de las potencias promedio de las cargas individuales, las cuales se dibujan a lo largo del eje horizontal para un análisis gráfico. Para una carga inductiva, Q se dibuja verticalmente en la parte de arriba si es positiva. Una carga capacitiva tiene potencia reactiva negativa y Q está verticalmente hacia abajo. La fig. 2.8 ilustra el triángulo de potencia compuesto de P_1 , Q_1 , y S_1 . Para una carga en atraso que tiene un ángulo de fase θ_1 combinado con el triángulo de potencia compuesto de P_2 , Q_2 y S_2 , el cual es para una carga capacitiva con θ_2 negativo. Estas dos cargas en paralelo resultan en los lados del triángulo $P_1 + P_2$, $Q_1 + Q_2$ y la hipotenusa S_R . El triángulo de fase entre voltaje y corriente suministrado a la carga combinada es θ_R .

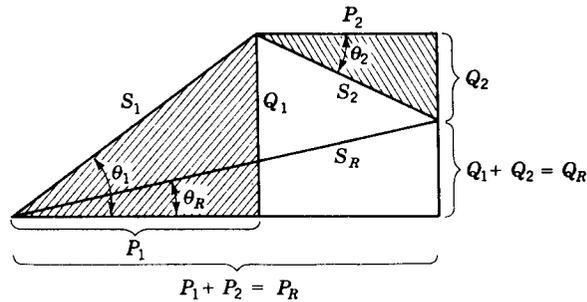


Fig. 2.8 Triángulo de potencia para cargas combinadas. Nótese que Q_2 es negativa.

2.7 DIRECCION DEL FLUJO DE POTENCIA

La relación entre P , Q y el voltaje de barra V , o voltaje generado E , con respecto a los signos P y Q es importante cuando se considera el flujo de potencia en un sistema. El problema implica la dirección del flujo de potencia, es decir, si se está generando o absorbiendo potencia cuando se especifica un voltaje y una corriente.

El problema de entregar a un circuito o absorber potencia de un circuito es, en cambio, más obvio para un sistema c.c. Consideremos las relaciones de corriente y voltaje indicadas en la fig. 2.9 donde la corriente c.c. I está circulando a través de la batería. Si $I = 10$ A y $E = 100$ V, se está cargando la batería (absorbe energía) a la razón de 1000 W. Por otra parte, con la flecha mantenida en la dirección mostrada, la corriente puede ser $I = -10$ A. Entonces, como la dirección convencional de la corriente es opuesta a la dirección de la flecha, la batería se está descargando (entregando energía) y el producto de E por I es -1000 W.

Si dibujamos la fig. 2.9 con I circulando hacia la batería desde el terminal positivo al negativo, la carga de la batería parece ser la indicada, pero este es así solamente el caso en que E e I sean positivos, de modo que la potencia calculada como el producto de E por I sea positiva. Con estas relaciones entre E e I el signo positivo para la potencia se asigna a la carga de la batería.

Si en la fig. 2.9 la dirección de la flecha para I se invierte, la descarga de la batería se indica por un signo positivo para I y para la potencia. Así, el diagrama del circuito determina si un signo positivo para la potencia está asociado con la carga o la descarga de la batería. Esta explicación parece innecesaria pero suministra la base para interpretar las relaciones de los circuitos c.a.

Para un sistema c.a., la fig. 2.10 muestra un voltaje generado, una fuente de voltaje ideal (magnitud constante, frecuencia constante, impedancia cero), con señales de polaridad, las cuales, como es usual, indican el terminal que es positivo durante el medio

Fig. 2.9 Una representación c.c. de la carga de una batería si ambos E e I son positivos o ambos negativos.

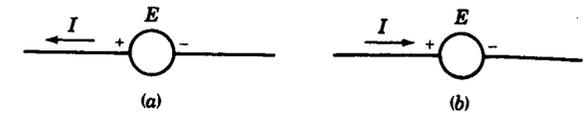
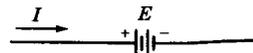


Fig. 2.10 Representación en un circuito c.a. de cada fem y de la corriente ilustrando las marcas de polaridad.

ciclo de voltaje positivo instantáneo. Por supuesto, el terminal señalado como positivo, efectivamente es el terminal negativo durante el medio ciclo negativo del voltaje instantáneo. Análogamente, la flecha indica la dirección de la corriente durante el medio ciclo de corriente positiva.

En la fig. 2.10a se espera tener un generador puesto que la corriente es positiva cuando la flecha sale del terminal marcado como positivo. Sin embargo, el terminal marcado positivamente puede ser negativo cuando la corriente está fluyendo fuera de él. La forma de solucionar el problema es resolver el vector I en una componente a lo largo del eje del vector E y una componente 90° fuera de fase con E . El producto de $|E|$ y la magnitud de la componente de I a lo largo del eje E es P . El producto de $|E|$ y la magnitud de la componente de I , la cual está 90° fuera de la fase con E es Q . Si la componente de I a lo largo del eje de E está en fase con E , la potencia es potencia generada, que está siendo entregada al sistema; esta componente de corriente siempre está circulando fuera del terminal marcado positivo cuando ese terminal es realmente positivo (y hacia ese terminal cuando el terminal es negativo). P , la parte real de EI^* , es positivo.

Si la componente de corriente a lo largo del eje de E es negativa (180° fuera de fase con E), la potencia está siendo absorbida y la situación es la de un motor. P , la parte real de EI^* , es negativa.

Las relaciones entre voltaje y corriente pueden ser como se indican en la fig. 2.10b, y se espera tener un motor. Sin embargo, una potencia media absorbida tendría lugar solamente si la componente del vector I a lo largo del eje del vector E se encuentra en fase en vez de 180° fuera de fase con E , de modo que esta componente de corriente siempre esté en la dirección de la caída de potencial. En este caso P , la parte real de EI^* , es positiva. Una P negativa indica potencia generada.

Considerar el signo de Q , en la fig. 2.11, es de gran ayuda. En la fig. 2.11a una potencia reactiva positiva igual a $|I|^2 X$ alimenta a la inductancia puesto que la inductancia lleva una Q positiva. Entonces I atrasa a E en 90° , y Q la parte imaginaria de EI^* , es positiva. En la fig. 2.11b, una Q negativa debe alimentar a la capacidad del circuito, pues la fuente con una fem E está recibiendo Q positiva desde el condensador. I adelanta a E en 90°

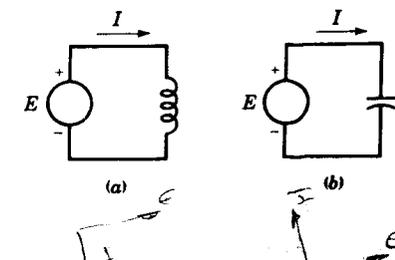


Fig. 2.11 Fem alterna aplicada (a) a un elemento puramente inductivo y (b) a un elemento puramente capacitivo.

Si la dirección de la flecha en la fig. 2.11a se invierte, I adelanta a E en 90° y la parte imaginaria de EI^* es negativa. La inductancia puede considerarse en términos de suministro de Q negativa en lugar de absorción de Q positiva. La tabla 2.1 resume estas relaciones.

EJEMPLO 2.1 Dos fuentes ideales de voltaje designadas como las máquinas 1 y 2 se conectan como se muestra en la fig. 2.12. Si $E_1 = 100/0^\circ$, $E_2 = 100/30^\circ$ y $Z = 0 + j5\Omega$, determinar: (a) si cada máquina está generando o consumiendo potencia y en qué cantidad; (b) si cada máquina está recibiendo o suministrando potencia reactiva y en qué cantidad, y (c) P y Q absorbidas por la impedancia.

Solución

$$I = \frac{E_1 - E_2}{Z} = \frac{100 + j0 - (86.6 + j50)}{j5}$$

$$= \frac{13.4 - j50}{j5} = -10 - j2.68 = 10.35/195^\circ$$

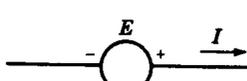
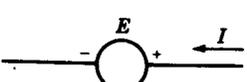
$$E_1 I^* = 100(-10 + j2.68) = -1,000 + j268$$

$$E_2 I^* = (86.6 + j50)(-10 + j2.68)$$

$$= -866 + j232 - j500 - 134 = -1,000 - j268$$

$$|I|^2 X = 10.35^2 \times 5 = 536 \text{ var}$$

Tabla 2.1

Diagrama del circuito	Calculado de EI^*
	Si P es +, fem suministra potencia Si P es -, fem absorbe potencia Si Q es +, fem suministra potencia reactiva (I atrasa E) Si Q es -, fem absorbe potencia reactiva (I adelanta E)
	Si P es +, fem absorbe potencia Si P es -, fem suministra potencia Si Q es +, fem absorbe potencia reactiva (I atrasa E) Si Q es -, fem suministra potencia reactiva (I adelanta E)

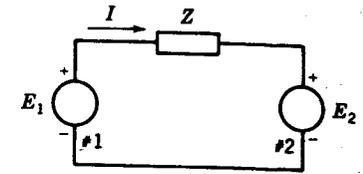


Fig. 2.12 Fuentes ideales de voltaje conectadas a través de una impedancia Z .

Se espera que la máquina 1 sea un generador debido a la dirección de la corriente y a las señales de polaridad. Puesto que P es negativa y Q positiva, la máquina consume energía a razón de 1 000 W y suministra una potencia reactiva de 268 vars. La máquina efectivamente es un motor.

La máquina 2, de la cual se espera sea un motor, tiene una P negativa y Q negativa. Por tanto, esta máquina genera energía a razón de 1 000 W y suministra una potencia reactiva de 268 vars. La máquina efectivamente es un generador.

Nótese que la potencia reactiva suministrada de $268 + 268$ es igual a 536 vars, que es requerida por la reactancia inductiva de 5Ω . Puesto que la impedancia es puramente reactiva, ninguna P es consumida por la impedancia, y toda la P generada por la máquina 2 se transfiere a la máquina 1.

2.8 VOLTAJE Y CORRIENTE EN CIRCUITOS TRIFÁSICOS BALANCEADOS

Los sistemas de redes son alimentados por generadores trifásicos. Por lo común los generadores alimentan cargas trifásicas balanceadas, lo cual significa cargas con impedancia idénticas en todas las tres fases. Las cargas de alumbrado y motores pequeños son, por supuesto, monofásicas, pero los sistemas de distribución se diseñan para que las fases estén esencialmente balanceadas. La fig. 2.13 muestra un generador conectado en Y con el neutro marcado como o alimentando una carga Y balanceada con el neutro marcado n . En el estu-

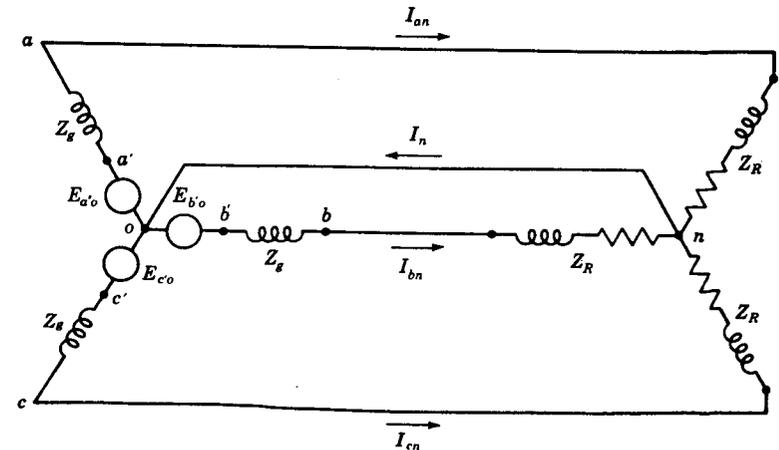


Fig. 2.13 Diagrama circuital de un generador Y conectado a una carga Y balanceada.

dio de este circuito suponemos que las impedancias de las conexiones entre los terminales del generador y la carga, así como la impedancia de la conexión directa entre o y n , se puede no tomar en cuenta.

El circuito equivalente del generador trifásico consiste de una fem en cada una de las tres fases, como se indica mediante circuitos en el diagrama. Cada fem está en serie con una resistencia y una reactancia inductiva conformando la impedancia Z_g . Los puntos a' , b' y c' son ficticios, puesto que la fem generada no puede separarse de la impedancia de cada fase. Los terminales de la máquina son los puntos a , b y c . Alguna atención se presta a este circuito equivalente en un capítulo posterior. En el generador las fem $E_{a'o}$, $E_{b'o}$, $E_{c'o}$ son iguales en magnitud y separadas una de otra 120° en fase. Si la magnitud de cada una es 100 V con $E_{a'o}$ como referencia, suponiendo que la secuencia de fase sea abc , esto signifi-

$$E_{a'o} = 100 / 0^\circ \text{ V} \quad E_{b'o} = 100 / 240^\circ \text{ V} \quad E_{c'o} = 100 / 120^\circ \text{ V}$$

ca que $E_{a'o}$ adelanta a $E_{b'o}$ en 120 y $E_{b'o}$, a su vez, adelanta a $E_{c'o}$ en 120. El diagrama del circuito no da indicación de la secuencia de fase, pero la fig. 2.14 muestra estas fem con la secuencia abc .

En los terminales del generador (y en la carga en este caso) los voltajes terminales a neutro son:

$$\begin{aligned} V_{ao} &= E_{a'o} - I_{an} Z_g \\ V_{bo} &= E_{b'o} - I_{bn} Z_g \\ V_{co} &= E_{c'o} - I_{cn} Z_g \end{aligned} \quad (2.24)$$

Puesto que o y n están al mismo potencial, V_{ao} , V_{bo} y V_{co} son iguales a V_{an} , V_{bn} y V_{cn} , respectivamente y las corrientes de línea (las cuales son también corrientes de fase para una conexión Y) son:

$$\begin{aligned} I_{an} &= \frac{E_{a'o}}{Z_g + Z_R} = \frac{V_{an}}{Z_R} \\ I_{bn} &= \frac{E_{b'o}}{Z_g + Z_R} = \frac{V_{bn}}{Z_R} \\ I_{cn} &= \frac{E_{c'o}}{Z_g + Z_R} = \frac{V_{cn}}{Z_R} \end{aligned} \quad (2.25)$$

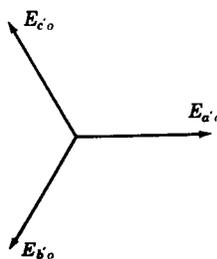
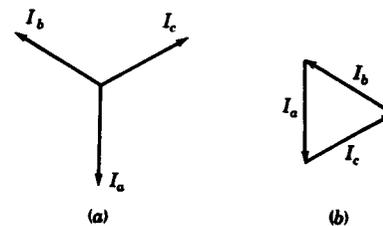


Fig. 2.14 Diagrama vectorial de las fem del circuito mostrado en la fig. 2.13.

Fig. 2.15 Diagrama vectorial de las corrientes en una carga trifásica balanceada (a) vectores dibujados desde un punto común (b) suma de vectores formando un triángulo cerrado.



Puesto que $E_{a'o}$, $E_{b'o}$ y $E_{c'o}$ son iguales en magnitud y 120° fuera de fase y las impedancias vistas por cada una de estas fem son idénticas, las corrientes también son iguales en magnitud y separadas en fase 120° una de otra. Esto también es cierto para V_{an} , V_{bn} y V_{cn} . En este caso describimos los voltajes y corrientes como balanceados. La fig. 2.15a muestra tres líneas de corriente de un sistema balanceado. En la fig. 2.15b la suma de estas corrientes se muestra en un triángulo cerrado. Es obvio que su suma es cero. Por tanto, en la conexión mostrada en la fig. 2.13 entre los neutros del generador y la carga debe ser cero. Entonces la conexión entre n y o puede tener cualquier impedancia, o aún estar abierta, y n y o permanecer al mismo potencial.

Si la carga *no está balanceada*, la suma de las corrientes no es cero y circula una corriente entre o y n . Para la condición de desbalance, en ausencia de una conexión de impedancia cero, o y n no están al mismo potencial.

Los voltajes línea a línea son V_{ab} , V_{ba} y V_{ca} . Trazando un camino de a hacia b pasando por n , encontramos

$$V_{ab} = V_{an} + V_{nb} = V_{an} - V_{bn} \quad (2.26)$$

Aunque $E_{a'o}$ y V_{an} no están en fase, podemos decidir usar V_{an} en vez de $E_{a'o}$ como referencia en la definición de los voltajes. Entonces la fig. 2.16a es el diagrama vectorial de los voltajes a neutro, y la fig. 2.16b muestra cómo se encuentra V_{ab} . La magnitud de V_{ab} es

$$\begin{aligned} |V_{ab}| &= 2 |V_{an}| \cos 30^\circ \\ &= \sqrt{3} |V_{an}| \end{aligned} \quad (2.27)$$

Como vector, V_{ab} adelanta a V_{an} por 30° , y así

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} / 30^\circ \quad (2.28)$$

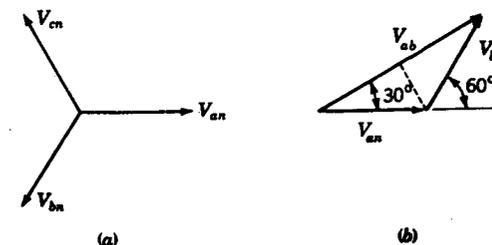


Fig. 2.16 Voltajes en un circuito trifásico balanceado: (a) voltajes a neutro (b) relación entre voltajes de línea y voltajes a neutro.

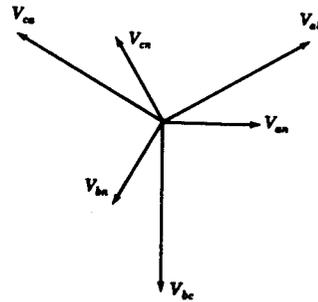


Fig. 2.17 Diagrama vectorial de los voltajes en un circuito trifásico balanceado.

Los otros voltajes línea a línea se encuentran de manera semejante, y la fig. 2.17 muestra todos los voltajes línea a línea y línea a neutro. El hecho de que la magnitud de los voltajes línea a línea de un circuito trifásico balanceado sea siempre igual a $\sqrt{3}$ veces determina que la magnitud de los voltajes línea a neutro sea muy importante.

La fig. 2.18 es otra forma de representar los voltajes línea a línea y línea a neutro. Los vectores línea a línea se dibujan para formar un triángulo cerrado orientado para que concuerde con la referencia elegida, en este caso V_{an} . Los vértices del triángulo están dispuestos en tal forma que cada vector comienza y termina en los vértices correspondientes al orden de los subíndices de ese vector de voltaje. Los vectores de voltaje línea a neutro se llevan al centro del triángulo. Una vez que se ha entendido el diagrama vectorial, se encuentra que esta es la forma más simple de determinar los distintos voltajes.

El orden en el cual los vértices a , b y c del triángulo se siguen uno a otro cuando el triángulo se rota alrededor de n indica la secuencia de fase. Veremos más tarde un ejemplo de la importancia de la secuencia de fase cuando estudiemos las componentes simétricas como forma de analizar las fallas de desbalanceo en sistemas de potencia.

Un diagrama de corriente separado puede dibujarse para referir cada corriente adecuadamente con respecto a su voltaje de fase.

EJEMPLO 2.2 En un circuito balanceado el voltaje V_{ab} es $173.2/0^\circ$ V. Determine todos los voltajes y corrientes en una carga conectada en Y que tiene $Z_L = 10/20^\circ \Omega$. Suponga que la secuencia de fase es abc .

Solución El diagrama vectorial de voltajes se dibuja como se muestra en la fig. 2.19 para el cual se determina que

$$V_{ab} = 173.2/0^\circ \text{ V} \quad V_{an} = 100/-30^\circ \text{ V}$$

$$V_{bc} = 173.2/240^\circ \text{ V} \quad V_{bn} = 100/210^\circ \text{ V}$$

$$V_{ca} = 173.2/120^\circ \text{ V} \quad V_{cn} = 100/90^\circ \text{ V}$$

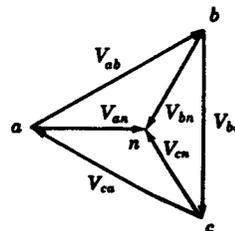


Fig. 2.18 Método alternativo de dibujar los vectores de la Fig. 2.17.

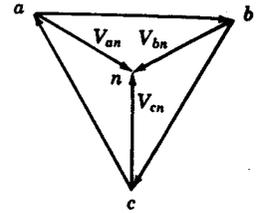


Fig. 2.19 Diagrama vectorial de los voltajes del ej. 2.2.

Cada corriente atrasa el voltaje a través de la carga 20° y tiene una magnitud de 10 A. La fig. 2.20 es el diagrama vectorial de las corrientes.

$$I_{an} = 10/-50^\circ \text{ A} \quad I_{bn} = 10/190^\circ \text{ A} \quad I_{cn} = 10/70^\circ \text{ A}$$

A menudo las cargas balanceadas se conectan en Δ como se muestra en la fig. 2.21. El lector debe demostrar que la magnitud de la corriente en una línea tal como I_a es igual a $\sqrt{3}$ veces la magnitud de una corriente de fase como I_{ab} y que I_a atrasa I_{ab} por 30° cuando la secuencia de fase es abc .

Cuando se resuelven circuitos trifásicos balanceados nunca es necesario trabajar con el diagrama trifásico completo de la fig. 2.13. Para resolver el circuito se supone que está presente una conexión neutra de impedancia cero y lleva la suma de las corrientes trifásicas, la cual es cero para condiciones balanceadas. El circuito se resuelve aplicando las leyes de voltaje de Kirchhoff alrededor de un paso cerrado, que incluye una fase y neutro. Un paso cerrado como tal se muestra en la fig. 2.22. Este circuito es el equivalente monofásico del circuito de la fig. 2.13. Los cálculos hechos por esta camino se extienden a la totalidad del circuito trifásico recordando que las corrientes en las otras dos fases son iguales en magnitud a la corriente de la fase calculada y se desplazan en fase 120° y 240° . Da lo mismo si la carga balanceada, especificada por su voltaje línea a línea, potencia total, y factor de potencia, está conectada en Δ o en Y, puesto que Δ puede siempre remplazarse para propósitos de cálculo por su equivalente Y. La impedancia de cada fase del equivalente Y es un tercio de la impedancia de Δ a la cual reemplaza.

EJEMPLO 2.3 El voltaje terminal de una carga conectada en Y que consiste en tres impedancias de $20/30^\circ \Omega$ es 440 V línea a línea. La impedancia de cada una de las tres líneas que conectan la carga a una barra en una subestación es $Z_L = 1.4/75^\circ \Omega$. Encuentre el voltaje línea a línea en la barra de la subestación.

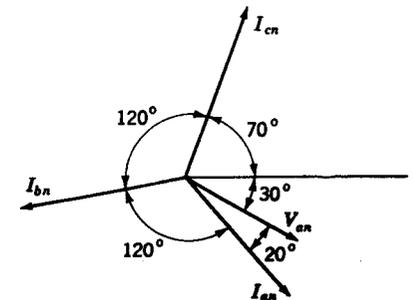


Fig. 2.20 Diagrama vectorial de las corrientes del ej. 2.2.

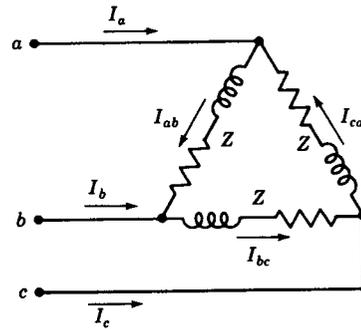


Fig. 2.21 Diagrama del circuito de una carga trifásica conectada en Δ .

Solución La magnitud de voltaje a neutro en la carga es $440/\sqrt{3} = 254$ V. Si el voltaje a través de la carga se elige como referencia,

$$V_{an} = 254/0^\circ \text{ V} \quad \text{y} \quad I_{an} = \frac{254/0^\circ}{20/30^\circ} = 12.7/-30^\circ \text{ A}$$

El voltaje línea a neutro en la subestación es

$$\begin{aligned} V_{an} + I_{an} Z_L &= 254/0^\circ + 12.7/-30^\circ \times 1.4/75^\circ \\ &= 254/0^\circ + 17.8/45^\circ \\ &= 266.6 + j12.6 = 267/2.70^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

y la magnitud del voltaje en la barra de la subestación es

$$\sqrt{3} \times 267 = 462 \text{ V}$$

La fig. 2.23 muestra el circuito y las cantidades implicadas.

2.9 POTENCIA EN CIRCUITOS TRIFÁSICOS BALANCEADOS

La potencia total entregada por un generador trifásico o absorbido por una carga trifásica se encuentra simplemente sumando la potencia en cada una de las tres fases. En un circuito balanceado, equivale a multiplicar la potencia de cualquier fase por 3, puesto que la potencia es la misma en todas las fases.

Si la magnitud de los voltajes a neutro V_p es para una carga conectada en Y es

$$V_p = |V_{an}| = |V_{bn}| = |V_{cn}| \quad (2.29)$$

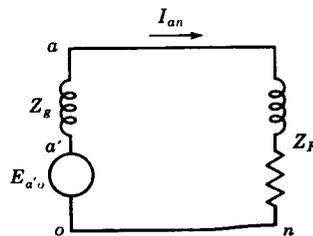


Fig. 2.22 Una fase del circuito de la fig. 2.13.

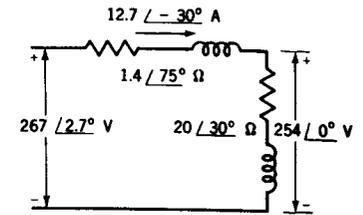


Fig. 2.23 Diagrama del circuito del ej. 2.3 con valores.

y si la magnitud de la corriente de fase I_p para una carga conectada en Y es

$$I_p = |I_{an}| = |I_{bn}| = |I_{cn}| \quad (2.30)$$

la potencia trifásica total es

$$P = 3V_p I_p \cos \theta_p \quad (2.31)$$

donde θ_p es el ángulo por el cual la corriente de fase atrasa el voltaje de fase, esto es, el ángulo de la impedancia en cada fase. Si V_L e I_L son las magnitudes del voltaje línea a línea, y corriente de línea, respectivamente,

$$V_p = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad I_p = I_L \quad (2.32)$$

y substituyendo en la ec. (2.31) encontramos

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p \quad (2.33)$$

Los vars totales son

$$Q = 3V_p I_p \sin \theta_p \quad (2.34)$$

$$Q = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_p \quad (2.35)$$

y los voltiamperios de la carga son

$$|S| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{3} V_L I_L \quad (2.36)$$

Las ecs. (2.33), (2.35) y (2.36) son las usuales para calcular P , Q y $|S|$ en un circuito trifásico balanceado, puesto que las cantidades generalmente conocidas son los voltajes línea a línea, corriente de línea, y el factor de potencia, $\cos \theta_p$. Cuando se habla de un sistema trifásico, se suponen condiciones de balanceo a menos que se especifique otra cosa; y los términos voltaje, corriente y potencia, a menos que se diga lo contrario, se entiende que son voltajes de línea a línea, corriente de línea y potencia total de las tres fases.

Si la carga está conectada en Δ , el voltaje a través de cada impedancia es el voltaje línea a línea y la corriente que pasa por cada impedancia es la magnitud de la corriente de línea dividida por $\sqrt{3}$, o

$$V_p = V_L \quad \text{y} \quad I_p = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \quad (2.37)$$

La potencia trifásica total es

$$P = 3V_p I_p \cos \theta_p \quad (2.38)$$

y substituyendo en esta ecuación los valores de V_p e I_p en la ec. (2.37) da

$$P = \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p \quad (2.39)$$

la cual es idéntica a la ec. (2.33). Se sigue que las ecs. (2.35) y (2.36) son válidas también sin importar si una carga particular está conectada en Δ o Y .

PROBLEMAS

- 2.1 Si $v = 106,1 \cos(\omega t + 60^\circ)$ V e $i = 14,14 \sin(\omega t + 120^\circ)$ A, encuentre para cada uno (a) el máximo valor, (b) el valor rms, y (c) la expresión vectorial si la corriente se toma como referencia. ¿Es el circuito inductivo o capacitivo?
- 2.2 Si el circuito del Prob. 2.1 se compone de un elemento puramente resistivo y un elemento puramente capacitivo encuentre R y X (a) si los elementos están en serie y (b) si los elementos están en paralelo.
- 2.3 En un circuito monofásico $V_a = 100/30^\circ$ V y $V_b = 120/60^\circ$ V con respecto al nodo de referencia o . Encuentre V_{ba} .
- 2.4 Un voltaje c.a. de 230 V se aplica a un circuito compuesto de una resistencia de 10 Ω en serie con una reactancia inductiva de 7 Ω . Encuentre P , Q , y el factor de potencia del circuito.
- 2.5 Si se conecta un condensador en paralelo con el circuito en serie RL del Prob. 2.4 y si este condensador alimenta 1 000 vars, encuentre P y Q alimentados por una fuente de 230 V y encuentre el factor de potencia resultante.
- 2.6 Una carga monofásica lleva una corriente de $30/35^\circ$ A. El voltaje a través de la carga es $220/75^\circ$ V. Encuentre P y Q de la carga.
- 2.7 Una carga monofásica inductiva de 7 500 kW tiene un factor de potencia en atraso de 0.8. Dibuje el triángulo de potencia y determine la potencia reactiva de un condensador que se va a conectar en paralelo con la carga para lograr un factor de potencia 0.9.
- 2.8 Si la impedancia entre las máquinas 1 y 2 del ej. 2.1 es $Z = 0 - j5 \Omega$, determine (a) si cada máquina está generando o consumiendo potencia y en qué cantidad, (b) si cada máquina está recibiendo o suministrando potencia reactiva y en qué cantidad, y (c) el valor de P y Q absorbido por la impedancia.
- 2.9 Repita el Prob. 2.8 si $Z = 5 + j0$.
- 2.10 Una fuente de voltaje $E_{an} = 100/30^\circ$ V y la corriente a través de la fuente está dada por $I_{na} = -10/240^\circ$ A. Encuentre los valores de P y Q y establezca si la fuente los está entregando o recibiendo.
- 2.11 Resuelva el ej. 2.1 si $E_1 = 100/0^\circ$ V y $E_2 = 110/30^\circ$ V. Compare los resultados con el ej. 2.1 y saque algunas conclusiones acerca del efecto de la variación de la magnitud de E en el circuito.
- 2.12 Tres impedancias idénticas de $10/ -15^\circ \Omega$ se conectan en Y a una línea trifásica balanceada con voltajes de línea de 208 V. Especifique todos los voltajes de línea y de fase lo mismo que las corrientes como vectores en la forma polar con V_{bc} como referencia para una secuencia de fase abc .
- 2.13 En un sistema trifásico balanceado las impedancias conectadas en Y son $10/30^\circ \Omega$. Si $V_{ca} = 416/90^\circ$ V, especifique I_{bn} en forma polar.
- 2.14 Los terminales de una fuente trifásica son designados como a , b y c . Entre cualquier par un voltímetro mide 115 V. Una resistencia de 100 Ω y un condensador de 100 Ω a la frecuencia de la fuente se conectan en serie desde a hacia b con la resistencia conectada en a . El punto de conexión de los elementos entre sí se denomina n . Deter-

mine gráficamente la lectura del voltímetro entre c y n si la secuencia de fase es abc y si la secuencia de fase es acb .

- 2.15 Determine la corriente tomada de una línea trifásica 440 V por un motor trifásico, de 10 C.V. operando a toda carga, con una eficiencia del 85% y 80% del factor de potencia en atraso. Encuentre los valores de P y Q tomados de la línea.
- 2.16 Si la impedancia de cada una de las tres líneas que conectan el motor del Prob. 2.15 a una barra es $0.3 + j1.0 \Omega$, encuentre el voltaje línea a línea en la barra que alimenta 440 V al motor.
- 2.17 Una carga Δ balanceada formada por resistencias puras de 12 Ω por fase está en paralelo con una carga Y balanceada que tiene impedancias de fase de $8 + j6 \Omega$. Impedancias idénticas de $2 + j5 \Omega$ están en cada una de las tres líneas que conectan las cargas combinadas a una fuente trifásica de 110 V. Encuentre la corriente tomada de la fuente y los voltajes de línea en las cargas combinadas.
- 2.18 Una carga trifásica toma 200 kW con un factor de potencia de 0.707 en atraso de una línea de 440 V. En paralelo con esta carga está un banco capacitivo trifásico el cual toma 50 kVA. Encuentre la corriente total y el factor de potencia resultante.
- 2.19 Un motor trifásico toma 10 kVA con un factor de potencia de 0.6 en atraso de una fuente de 220 V. Determine las características en kilovoltioamperios de los condensadores para hacer el factor de potencia 0.85 en atraso y determine la corriente de línea antes y después de agregar los condensadores.

3

IMPEDANCIA SERIE DE LAS LINEAS DE TRANSMISION

Una línea de transmisión tiene cuatro parámetros que influyen en su aptitud para llenar su función como componente de una red eléctrica. Estos parámetros son resistencia, inductancia, capacidad y conductancia. En este capítulo estudiaremos los primeros dos parámetros, y consideraremos la capacitancia en el próximo.

La conductancia entre conductores o entre conductores y tierra cuenta para la corriente de fuga en los aisladores de líneas principales y a través del aislamiento de los cables. Puesto que la fuga en los aisladores de líneas principales se puede no tomar en cuenta, la conductancia entre conductores de una línea principal se asume igual a cero.

Cuando una corriente circula por un circuito eléctrico, los campos magnético y eléctrico que se forman nos explican algo sobre las características del circuito. En la fig. 3.1 se representa una línea bifilar abierta y los campos magnéticos y eléctrico asociados a ella. Las líneas de flujo magnético forman anillos cerrados que rodean a cada conductor; las líneas del campo eléctrico nacen en las cargas positivas, sobre un conductor, y van a pasar a las cargas negativas, sobre el otro. Toda variación de la corriente que pasa por los conductores produce una variación en el número de las líneas de flujo magnético que atraviesan el circuito. Por otra parte, cualquier variación de éste induce una f.e.m. en el circuito, siendo esta f.e.m. inducida, proporcional a la velocidad de variación del flujo. La inductancia es la propiedad de un circuito que relaciona la f.e.m. inducida, por la variación del flujo, con la velocidad de variación de la corriente.

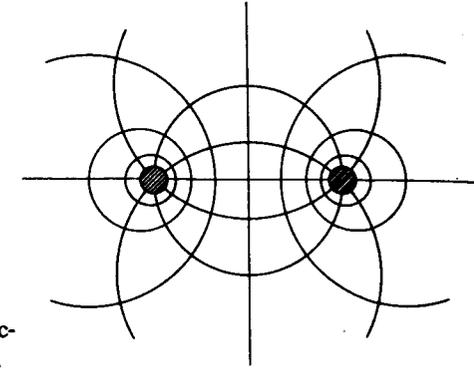


Fig. 3.1 Campos magnético y eléctrico asociados a una línea bifilar.

Existe la capacitancia entre los conductores, y es la carga sobre los conductores por unidad de diferencia de potencia entre ellos.

La resistencia y la conductancia uniformemente distribuidas a la carga de la línea forman la impedancia serie. La conductancia y la capacitancia que existe entre conductores de una línea monofásica o desde un conductor a neutro de una línea trifásica forman la admitancia paralelo. Aunque la resistencia, inductancia y capacitancia son distribuidas, el circuito equivalente está formado por parámetros, como veremos cuando los discutamos.

3.1 TIPOS DE CONDUCTORES

En los primeros tiempos de la transmisión de potencia eléctrica, los conductores eran generalmente de cobre, pero los conductores de aluminio han reemplazado completamente a los de cobre debido al menor costo y al peso ligero de un conductor de aluminio comparado con uno de la misma resistencia. El hecho de que un conductor de aluminio tenga un mayor diámetro que un conductor de cobre de la misma resistencia es también una ventaja. Con un mayor diámetro las líneas de flujo eléctrico originadas sobre el conductor estarán más apartadas en la superficie de éste para una misma tensión. Esto significa un menor gradiente de tensión en la superficie del conductor y menor tendencia a ionizar el aire a su alrededor. La ionización produce un efecto indeseable llamado *corona*.

Los símbolos que identifican diferentes tipos de conductores de aluminio son los siguientes:

ACC	conductor de aluminio
AAAC	conductor de aluminio con aleación
ACSR	conductor de aluminio con refuerzo de acero
ACAR	conductor de aluminio con refuerzo de aleación

Los AAAC tienen mayor resistencia a la tensión que los conductores eléctricos de aluminio de tipo ordinario. ACSR consiste de un núcleo central de alambres de acero rodeado por capas de alambre de aluminio. ACAR tiene un núcleo central de aluminio de alta resistencia rodeado por capas de conductores eléctricos de aluminio tipo especial.

Las capas de alambre de un conductor trenzado son enrolladas en direcciones opuestas a fin de prevenir desenrollados y hacer que el radio externo de una capa coincida con el radio interno de la siguiente.

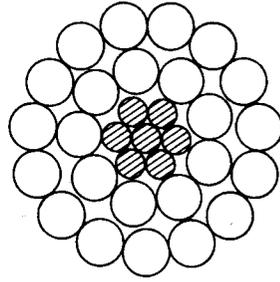


Fig. 3.2 Sección transversal de un conductor con refuerzo de acero, 7 hilos de acero y 24 de aluminio.

El trenzado proporciona flexibilidad con grandes secciones transversales. El número de alambres depende del de capas y de que aquellos sean del mismo diámetro. El número total de ellos en cables trenzados concéntricamente, en los que el espacio anular está ocupado por alambres de diámetro uniforme, es de 7, 19, 37, 61, 91, e incluso más. Una fórmula general para el número total de alambres de los cables de este tipo es,

$$\text{Número de alambres} = 3x^2 - 3x + 1$$

donde x es el número de capas, incluyendo el alambre del centro.

La fig. 3.2, representa un típico cable de aluminio con refuerzo de acero (ACSR). El conductor mostrado tiene 7 alambres de acero formando el núcleo central y alrededor de él hay dos capas de alambre de aluminio. Hay 24 alambres de aluminio en las dos capas exteriores. Los conductores trenzados se especifican como 24 Al/7 St, o simplemente 24/7. Diferentes resistencias, capacidades de corriente y tamaños de conductor se obtienen usando diferentes combinaciones de acero y aluminio.

La tabla A.1 del apéndice da algunas características eléctricas del ACSR. Los códigos, comunes a toda la industria del aluminio, se han asignado a cada conductor para facilitar su referencia.

Un tipo de conductor, el llamado ACSR dilatado, tiene un material intermedio, papel, por ejemplo, separando los cables interiores de acero de los exteriores de aluminio. El objeto de este relleno, es lograr un diámetro mayor (y, por ello, un menor efecto corona), para una conductividad y resistencia dadas. Los ACSR dilatados son usados para algunas líneas de muy alto voltaje (EHV).

3.2 RESISTENCIA

La resistencia de los conductores es la causa principal de la pérdida de la energía en las líneas de transporte. A menos que se especifique otra cosa, al hablar de resistencia nos referimos a la resistencia efectiva. La resistencia efectiva de un conductor es

$$R = \frac{\text{pérdida de potencia en el conductor}}{I^2} \Omega$$

donde la potencia está en vatios e I es la corriente eficaz del conductor, en amperios. La resistencia efectiva es igual a la resistencia del conductor a la corriente continua solo en aquellos casos en que la distribución de la corriente en el conductor sea uniforme. La falta de uniformidad en la distribución de la corriente y la relación entre la resistencia efectiva y

la resistencia a la corriente continua se discutirán más adelante, después de tratar algunos conceptos fundamentales de la resistencia a la corriente continua.

La resistencia a la corriente continua viene dada por la fórmula

$$R_0 = \frac{\rho l}{A} \Omega \quad (3.2)$$

donde ρ = resistividad del conductor,

l = longitud,

A = área de la sección transversal.

Puede emplearse cualquier sistema coherente de unidades. En unidades inglesas l está en pies, A en *circular mils* (cmil), y ρ en ohmio-circular mils por pie, algunas veces llamado ohmio por circular mil-pie. En unidades SI l está en metros, A en metros cuadrados y ρ en ohmio metro.¹

Un circular mil es el área de un círculo que tiene el diámetro de un mil. Un mil es igual a 10 pulg. El área de la sección transversal de un conductor cilíndrico sólido es igual al cuadrado del diámetro del conductor expresado en mils. El número de circular mils multiplicado por $\pi/4$ es igual al número de mils cuadrados.

El patrón de conductividad es el cobre recocido. El cobre comercial estirado en frío tiene 97.3% y el aluminio 61% de la conductividad del patrón de cobre recocido. A 20°C y para el cobre estirado en frío ρ es $10,66 \Omega \cdot \text{Cmil/P}$ ó $1,77 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Para aluminio a 20°C ρ es $17,00 \Omega \cdot \text{Cmil/P}$ ó $2,83 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$.

La resistencia a la corriente continua de los conductores de hilos trenzados es mayor que el valor obtenido de la Ec. (4.2) debido a que los hilos trenzados helicoidalmente tienen mayor longitud que el conductor. Por cada milla de conductor, la corriente tiene que recorrer, en todos los hilos, excepto el central, más de una milla de hilo. El incremento de resistencia debido a la espiral que forman los hilos se estima en 1% para conductores de tres hilos y un 2% para los de hilos concéntricos.

La variación de la resistencia de los conductores metálicos con la temperatura es prácticamente lineal en el margen normal de utilización. Si se llevan las temperaturas al eje de ordenadas y las resistencias al de abscisas, como se ha hecho en la fig. 3.3, prolongando el segmento de recta determinado hasta su intersección con el eje de ordenadas, obtenemos la ordenada en el origen que nos permite corregir la resistencia por los cambios de temperatura. La ordenada en el origen, esto es, la temperatura correspondiente a $R = 0$, es una cons-

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T + t_2}{T + t_1} \quad (3.3)$$

tante del material. De la fig. 3.3 tenemos donde R y R son las resistencias del conductor a las temperaturas t y t , respectivamente, en grados centígrados, y T la constante determinada a partir del gráfico. Los valores de T son los siguientes:

$$T = \begin{cases} 234.5 & \text{para cobre recocido de 100\% de conductividad,} \\ 241 & \text{para cobre estirado en frío de 97,3\% de conductividad,} \\ 228 & \text{para aluminio estirado en frío de 61\% de conductividad.} \end{cases}$$

¹ SI es la designación oficial para el Sistema Internacional de unidades.

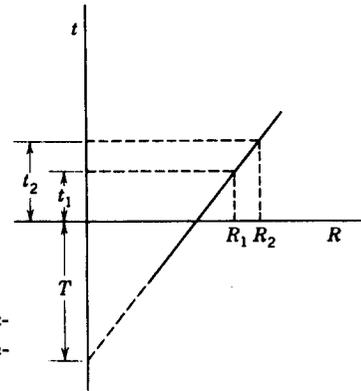


Fig. 3.3 Resistencia de un conductor metálico en función de la temperatura.

3.3 INFLUENCIA DEL EFECTO PIEL SOBRE LA RESISTENCIA

La distribución uniforme de la corriente en la sección del conductor solamente se presenta en la corriente continua. A medida que aumenta la frecuencia de la corriente alterna, se hace más pronunciada la diferencia entre las densidades de corriente de las distintas zonas de una sección transversal. Este fenómeno se llama *efecto piel*. En un conductor de sección circular, *generalmente*, aumenta la densidad de corriente del interior al exterior. Sin embargo, en los conductores de radio suficientemente grande, se puede presentar una densidad de corriente oscilante a lo largo del radio.

Como veremos cuando estudiemos la inductancia, algunas líneas de flujo magnético existen dentro del conductor. Los filamentos sobre la superficie del conductor no están enlazados por el flujo interno, y los enlaces de flujo de un filamento cercano a la superficie son menores que los enlaces de flujo del filamento en el interior. La variación de flujo induce altos voltajes actuando en los filamentos interiores que son inducidos a los filamentos interiores que son inducidos a los filamentos cercanos a la superficie del conductor. Por la ley Lenz el voltaje inducido se opone al cambio de corriente producido, y el alto voltaje inducido actuando sobre los filamentos internos causa la mayor densidad de corriente en los filamentos cercanos a la superficie. Aun a frecuencias a las cuales se transmite potencia el efecto piel es un factor significativo en conductores largos.

Veamos, con un ejemplo numérico, la razón por la cual la distribución no uniforme de la corriente produce un aumento de la resistencia efectiva. Supongamos que por cada uno

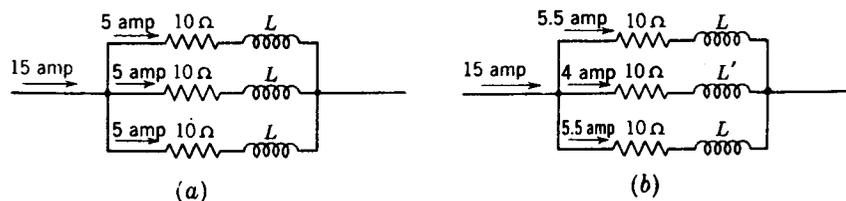


Fig. 3.4 Ramales paralelos de igual resistencia transportando (a) corrientes iguales y (b) corrientes distintas para ilustrar el efecto piel.

de los tres conductores en paralelo de la fig. 3.4a pasa una corriente alterna de 5 A. Si la resistencia de cada conductor es de 10Ω , la pérdida de potencia en los tres hilos, con una corriente total de 15 A es $3 \times 5^2 \times 10 = 750 \text{ W}$. Si se aumenta la impedancia del conductor de en medio, aumentando su inductancia (por ejemplo, envolviéndole en una cinta de alta permeabilidad o poniéndole en serie una inductancia) para que pasen 15 A por el circuito, es preciso aplicar una tensión más alta que en el caso anterior. El aumento de tensión hace que la corriente que circula por las ramas exteriores sea mayor. La corriente en la rama central, cuya inductancia se ha aumentado, es menor si la corriente total se mantiene en 15 A. Supóngase que en las nuevas condiciones fluyen 5.5 A en cada una de las ramas exteriores y 4 A en la rama central, como se indica en la fig. 3.4. Puesto que la resistencia de las ramas exteriores sigue siendo la misma, la pérdida total de potencia es:

$$2 \times 5.5^2 \times 10 + 4^2 \times 10 = 765 \text{ W}$$

En las condiciones originales de igualdad de la corriente en las tres ramas la resistencia efectiva del circuito es

$$R = \frac{750}{15^2} = 3.33 \Omega$$

que es la resistencia equivalente de tres resistencias de 10 ohmios en paralelo. Con corrientes distintas en cada resistencia, la resistencia efectiva del circuito es

$$R = \frac{765}{15^2} = 3.40 \Omega$$

La inductancia colocada en la rama central produce el defase de la corriente en dicha rama con respecto a las de las otras ramas. Para obtener una corriente total de 15 A es necesario que la que circula por la rama central sea algo mayor que 4 A, cuando la de las otras ramas es 5.5 A. Por tanto, la resistencia efectiva será incluso mayor que la calculada anteriormente.

3.4 VALORES TABULADOS DE RESISTENCIA

La resistencia a la corriente continua de varios tipos de conductores se puede encontrar fácilmente con la ec. (3.2), y puede estimarse el incremento en la resistencia debido a la espiral. Las correcciones debido a la temperatura se determinan en la ec. (3.3). El incremento en la resistencia causado por el efecto piel se puede calcular para alambres circulares y tubos de material sólido con las curvas de R/R_0 disponibles para ese tipo de conductores simples¹. Sin embargo, esta información no es necesaria, pues los fabricantes suministran tablas con las características eléctricas de sus conductores. La tabla A.1 es un ejemplo de algunos de los datos disponibles.

¹ Véase *The Aluminum Association*, "Aluminum Electrical Conductor Handbook", Nueva York, 1971.

EJEMPLO 3.1 Las tablas de características eléctricas para un conductor de aluminio trenzado *Marigold*, indica una resistencia de $0,01558 \Omega$ por 1.000 pies a 20°C y una resistencia *ac* de $0,0956 \Omega/\text{mi}$ a 50°C . El conductor tiene 61 alambres y su tamaño es 1 113 000 C mil. Verifique la resistencia *dc* y encuentre la proporción de la resistencia *ac* a *dc*.

Solución A 20°C de la ec. (3.2) con un incremento de 2% por enrollado

$$R_0 = \frac{17.0 \times 1\,000}{1\,113 \times 10^3} \times 1.02 = 0.01558 \Omega \text{ por } 1000 \text{ pies}$$

A una temperatura de 50°C de la ec. (3.3)

$$R_0 = 0.01558 \frac{228 + 50}{228 + 20} = 0.01746 \Omega \text{ por } 1000 \text{ pies}$$

$$\frac{R}{R_0} = \frac{0.0956}{0.01746 \times 5.280} = 1.037$$

El efecto piel causa un aumento en la resistencia del 3.7%.

3.5 DEFINICION DE INDUCTANCIA

Dos ecuaciones fundamentales sirven para explicar y definir la inductancia. La primera relaciona la f.e.m. inducida con la velocidad de variación del flujo que rodea el circuito. La f.e.m. inducida es

$$e = \frac{d\tau}{dt} \quad (3.4)$$

donde e es la f.e.m. inducida, en voltios, y τ es el número de *enlaces de flujo* número de líneas de inducción del circuito en Weber-vueltas. El número de Weber-vueltas es el producto de los Weber por el número de vueltas del circuito enlazado. En el circuito de dos conductores de la fig. 3.1 cada línea de flujo lo rodea una sola vez y se inducirá 1 voltio cuando la velocidad de variación de flujo sea de 1 Wb/seg. Si consideramos un solenoide, en lugar del circuito de la fig. 3.1, la mayor parte de las líneas de flujo producidas atraviesan más de una vuelta del solenoide. Si el flujo que atraviesa 100 vueltas de un solenoide varía a la velocidad de 1 Wb/seg, la f.e.m. inducida en cada espira será 1 voltio, pero la inducida en el solenoide serán 100 voltios, ya que las espiras están en serie. Por consiguiente, la f.e.m. inducida es proporcional a la velocidad de variación del flujo de inducción. Si algunos de los enlaces de flujo enlazan menos vueltas que el total del solenoide, se reducen los enlaces totales de flujo. En términos de línea de flujo, cada línea se multiplica por el número de vueltas que enlaza, y esos productos son sumados para obtener los enlaces totales de flujo.

Si cambia la corriente del circuito también cambia el flujo magnético (representado por los enlaces de flujo mencionado) a ella asociado. Suponiendo constante la permeabilidad del medio, en el que actúa el campo magnético, el número de enlaces de flujo es directamente proporcional a la corriente y, por consiguiente, la f.e.m. inducida lo es a la velocidad de variación de la corriente. De esta forma, la segunda ecuación fundamental es

$$e = L \frac{di}{dt} \quad \text{V} \quad (3.5)$$

donde L = constante de proporcionalidad,

L = es la inductancia o coeficiente de autoinducción del circuito en henrios,

e = la f. e. m. inducida en voltios y

di/dt = la velocidad de variación de la corriente en amperios por segundo.

La ec. (3.5) es aplicable a los medios en que la permeabilidad no sea constante, pero, en ese caso, no es constante la inductancia.

Despejando L entre las ecs. (3.4) y (3.5) resulta

$$L = \frac{d\tau}{di} \quad \text{H} \quad (3.6)$$

Si el número de líneas de inducción o número de enlaces de flujo varía linealmente con la corriente, lo que significa que el circuito magnético tiene permeabilidad constante,

$$L = \frac{\tau}{i} \quad \text{H} \quad (3.7)$$

de donde se deduce la definición de la autoinducción de un circuito eléctrico como el número de enlaces de flujo del circuito por unidad de corriente. La inductancia de un conductor de un circuito es igual al número de enlaces de flujo del conductor por unidad de corriente en el mismo. En una línea de dos conductores el número de enlaces de flujo del circuito es la suma de los enlaces de flujo de cada conductor. En el sistema de unidades SI L , en henrios, es igual a Weber-vueltas por amperio. En función de la inductancia los enlaces de flujo son

$$\tau = Li \quad \text{Weber-vueltas} \quad (3.8)$$

En la ec. (3.8) si i es la corriente instantánea, τ representa los enlaces de flujo instantáneos. Para corriente alterna sinusoidal los enlaces de flujo son también sinusoidales. La expresión vectorial de los enlaces de flujo es

$$\psi = LI \quad \text{Weber-vueltas} \quad (3.9)$$

Como ψ e I están en fase, L es real, siendo compatible con las ecs. (3.7) y (3.8). El vector caída de tensión por la acción de los enlaces de flujo es

$$V = j\omega LI \quad \text{V} \quad (3.10)$$

$$V = j\omega\psi \quad \text{V} \quad (3.11)$$

La inductancia mutua o coeficiente de autoinducción mutua entre dos circuitos, se define como los enlaces del flujo de uno de los circuitos, debido a la corriente del otro por amperio de la corriente de éste. Si la corriente I_2 produce ψ_{12} enlaces de flujo con el circuito 1, la inductancia mutua es

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{I_2} \quad \text{H}$$

El vector caída de tensión en el circuito 1 producido por los enlaces de flujo del circuito 2 es

$$V_1 = j\omega M_{12} I_2 = j\omega\psi_{12} \quad \text{V}$$

La inductancia mutua es importante para determinar la influencia de las líneas de fuerza sobre las líneas telefónicas y para estudiar el acoplamiento entre líneas de fuerzas paralelas.

3.6 INDUCTANCIA DE UN CONDUCTOR DEBIDO A FLUJO INTERNO

En la fig. 2.1 solamente se han representado las líneas de flujo exteriores a los conductores. Dentro de éstos también existe campo magnético, como se mencionó cuando consideramos el efecto piel. La variación de las líneas de flujo dentro de los conductores contribuye también a la f.e.m. del circuito, y, por tanto, a la inductancia. El valor correcto de la inductancia debida al flujo interno, puede calcularse como la relación entre los enlaces de flujo y la corriente, teniendo en cuenta que cada línea de flujo interna enlaza tan solo una fracción de la corriente total.

Para obtener un valor preciso de la inductancia de una línea de transporte es necesario considerar tanto el flujo interior de un conductor, como el exterior. Consideremos un largo conductor cilíndrico con la sección transversal representada en la fig. 3.5. Suponemos que el hilo de vuelta está tan lejos que no afecta apreciablemente el campo magnético creado por el conductor considerado. Las líneas de flujo son concéntricas al conductor.

La fuerza magnetomotriz (fmm), en amperio-vueltas, alrededor de cualquier línea cerrada es igual a la corriente, en amperios, abarcada por la línea. La fmm es igual, también a la integral de la componente tangencial de la intensidad de campo magnético a lo largo del filete. Así,

$$\text{fmm} = \oint H \cdot ds = I \cdot \text{At} \quad (3.12)$$

donde H = Intensidad de campo magnético, At/m

s = Distancia a través del paso, m

I = Corriente encerrada, A¹

El punto entre H y ds indica que el valor de H es la componente de la intensidad de campo tangente a ds .

Designemos por H_x la intensidad de campo a x metros del centro del conductor. Como el campo es simétrico, H_x es constante en todos los puntos equidistantes del centro del conductor. Si la integración indicada en la ec. (3.12) se hace a lo largo de una línea circular, concéntrica al conductor y a x metros del centro, H_x es constante a lo largo de toda la línea y tangente a ella. La ec. (3.12) será

$$\oint H_x ds = I_x \quad (3.13)$$

y

$$2\pi x H_x = I_x \quad (3.14)$$

¹ Lo tratado en esta sección y en las dos siguientes es aplicable tanto a la corriente alterna como a la continua. Como se indica, H e I son vectores y representan cantidades alternas sinusoidales. Para más sencillez puede considerarse que la corriente I es corriente continua y H es un número real.

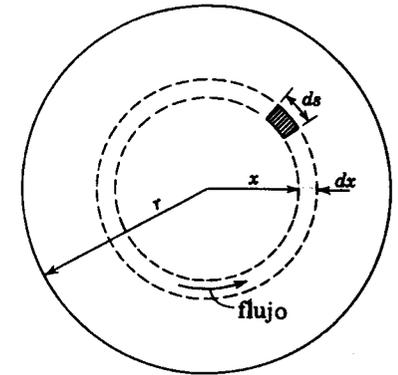


Fig. 3.5 Sección transversal de un conductor cilíndrico.

donde I_x es la corriente encerrada. Suponiendo una densidad de corriente uniforme,

$$I_x = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} I \quad (3.15)$$

donde I es la corriente total del conductor. Sustituyendo la ec. (3.15) en la (3.14) y resolviendo para H_x , tenemos

$$H_x = \frac{x}{2\pi r^2} I \quad \text{amperio-vueltas/metro} \quad (3.16)$$

La densidad de flujo a x metros del centro del conductor es

$$B_x = \mu H_x = \frac{\mu x I}{2\pi r^2} \quad \text{Wb/m}^2 \quad (3.17)$$

donde μ es la permeabilidad del conductor¹.

En el elemento tubular de espesor dx , el flujo $d\psi$ es B_x veces el área transversal del elemento normal a las líneas de flujo, siendo el área dx veces la longitud axial. El flujo por metro de longitud es

$$d\psi = \frac{\mu x I}{2\pi r^2} dx \quad \text{Wb/m} \quad (3.18)$$

Los enlaces de flujo $d\psi$ por metro de longitud, producidos por el flujo del elemento tubular son el producto del flujo por metro de longitud por la fracción de corriente enlazada. De esta forma

$$d\psi = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} d\psi = \frac{\mu I x^3}{2\pi r^4} dx \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.19)$$

Integrando desde el centro del conductor hasta el borde exterior para encontrar ψ_{int} , enlaces de flujo totales en el interior del conductor, obtenemos

$$\psi_{\text{int}} = \int_0^r \frac{\mu I x^3}{2\pi r^4} dx$$

$$\psi_{\text{int}} = \frac{\mu I}{8\pi} \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.20)$$

¹ En unidades SI la permeabilidad absoluta del vacío es $M = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m, y la permeabilidad relativa es $\mu_r = \mu/\mu_0$.

Para una permeabilidad relativa de 1, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ henrios/metro, y

$$\psi_{int} = \frac{I}{2} \times 10^{-7} \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.21)$$

$$L_{int} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \quad \text{H/m} \quad (3.22)$$

Hemos calculado la inductancia por unidad de longitud (henrios/metro) de un conductor cilíndrico debido únicamente al flujo de su interior. En lo sucesivo, por conveniencia, al tratar de la *inductancia por unidad de longitud* la llamaremos sencillamente *inductancia*, pero empleando las unidades correctas.

La validez del cálculo de la inductancia interna de un hilo macizo de sección circular por el método de los enlaces de flujo parciales, puede demostrarse deduciendo la inductancia por un método totalmente diferente. Siendo la energía almacenada en el interior del conductor, debido al campo magnético, igual a $L_{int}i^2/2$, al despejar L_{int} obtenemos la ec. (3.22).

3.7 ENLACES DE FLUJO ENTRE DOS PUNTOS EXTERNOS A UN CONDUCTOR AISLADO

Como primer paso para calcular la inductancia debida al flujo exterior a un conductor, deduciremos los enlaces de flujo de un conductor aislado debidos a la porción de flujo exterior comprendida entre D_1 y D_2 metros del centro del conductor. En la fig. 3.6, P_1 y P_2 son dos puntos a distancias D_1 y D_2 del centro de un conductor por el que circula una corriente de I amperios. Como las líneas de flujo son círculos concéntricos al conductor, todo el flujo comprendido entre P_1 y P_2 está dentro de las superficies cilíndricas concéntricas (representadas por circunferencias de trazo continuo) que pasan por P_1 y P_2 . En el elemento tubular, que está a x metros del centro del conductor, la intensidad de campo es H_x . La fmm a lo largo del elemento es

$$2\pi x H_x = I$$

Resolviendo para H_x y multiplicando por dx , encontramos la densidad de flujo B_x en el elemento, tal que

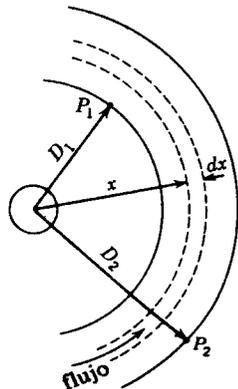


Fig. 3.6 Conductor y puntos P_1 y P_2 exteriores a él.

$$B_x = \frac{\mu I}{2\pi x} \quad \text{Weber/m}^2 \quad (3.24)$$

El flujo $d\phi$ en el elemento tubular de espesor dx es

$$d\phi = \frac{\mu I}{2\pi x} dx \quad \text{Wb/m} \quad (3.25)$$

Los enlaces de flujo $d\psi$ por metro son iguales, numéricamente, al flujo $d\phi$, puesto que el flujo exterior al conductor enlaza toda la corriente del conductor tan solo una vez. Los enlaces de flujo totales entre P_1 y P_2 se obtienen integrando d desde $x = D_1$ a $x = D_2$. De esta forma obtenemos

$$\psi_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{\mu I}{2\pi x} dx = \frac{\mu I}{2\pi} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.26)$$

o, para una permeabilidad relativa de 1, ,

$$\psi_{12} = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.27)$$

La inductancia debida solamente al flujo comprendido entre P_1 y P_2 es

$$L_{12} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{H/m} \quad (3.28)$$

Nótese que "ln", de las Ecs. (3.26) a (3.28), es el logaritmo neperiano (base e)¹. Transformando los henrios por metro a milihenrios por milla y empleando logaritmos decimales, tenemos

$$L_{12} = 0.7411 \log \frac{D_2}{D_1} \quad \text{mH/mi} \quad (3.29)$$

3.8 INDUCTANCIA DE UNA LINEA BIFILAR MONOFASICA

Antes de tratar el caso más general de líneas de varios conductores y trifásicas, consideraremos el caso de una sencilla línea bifilar de conductores cilíndricos macizos. La fig. 3.7 representa un circuito que tiene dos conductores de radios r_1 y r_2 . Uno de los conductores constituye el hilo de retorno. En principio, consideraremos solamente los enlaces de flujo del circuito producidos por la corriente del conductor 1. Una línea de flujo, debida a la corriente del conductor 1, situada a una distancia igual o mayor a $D + r_2$ del centro del conductor 1 no enlaza el circuito y, por tanto, no induce ninguna f.e.m. en él. Dicho de otra manera, una línea de flujo de estas características enlaza una corriente cero, ya que la corriente del conductor 2 es igual en magnitud y de opuesto sentido a la corriente del conductor 1. La fracción de la corriente total enlazada por una línea de flujo exterior al conductor 1 y a distancia igual o menor a $D - r_2$, es 1. Entre las distancias $D - r_2$ y $D + r_2$ (es decir, en la superficie del conductor 2) la fracción de la corriente total enlazada por la línea de flujo, producida por la corriente del conductor 1, a 0. Por tanto, es lógico simplificar el problema, cuando D es mucho mayor que r_1 y r_2 y la densidad de flujo a través del

¹ En este texto ln representa el logaritmo neperiano (base e), y log el logaritmo decimal (base 10).

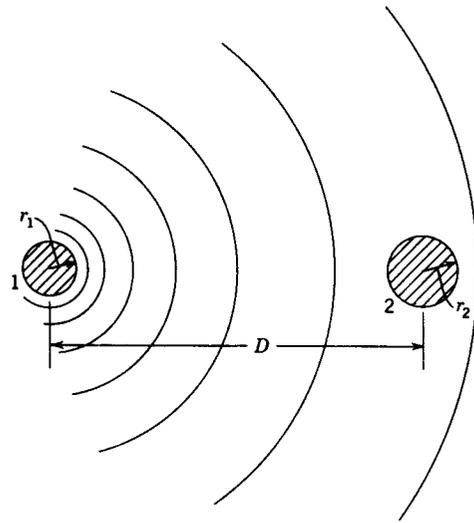


Fig. 3.7 Conductores de radios diferentes y campo magnético debido solamente a la corriente del conductor 1.

conductor es aproximadamente constante, suponiendo que todo el flujo exterior producido por la corriente del conductor 1 y que va hasta el centro del conductor 2, enlaza toda la corriente I y que el flujo que se extiende más allá de ese punto no enlaza ninguna corriente. En efecto, se comprueba que los cálculos hechos con esta hipótesis son correctos, incluso cuando D es pequeño.

La inductancia del circuito debida a la corriente del conductor 1 se determina por la ec. (3.28), sustituyendo D_2 por la distancia D entre los conductores 1 y 2, y D_1 por el radio r_1 del conductor 1.

Para el flujo exterior únicamente

$$L_{1,ext} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1} \quad \text{H/m} \quad (3.30)$$

Para el flujo interior únicamente

$$L_{1,int} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \quad \text{H/m} \quad (3.31)$$

La inductancia total del circuito, debida a la corriente del conductor 1 tan solo, es

$$L_1 = \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{D}{r_1} \right) \times 10^{-7} \quad \text{H/m} \quad (3.32)$$

La expresión que da la inductancia puede simplificarse sacando factores comunes de la ec. (3.32) y teniendo en cuenta que $\ln \epsilon^{1/4} = 1/4$, de donde

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{r_1} \right) \quad (3.33)$$

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \left(\ln \epsilon^{1/4} + \ln \frac{D}{r_1} \right) \quad (3.34)$$

Haciendo operaciones llegamos a

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1 \epsilon^{-1/4}} \quad (3.35)$$

Si sustituimos r_1' por $r_1 \epsilon^{-1/4}$,

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1'} \quad \text{H/m} \quad (3.36)$$

$$L_1 = 0.7411 \log \frac{D}{r_1'} \quad \text{mH/mi} \quad (3.37)$$

El radio r_1' es el de un conductor ficticio del que se supone que no tiene flujo interior, pero, sin embargo, la misma inductancia que el conductor real de radio r_1 . El factor $\epsilon^{-1/4}$ es igual a 0,7788. La ec. (3.36) da para la inductancia el mismo valor que la ec. (2.31). La diferencia estriba en que la ec. (3.36) carece del término que toma en cuenta el flujo interior, compensándolo por medio de un valor ajustado para el radio del conductor. Recordemos que la ec. (3.32) se dedujo para un conductor cilíndrico macizo y que se llegó a la ec. (3.36) mediante transformaciones matemáticas de la ec. (3.32). Por otra parte, el factor 0,7788, para ajustar el radio con objeto de tener en cuenta el flujo interno, se aplica únicamente a conductores cilíndricos macizos. Más adelante consideraremos otro tipo de conductores.

Como la corriente en el conductor 2 va en dirección contraria a la que circula por el conductor 1 (o su fase está a 180° con la de ésta), los enlaces de flujo producidos por la corriente en el conductor 2, considerado aislado, tienen la misma dirección que los producidos por la corriente del conductor 1. El flujo resultante de los dos conductores está determinado por la suma de las fmm de ambos conductores. Sin embargo, para permeabilidad constante pueden sumarse los enlaces de flujo (e igualmente las inductancias) de los dos conductores considerados aisladamente.

Por comparación con la ec. (3.36), la inductancia debida a la corriente en el conductor 2 es

$$L_2 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_2} \quad \text{H/m} \quad (3.38)$$

y para todo el circuito

$$L = L_1 + L_2 = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{\sqrt{r_1' r_2}} \quad \text{H/m} \quad (3.39)$$

Si $r_1' = r_2 = r'$, la inductancia total se reduce a

$$L = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'} \quad \text{H/m} \quad (3.40)$$

ó

$$L = 1.482 \log \frac{D}{r'} \quad \text{mH/mi} \quad (3.41)$$

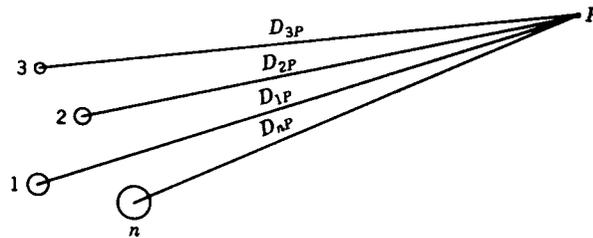


Fig. 3.8 Vista de una sección transversal de un grupo de n conductores en los que la suma de sus corrientes es cero. P es un punto lejano de los conductores.

La ec. (3.41) es la inductancia de la línea bifilar teniendo en cuenta los enlaces de flujo producidos por la corriente en ambos conductores, uno de los cuales es el camino de vuelta de la corriente en el otro. Este valor de la inductancia se llama, a veces, inductancia por metro de línea o por milla de línea, para distinguirla de la inductancia del circuito debida a la corriente en uno solo de los conductores. Esta última, dada por la ec. (3.37), es la mitad de la inductancia total de una línea monofásica y se llama inductancia por conductor.

3.9 ENLACES DE FLUJO DE UN CONDUCTOR EN UN GRUPO

Un caso más general que el de la línea bifilar es el de un conductor en un grupo de ellos, en el que la suma de las corrientes de todos los conductores es igual a cero. El grupo de conductores se representa en la fig. 3.8. Los conductores 1, 2, 3, ..., n son recorridos por los vectores corrientes $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$.

Las distancias de estos conductores a un punto lejano P están indicadas en la figura por $D_{1P}, D_{2P}, D_{3P}, \dots, D_{nP}$. Determinemos ψ_{1P} , enlaces de flujo del conductor 1 debidos a I_1 comprendiendo los enlaces de flujo interno, pero excluyendo todo el flujo más allá del punto P . Por las ecs. (3.21) y (3.27).

$$\psi_{1P1} = \left(\frac{I_1}{2} + 2I_1 \ln \frac{D_{1P}}{r_1} \right) 10^{-7} \quad (3.42)$$

$$\psi_{1P1} = 2 \times 10^{-7} I_1 \ln \frac{D_{1P}}{r_1} \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.43)$$

Los enlaces de flujo ψ_{1P2} con el conductor 1 debido a I_2 , pero excluyendo el flujo más allá de P es igual al flujo producido por I_2 entre el punto P y el conductor 1 (esto es, entre las distancias límites D_{2P} y D_{12} del conductor 2). Así

$$\psi_{1P2} = 2 \times 10^{-7} I_2 \ln \frac{D_{2P}}{D_{12}} \quad (3.44)$$

Los enlaces de flujo ψ_{1P} con el conductor 1, debido a todos los conductores del grupo, pero excluyendo el flujo más allá del punto P es

$$\psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{D_{1P}}{r_1} + I_2 \ln \frac{D_{2P}}{D_{12}} + I_3 \ln \frac{D_{3P}}{D_{13}} + \dots + I_n \ln \frac{D_{nP}}{D_{1n}} \right) \quad (3.45)$$

que, desarrollando los términos logarítmicos y reagrupando, se convierte en

$$\psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{1}{r_1} + I_2 \ln \frac{1}{D_{12}} + I_3 \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots + I_n \ln \frac{1}{D_{1n}} + I_1 \ln D_{1P} + I_2 \ln D_{2P} + I_3 \ln D_{3P} + \dots + I_n \ln D_{nP} \right) \quad (3.46)$$

Como la suma de todas las corrientes del grupo es nula,

$$I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n = 0$$

y despejando I_n , tenemos

$$I_n = -(I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_{n-1}) \quad (3.47)$$

Sustituyendo en la ec. (3.45), I_n por su valor dado por la ec. (3.46) y agrupando los términos logarítmicos, tenemos

$$\psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{1}{r_1} + I_2 \ln \frac{1}{D_{12}} + I_3 \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots + I_n \ln \frac{1}{D_{1n}} + I_1 \ln \frac{D_{1P}}{D_{nP}} + I_2 \ln \frac{D_{2P}}{D_{nP}} + I_3 \ln \frac{D_{3P}}{D_{nP}} + \dots + I_{n-1} \ln \frac{D_{(n-1)P}}{D_{nP}} \right) \quad (3.48)$$

Suponiendo que el punto P se aleja hasta el infinito, de forma que los términos logarítmicos de las relaciones de distancia desde P se hagan infinitesimales, puesto que dichas relaciones tienden a la unidad, obtenemos

$$\psi_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{1}{r_1} + I_2 \ln \frac{1}{D_{12}} + I_3 \ln \frac{1}{D_{13}} + \dots + I_n \ln \frac{1}{D_{1n}} \right) \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.49)$$

Al permitir que el punto P se mueva hacia el infinito incluimos en nuestra derivación todos los enlaces de flujo del conductor 1. De esta forma la ec. (3.49) nos da todos los enlaces de flujo del conductor 1, en el grupo de conductores, cuando la suma de todas las corrientes es cero. Si las corrientes son alternas, éstas tienen que ser corrientes instantáneas, o bien valores eficaces complejos, con lo que se obtienen los valores eficaces de los enlaces de flujo en forma de números complejos.

3.10 INDUCTANCIA DE LINEAS DE CONDUCTORES COMPUESTOS

Los conductores trenzados están comprendidos en la denominación general de conductores *compuestos* que están formados por dos o más elementos o hilos en paralelo. Ahora estamos en condiciones de estudiar las líneas de transporte formadas por conductores compuestos, aunque nos limitaremos al caso en que todos los hilos son iguales y la corriente está igualmente repartida. El método puede extenderse a todos los tipos de conductores que contienen hilos de diferentes dimensiones y conductividades, pero no

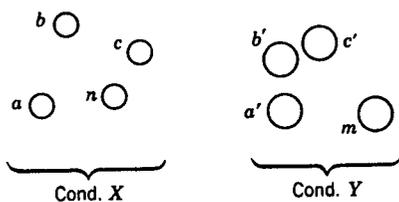


Fig. 3.9 Línea monofásica formada por dos conductores compuestos.

abordaremos aquí este problema ya que los valores de la inductancia interna de cada conductor específico se obtienen de los distintos fabricantes y pueden encontrarse en manuales. El método a seguir, supone una aproximación al problema más complicado de conductores no homogéneos y con desigual distribución de corriente entre hilos. El método es aplicable a la determinación de la inductancia de líneas formadas por circuitos en paralelo pueden considerarse como hilos de un solo conductor compuesto.

La fig. 3.9, representa una línea monofásica formada por dos conductores. Para hacer el caso más general, cada conductor que constituye una parte de la línea, se representa como un indefinido número de conductores agrupados arbitrariamente. Las únicas restricciones son, que los hilos paralelos han de ser cilíndricos y con la corriente igualmente distribuida entre ellos. El conductor X está compuesto por n hilos paralelos, exactamente iguales, cada uno de los cuales lleva la corriente I/n . El conductor Y , que constituye el retorno de la corriente de X , está formado por m hilos paralelos, exactamente iguales, cada uno de los cuales lleva la corriente $-I/m$. Las distancias entre los elementos se designarán por la letra D con los subíndices correspondientes. Aplicando la ec. (3.49), al hilo a del conductor X , obtenemos los enlaces de flujo del hilo a

$$\psi_a = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{n} \left(\ln \frac{1}{r'_a} + \ln \frac{1}{D_{ab}} + \ln \frac{1}{D_{ac}} + \dots + \ln \frac{1}{D_{an}} \right) - 2 \times 10^{-7} \frac{I}{m} \left(\ln \frac{1}{D_{aa'}} + \ln \frac{1}{D_{ab'}} + \ln \frac{1}{D_{ac'}} + \dots + \ln \frac{1}{D_{am'}} \right) \quad (3.50)$$

de la cual, obtenemos

$$\psi_a = 2 \times 10^{-7} I \ln \frac{\sqrt[m]{D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{am'}}}{\sqrt[n]{r'_a D_{ab} D_{ac} \dots D_{an}}} \quad \text{Weber-vueltas/metro} \quad (3.51)$$

Dividiendo la ec. (3.51) por la corriente I/n , encontramos que la inductancia del hilo a , es

$$L_a = \frac{\psi_a}{I/n} = 2n \times 10^{-7} \ln \frac{\sqrt[m]{D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{am'}}}{\sqrt[n]{r'_a D_{ab} D_{ac} \dots D_{an}}} \quad \text{H/m} \quad (3.52)$$

Análogamente, la inductancia del hilo b , es

$$L_b = \frac{\psi_b}{I/n} = 2n \times 10^{-7} \ln \frac{\sqrt[m]{D_{ba'} D_{bb'} D_{bc'} \dots D_{bm'}}}{\sqrt[n]{D_{ba} r'_b D_{bc} \dots D_{bn}}} \quad \text{H/m} \quad (3.53)$$

La inductancia media de todos los hilos del conductor X , es

$$L_{av} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n} \quad (3.54)$$

El conductor X está formado por n hilos en paralelo. Si todos tienen la misma inductancia, la del conductor será $1/n$ la de un hilo. En nuestro caso, todos los hilos tienen inductancias diferentes, pero la de todos los hilos, en paralelo, es $1/n$ de la inductancia media. Así, la inductancia del conductor X , es

$$L_X = \frac{L_{av}}{n} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n^2} \quad (3.55)$$

Sustituyendo la expresión logarítmica para la inductancia de cada hilo en la ec. (3.55) y agrupando términos, obtenemos

$$L_X = 2 \times 10^{-7}$$

$$\times \ln \frac{\sqrt[mn]{(D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{am'}) (D_{ba'} D_{bb'} D_{bc'} \dots D_{bm'}) \dots (D_{na'} D_{nb'} D_{nc'} \dots D_{nm'})}}{\sqrt[n^2]{(D_{aa} D_{ab} D_{ac} \dots D_{an}) (D_{ba} D_{bb} D_{bc} \dots D_{bn}) \dots (D_{na} D_{nb} D_{nc} \dots D_{nn})}}$$

$$\text{H/m} \quad (3.56)$$

donde r'_a , r'_b y r'_n se han sustituido por D_{aa} , D_{bb} y D_{nn} , respectivamente, para dar a la fórmula mayor simetría.

Nótese que el numerador de la expresión logarítmica en la ec. (3.56) es la raíz mn -ésima mn términos, los cuales son los productos de las distancias de todos los n hilos del conductor X a todos los m hilos del conductor Y . Para cada hilo del conductor X hay m distancias a los hilos del conductor Y , y, en total, existen n hilos en el conductor X . El producto de m distancias por cada n hilos resulta en mn términos. La raíz mn -ésima del producto de las mn distancias se llama *distancia media geométrica* entre el conductor X y el Y . Se representa por D_m o DMG y se llama también DMG *mútua* entre los dos conductores.

El denominador de la expresión logarítmica de la ec. (3.56) es la raíz n^2 -ésima de n^2 términos. Hay n hilos por cada hilo hay un producto de n términos, el r' de dicho hilo por las distancias del mismo a cada uno de los restantes hilos del conductor X , lo que hace el total de n^2 términos. A veces r'_a se llama la distancia del hilo a a sí mismo, especialmente cuando se representa por D_{aa} . Teniendo en cuenta esto. La expresión subradical del denominador puede decirse que es el producto de las distancias de cada uno de los hilos a sí mismo y a los restantes hilos. La raíz n^2 -ésima de esta expresión se llama DMG propia del conductor X y el r' de un hilo separado, la DMG propia del hilo. La DMG propia también se llama el radio medio geométrico, RMG. La expresión matemática correcta es DMG propia, pero comúnmente se usa RMG. Nosotros usaremos RMG y la identificaremos por D_s .

En función de D_m y D_s la ec. (3.56) se convierte en

$$L_X = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_m}{D_s} \quad \text{H/m} \quad (3.57)$$

$$L_X = 0.7411 \log \frac{D_m}{D_s} \quad \text{mH/mi} \quad (3.58)$$

Si comparamos las ecs. (3.58) y (3.37) la semejanza entre ellas es aparente. La ecuación que da la inductancia de un conductor de una línea de conductores compuestos se obtiene poniendo, en la ec. (3.37), la DMG entre conductores, de la línea de conductores compuestos, en lugar de la distancia entre dos conductores macizos de la línea de conductores sencillos y substituyendo la RMG del conductor compuesto por la RMG (r') del

conductor sencillo. La ec. (2.57) da la inductancia de un conductor de una línea monofásica. El conductor se compone de todos los hilos que están en paralelo. La inductancia es el número total de enlaces de flujo del conductor compuesto por unidad de corriente de línea. La ec. (3.37) da la inductancia de un conductor de una línea monofásica para el caso especial en que aquél es un alambre cilíndrico y macizo.

La inductancia del conductor Y se determina de forma análoga, siendo la de la línea.

$$L = L_X + L_Y$$

La distancia media geométrica puede estudiarse desde un punto de vista matemático en términos más generales. Por definición, la DMG desde un punto a un grupo de otros puntos es la media geométrica de las distancias desde un punto a cada uno de los otros puntos.

El concepto de la DMG de un punto a una superficie es importante y puede determinarse dividiendo la superficie en un número grande de elementos iguales y hallando la media geométrica de las distancias del punto a los elementos de superficie. Si hay n elementos, la media geométrica de las distancias es la raíz n -ésima del producto de las n distancias. La DMG del punto a la superficie es el límite de la DMG del punto a los elementos de superficie, cuando el número de éstos tienden a infinito.

Para encontrar la DMG entre dos superficies, se divide cada una de éstas en un número de elementos iguales, m , por ejemplo, para una de ellas y n para la otra. La DMG entre las superficies es el límite de la raíz mn -ésima de los mn productos de las distancias entre los m elementos de una superficie y los n de la otra cuando m y n crecen indefinidamente. La fig. 3.10 representa las seis distancias entre dos de los m elementos iguales en que se ha dividido una superficie y tres de los n elementos iguales en que se ha dividido la otra. Para determinar la DMG entre superficies es preciso considerar todas las distancias entre elementos, y el número de ellos, en cada superficie, ha de ser infinito. La DMG entre dos superficies circulares puede demostrarse que es igual a la distancia entre centros.

La RMG de una superficie es el límite de la media geométrica de las distancias entre todos los pares de elementos de la superficie considerada cuando su número crece indefinidamente. La RMG de una superficie circular puede demostrarse que es igual al radio del círculo multiplicado por $\epsilon^{-1/4}$. Como el r' de nuestras fórmulas que dan la inductancia de un alambre de sección circular es el radio del alambre multiplicado por $\epsilon^{-1/4}$, tenemos la razón de por qué llamamos r' a la RMG propia del alambre.

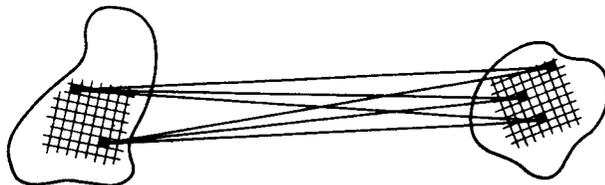


Fig. 3.10 Las seis distancias posibles entre dos elementos iguales de una superficie a tres iguales de la otra.

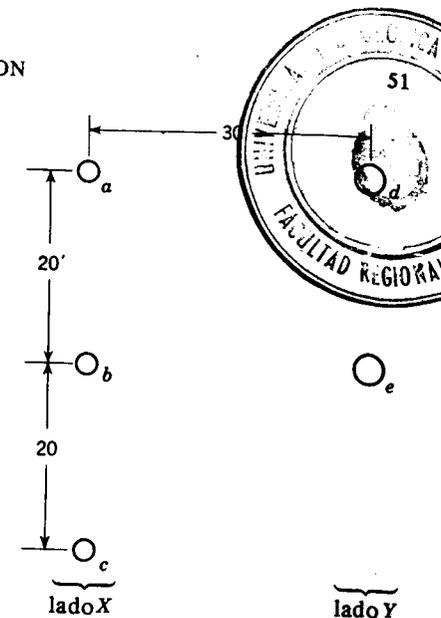


Fig. 3.11 Disposición de los conductores del ej. 3.2.

EJEMPLO 3.2 Uno de los conductores de una línea monofásica está compuesto de tres hilos macizos cada uno de los cuales tiene 0.1 pul de radio. El circuito de retorno está compuesto por dos hilos de 0.2 pul de radio. La disposición de los conductores es la representada en la fig. 3.11. Encuentre la distancia debida a la corriente en cada lado de la línea y la inductancia de la línea completa en milihenrios por milla.

Solución Primeramente hallaremos la DMG entre los lados X e Y de la línea:

$$D_m = \sqrt[6]{D_{ad}D_{aa}D_{bd}D_{ba}D_{cd}D_{ce}}$$

$$D_{ad} = D_{ba} = 30 \text{ pies}$$

$$D_{aa} = D_{bd} = D_{ce} = \sqrt{20^2 + 30^2} = \sqrt{1,300}$$

$$D_{cd} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ pies}$$

$$D_m = \sqrt[6]{30^2 \times 50 \times 1,300^{3/2}}$$

$$= 30^{1/3} \times 50^{1/6} \times 1,300^{1/4} = 35.8 \text{ pies}$$

A continuación hallamos la DMG propia del lado X :

$$D_s = \sqrt[9]{D_{aa}D_{ab}D_{ac}D_{ba}D_{bb}D_{bc}D_{ca}D_{cb}D_{cc}}$$

$$= \sqrt[9]{\left(\frac{0.1 \times 0.7788}{12}\right)^3 \times 20^4 \times 40^2}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{0.1 \times 0.7788}{12}} \times 20^{4/9} \times (2 \times 20)^{2/9}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{0.1 \times 0.7788}{12}} \times 20^{(4/9)+(2/9)} \times 2^{2/9}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{0.1 \times 0.7788}{12}} \times 20^{2/3} \times 4^{1/9} = 1.605 \text{ pies}$$

Y para el lado Y:

$$D_s = \sqrt[4]{\left(\frac{0.2 \times 0.7788}{12}\right)^2} \times 20^2 = 0.509 \text{ pies}$$

Según la ec. (3.58), la inductancia es

$$L_X = 0.7411 \log \frac{35.8}{1.605} = 1.00 \text{ mH/mi}$$

$$L_Y = 0.7411 \log \frac{35.8}{0.509} = 1.38 \text{ mH/mi}$$

$$L = L_X + L_Y = 2.38 \text{ mH/mi}$$

EJEMPLO 3.3 Un conductor está compuesto de siete hilos idénticos, entrelazados, cada uno de ellos con un radio. Como se indica en la fig. 3.12. Encuentre el factor por el cual debe multiplicarse para encontrar la RMG del conductor. También encuentre el factor por el cual hay que multiplicar la raíz cuadrada del área del conductor en circular-mils para obtener RMG del conductor. Compruebe el valor de 0.0177 pies especificado por la *Asociación del Aluminio* para D_s ; de un conductor *Daisy* totalmente de aluminio cuya área es de 266.800 c mil.

Solución Las distancias D_{12} , D_{13} y D_{14} son:

$$D_{12} = 2r \quad D_{14} = 4r$$

$$D_{13} = \sqrt{D_{14}^2 - D_{34}^2} = \sqrt{(4r)^2 - (2r)^2} = 2r\sqrt{3}$$

La RMG propia del conductor de siete hilos es de 49-ésima raíz de 49 distancias. Así,

$$D_s = \sqrt[49]{(r')^7 (D_{12}^2 D_{13}^2 D_{14} D_{17})^6 (2r)^6}$$

donde $(r')^7$ es el producto de la RMG propia de un hilo por las RMG propias de los restantes. El término $D_{12}^2 D_{13}^2 D_{14} D_{17}$ es el producto de las distancias de un hilo exterior a cada uno de los restantes. Está elevado a la sexta potencia para tener en cuenta los seis

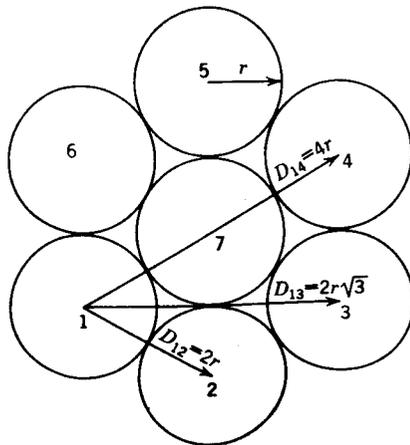


Fig. 3.12 Sección transversal del conductor de siete hilos del eje. 3.3.

hilos exteriores. El término $(2r)^6$ es el producto de las distancias del hilo interno al resto. Hay siete distancias correspondientes a los siete hilos. Simplificando la expresión que da D_s , tenemos

$$D_s = \sqrt[7]{r'} \times \sqrt[49]{(2r^2 \times 3 \times 2^2 r^2 \times 2^2 r \times 2r \times 2r)^6} = \frac{2r \sqrt[7]{3(0.7788)}}{\sqrt[49]{6}}$$

$$= 2.177r$$

Para encontrar D_s en función de la sección total del conductor en circular mils haciendo

A = área del conductor en c mil

d = diámetro de cada hilo en mils

r = radio de cada hilo en mils

Entonces, para un conductor de siete hilos tenemos

$$A = 7d^2 = 28r^2$$

$$D_s = \frac{2.177}{\sqrt{28}} \sqrt{A} = 0.4114 \sqrt{A} \quad \text{mils}$$

y para el conductor *Daisy*

$$D_s = 0.4114 \sqrt{266,800} = 212.5 \text{ mils}$$

$$D_s = \frac{212.5 \times 10^{-3}}{12} = 0.0177 \text{ pies}$$

Si una línea monofásica está formada por dos cables trenzados análogos al calculado en el ej. 3.3, rara vez será necesario el calcular la DMG entre los hilos de los dos lados, porque la DMG es aproximadamente igual a la distancia entre los centros de los cables. El cálculo de la DMG mutua es importante solamente en aquellos casos en que los varios hilos (o conductores) en paralelo están uno del otro a distancias muy próximas a las que hay entre los dos lados del circuito. Así, en el ej. 3.2, los conductores en paralelo de un lado de la línea están separados 20 pies y la distancia entre los dos lados de la línea es 30 pies. En este caso es importante el cálculo de la DMG mutua. Para conductores trenzados como los del ej. 3.3, la distancia entre los lados de la línea es, en general, tan grande que puede tomarse la distancia entre centros, como DMG mutua, sin introducir un error apreciable.

Si se desprecia el alma de acero de los ACSR, al calcular la inductancia, se obtiene gran precisión, con tal de que los hilos de aluminio estén dispuestos en un número par de capas. El efecto del alma de acero es más acusado cuando el número de capas de hilos de aluminio es impar, pero, no obstante, la precisión es buena cuando se hacen los cálculos basándose tan solo en los hilos de aluminio.

3.11 EMPLEO DE LAS TABLAS

La RMG propia de los conductores de cualquier número de hilos puede calcularse como

en el ej. 3.3. Sin embargo, el ingeniero rara vez tiene que hacer estos cálculos, ya que hay tablas que dan valores de la RMG para los conductores normales. El empleo de tablas es el método práctico para determinar los valores deseados, especialmente para los conductores no homogéneos como los ACSR. Para utilizar las tablas convenientemente, el ingeniero tiene que comprender perfectamente los datos tabulados.

Corrientemente se emplea la reactancia inductiva en lugar de la inductancia. La reactancia inductiva de un conductor de una línea monofásica bifilar es

$$X_L = 2\pi fL = 2\pi f \times 0.7411 \times 10^{-3} \log \frac{D_m}{D_s}$$

$$= 4.657 \times 10^{-3} f \log \frac{D_m}{D_s} \quad \Omega/\text{mi} \quad (3.59)$$

donde D_m es la distancia entre conductores. La RMG que se encuentra en las tablas es equivalente a D_s , la cual tiene en cuenta el efecto piel donde es bastante apreciable y afecta la inductancia. Es claro que el efecto piel es más pronunciado a altas frecuencias para un conductor de un diámetro dado. Los cálculos para D_s en el ej. 3.3 no tuvieron en cuenta el efecto piel. Puesto que el valor especificado en las tablas concuerda con el calculado, el efecto piel se puede dejar de lado en este conductor. Los valores de D_s proporcionados en la tabla A.1 son para 60Hz.

Algunas tablas dan valores de la reactancia inductiva además de la RMG. Un método es desarrollar el término logarítmico en la ec. (3.59) como sigue:

$$X_L = 4.657 \times 10^{-3} f \log \frac{1}{D_s} + 4.657 \times 10^{-3} f \log D_m \quad \Omega/\text{mi} \quad (3.60)$$

Si tanto D_s como D_m están en pies, el primer término de la ec. (3.60) es la reactancia inductiva de un conductor perteneciente a una línea bifilar con 1 pie de distancia entre conductores, como puede verse comparando la ec. (3.60) con la ec. (3.59). Por esto, el primer término de la ec. (3.60) se llama *reactancia inductiva a 1 pie de separación* X_a . Depende de la RMG propia del conductor y de la frecuencia. El segundo término de la ec. (3.60) se llama *factor de separación de la reactancia inductiva* X_d . Este término es independiente del tipo conductor y solo depende de la frecuencia y de la separación. El factor de separación es igual a cero cuando D_m es 1 pie. Si D_m es menor que 1 pie, el factor de separación es negativo. El procedimiento para calcular la reactancia inductiva es hallar la reactancia inductiva a 1 pie de separación para el conductor considerado y sumarla al factor de separación de la reactancia inductiva, ambas para la frecuencia de la línea. La tabla A.1 incluye los valores de la reactancia inductiva, a 1 pie de separación y la Tabla A.2 da los valores del factor de separación de la reactancia inductiva.

EJEMPLO 3.4 Encuentre la reactancia inductiva por milla de una línea monofásica operando a 60 Hz. El tipo de conductor es *Partridge*, y el espacio entre centros es de 20 pies.

Solución Para éste conductor la tabla A.1 $D_s = 0.0217$ pies. De la ec. (3.59), para un conductor,

$$X_L = 4.657 \times 10^{-3} \times 60 \log \frac{20}{0.0217}$$

$$= 0.828 \Omega/\text{mi}$$

El cálculo anterior se usa solamente si se conoce D_s . Sin embargo la tabla A.1 indica una reactancia inductiva a 1 pie de distancia de $X_a = 0.465 \Omega/\text{mi}$. De la tabla A.2 el factor de separación de la reactancia inductiva es $X_d = 0.3635 \Omega/\text{mi}$, y así la reactancia inductiva de un conductor es:

$$X_L = 2 \times 0.8285 = 1.657 \Omega/\text{mi}$$

Puesto que los conductores de los dos lados de la línea son idénticos, la reactancia inductiva de la línea es:

$$0.465 + 0.3635 = 0.8285 \Omega/\text{mi}$$

3.12 INDUCTANCIA DE LÍNEAS TRIFÁSICAS CON DISPOSICIÓN EQUILÁTERA

Hasta ahora solamente hemos considerado líneas monofásicas. Sin embargo, las ecuaciones encontradas pueden adaptarse fácilmente para calcular la inductancia de las líneas trifásicas. La fig. 3.13 representa los conductores de una línea trifásica colocados en los vértices de un triángulo equilátero. Si suponemos que no existe hilo neutro, o que los corrientes de las tres fases están equilibrados, $I_a + I_b + I_c = 0$. La ec. (3.49) da los enlaces de flujo del conductor a:

$$\psi_a = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D} + I_c \ln \frac{1}{D} \right) \text{ Weber-vueltas/metro} \quad (3.61)$$

Puesto que $I_a = -(I_b + I_c)$ la ec. (3.61) se convierte en

$$\psi_a = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} - I_a \ln \frac{1}{D} \right) = 2 \times 10^{-7} I_a \ln \frac{D}{r'} \text{ Weber-vueltas/metro} \quad (3.62)$$

y

$$L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'} \quad \text{H/m} \quad (3.63)$$

ó

$$L_a = 0.7411 \log \frac{D}{r'} \quad \text{mH/mi} \quad (3.64)$$

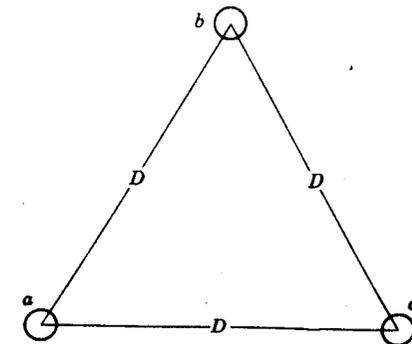


Fig. 3.13 Sección transversal de una línea trifásica con sus conductores en posición equilátera.

La ec. (3.64) es de la misma forma que la (3.37) para una línea monofásica. En los conductores trenzados, D_s sustituye a r en la ecuación. Debido a la simetría, las inductancias de los conductores b y c son iguales a la del conductor a . Como cada fase tiene solamente un conductor, las ecs. (3.63) y (3.64) dan la inductancia por fase de la línea trifásica.

3.13 INDUCTANCIA DE LAS LINEAS TRIFASICAS CON DISPOSICION ASIMETRICA

Cuando los conductores de una línea trifásica no están en disposición equilátera, el problema de encontrar la inductancia es más difícil. En ese caso, los enlaces de flujo y la inductancia de todas las fases no son iguales. Existen inductancias diferentes en cada fase en un circuito desbalanceado. El balance de las tres fases puede lograrse intercambiando la posición de los conductores a intervalos regulares a lo largo de la línea, de tal forma que cada conductor ocupe la posición de cada uno de los otros conductores sobre una distancia igual. Este cambio de las posiciones de los conductores se llama *transposición*. La fig. 3.14 representa un ciclo completo de transposición. Los conductores de cada fase se designan por a , b , y c , mientras que las posiciones ocupadas están representadas por los números 1, 2 y 3. El resultado de la transposición es que todos los conductores tienen la misma inductancia media a lo largo del ciclo completo.

Las modernas líneas eléctricas no se transponen corrientemente, aunque pueden cambiarse las posiciones de los conductores, en las subestaciones, para equilibrar las inductancias de las fases más exactamente. Afortunadamente, la asimetría entre las fases de una línea sin transposición es pequeña, pudiéndose despreciar en muchos casos. Si se desprecia la asimetría, la inductancia de una línea sin transposición se calcula como igual al valor medio de la reactancia inductiva de una fase de la misma línea en la que se hubiera realizado correctamente la transposición. La deducción que viene a continuación es para líneas con transposición.

Para encontrar la inductancia media de un conductor, primeramente se calculan los enlaces de flujo de un conductor en cada posición del ciclo de transposición, hallando, a continuación, la media de los enlaces de flujo. Aplicando la ec. (3.49) al conductor a de la fig. 3.14 para encontrar la expresión vectorial de los enlaces de flujo de a en la posición 1, b en la 2 y c en la 3, tenemos:

$$\psi_{a1} = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}} + I_c \ln \frac{1}{D_{31}} \right) \text{ Weber-vueltas/metro} \tag{3.65}$$

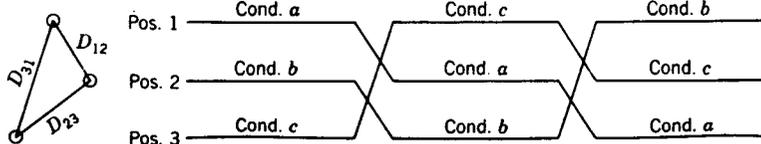


Fig. 3.14 Ciclo de transposición.

con a en la posición 2, b en la 3 y c en la 1,

$$\psi_{a2} = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{23}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12}} \right) \text{ Weber-vueltas/metro} \tag{3.66}$$

y con a en la posición 3, b en la 1 y c en la 2,

$$\psi_{a3} = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{23}} \right) \text{ Weber-vueltas/metro} \tag{3.67}$$

El valor medio de los enlaces de flujo de a es

$$\psi_a = \frac{\psi_{a1} + \psi_{a2} + \psi_{a3}}{3} = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left(3I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}D_{23}D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right) \tag{3.68}$$

Teniendo en cuenta $I_a = -(I_b + I_c)$,

$$\psi_a = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left(3I_a \ln \frac{1}{r'} - I_a \ln \frac{1}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right) = 2 \times 10^{-7} I_a \ln \frac{\sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}}}{r'} \text{ Weber-vueltas/metro} \tag{3.69}$$

y la inductancia *media* por fase es

$$L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{r'} \text{ H/m} \\ L_a = 0.7411 \log \frac{D_{eq}}{r'} \text{ mH/mi} \tag{3.70}$$

donde

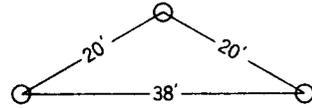
$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}} \tag{3.71}$$

La ec. (3.70) puede escribirse

$$L_a = 0.7411 \log \frac{D_{eq}}{D_s} \text{ mH/mi} \tag{3.72}$$

donde D_s es la RMG del conductor. D_{eq} , media geométrica de las tres distancias de la línea asimétrica, es la separación equilátera equivalente, como puede verse comparando las ecs. (3.70) y (3.74). Nótese la analogía de todas las ecuaciones que dan la inductancia de un conductor. Si la inductancia está en milihenrios por milla, en todas las ecuaciones aparece el factor 0.7411 y el denominador del término logarítmico es siempre la RMG del conductor. El numerador es la distancia entre hilos de una línea bifilar, la DMG mutua entre lados de una línea monofásica de conductores compuestos; la distancia entre conductores de una línea con disposición equilátera o bien la separación equilátera equivalente de una línea asimétrica.

Fig. 3.15 Disposición de los conductores del ej. 3.5.



EJEMPLO 3.5 Una línea trifásica de un circuito simple de 60 Hz está dispuesta como se muestra en la fig. 3.15. Los conductores son ACSR *Drake*. Encuentre la inductancia y la reactancia inductiva por fase y por milla.

Solución De la tabla A.1

$$D_s = 0.0373 \text{ pies} \quad D_{eq} = \sqrt[3]{20 \times 20 \times 38} = 24.8 \text{ pies}$$

$$L = 0.7411 \log \frac{24.8}{0.0373} = 2.09 \text{ mH/mi/fase}$$

$$X_L = 2\pi 60 \times 2.09 \times 10^{-3} = 0.788 \Omega/\text{mi/fase}$$

o de las tablas A.1 y A.2

$$X_a = 0.399$$

y para 24.8 pies

$$X_d = 0.389$$

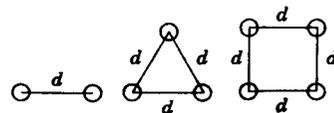
$$X_L = 0.399 + 0.389 = 0.788 \Omega/\text{mi/fase}$$

3.14 CONDUCTORES MÚLTIPLES

A tensiones muy altas (EHV), es decir, tensiones superiores a 230 kV se presentan pérdidas por corona y particularmente gran interferencia en las comunicaciones si los circuitos tienen solamente un conductor por fase. El alto gradiente de voltaje en el conductor en el intervalo de EHV se reduce considerablemente teniendo dos o más conductores por fase a una distancia que sea pequeña comparada con el espaciamiento entre fases. Se dice que una línea como ésta se compone de conductores agrupados. El agrupamiento se compone de dos, tres o cuatro conductores. Un grupo de tres conductores por lo común tiene los conductores en los vértices de un triángulo equilátero, y un grupo de cuatro tiene los conductores en las esquinas de un cuadrado. La fig. 3.16 muestra esos arreglos. La corriente no se dividirá exactamente igual entre los conductores del grupo a menos que se haga una transposición entre los conductores del grupo. Sin embargo, la diferencia no tiene importancia práctica y los métodos de DMG son exactos para los cálculos.

La reactancia reducida es otra ventaja de este tipo de línea. Incrementando el número de conductores en un grupo se reduce el efecto de corona y la reactancia. La reducción en

Fig. 3.16 Distribuciones de conductores agrupados.



la reactancia resulta del incremento de RMG del grupo. Los cálculos de RMG son, por supuesto, los mismos que para un conductor trenzado. Cada conductor de un grupo de dos conductores, por ejemplo, se considera como un hilo de un conductor de dos hilos. Si tomamos D_s para indicar el RMG de un conductor agrupado y D_s el RMG de los conductores individuales que conforman el grupo, encontramos refiriéndonos a la fig. 3.16.

Para un grupo de dos conductores trenzados

$$D_s^b = \sqrt{(D_s \times d)^2} = \sqrt{D_s \times d} \quad (3.73)$$

Para un grupo de tres conductores trenzados

$$D_s^b = \sqrt[3]{(D_s \times d \times d)^3} = \sqrt[3]{D_s \times d^2} \quad (3.74)$$

Para un grupo de cuatro conductores trenzados

$$D_s^b = \sqrt[4]{(D_s \times d \times d \times d \times 2^{1/2})^4} = 1.09 \sqrt[4]{D_s \times d^3} \quad (3.75)$$

Para el cálculo de la inductancia con la ec. (3.72), D_s^b del grupo reemplaza a D_s de un conductor simple. Para cálculos D_{eq} , la distancia desde el centro de un grupo al centro de otro grupo es suficientemente exacta para D_{ab} , D_{bc} , y D_{ca} . La obtención de la DMG entre los conductores de un grupo y los de otro debe ser indistinguible de las distancias entre centros para el espacio corriente.

EJEMPLO 3.6 Cada conductor de la línea de conductores agrupados que se muestra en la fig. 3.17 es un ACSR, 1 272 000 c mil *Pheasant*. Encuentre la reactancia inductiva en ohmios por milla y por fase.

Solución

$$D_s^b = \sqrt{0.0466 \times \frac{1}{12}} = 0.264 \text{ pies}$$

$$D_{eq} = \sqrt[3]{24 \times 24 \times 48} = \sqrt[3]{2} \times 24 = 30.2 \text{ pies}$$

$$X_L = 2\pi 60 \times 10^{-3} \times 0.7411 \log \frac{30.2}{0.264} = 0.575 \Omega/\text{mi/fase}$$

3.15 LÍNEAS TRIFÁSICAS DE CIRCUITOS PARALELOS

Dos circuitos trifásicos que están igualmente constituidos y están en paralelo tienen la misma reactancia inductiva. La reactancia inductiva del circuito equivalente simple es, sin embargo, solamente la mitad de la de uno de los circuitos considerado cuando están tan separados que la inductancia mutua sea despreciable. Si los dos circuitos están sobre el mismo apoyo, puede emplearse el método de la DMG para encontrar la inductancia por fase, considerando que todos los conductores de una fase son hilos de un mismo conductor compuesto.

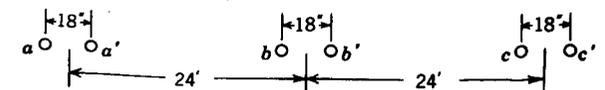


Fig. 3.17 Distancia de los conductores en una línea de conductores agrupados.

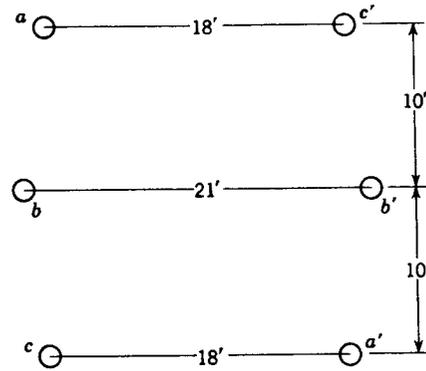


Fig. 3.18 Distribución típica de los conductores en línea trifásica de circuitos paralelos.

La fig. 3.18 muestra un arreglo típico de un circuito trifásico paralelo. Aunque la línea probablemente no sea transpuesta, suponemos que lo está a fin de simplificar los cálculos para obtener un valor práctico de la inductancia. Los conductores a y a' están en paralelo para formar la fase a . Las fases b y c son similares. Suponemos que a y a' toman las posiciones de b y b' y luego de c y c' como aquellos conductores que se rotan en un ciclo de transposición.

Para calcular D_{eq} el método de la DMG requiere que usemos D_{ab}^p , D_{bc}^p y D_{ca}^p donde el superíndice indica aquellas cantidades que son valores DMG propios y donde D_{ab}^p significa la DMG entre los conductores de la fase a y aquellos de la fase b .

La D_s de la ec. (3.72) se reemplaza por D_s^p , que es la media geométrica de los valores RMG de los dos conductores que ocupan primero las posiciones de a y a' , luego las posiciones de b y b' y finalmente las posiciones de c y c' . Siguiendo cada paso del ejemplo 3.7 tenemos el mejor medio de entender el procedimiento.

EJEMPLO 3.7 Una línea trifásica de circuito doble está compuesta por conductores de 300 000 cmil 26/7 ACSR *Ostrich* y dispuesta como se ve en la fig. 3.18. Encuentre la reactancia inductiva en ohmios por milla y por fase a 60Hz.

Solución De la tabla A.1 para *Ostrich*

$$D_s = 0.0229 \text{ pies}$$

$$\text{Distancia } a-b: \text{ Posición original} = \sqrt{10^2 + 1.5^2} = 10.1 \text{ pies}$$

$$\text{Distancia } a-b: \text{ Posición original} = \sqrt{10^2 + 19.5^2} = 21.9 \text{ pies}$$

Las DMG entre fases son:

$$D_{ab}^p = D_{bc}^p = \sqrt[4]{(10.1 \times 21.9)^2} = 14.88 \text{ pies}$$

$$D_{ca}^p = \sqrt[4]{(20 \times 18)^2} = 18.97 \text{ pies}$$

$$D_{eq} = \sqrt[3]{14.88 \times 14.88 \times 18.97} = 16.1 \text{ pies}$$

La RMG para la línea del circuito paralelo se encuentra después de obtener los valores RMG para las tres posiciones. La distancia $a-a'$ es $\sqrt{20^2 + 18^2} = 26.9$ pies. Entonces la RMG para cada fase es:

$$\text{En la posición } a-a': \sqrt{26.9 \times 0.0229} = 0.785 \text{ pies}$$

$$\text{En la posición } b-b': \sqrt{21 \times 0.0229} = 0.693 \text{ pies}$$

$$\text{En la posición } c-c': \sqrt{26.9 \times 0.0229} = 0.785 \text{ pies}$$

Por tanto

$$D_s^p = \sqrt[3]{0.785 \times 0.693 \times 0.785} = 0.753 \text{ pies}$$

$$L = 0.7411 \log \frac{16.1}{0.753} = 0.986 \text{ mH/mi/fase}$$

$$X_L = 2\pi 60 \times 0.986 \times 10^{-3} = 0.372 \Omega/\text{mi/fase}$$

3.16 RESUMEN DE LOS CÁLCULOS DE INDUCTANCIA PARA LINEAS TRIFÁSICAS

Aunque generalmente hay programas de computador que facilitan el cálculo de la inductancia de cualquier tipo de línea, el entendimiento del desarrollo con las ecuaciones usadas es ventajoso desde el punto de vista de apreciar el efecto de las variables en el diseño de una línea. Sin embargo, tablas como A.1 y A.2 efectúan los cálculos sencillamente excepto para las líneas en paralelo. La tabla A.1 también indica la resistencia.

Las ecuaciones pertinentes a la inductancia de líneas trifásicas se dan aquí por conveniencia.

$$L = 0.7411 \log \frac{D_{eq}}{D_s} \quad \text{mH/mi fase} \quad (3.76)$$

$$L = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{D_s} \quad \text{H/mi/fase} \quad (3.77)$$

La reactancia inductiva a 60 Hz se encuentra multiplicando la inductancia en henrios por $2\pi 60$:

$$X_L = 0.2794 \log \frac{D_{eq}}{D_s} \quad \Omega/\text{mi/fase} \quad (3.78)$$

or

$$X_L = 7.54 \times 10^{-5} \times \ln \frac{D_{eq}}{D_s} \quad \Omega/\text{m/fase} \quad (3.79)$$

D_{eq} y D_s deben estar en las mismas unidades, generalmente pies. Si la línea tiene un conductor por fase, D_s se encuentra directamente en las tablas. Para conductores agrupados $D_{s,b}$, tal como se definió en la sección 3.14, se substituye por D_s . Para líneas conductoras simples y agrupadas.

$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{ab} D_{bc} D_{ca}} \quad (3.80)$$

Para líneas conductoras agrupadas D_{ab} , D_{bc} y D_{ca} son distancias entre los centros de los grupos de fase a , b y c .

Para líneas con un conductor por fase es conveniente determinar X_L sumando X_a para

el conductor como se encuentra en la tabla A.1 para X_d , como se encuentra en la tabla A.2 correspondiendo a D_{eq} .

La inductancia y la reactancia inductiva de las líneas en paralelo se calculan siguiendo el procedimiento del ej. 3.7

PROBLEMAS

- 3.1 El conductor de aluminio identificado con el nombre de *Magnolia* está compuesto de 37 hilos de diámetro de 0.1606 pul. Las tablas de características para conductores de aluminio indican un área de 954 000 c mil para este conductor. ¿Son consistentes esos valores entre sí? Encuentre el área en milímetros cuadrados.
- 3.2 Determine la resistencia c.d. en ohmios por 1 000 pies del *Magnolia* a 20°C con la ec. (3.2) y la información del Prob. 3.1 compare el resultado con el valor indicado en las tablas de 0.01818 Ω por 1 000 pies; calcule la resistencia cd en ohms por milla a 50°C y compare el resultado con la resistencia a 60Hz de 0.110 Ω /mi indicado en las tablas para este conductor a 50°C. Explique cualquier diferencia.
- 3.3 Un conductor de aluminio está compuesto de 37 alambres cada uno con un diámetro de 0.312 cms. Calcule la resistencia cd en ohmios por kilómetro a 75°C.
- 3.4 Una línea monofásica de 60Hz está sostenida por una cruceta horizontal. La separación entre conductores es de 8 pies. Una línea telefónica está sujeta a una cruceta horizontal 6 pies debajo de la línea de potencia con un espacio de 2 pies entre los centros de sus conductores. Encuentre la inductancia mutua entre la línea de potencia y la telefónica y el voltaje de 60Hz por milla inducido en la línea telefónica si la corriente en la línea de potencia es de 150 A.
- 3.5 Si las líneas descritas en el Prob. 3.4 están en el mismo plano horizontal y la distancia entre los conductores más cercanos de las dos líneas es 60 pies, encuentre la inductancia mutua entre los circuitos y el voltaje por milla inducido en la línea de teléfonos para 150 A en la línea de potencia.
- 3.6 El conductor de una línea monofásica de 60Hz es de alambre sólido de aluminio en forma circular y tiene un diámetro de 0.162 pul. El espacio entre conductores es de 9 pies. Determine la inductancia de la línea en mili henrios por milla. ¿Qué parte, de la inductancia es debida a los enlaces de flujo interno? Suponga que el efecto piel se deja de lado.
- 3.7 Encuentre la RMG de un conductor de tres hilos en función del r de un alambre individual.
- 3.8 Encuentre la RMG para cada uno de los conductores especiales que se encuentran, en la fig. 3.19 en función del radio r de un alambre individual.
- 3.9 La distancia entre conductores de una línea monofásica es 10 pies. Cada conductor está compuesto de siete alambres iguales. El diámetro de cada alambre es 0.1 pul. Encuentre la inductancia de la línea en mili henrios por milla.
- 3.10 Encuentre la inductancia en milihenrios por milla y la reactancia inductiva en ohmios por milla para una línea de transmisión monofásica de 60Hz compuesta de conductores ACSR *Ostrich* separados por 15 pies.
- 3.11 Un conductor ACSR tiene una RMG de 0.0133m. Encuentre la reactancia inductiva de este conductor en ohmios por kilómetro a 1 m de separación.
- 3.12 ¿Cuál de los conductores listados en la tabla A.1 tiene una reactancia inductiva de 0,681 Ω /mi a 7 pies de separación?

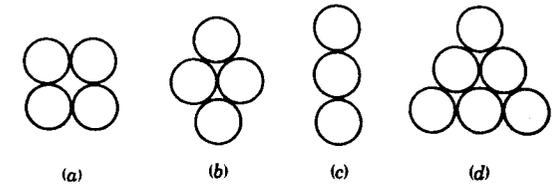


Fig. 3.19 Sección transversal de conductores especiales del prob. 3.8.

- 3.13 Los conductores de una línea trifásica están equilateralmente espaciados 12 pies. Los conductores son *Oriole*. Encuentre la inductancia por fase en milihenrios por milla.
- 3.14 Una línea trifásica está diseñada con espaciamiento equilátero de 16 pies. Se decide construir la línea con espaciamiento horizontal ($D_{13}=2D_{12}=2D_{23}$). Los conductores son transpuestos. ¿Cuál es el espaciamiento entre conductores adyacentes a fin de obtener la misma inductancia que en el diseño original?
- 3.15 Una línea de transmisión trifásica a 60Hz tiene sus conductores distribuidos en una formación triangular tal que dos de las distancias entre conductores es de 25 pies y la tercera es de 42 pies. Los conductores son ACSR *Hawk*. Determine la inductancia y la reactancia inductiva por fase y por milla.
- 3.16 Una línea trifásica de 60Hz tiene un amplio espaciamiento horizontal. Los conductores tienen una RMG de 0.0133 m con 10 m entre conductores adyacentes. Determine la reactancia inductiva por fase en ohmios por kilómetro.
- 3.17 La línea monofásica del prob. 3.4 se reemplaza por una línea trifásica sobre un soporte horizontal en la misma posición que la línea monofásica original. El espacio entre los conductores de la línea de potencia es $D_{13}=2D_{12}=2D_{23}$ y el espaciamiento equilateral equivalente de 8 pies. La línea telefónica permanece en la posición indicada en el prob. 3.4 si la corriente en la línea de potencia es 150 A; encuentre el voltaje por milla inducido en la línea telefónica. Discuta las relaciones de fase del voltaje inducido con respecto a la corriente de la línea.
- 3.18 Una línea trifásica a 60Hz está compuesta de un conductor ACSR *Falcon* por fase con un espaciamiento horizontal de 36 pies entre conductores adyacentes. Compare la reactancia inductiva en ohmios por milla y por fase de esta línea con la de una línea que usa un grupo de dos conductores ACSR 26/7 que tienen la misma sección de aluminio transversal a la del conductor simple, separado 36 pies del centro de los grupos. El espaciamiento entre los conductores en el grupo es de 16 pul.
- 3.19 Calcule la reactancia inductiva en ohms por milla de un grupo trifásico a 60Hz, que tiene tres conductores ACSR *Rail* por grupo con 18 pul entre conductores del grupo. El espaciamiento entre los centros de grupo es 30, 30 y 60 pies.
- 3.20 Seis conductores ACSR *Dove* a 60Hz constituyen una línea doble trifásica dispuesta como se muestra en la fig. 3.18. El espaciamiento vertical es de 14 pies; la distancia horizontal más larga es de 30 pies y las distancias horizontales más cortas, de 24 pies. Encuentre la inductancia por fase y por milla y la reactancia inductiva en ohms por milla.

4

CAPACITANCIA DE LAS LINEAS DE TRANSMISION

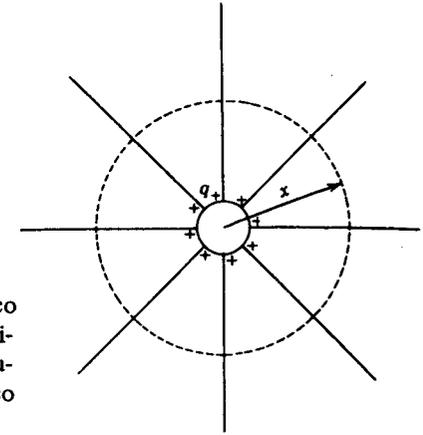


Fig. 4.1 Líneas de flujo eléctrico creadas por las cargas positivas uniformemente repartidas sobre la superficie de un conductor cilíndrico aislado.

Una tensión alterna aplicada a una línea de transmisión da lugar a que la carga de los conductores, en cualquier punto, aumente o disminuya con el aumento o disminución, respectivamente, del valor instantáneo de la tensión entre conductores, en aquel punto. El flujo de la carga es una corriente y la producida por la carga y descarga alternativa de una línea, debida a una tensión alterna, se llama *corriente de carga* de la línea. La corriente de carga fluye en una línea de transmisión, incluso, cuando está el circuito abierto. Tiene influencia sobre la caída de tensión a lo largo de la línea, así, como sobre su rendimiento y factor de potencia y la estabilidad de la red de la que forma parte la línea.

4.1 CAMPO ELECTRICO DE UN CONDUCTOR RECTO DE GRAN LONGITUD

Lo mismo que para el estudio de la inductancia es de gran interés el campo magnético, para el estudio de la capacidad, lo es el campo eléctrico. En el capítulo anterior discutimos tanto el campo eléctrico, como el magnético de una línea bifilar. Las líneas del campo eléctrico tienen su origen en las cargas positivas de un conductor y van a las negativas del otro. Todo el flujo eléctrico que nace en un conductor es igual, numéricamente, al número de culombios de su carga. La densidad de flujo eléctrico es el flujo eléctrico por metro cuadrado, midiéndose en culombios por metro cuadrado.

Si un conductor recto, cilíndrico y largo tiene una carga uniforme en toda su longitud y está aislado de otras cargas, de la forma que la carga esté repartida uniformemente en su superficie, el flujo que produce es radial. Todos los puntos equidistantes de un conductor de estas características son puntos equipotenciales con la misma densidad de flujo eléctrico. La fig. 4.1 representa un conductor aislado y con una carga repartida uniformemente. La densidad de flujo eléctrico a x metros del conductor puede calcularse, considerando una superficie concéntrica al conductor y de x m de radio. Como todos los puntos de esta superficie están equidistantes del conductor, que tiene carga uniformemente repartida, la superficie cilíndrica es una superficie equipotencial y su densidad de flujo eléctrico es igual al flujo que nace en el conductor, por metro de longitud, dividido por el área de la superficie correspondiente a 1 metro de eje longitudinal. La densidad de flujo eléctrico es

Tal como discutimos brevemente al principio del cap. 3, la admitancia paralelo de una línea de transporte se compone de conductancia y reactancia capacitiva. También dijimos que la conductancia por lo común se la desprecia debido a que su contribución a la admitancia paralelo es muy pequeña. Por esa razón, a este capítulo se le ha dado el nombre de capacitancia en vez de admitancia paralelo.

Otra razón para no tener en cuenta la conductancia es que no hay una buena forma de calcularla debido a que es muy variable. Las fugas de los aisladores, la principal fuente de conductancia, varía apreciablemente con las condiciones atmosféricas y con las propiedades conductoras del mure que se adhiere a los aisladores. La corona que produce fugas entre las líneas, también varía mucho con las condiciones atmosféricas. Afortunadamente, el efecto de conductancia no es un componente de la admitancia paralelo digno de tenerse en cuenta.

† La diferencia de potencial entre los conductores de una línea de transmisión hace que estos se carguen como las placas de un condensador cuando existe una diferencia de potencial entre ellas. La capacidad entre conductores es la carga por unidad de diferencia de potencial. La capacidad entre conductores paralelos es constante, dependiendo del tamaño y de la separación de los conductores. El efecto de la capacidad de líneas de menos de unas 50 mil es pequeño y se desprecia normalmente. En líneas más largas, de alta tensión, la capacidad llega a tener gran importancia.

$$D = \frac{q}{2\pi x} \quad \text{C/m}^2 \quad (4.1)$$

donde q es la carga en el conductor, por metro de longitud, y x la distancia en metros desde el conductor hasta el punto donde se calcula la densidad de flujo eléctrico. La intensidad del campo eléctrico o el negativo, del gradiente de potencial, es igual a la densidad de flujo eléctrico dividida por la constante dieléctrica del medio. De esta forma la intensidad del campo eléctrico es

$$\varepsilon = \frac{q}{2\pi k x} \quad \text{V/m} \quad (4.2)$$

4.2 DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS DEBIDA UNA CARGA

La diferencia de potencial, en voltios, entre los puntos es igual numéricamente al trabajo en julios por culombio necesario para mover un culombio entre los dos puntos. La intensidad del campo eléctrico es una medida de la fuerza con que una carga está solicitada en el campo. La intensidad del campo eléctrico, en voltios por metro, es la fuerza, en newton por culombio, que actúa sobre un culombio situado en el punto considerado. Entre dos puntos la integral de línea de la fuerza en newtons que actúa sobre un culombio de carga positiva, es el trabajo realizado al mover la carga desde el punto de potencial más bajo al de potencial más alto, siendo igual, numéricamente, a la diferencia de potencial entre dos puntos.

Consideremos un conductor recto, largo con una carga positiva de q culombios/metro, tal como lo indica la fig. 4.2. A las distancias D_1 y D_2 metros, respectivamente, del centro conductor, están situados los puntos P_1 y P_2 . La carga positiva que hay sobre el conductor ejerce una fuerza que repele las cargas positivas situadas en el campo. Debido a esto y teniendo en cuenta que D_2 , en este caso, es mayor que D_1 , hay que realizar un trabajo para llevar la carga positiva desde P_2 a P_1 , estando, por tanto, P_1 a mayor potencial que P_2 . La diferencia de potencial es la cantidad de trabajo realizado por culombio que se transporta. Por el contrario, al moverse un culombio de P_1 a P_2 absorbe una energía, la cual en newton metro, es la caída de tensión entre P_1 y P_2 . La diferencia de potencial entre dos puntos, es independiente del camino recorrido del uno al otro punto. La forma más sencilla para calcular la caída de tensión entre los dos puntos, es calcular la tensión que existe entre las superficies equipotenciales que pasan por P_1 y P_2 , integrando la intensidad de campo a lo largo de un camino radial entre las superficies equipotenciales. De esta forma, la caída instantánea de tensión entre P_1 y P_2 es

$$v_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \varepsilon dx = \int_{D_1}^{D_2} \frac{q}{2\pi k x} dx = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{V} \quad (4.3)$$

donde q es la carga instantánea sobre el conductor, en culombios por metro de longitud. Nótese que la caída de tensión entre dos puntos, tal como viene dada por la ec. (3.3), puede ser positiva o negativa, dependiendo de si la carga causante de la diferencia de po-

¹ En unidades SI la constante dieléctrica del vacío k_0 es 8.85×10^{-12} F/m. La constante dieléctrica relativa k_r es la relación de la constante dieléctrica del material, k y la del vacío. Así, $k_r = k/k_0$.

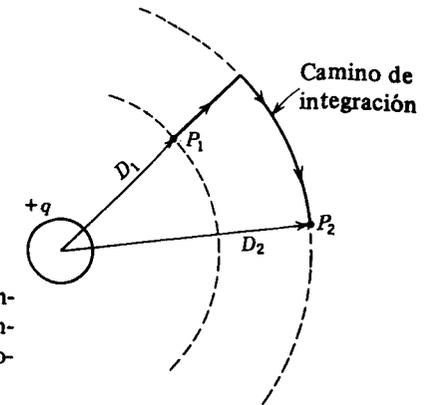


Fig. 4.2 Camino de integración entre dos puntos exteriores a un conductor cilíndrico con una carga positiva uniformemente repartida.

tencial es positiva o negativa y de si la caída en potencial es calculada del punto más cercano al conductor al más lejano o viceversa. El signo de q puede ser positivo o negativo y el término logarítmico, también, según que D sea mayor o menor que D .

4.3 CAPACITANCIA DE UNA LINEA BIFILAR

La capacidad que existe entre dos conductores de una línea bifilar se definió como la carga de los conductores por unidad de diferencia de potencial entre ellos. La ecuación de la capacidad por unidad de longitud de línea es

$$C = \frac{q}{v} \quad \text{F/m} \quad (4.4)$$

donde q es la carga de la línea, en culombios por metro, y v es la diferencia de potencial entre conductores en voltios. En adelante, por simplificar, hablaremos de capacidad, refiriéndonos a la capacidad por unidad de longitud, poniendo correctamente las dimensiones de las ecuaciones deducidas. La capacidad entre conductores puede encontrarse sustituyendo en la ec. (4.4), el valor de v , en función de q , deducido de la ec. (4.3). La tensión v_{ab} entre los dos conductores de la línea bifilar de la fig. 4.3 se halla determinando la diferencia de potencial entre ellos, calculando, en primer lugar, la caída de tensión debida a la carga q_a del conductor a y, a continuación, la debida a la carga q_b del conductor b . Por el principio de superposición, la caída de tensión del conductor a al b , debida a las cargas de ambos conductores, es la suma de las caídas de tensión producidas por cada una de las cargas independientes.

Consideremos la carga q_a del conductor a y supongamos que el conductor b no tiene carga, siendo, únicamente, una superficie equipotencial en el campo creado por la carga de a . La superficie equipotencial del conductor b y las debidas a la carga a se representan en la fig. 4.4. La distorsión de las superficies equipotenciales en las proximidades del conduc-

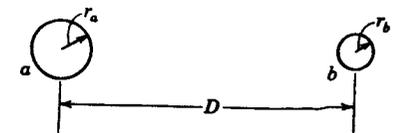


Fig. 4.3 Sección transversal de una línea de hilos paralelos.

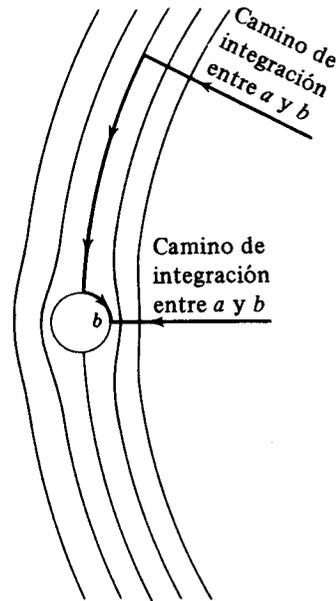


Fig. 4.4 Superficies equipotenciales en una parte del campo eléctrico producido por un conductor cargado a no representado en la figura. El conductor b hace que sufran distorsión las superficies equipotenciales. Las flechas indican posibles caminos de integración entre un punto de la superficie equipotencial b y el conductor a , cuya carga q da lugar a las superficies equipotenciales dibujadas.

to b , es debida a que éste también es una superficie equipotencial. La ec. (4.3) se dedujo suponiendo que todas las superficies equipotenciales, debidas a la carga uniforme de un conductor de sección circular, eran cilíndricas y concéntricas con el conductor. Esto es cierto en nuestro caso, salvo en la zona próxima a b . El potencial del conductor b es el de la superficie equipotencial que le corta. Por tanto, al determinar v_{ab} puede seguirse un camino que vaya del conductor a a la superficie equipotencial que corta a b , pasando por una zona en la que no están distorsionadas las superficies equipotenciales. El camino a lo largo de la superficie equipotencial hasta b no supone cambio alguno de tensión. Esta línea de integración está indicada en la fig. 4.4 junto con el camino directo. Naturalmente, la diferencia de potencial es la misma independientemente del camino a lo largo del cual se hace la integración de la intensidad del campo. Siguiendo el camino que atraviesa la zona sin distorsión, las distancias correspondientes a D_2 y D_1 , de la ec. (4.3) son D y r_a , respectivamente, al determinar la v_{ab} , debida a q_a . Al determinar la v_{ab} debida a q_b las distancias a considerar son r_b y D , respectivamente. Pasando a la notación vectorial (q_a y q_b son números complejos) tenemos

$$V_{ab} = \underbrace{\frac{q_a}{2\pi k} \ln \frac{D}{r_a}}_{\text{debida a } q_a} + \underbrace{\frac{q_b}{2\pi k} \ln \frac{r_b}{D}}_{\text{debida a } q_b} \quad \text{V} \quad (4.5)$$

y como $q_a = -q_b$ para una línea bifilar,

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi k} \left(\ln \frac{D}{r_a} - \ln \frac{r_b}{D} \right) \quad \text{V} \quad (4.6)$$

o agrupando los términos logarítmicos.

$$V_{ab} = \frac{q_a}{2\pi k} \ln \frac{D^2}{r_a r_b} \quad \text{V} \quad (4.7)$$

La capacidad entre conductores es

$$C_{ab} = \frac{q_a}{V_{ab}} = \frac{2\pi k}{\ln(D^2/r_a r_b)} \quad \text{F/m} \quad (4.8)$$

Haciendo la conversión a microfaradios por milla, cambiando la base del término logarítmico y suponiendo una constante dieléctrica relativa $k_r = 1$.

$$C_{ab} = \frac{0.0388}{\log(D^2/r_a r_b)} \quad \mu\text{F/mi} \quad (4.9)$$

Si $r_a = r_b$,

$$C_{ab} = \frac{0.0388}{2 \log(D/r)} = \frac{0.0194}{\log(D/r)} \quad \mu\text{F/mi} \quad (4.10)$$

La ec. (4.10) da la capacidad entre los conductores de una línea bifilar. A veces conviene conocer la capacidad entre uno de los conductores y un punto neutro. Por ejemplo, si la línea está alimentada por un transformador que tiene una derivación central a tierra, la diferencia de potencial entre cada uno de los conductores y tierra es la mitad de la existente entre ambos conductores; y la *capacidad respecto a tierra*, o *capacidad respecto al neutro* es la carga de un conductor por unidad de diferencia de potencial entre conductor y tierra. De esta forma, la capacidad respecto al neutro de una línea bifilar es dos veces la *capacidad entre conductores*. Si consideramos a ésta formada por dos capacidades iguales en serie, la tensión de la línea se reparte por igual entre los dos, estando el punto de unión de ambos al potencial de tierra. Así, la capacidad respecto al neutro es una de dos capacidades iguales en serie o dos veces la capacidad entre conductores.

$$C_n = C_{an} = C_{bn} = \frac{0.0388}{\log(D/r)} \quad \mu\text{F/mi} \text{ respecto al neutro} \quad (4.11)$$

El concepto de la capacidad respecto al neutro viene representado en la fig. 4.5.

La ec. (4.11) se corresponde con la (3.37), encontrada para la inductancia. Observando atentamente ambas ecuaciones, se ve una diferencia. El radio que figura en la ecuación de la capacidad es el radio exterior del conductor, mientras que el de la inductancia es la RMG.

La ec. (4.3), de la que se derivan las (4.5) y (4.11), está basada en el supuesto de distribución uniforme de la carga sobre la superficie del conductor. Si existen otras cargas,

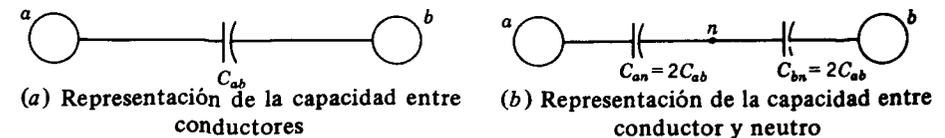


Fig. 4.5 Relación entre los conceptos de capacidad entre conductores y entre conductor y neutro.

deja de cumplirse la uniformidad supuesta, por lo que las ecuaciones deducidas de la (4.3) no son estrictamente ciertas. La falta de uniformidad en la distribución de cargas, sin embargo, puede ser totalmente olvidada en las líneas aéreas de transporte, como indica la tabla 4.1.

Al tratar de aplicar la ec. (4.11) a un cable trenzado, surge la duda del valor que se ha de poner en el denominador del argumento del logaritmo puesto que la fórmula se dedujo para un conductor macizo de sección circular. Dado que el flujo eléctrico es perpendicular a la superficie de un conductor perfecto, el campo eléctrico en la superficie de un conductor trenzado no es el mismo que el campo eléctrico en la superficie de un conductor cilíndrico. Por otra parte, la capacidad de un cable trenzado, calculada por la ec. (4.11), tomando para r el valor del radio exterior del cable, será ligeramente errónea por la diferencia entre el campo en las proximidades del cable y el campo alrededor del conductor macizo para el que se dedujo la ec. (4.11). Sin embargo, el error es pequeño, debido a que la diferencia señalada sólo afecta a la zona más inmediata al conductor. Por tanto, para calcular la capacidad de los cables trenzados se emplea el radio exterior del mismo.

Una vez encontrada la capacidad respecto al neutro, la reactancia capacitiva entre un conductor y el neutro viene dada por

$$X_c = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{4.10}{f} \times 10^6 \log \frac{D}{r} \quad \Omega \cdot \text{mi respecto al neutro} \quad (4.12)$$

Puesto que C en la Ec. (4.12) está dado en faradios por milla, las unidades apropiadas para X_c son ohm-milla. También debe notarse que la ec. (4.12) expresa la reactancia de la línea al neutro, para una milla de línea. Puesto que la reactancia capacitiva existe en paralelo a lo largo de la línea X_c en ohm-milla, debe dividirse por la longitud de la línea en millas para encontrar la reactancia capacitiva total de la línea al metro.

La tabla A.1 da el diámetro exterior de los tamaños más usados de ACSR. En la ec. (4.12), si D y r están en pies la *reactancia capacitiva* a una separación de un pie X'_a es el primer término y el *factor de separación de la reactancia capacitiva* X'_d es el segundo término cuando la ecuación se expande como sigue.

$$X_c = \frac{4.10}{f} \times 10^6 \log \frac{1}{r} + \frac{4.10}{f} \times 10^6 \log D \quad \Omega \cdot \text{mi respecto al neutro} \quad (4.13)$$

Tabla 4.1 Error que se introduce al suponer una Distribución uniforme de la carga en el cálculo de la capacidad de una línea bifilar.

Relación D/r	Porcentaje de error en la ec. (4.11)
10	0.44
20	0.084
50	0.010
100	0.002
200	0.0005

La tabla A.1 incluye los valores de X'_a para los tamaños comunes de ACSR; existen tablas similares para conductores de otros tipos y tamaños. La tabla A.3 da valores de X'_d .

EJEMPLO 4.1 Encuentre la susceptancia capacitiva por milla de una línea monofásica operando a 60 Hz. El conductor es *Partridge* y están separados por 20 pies entre centros.

Solución Para este conductor la tabla A.1 da un diámetro exterior de 0.642 pulgadas así:

$$r = \frac{0.642}{2 \times 12} = 0.0268 \text{ pies}$$

de la ec. (4.12)

$$X_c = \frac{4.10}{60} \times 10^6 \log \frac{20}{0.0268} = 0.196 \times 10^6 \Omega \cdot \text{mi respecto al neutro}$$

$$b_c = \frac{1}{X_c} = 5.10 \times 10^{-6} \text{ U/mi respecto al neutro } X_c$$

ó en términos de reactancia capacitiva a una separación de un pie y el factor de separación de la reactancia capacitiva, de las tablas A.1 y A.3

$$X'_a = 0.1074 \text{ M}\Omega \cdot \text{mi}$$

$$X'_d = 0.0889 \text{ M}\Omega \cdot \text{mi}$$

$$X_c = 0.1074 + 0.0889 = 0.1963 \text{ M}\Omega \cdot \text{mi por conductor}$$

La reactancia y la susceptancia capacitivas, línea a línea son:

$$X_c = 2 \times 0.1963 \times 10^6 = 0.3926 \times 10^6 \Omega \cdot \text{mi}$$

$$b_c = \frac{1}{X_c} = 2.55 \times 10^{-6} \text{ U/mi}$$

4.4 CAPACITANCIA DE UNA LINEA TRIFÁSICA CON DISPOSICION EQUILATERA

La fig. 4.6 representa los tres conductores idénticos de radio r de una línea trifásica con disposición equilátera. La ec. (4.5) expresa la tensión entre dos conductores debida a las cargas en cada uno, si se asume una distribución uniforme de carga. La tensión V_{ab} de la línea trifásica debida únicamente a las cargas en los conductores a y b es

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \underbrace{\left(q_a \ln \frac{D}{r} + q_b \ln \frac{r}{D} \right)}_{\text{debido a } q_a \text{ y } q_b} \quad \text{V} \quad (4.14)$$

La ec. (4.3) nos permite incluir el efecto de q_c puesto que la distribución uniforme de carga sobre el conductor es equivalente a concentrar la carga en el centro del conductor; por tanto, debida sólo a la carga q_c ,

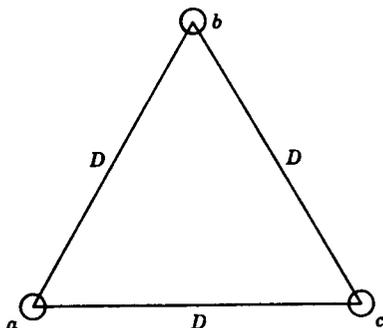


Fig. 4.6 Sección transversal de una línea trifásica con disposición equilateral.

$$V_{ab} = \frac{q_c}{2\pi k} \ln \frac{D}{r} \quad \text{V}$$

lo cual es cero puesto que q_c es equidistante de a y b . Sin embargo, para mostrar que consideramos las tres cargas, podemos escribir.

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D}{r} + q_b \ln \frac{r}{D} + q_c \ln \frac{D}{D} \right) \quad \text{V} \quad (4.15)$$

Análogamente

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D}{r} + q_b \ln \frac{D}{D} + q_c \ln \frac{r}{D} \right) \quad \text{V} \quad (4.16)$$

sumando las ecs. (4.15) y (4.16) tenemos

$$V_{ab} + V_{ac} = \frac{1}{2\pi k} \left[2q_a \ln \frac{D}{r} + (q_b + q_c) \ln \frac{r}{D} \right] \quad \text{V} \quad (4.17)$$

Derivando estas ecuaciones hemos supuesto una tierra lo suficientemente lejos para despreciar su efecto. Puesto que se suponen tensiones sinusoidales y se expresan como vectores, las cargas son sinusoidales y se expresan como vectores. Si suponemos que no existen otras cargas próximas a conductores, la suma de las cargas de los tres conductores es cero, pudiendo sustituir $-q_a$ en la ec. (4.17) por $q_b + q_c$, con lo que tenemos:

$$V_{ab} + V_{ac} = \frac{3q_a}{2\pi k} \ln \frac{D}{r} \quad \text{V} \quad (4.18)$$

La fig. 4.7 es el diagrama vectorial de tensiones. De esta figura se obtienen las siguientes relaciones entre las tensiones de línea V_{ab} y V_{ac} y la tensión V_{an} entre a y el neutro del circuito trifásico:

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} (0.866 + j0.5) \quad (4.19)$$

$$V_{ac} = -V_{ca} = \sqrt{3} V_{an} (0.866 - j0.5) \quad (4.20)$$

Sumando las ecs. (4.19) y (4.20) se obtiene:

$$V_{ab} + V_{ac} = 3V_{an} \quad (4.21)$$

Sustituyendo $3 V_{an}$ por $V_{ab} + V_{ac}$ en la ec. (4.18):

$$V_{an} = \frac{q_a}{2\pi k} \ln \frac{D}{r} \quad \text{V} \quad (4.22)$$

Como la capacidad respecto al neutro es la relación entre la carga en un conductor y la tensión entre éste y neutro,

$$C_n = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi k}{\ln (D/r)} \quad \text{F/m, respecto al neutro} \quad (4.23)$$

Para una constante dieléctrica relativa de $k_r = 1$.

$$C_n = \frac{0.0388}{\log (D/r)} \quad \mu \text{ F/mi, respecto al neutro} \quad (4.24)$$

Comparando la ec. (4.24) con la (4.11) vemos que son las mismas. Estas ecuaciones dan la capacidad, respecto al neutro, de las líneas trifásicas, con disposición equilateral y monofásica, respectivamente. En el cap. 3 ya vimos que las fórmulas de la inductancia por conductor eran las mismas para una línea monofásica que para una trifásica dispuesta en triángulo equilátero.

A la corriente asociada a la capacidad de una línea se la llama *corriente de carga*. En un circuito *monofásico*, la corriente de carga es el producto de la tensión entre conductores por la susceptancia entre ellos, o bien, vectorialmente

$$I_{crg} = j\omega C_{ab} V_{ab} \quad (4.25)$$

En una línea trifásica, la corriente de carga se encuentra multiplicando la tensión respecto al neutro por la susceptancia capacitiva respecto al neutro. Este producto da la corriente de carga por fase, y está de acuerdo con el cálculo de circuitos trifásicos equilibrados basado en una sola fase y retorno por el neutro. La corriente de carga, vectorial, en la fase a es:

$$I_{crg} = j\omega C_n V_{an} \quad \text{A/mi} \quad (4.26)$$

Puesto que la tensión rms varía a lo largo de la línea, la corriente de carga no es la misma en todas parte. Frecuentemente la tensión usada para obtener el valor de la co-

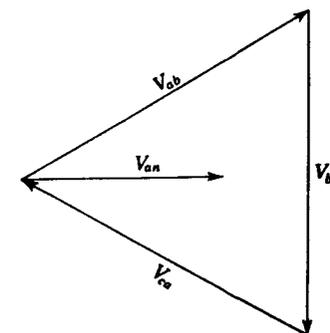


Fig. 4.7 Diagrama vectorial de las tensiones equilibradas de una línea trifásica.

riente de carga es la tensión normal para la cual se diseña la línea 220 ó 500 kV, la cual, probablemente no es la tensión real en la estación generadora o en la carga.

4.5 CAPACITANCIA DE UNA LÍNEA TRIFÁSICA CON DISPOSICIÓN ASIMÉTRICA

Cuando los conductores de una línea trifásica no están dispuestos en triángulo equilátero el cálculo de su capacidad es más difícil. Si la línea no tiene transposición, las capacidades de cada fase, respecto al neutro, son distintas. En una línea con transposición, la capacidad *media*, respecto al neutro, de una de las fases, en todo el ciclo de transposición, es igual a la de cualquier otra, puesto que todos los hilos de fase ocupan la misma posición durante idéntico recorrido a lo largo del ciclo de transposición. La asimetría de las líneas sin transposición es pequeña en las disposiciones corrientes, y por tanto, se calcula la capacidad como si tuvieran transposición.

Para la línea que se enseña en la fig. 4.8 se encuentran tres ecuaciones para V_{ab} para las tres diferentes partes del ciclo de transposición. Con la fase a en la posición 1, b en la 2 y c en la 3,

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{12}}{r} + q_b \ln \frac{r}{D_{12}} + q_c \ln \frac{D_{23}}{D_{31}} \right) \quad \text{V} \quad (4.27)$$

Con a en la posición 2, b en la 3 y c en la 1,

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{23}}{r} + q_b \ln \frac{r}{D_{23}} + q_c \ln \frac{D_{31}}{D_{12}} \right) \quad \text{V} \quad (4.28)$$

Con a en la posición 3, b en la 1 y c en la 2,

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{31}}{r} + q_b \ln \frac{r}{D_{31}} + q_c \ln \frac{D_{12}}{D_{23}} \right) \quad \text{V} \quad (4.29)$$

Las ecs. (4.27) a (4.29) son de forma semejante a las (3.65) a (3.67) que dan los enlaces de flujo de un conductor de línea con transposición. Sin embargo, en las ecuaciones para enlace de flujo notamos que la corriente en cualquier fase era la misma en cualquier parte del ciclo de transposición. En las ecs. (4.27) a (4.29), si despreciamos la caída de tensión, a lo largo de la línea, la tensión, respecto al neutro, de una fase en una de las posiciones del ciclo es igual a la tensión, respecto al neutro, de esa misma fase en cualquiera de las otras posiciones del ciclo. De aquí se deduce que la tensión entre dos conductores cualesquiera es la misma, cualquiera que sea la posición dentro del ciclo de transposición y, por tanto, que la carga de un conductor tiene que ser distinta según la posición que ocupa

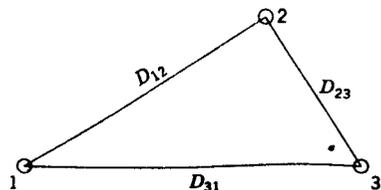


Fig. 4.8 Sección transversal de una línea trifásica con disposición asimétrica.

respecto a los otros conductores. El operar con las ecs. (4.27) a (4.29) como se hizo con las (3.65) a (3.67), no sería exacto.

La solución rigurosa de la capacidad es demasiado complicada, por lo que no es práctica, excepto para la disposición en un plano con igual separación entre conductores adyacentes. Para los conductores y colocaciones corrientes se obtiene suficiente precisión, suponiendo que la carga por unidad de longitud de un conductor es igual en todas las posiciones del ciclo de transposición. Con esta hipótesis, la tensión entre cada par de conductores es diferente a lo largo del ciclo de transposición, puede hallarse un valor medio para la tensión entre conductores y , a partir de ella, la capacidad. La tensión media se obtiene sumando las ecs. (4.27), (4.28) y (4.29) y dividiendo la suma por 3. La tensión media entre los conductores a y b , supuesta la igualdad de carga de un conductor, independiente de su posición en el ciclo, es

$$\begin{aligned} V_{ab} &= \frac{1}{6\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{12}D_{23}D_{31}}{r^3} + q_b \ln \frac{r^3}{D_{12}D_{23}D_{31}} + q_c \ln \frac{D_{12}D_{23}D_{31}}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{eq}}{r} + q_b \ln \frac{r}{D_{eq}} \right) \quad \text{V} \end{aligned} \quad (4.30)$$

donde

$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{12}D_{23}D_{31}} \quad (4.31)$$

Análogamente, la caída de tensión media entre el conductor a y el c es

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{eq}}{r} + q_c \ln \frac{r}{D_{eq}} \right) \quad \text{V} \quad (4.32)$$

Aplicando la ec. (4.21), para encontrar la tensión, respecto al neutro, tenemos

$$3V_{an} = V_{ab} + V_{ac} = \frac{1}{2\pi k} \left(2q_a \ln \frac{D_{eq}}{r} + q_b \ln \frac{r}{D_{eq}} + q_c \ln \frac{r}{D_{eq}} \right) \quad \text{V} \quad (4.33)$$

Como $q_a + q_b + q_c = 0$ en un circuito trifásico equilibrado,

$$3V_{an} = \frac{3}{2\pi k} q_a \ln \frac{D_{eq}}{r} \quad \text{V} \quad (4.34)$$

$$C_n = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi k}{\ln (D_{eq}/r)} \quad \text{F/m, respecto al neutro} \quad (4.35)$$

Para una constante dieléctrica relativa de $k = 1$,

$$C_n = \frac{0.0388}{\log (D_{eq}/r)} \quad \mu\text{F/mi, respecto al neutro} \quad (4.36)$$

La ec. (4.36) que da la capacidad, respecto al neutro, de una línea trifásica con transposición se corresponde con la (3.70) de la inductancia por fase de una línea de las mismas características que la anterior. Para encontrar la reactancia capacitiva con respecto al neutro correspondiente a la reactancia puede dividirse en componentes de reactancia capacitiva a neutro con separación de 1 pie X'_n y el factor de separación de la reactancia capacitiva X'_d , como se definió en la ec. (4.13).

EJEMPLO 4.2 Encontrar la capacidad y la reactancia capacitiva por milla de la línea del ej. 3.5. Si la línea tiene 175 mi y funciona a 220 kV, encontrar la reactancia capacitiva, con respecto al neutro, la corriente de carga por milla y la carga total en megavoltioamperios.

Solución

$$\dot{r} = \frac{1.108}{2 \times 12} = 0.0462 \text{ pies}$$

$$D_{eq} = 24.8 \text{ pies}$$

$$C_n = \frac{0.0388}{\log(24.8/0.0462)} = 0.01421 \mu\text{F/mi, respecto al neutro}$$

$$X_c = \frac{10^6}{2\pi 60 \times 0.01421} = 0.1866 \times 10^6 \Omega \cdot \text{mi, respecto al neutro}$$

ó de las tablas

$$X'_a = 0.0912 \times 10^6 \quad X'_d = 0.0953 \times 10^6$$

$$X'_c = (0.0912 + 0.0953) \times 10^6 = 0.1865 \times 10^6 \Omega \cdot \text{mi respecto al neutro}$$

Para una longitud de 175 mi

$$\text{Reactancia capacitiva} = \frac{0.1866 \times 10^6}{175} = 1\,066 \Omega \text{ respecto al neutro}$$

$$I_{chg} = 2\pi 60 \frac{220\,000}{\sqrt{3}} \times 0.01421 \times 10^{-6} = 0.680 \text{ A/mi}$$

ó $0.680 \times 175 = 119 \text{ A}$ para la línea. La potencia reactiva es $Q = \sqrt{3} \times 220 \times 119 \times 10^{-3} = 45.3 \text{ Mvar}$. Esta cantidad de potencia reactiva absorbida por la capacidad distribuida es negativa, de acuerdo con las convenciones discutidas en el cap. 2. En otras palabras, se está generando potencia reactiva positiva por la capacidad distribuida de la línea.

4.6 EFECTO DEL SUELO SOBRE LA CAPACITANCIA DE LAS LINEAS TRIFÁSICAS DE TRANSMISION

El suelo influye en la capacidad de una línea de transporte, debido a que su presencia modifica el campo eléctrico de la línea. Si suponemos que la tierra es un conductor perfecto de forma plana, horizontal, y prolongado hasta el infinito, comprobaremos que el campo eléctrico de los conductores cargados, por encima del suelo, no es el mismo que el que

habría si no existiera la superficie equipotencial de la tierra. El campo se ve influido por la existencia de la superficie del suelo. Naturalmente, el supuesto de una superficie equipotencial, plana, está limitado por la irregularidad del terreno y por el tipo de superficie de la tierra. Sin embargo, nos permite comprender la influencia de una tierra conductora sobre los cálculos de la capacidad.

Consideremos un circuito formado por un solo conductor aéreo y retorno por tierra. Al cargarse el conductor, las cargas vienen desde tierra a colocarse sobre el conductor, estableciéndose una diferencia de potencial entre el conductor y tierra. Esta tiene una carga igual a la del conductor en valor absoluto, pero de signo contrario. El flujo eléctrico entre las cargas del conductor y las de tierra, es perpendicular a la superficie equipotencial del suelo, puesto que suponemos que esta superficie es un conductor perfecto. Consideremos un conductor imaginario del mismo tamaño y forma que el real, situado exactamente debajo de éste y a una distancia de él igual a dos veces su distancia a la superficie del suelo. El conductor imaginario estaría debajo de tierra a una distancia de ella igual a la del conductor real. Si suponemos que el conductor ficticio tiene igual carga pero opuesto sentido que el real y que la tierra no existe, el plano equidistante de ambos conductores sería una superficie equipotencial y ocuparía la misma posición que la superficie equipotencial del suelo. El flujo eléctrico entre el conductor aéreo y aquella superficie equipotencial sería el mismo que el que existe entre él y tierra. Debido a esto, para los cálculos de capacidades, puede reemplazarse el suelo por un conductor ficticio cargado situado debajo de tierra y a una distancia de ella igual a la del conductor aéreo sobre la superficie del suelo. El conductor así definido tiene una carga de igual valor y opuesto sentido que la del conductor real, llamándose *imagen* del conductor.

El método de calcular la capacidad sustituyendo el suelo por la imagen del conductor aéreo puede extenderse a más de un conductor. Si colocamos un conductor imagen por cada aéreo, el flujo entre éstos y sus correspondientes imágenes es perpendicular al plano que sustituye al suelo, siendo aquél una superficie equipotencial. El flujo por encima de este plano es el mismo que existe cuando está el suelo en lugar de los conductores imagen.

Para aplicar este método al cálculo de la capacidad de una línea trifásica, nos apoyaremos en la fig. 4.9. Supondremos que la línea tiene transposición y que los conductores a , b y c tienen las cargas q_a , q_b , q_c , ocupando las posiciones, 1, 2, 3, respectivamente, en la primera parte del ciclo de transposición. El plano de tierra está representado y, debajo de él, los conductores con las cargas imagen $-q_a$, $-q_b$ y $-q_c$. Las ecuaciones que dan la tensión entre los conductores a y b , en las tres posiciones del ciclo de transposición, pueden escribirse, aplicándolas al sistema formado por los tres conductores y sus respectivas imágenes. Con el conductor a en la posición 1, b en la 2 y c en la 3, tenemos:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left[q_a \left(\ln \frac{D_{12}}{r} - \ln \frac{H_{12}}{H_1} \right) + q_b \left(\ln \frac{r}{D_{12}} - \ln \frac{H_2}{H_{12}} \right) + q_c \left(\ln \frac{D_{23}}{D_{31}} - \ln \frac{H_{23}}{H_{31}} \right) \right] \quad (4.37)$$

Ecuaciones análogas de V_{ab} pueden encontrarse para las otras posiciones del ciclo de transposición. Aceptando el supuesto casi correcto de la constancia de la carga por unidad de longitud de cada conductor a lo largo del ciclo de transposición, podemos obtener un valor medio para el vector V_{ab} . La ecuación para el valor medio de V_{ac} se encuentra de igual forma, obteniéndose $3V_n$ sumando los valores medios de V_{ab} y V_{ac} . Sabiendo que la suma de las cargas es cero, tenemos

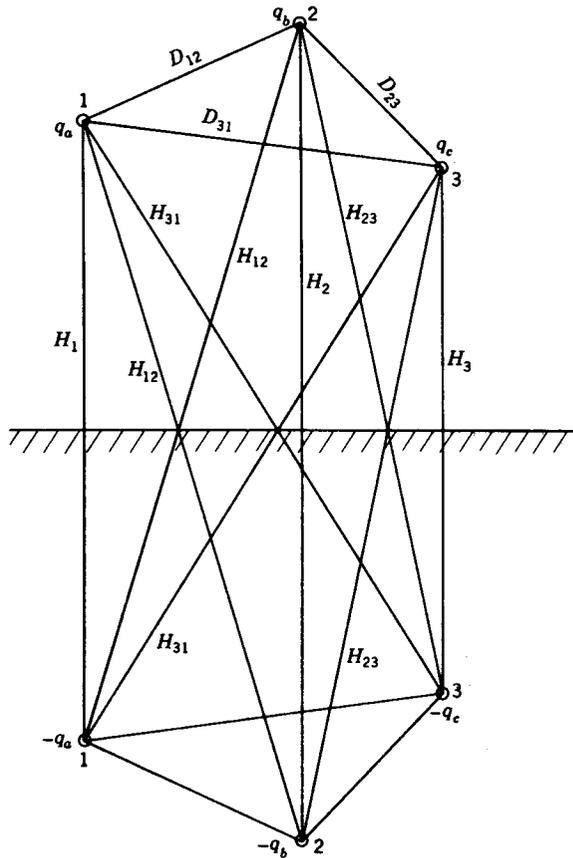


Fig. 4.9 Línea trifásica y su imagen.

$$C_n = \frac{0.0388}{\log(D_{eq}/r) - \log(\sqrt[3]{H_{12}H_{23}H_{31}}/\sqrt[3]{H_1H_2H_3})} \mu\text{F/mi, respecto al neutro} \quad (4.38)$$

Comparando las ecs. (4.36) y (4.38), se ve que el efecto del suelo es incrementar la capacidad de la línea, puesto que al denominador de la ec. (4.36) hay que restarle el término $\log(\sqrt[3]{H_{12}H_{23}H_{31}}/\sqrt[3]{H_1H_2H_3})$. Si la distancia de los conductores al suelo es muy grande comparada con la que existe entre ellos, las distancias en diagonal, que figuran en el numerador del término que tiene en cuenta la presencia del suelo, son casi iguales a las que figuran en el denominador, por lo que dicho término es muy pequeño. Este caso es el corriente y el efecto del suelo se desprecia para las líneas trifásicas, excepto en aquellos cálculos, por componentes simétricas, en que la suma de las tres corrientes de líneas no es igual a cero.

4.7 CONDUCTORES AGRUPADOS

Una línea de conductores agrupados se muestra en la fig. 4.10; podemos escribir una ecuación

para la tensión del conductor *a* al conductor *b*, de la misma forma en que se derivó la ec. (4.27), teniendo en cuenta que ahora debemos considerar las cargas en todos los seis conductores. Los conductores de cualquier agrupación están en paralelo y puesto que la separación entre agrupaciones es normalmente más de 15 veces la separación entre los conductores del grupo. También podemos usar D_{12} en lugar de las distancias $D_{12} + d$ y $D_{12} - d$, puesto que D_{12} es mucho más grande que d y hacer otras sustituciones similares a las distancias de separación de los grupos, en lugar de usar las expresiones exactas que deberían emplearse para el cálculo de V_{ab} . La diferencia debida a estas aproximaciones no puede detectarse en el resultado final, para las separaciones normalmente usadas aun cuando los cálculos sean llevados a cinco o seis cifras significativas.

Si la carga en la fase *a* es q_a , los conductores *a* y *a'*, tienen una carga de $q_a/2$, (*a'*) la misma división de carga se supone para las fases *b* y *c*. Por tanto,

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{q_a}{2} \left(\underbrace{\ln \frac{D_{12}}{r}}_a + \underbrace{\ln \frac{D_{12}}{d}}_{a'} \right) + \frac{q_b}{2} \left(\underbrace{\ln \frac{r}{D_{12}}}_b + \underbrace{\ln \frac{d}{D_{12}}}_{b'} \right) + \frac{q_c}{2} \left(\underbrace{\ln \frac{D_{23}}{D_{31}}}_c + \underbrace{\ln \frac{D_{23}}{D_{31}}}_{c'} \right) \right] \quad (4.39)$$

Las letras bajo cada término logarítmico indican el conductor cuya carga es tomada en cuenta para tal término. Simplificando, tenemos

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi k} \left(q_a \ln \frac{D_{12}}{\sqrt{rd}} + q_b \ln \frac{\sqrt{rd}}{D_{12}} + q_c \ln \frac{D_{23}}{D_{31}} \right) \quad (4.40)$$

La ec. (4.40) es igual a la ec. (4.27), excepto que \sqrt{rd} ha reemplazado a r . Por tanto, si consideramos una línea con transposición, encontramos

$$C_n = \frac{0.0388}{\log(D_{eq}/\sqrt{rd})} \mu\text{F/mi respecto al neutro} \quad (4.41)$$

La \sqrt{rd} es la misma D_s^b para un grupo de dos conductores, excepto que r se reemplaza por D_s . Esto nos conduce a la importante conclusión de que el método DMG modificado se aplica al cálculo de la capacidad de líneas trifásicas de conductores agrupados, teniendo dos conductores por grupo. La modificación es que usamos el radio exterior en lugar del RMG del conductor sencillo.

Es lógico concluir que el método DMG modificado se aplica a otras configuraciones de agrupaciones. Si utilizamos la anotación D_{SC}^b para el RMG modificado en el cálculo de la capacidad, para distinguirlo del D_{bs} empleado en el cálculo de la inductancia, tenemos

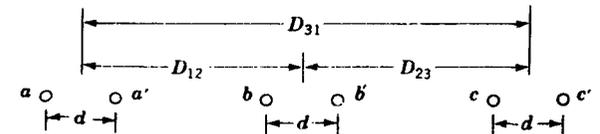


Fig. 4.10 Sección transversal de una línea trifásica de conductores agrupados.

$$C_n = \frac{0.0388}{\log(D_{eq}/D_{sc}^b)} \quad \mu\text{F/mi respecto al neutro} \quad (4.42)$$

Entonces para el grupo de dos hilos

$$D_{sc}^b = \sqrt[4]{(r \times d)^2} = \sqrt{rd} \quad (4.43)$$

para el grupo de tres hilos

$$D_{sc}^b = \sqrt[3]{(r \times d \times d)^2} = \sqrt[3]{rd^2} \quad (4.44)$$

y para el grupo de cuatro hilos

$$D_{sc}^b = \sqrt[16]{(r \times d \times d \times d \times 2^{1/2})^4} = 1.09 \sqrt[4]{rd^3} \quad (4.45)$$

EJEMPLO 4.3 Encuentre la capacidad por milla respecto al neutro y la reactancia capacitiva en ohmios-milla por fase de la línea descrita en el ej. 3.6.

Solución Del diámetro dado en la tabla A.1

$$r = \frac{1.382}{2 \times 12} = 0.0576 \text{ pies}$$

$$D_{sc}^b = \sqrt{0.0576 \times 18/12} = 0.294 \text{ pies}$$

$$D_{eq} = \sqrt[3]{24 \times 24 \times 48} = 30.2 \text{ pies}$$

$$C_n = \frac{0.0388}{\log(30.2/0.294)} = 0.0193 \mu\text{F/mi respecto al neutro}$$

$$X_c = \frac{10^6}{2\pi 60 \times 0.0193} = 0.1375 \times 10^6 \Omega \cdot \text{mi por fase respecto al neutro.}$$

4.8 LINEAS TRIFÁSICAS DE CIRCUITOS PARALELOS

Hemos notado a través de nuestro estudio la semejanza de las ecuaciones para la inductancia y la capacitancia. Se encontró el método DMG modificado para aplicarse en el cálculo de la capacidad de líneas de conductores agrupados. Pudimos mostrar que este método es igualmente válido para líneas trifásicas con transposición y separación equilátera (conductores en los vértices de un hexágono) y para separación de plano vertical (los conductores de las tres fases de cada circuito permanecen en el mismo plano vertical). Es razonable suponer que el método DMG modificado se puede usar en arreglos intermedios entre separación equilátera y de plano vertical. El método se usa generalmente aun sin hacer transformaciones. Un ejemplo es suficiente para ilustrarlo.

EJEMPLO 4.4 Encuentre la susceptancia capacitiva con respecto al neutro por milla por fase de la línea de doble circuito ilustrada en el eje. 3.7.

Solución Del ejemplo 3.7, $D_{eq} = 16.1$ pies. El cálculo de D_{sc}^b es el mismo que D_{sc}^p

en el ej. 3.7 excepto que se usa el radio exterior del conductor *Ostrich* en lugar del RMG. El radio exterior del ACSR *Ostrich* 26/17 es de 0.680 pulgadas.

$$r = \frac{0.680}{2 \times 12} = 0.0283 \text{ pies}$$

$$D_{sc}^p = (\sqrt{26.9 \times 0.0283} \sqrt{21 \times 0.0283} \sqrt{26.9 \times 0.0283})^{1/3} \\ = \sqrt{0.0283} (26.9 \times 21 \times 26.9)^{1/6} = 0.837 \text{ pies}$$

$$C_n = \frac{0.0388}{\log(16.1/0.837)} = 0.0302 \mu\text{F/mi por fase respecto al neutro}$$

$$b_c = 2\pi f C = 2\pi 60 \times 0.0302 = 11.39 \mu\text{S/mi por fase respecto al neutro.}$$

4.9 RESUMEN

La semejanza entre los cálculos de la inductancia y la capacitancia se ha enfatizado a través de nuestro estudio. Se recomiendan los programas de computador para la determinación de gran número de capacidades, como en el caso de los cálculos de la inductancia. A excepción de las líneas de circuitos paralelos, las tablas como la A.1 y la A.3 simplifican los cálculos.

Las ecuaciones apropiadas para la capacidad respecto al neutro de circuitos trifásicos simples son.

$$C = \frac{0.0388}{\log(D_{eq}/D_{sc}^b)} \quad \mu\text{F/mi respecto al neutro}$$

o

$$C = \frac{2\pi k}{\ln(D_{eq}/D_{sc}^b)} \quad \text{F/m respecto al neutro}$$

Cuando k para el espacio libre es 8.85×10^{-12} F/m y D_{sc}^b es el radio exterior del conductor de una línea que consiste de un sólo conductor por fase. La reactancia capacitiva en ohmios milla es $1/2\pi f C$, donde C está en faradios por milla, así a 60 Hz.

$$X_c = 0.0683 \times 10^6 \log \frac{D_{eq}}{D_{sc}^b} \quad \Omega \cdot \text{mi respecto al neutro}$$

o

$$X_c = 4.77 \times 10^7 \ln \frac{D_{eq}}{D_{sc}^b} \quad \Omega \cdot \text{m respecto al neutro}$$

D_{eq} y D_{sc}^b deben estar en las mismas unidades, generalmente pies. Para conductores agrupados D_{sc}^b , como se definió en la sec. 4.7 se sustituye por D_{sc} . Tanto para líneas de conductores simples como agrupados,

$$D_{eq} = \sqrt[3]{D_{ab} D_{bc} D_{ca}}$$

Para líneas de conductores agrupados D_{ab} , D_{bc} y D_{ca} , son las distancias entre centros de los grupos de las fases a , b y c .

Para líneas con conductor por fase es conveniente determinar X_c sumando X'_a para el conductor según la tabla A.1 a X'_d correspondiente a D_{eq} según la tabla A.3.

La capacidad y la reactancia capacitiva de líneas de circuitos paralelos se encuentran siguiendo el procedimiento del ej. 4.4.

PROBLEMAS

- 4.1 Una línea de transporte trifásica, está dispuesta en un plano horizontal, con una separación entre conductores adyacentes de 6 pies. En un cierto instante, la carga en uno de los conductores extremos, es de 0.1 cm/mi, siendo la de los otros dos - 0:05 mC/mi. El radio de cada conductor, es 0.1 pul. Despreciando el efecto del suelo, encontrar la tensión en el instante considerado entre los dos conductores igualmente cargados.
- 4.2 A 60 Hz la reactancia capacitiva, respecto al neutro, de un conductor macizo perteneciente a una línea trifásica con distancia equivalente a la disposición equilátera de 4 pies, es de 186 k Ω /mi. ¿Qué reactancia daría una tabla de reactancias reactivas del conductor a 1 pie de separación para 25 Hz? ¿Cuál sería la sección del conductor en circular mils?
- 4.3 Deducir la fórmula de la capacidad por milla de una línea monofásica, teniendo en cuenta el efecto del suelo. Empléese la misma nomenclatura empleada en la deducción de la ecuación de la capacidad de una línea trifásica, en la que el efecto del suelo se representaba por las cargas imagen.
- 4.4 Calcular la capacidad por milla, respecto al neutro, de una línea monofásica, formada por dos conductores distanciados 10 pies entre sí y 25 pies del suelo. Comparar el valor encontrado con el obtenido por medio de la ec. (4.11) con la hallada en el prob. 4.3.
- 4.5 Una línea trifásica de 60 Hz, tiene sus conductores en formación triangular, de tal forma que dos de las distancias entre conductores son 25 pies y la tercera es 42 pies. Los conductores son *Hawk* ACSR. Determinar la capacidad con respecto al neutro, en microfaradios por milla y la reactancia capacitiva respecto al neutro en ohmios-milla. Si la línea tiene 150 millas de longitud, encuentre la capacidad con respecto al neutro y la reactancia capacitiva de la línea.
- 4.6 Una línea trifásica a 60 Hz está dispuesta en un plano horizontal. Los conductores tienen un diámetro exterior de 3.28 cm con 10 m entre conductores. Determinar la reactancia capacitiva con respecto al neutro en ohmios-metro y la reactancia capacitiva de la línea en ohmios si tiene 100 millas de longitud.
- 4.7 Una línea trifásica está compuesta de un conductor *Falcon* ACSR por fase, y dispuesta en un plano horizontal con 36 pies de separación entre conductores adyacentes. Comparar la reactancia capacitiva en ohmios-milla por fase con la de una línea que tiene un grupo de dos conductores ACSR 26/7, que tienen la misma sección transversal total de aluminio que la línea de conductor sencillo y la misma separación medida entre grupos. La separación entre los conductores de un grupo es de 16 pulgadas.
- 4.8 Calcular la reactancia capacitiva en ohmios-milla de una línea trifásica de 60 Hz agrupada que tiene tres conductores *Rail* ACSR por grupo con 18 pies de separación

entre los conductores del grupo. La separación entre los centros de los grupos es 30, 30 y 60 pies.

- 4.9 Una línea trifásica de doble circuito a 60 Hz esta constituida por conductores *Dove* ACSR como lo muestra la fig. 3.18, con la salvedad de que la separación vertical es de 14 pies; la distancia horizontal más larga es de 30 pies y la más corta de 24 pies. Encontrar la reactancia capacitiva respecto al neutro en ohmios-milla y la corriente de carga por milla, fase y conductor a 138 kV.

5

RELACIONES ENTRE LA TENSION Y LA CORRIENTE DE UNA LINEA DE TRANSMISION

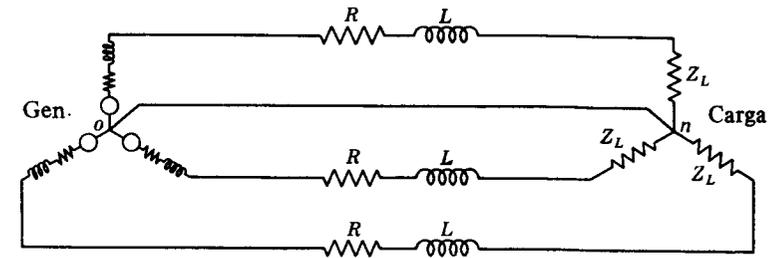


Fig. 5.1 El generador alimenta una carga equilibrada en Y a través de una línea de transporte.

Un problema interesante a tener en cuenta al proyectar una línea de transporte y en su funcionamiento es el mantenimiento de la tensión, dentro de los límites especificados, en varios puntos del sistema. En este capítulo deduciremos fórmulas, con las cuales se pueden calcular, la tensión, la corriente y el factor de potencia en cualquier punto de una línea de transporte, conocidos dichos valores en un punto, comúnmente en un extremo de la línea.

El propósito de este capítulo no es únicamente desarrollar las ecuaciones pertinentes; también da una oportunidad para comprender los parámetros de la línea sobre tensiones en la barra y el flujo de potencia. En esta forma podemos ver la importancia del diseño de la línea y así entender mejor los estudios que se hacen en capítulos posteriores.

En el sistema moderno de redes, datos provenientes de todas las partes del sistema se llevan continuamente a los computadores con el propósito de control y para información. Los estudios de cargas realizados por un computador dan respuestas inmediatas a las preguntas pertinentes al efecto de cambio de líneas dentro y fuera del sistema o a cambios en los parámetros de la línea.

5.1 REPRESENTACION DE LAS LINEAS

Las líneas de transporte funcionan normalmente con cargas trifásicas equilibradas. Aunque no estén dispuestas equilateralmente, e incluso sin transposición, la influencia de la

asimetría es pequeña y se consideran equilibradas las fases. La fig. 5.1, representa un generador conectado en Y, alimentando una carga equilibrada con el mismo tipo de conexión, a través de una línea de transporte. Esta figura es análoga a la fig. 2.13, que estudiamos al revisar circuitos trifásicos. Sin embargo en la fig. 5.1 el generador conectado en Y suministra la carga a través de una línea de transmisión. El circuito equivalente de dicha línea ha sido simplificado, poniendo, solamente, la resistencia R y la reactancia inductiva L en serie que se representan como parámetros agrupados o *concentrados*, en lugar de uniformemente repartidos a lo largo de la línea. No existe diferencia, cuando se trata de medidas en los extremos de la línea, entre considerar los parámetros concentrados o uniformemente repartidos, siempre que se desprecie, la admitancia en paralelo, puesto que la corriente por la línea es la misma en ambos casos. El generador se representa por una impedancia conectada en serie con la f.e.m., generada en cada fase.

De los cuatro parámetros de una línea de transmisión analizados en los dos capítulos anteriores, se le ha dado la mayor atención a la inductancia y la capacitancia. La resistencia ciertamente es de igual importancia pero requiere menos análisis puesto que no es función de la disposición del conductor. Las ecuaciones desarrolladas en el cap. 3 expresan la inductancia para una de las fases de una línea trifásica equilibrada, y las ecuaciones desarrolladas en el cap. 4 expresan la capacitancia de línea a neutro. Así, estos parámetros pueden aplicarse a la solución de una línea trifásica con un neutro de impedancia cero como se muestra en la fig. 5.2 con la mitad de la capacitancia a neutro agrupada en cada extremo del circuito equivalente. La conductancia, en paralelo, como se mencionó en el cap. 4 se desprecia casi siempre cuando se trata de calcular la tensión y la intensidad de una línea de transporte.

La clasificación de éstas, según su longitud, está basada en las aproximaciones admitidas al operar con los parámetros de la línea. La resistencia, inductancia y capacidad están uniformemente repartidas a lo largo de la línea y en el cálculo exacto de líneas largas hay que considerarlo así. En las líneas de longitud media se considera, sin embargo, que la mitad de la capacidad está agrupada en cada extremo de la línea, sin que por ello se cometa un error apreciable al calcular la tensión y la intensidad en los terminales. Por último, en las líneas cortas es tan pequeña la susceptancia capacitiva total, que puede despreciarse. En lo que se refiere a los cálculos en que interviene la capacidad, se consideran cortas las líneas aéreas, a 60 Hz, de menos de 50 mi. Líneas de longitud media son aquellas comprendidas entre 50 y 150 mi, aproximadamente. En el cálculo de las líneas de más de

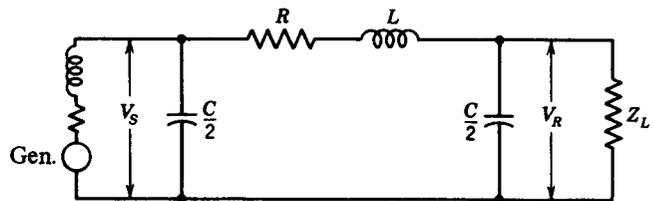


Fig. 5.2 Equivalente monofásico de un generador, carga y línea de transmisión con parámetros concentrados R , L y C .

150 mi, es preciso considerar las constantes distribuidas si se necesita gran precisión, aunque, en ciertos casos, puede aplicarse a líneas de hasta 200 mi.

Para distinguir la impedancia total de la línea de la impedancia por unidad de longitud, emplearemos la siguiente notación:

- z = impedancia en serie por unidad de longitud y fase
- y = admitancia en paralelo por unidad de longitud, entre fase y neutro
- l = longitud de la línea
- $Z = zl$ = impedancia total en serie, por fase
- $Y = yl$ = admitancia total en paralelo, entre fase y neutro

5.2 LINEAS DE TRANSMISION CORTAS

El circuito equivalente de una línea corta de transporte está representado en la fig. 5.3, donde I_S e I_R son, respectivamente, las corrientes en los extremos transmisor y receptor y V_S y V_R las tensiones entre fase y neutro en esos mismos puntos.

El circuito se resuelve como un sencillo circuito serie de corriente alterna. Como no hay ramales en paralelo, la corriente es la misma en ambos extremos de la línea, por lo que

$$I_S = I_R \tag{5.1}$$

La tensión en el extremo distribuidor es

$$V_S = V_R + I_R Z \tag{5.2}$$

donde Z es zl , la impedancia total de la línea.

El efecto de la variación del factor de potencia de la carga sobre el *factor de regulación de la tensión* de una línea se comprende mejor en las líneas cortas, por lo que se tra-

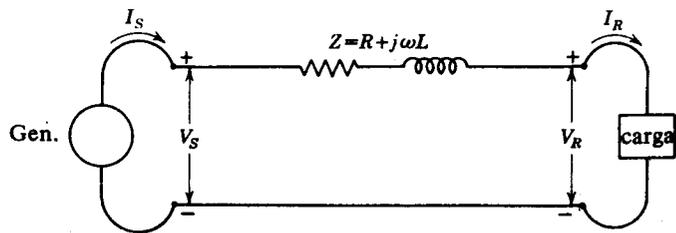


Fig. 5.3 Circuito equivalente de una línea corta de transporte.

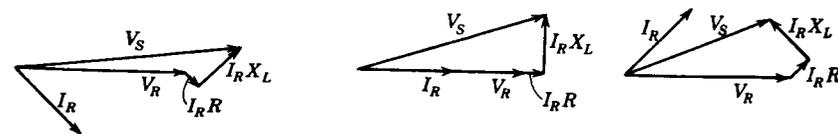
tará en ellas. El factor de regulación de la tensión de una línea de transporte es la elevación de tensión en el extremo receptor, expresado en por ciento de la tensión a plena carga, cuando ésta, a un determinado factor de potencia especificado, desaparece manteniendo constante la tensión en el extremo transmisor. La expresión matemática es

$$\text{por ciento de regulación} = \frac{|V_{R,NL}| - |V_{R,FL}|}{|V_{R,FL}|} \times 100 \tag{5.3}$$

donde $|V_{R,NL}|$ es el valor absoluto de la tensión en el *extremo receptor* en vacío $|V_{R,FL}|$ es el valor absoluto de la tensión en el *extremo receptor* a plena carga. Después de eliminar la carga de una línea de transporte, como la representada en la fig. 5.3, la tensión en el extremo receptor es igual a la del extremo transmisor. En la fig. 5.3, con la carga conectada, la tensión en el lado receptor se representa por V_R , siendo $|V_R| = |V_{R,FL}|$. La tensión en el extremo transmisor es V_S , siendo $|V_S| = |V_{R,NL}|$. Los diagramas vectoriales de la fig. 5.4 corresponden a iguales amplitudes de tensión y corriente en el extremo receptor, e indican que, para mantener una tensión dada en el extremo receptor, es preciso una ^{potencia} corriente mayor en el extremo transmisor cuando la corriente en aquél está retrasada, respecto a la tensión, que cuando está en fase con ella. Para mantener en el extremo receptor la tensión dada, es preciso, cuando la tensión está retrasada, respecto a la corriente en el extremo receptor, una pequeña tensión permanente en el extremo transmisor. El factor de regulación es máximo con los factores de potencia en retardo y mínimo o incluso, negativo con los factores de potencia en adelanto. La reactancia inductiva de una línea de transporte es mayor que la resistencia y el principio de regulación representado en la fig. 5.4 es cierto, sea cualquiera la carga suministrada a través de un circuito predominante inductivo. Las magnitudes de caída de voltaje $I_R R$, $I_R X_L$ para una línea corta se han exagerado con respecto a V_R en dibujos de los diagramas vectoriales a fin de ilustrar el punto con mayor claridad. La relación entre el factor de potencia y el de regulación, para líneas largas, es análoga a la establecida para las cortas, pero no se ve tan fácilmente.

5.3 LINEAS DE LONGITUD MEDIA

La admitancia, generalmente capacidad pura, se incluye en los cálculos de las líneas de longitud media. Si la admitancia total está dividida en dos partes iguales, colocadas en los dos extremos de la línea el circuito se llama nominal π . Para derivar las ecuaciones nos referimos a la fig. 5.5. La ecuación V_S , en este caso, puede deducirse, teniendo en cuenta que la corriente en la capacidad del extremo receptor es $V_R Y/2$ y que la del ramal serie es $I_R + V_R Y/2$, con lo que



(a) Factor de potencia de la carga = 70% en retardo (b) Factor de potencia de la carga = 100% (c) Factor de potencia de la carga = 70% en adelanto

Fig. 5.4 Diagramas vectoriales de una línea corta de transporte. Todos ellos para los mismos valores de V_R e I_R .

$$V_S = \left(V_R \frac{Y}{2} + I_R \right) Z + V_R \quad (5.4)$$

$$V_S = \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) V_R + Z I_R \quad (5.5)$$

Para determinar I_S , notemos que la corriente en la capacidad en paralelo del extremo transmisor es $V_S Y/2$, la cual sumada a la del ramal serie nos da

$$I_S = V_S \frac{Y}{2} + V_R \frac{Y}{2} + I_R \quad (5.6)$$

y sustituyendo en la ec. (5.6), el valor de V_S , dado por la ec. (5.5), tenemos

$$I_S = V_R Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right) + \left(\frac{ZY}{2} + 1 \right) I_R \quad (5.7)$$

Para el circuito en T pueden deducirse las ecuaciones correspondientes. En el cual toda la admitancia pura se supone concentrada en el punto medio del circuito que representa la línea: y en series divididas igualmente las impedancias entre las dos ramas, como se muestra en la fig. 5.6. Comparando las ecs. (5.5) y (5.7), con las ecs. (5.1) y (5.2), vemos el efecto de incluir la admitancia Y en los cálculos. Si la línea es corta, la admitancia total Y es pequeña y, cuando disminuye ésta, las ecuaciones de las líneas de longitud media se aproximan a las de las cortas.

Los circuitos en T y en π no representan la línea real, por lo que en los casos de duda sobre la longitud de aquella, lo mejor es emplear el circuito equivalente estudiado en la sec. 5.7 que representa exactamente la línea. Ambos circuitos, en T y en π , no son equivalentes como puede verse por la aplicación de las ecuaciones de transformación $Y - \Delta$ a cada uno de ellos. Los circuitos T y π se aproximan más entre sí y al circuito equivalente de la línea cuando ésta se divide en dos o más secciones, cada una representada por sus circuitos nominales en T o en π . Las ecuaciones (5.5) y (5.7) pueden expresarse en la forma general

$$V_S = A V_R + B I_R \quad (5.8)$$

$$I_S = C V_R + D I_R \quad (5.9)$$

donde

$$A = D = \frac{ZY}{2} + 1 \quad (5.10)$$

$$B = Z \quad C = Y \left(1 + \frac{ZY}{4} \right)$$

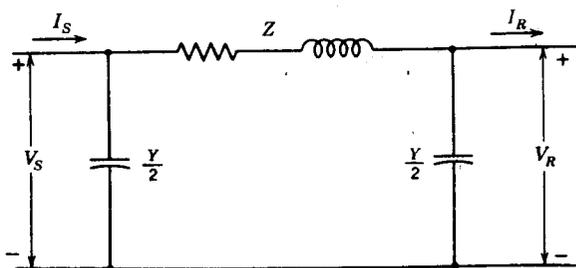


Fig. 5.5 Circuito nominal en II de una línea de transmisión de longitud media.

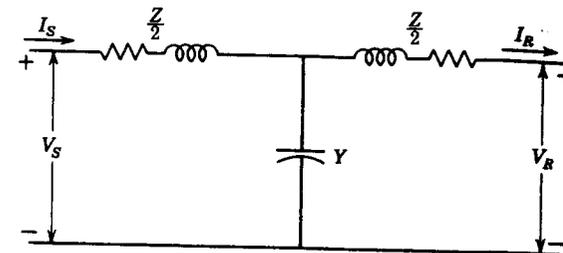


Fig. 5.6 Circuito nominal en T de una línea de transmisión de longitud media.

Estas constantes $ABCD$ algunas veces se conocen como las constantes generalizadas de circuitos de la línea de transmisión. En general, son números complejos. A y D son sin dimensiones e iguales entre sí, si la línea es la misma cuando se ve desde cualquier terminal. Las dimensiones de B y C están en ohmios y mhos, respectivamente. Las constantes se aplican a circuitos lineales, pasivos y bilaterales de cuatro terminales; tienen dos pares de terminales. En una línea de transmisión nos referimos a los terminales de transmisión donde la potencia entra a la red y los terminales de recepción donde la potencia abandona, la red. En el apéndice la tabla A.6 muestra las constantes $ABCD$ para distintas redes.

Las constantes $ABCD$ se analizan en textos de teoría de circuitos, los cuales incluyen la demostración de que

$$AD - BC = 1 \quad (5.11)$$

Podemos fácilmente verificar esto para valores de A , B , C y D de líneas de longitud media. Estas relaciones son útiles para encontrar V_R, I_R si V_S y I_S son conocidas.

Resolviendo las ecs. (5.8) y (5.9) para V_R, I_R , tenemos:

$$V_R = \frac{D V_S - B I_S}{A D - B C} \quad (5.12)$$

y

$$I_R = \frac{A I_S - C V_S}{A D - B C} \quad (5.13)$$

De donde aceptando la relación $AD - BC = 1$,

$$V_R = D V_S - B I_S \quad (5.14)$$

$$I_R = -C V_S + A I_S \quad (5.15)$$

Un significado físico se asigna fácilmente a las constantes. Dando un valor de cero a I_R en la ec. (5.8) vemos que A es la relación V_S/V_R sin carga. De modo parecido, B es la relación V_S/I_R cuando el terminal del receptor está en corto circuito. La constante A es útil en el cálculo de la regulación. $V_{R,FL}$ la tensión en el terminal receptor a plena carga para una tensión V_S del terminal de transmisión la ec. (5.3) se reduce a:

$$\text{Por ciento de regulación} = \frac{|V_S| |A| - |V_{R,FL}|}{|V_{R,FL}|} \times 100 \quad (5.16)$$

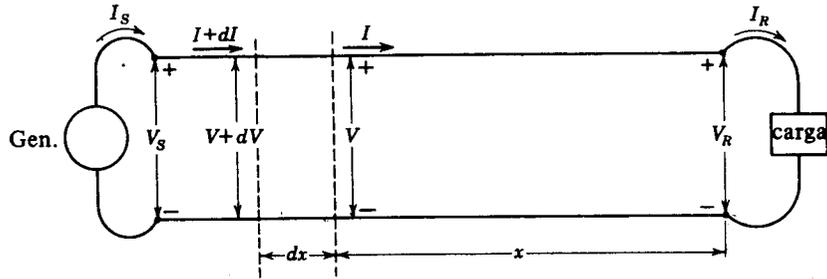


Fig. 5.7 Diagrama esquemático de una línea de transporte con una sola fase y retorno por el neutro. Se indica la nomenclatura empleada para la longitud elemental y total de la línea.

5.4 LÍNEAS DE TRANSMISIÓN LARGAS: SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

La solución exacta de cualquier línea de transporte y la única que proporciona gran precisión en el cálculo de líneas a 60 Hz, de más de 150 mi de longitud, exige considerar que los parámetros de la línea no están concentrados, sino distribuidos uniformemente a todo lo largo de aquella.

La fig. 5.7 representa una fase y neutro de una línea trifásica. No se utilizan los parámetros concentrados porque se trata de calcular la línea con la impedancia y la admitancia uniformemente repartidas. El mismo diagrama representa también una línea monofásica si la impedancia serie de la misma es la del circuito monofásico, en lugar de la impedancia por fase de la trifásica y si la admitancia en paralelo es la de aquella línea en lugar de la admitancia en paralelo, respecto al neutro de la trifásica.

Consideremos un elemento muy pequeño de la línea y calculemos las diferencias de tensión y corriente entre los dos extremos de la línea. Sea x la distancia del elemento considerado, a partir del extremo receptor y dx la longitud del elemento. La impedancia del elemento diferencial de la línea, será $z dx$ e $y dx$ su admitancia. Sea V la tensión, respecto al neutro, del extremo del elemento diferencial de línea más próximo al extremo receptor, siendo V la expresión compleja de la tensión eficaz, cuya amplitud y fase varía con la distancia a lo largo de la línea. La tensión en el extremo del elemento de línea, más próximo al generador, será $V + dV$. El aumento de la tensión a lo largo del elemento diferencial de líneas, en sentido de las x crecientes, es dV , que es la diferencia de las tensiones en los extremos del elemento. El aumento de la tensión en sentido de las x crecientes, es también, el producto de la corriente que fluye del elemento, en sentido de las x crecientes, por la impedancia de aquel, o sea, $Iz dx$. Así, tenemos

$$dV = Iz dx$$

$$\frac{dV}{dx} = Iz \tag{5.17}$$

Análogamente, la corriente que sale del elemento hacia la carga es I . La amplitud y la fase de la corriente I varían, con la distancia, a lo largo de la línea a causa de la admitancia repar-

tida en toda su longitud. La corriente que entra en el elemento procedente del generador, es $I + dI$. Esta se diferencia de la corriente que sale en dirección de la carga en la cantidad dI . Esta diferencia es la corriente $Vy dx$ que circula por la admitancia del elemento. Por tanto,

$$dI = Vy dx$$

o

$$\frac{dI}{dx} = Vy \tag{5.18}$$

Derivando, respecto a x , las ecs. (5.17) y (5.18) tenemos

$$\frac{d^2V}{dx^2} = z \frac{dI}{dx} \tag{5.19}$$

y

$$\frac{d^2I}{dx^2} = y \frac{dV}{dx} \tag{5.20}$$

Si sustituimos los valores de dI/dx y dV/dx , dados por las ecs. (5.18) y (5.17), en las ecs. (5.19) y (5.20), respectivamente, llegamos a

$$\frac{d^2V}{dx^2} = yzV \tag{5.21}$$

y

$$\frac{d^2I}{dx^2} = yzI \tag{5.22}$$

De esta forma tenemos una ecuación, la (5.21), cuyas únicas variables son V y x , y otra, la (5.22) con las variables I y x solamente. Las soluciones V e I de las ecs (5.21) y (5.22), respectivamente, son expresiones cuyas derivadas segundas, respecto a x , son iguales a las correspondientes expresiones originales multiplicadas por la constante yz . Por ejemplo, la solución de V , derivada dos veces, respecto a x , tiene que ser igual a yzV . Esto sugiere una solución de tipo exponencial. Supongamos que la solución de la ec. (5.23) es¹

$$V = A_1 \exp(\sqrt{yz} x) + A_2 \exp(-\sqrt{yz} x) \tag{5.23}$$

Hallando la derivada segunda de V respecto a x en la ec. (5.23) tenemos

$$\frac{d^2V}{dx^2} = yz[A_1 \exp(\sqrt{yz} x) + A_2 \exp(-\sqrt{yz} x)] \tag{5.24}$$

que es yz veces la supuesta solución de V . Así pues, la ec. (5.23) es la solución de la (5.21). Si sustituimos en la ec. (5.17) el valor dado por la ec. (5.12) para V , tenemos

¹ El término $\exp(\sqrt{yz} x)$ en la ec. (5.23) y en ecuaciones análogas es equivalente al e elevado a la potencia $\sqrt{yz} x$.

$$I = \frac{1}{\sqrt{z/y}} A_1 \exp(\sqrt{yz} x) - \frac{1}{\sqrt{z/y}} A_2 \exp(-\sqrt{yz} x) \quad (5.25)$$

Las constantes A_1 y A_2 pueden hallarse teniendo en cuenta las condiciones en el extremo receptor de la línea, es decir, $x = 0, V = V_R$ e $I = I_R$. Sustituyendo estos valores en las ecs. (5.23) y (5.25), tenemos

$$V_R = A_1 + A_2 \quad \text{y} \quad I_R = \frac{1}{\sqrt{z/y}} (A_1 - A_2)$$

Sustituyendo el valor $Z_c = \sqrt{z/y}$ y despejando A_1 ,

$$A_1 = \frac{V_R + I_R Z_c}{2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{V_R - I_R Z_c}{2}$$

Sustituyendo en las ecs. (5.23) y (5.25) los valores encontrados para A_1 y A_2 y haciendo $\gamma = \sqrt{yz}$, se obtiene

$$V = \frac{V_R + I_R Z_c}{2} e^{\gamma x} + \frac{V_R - I_R Z_c}{2} e^{-\gamma x} \quad (5.26)$$

$$I = \frac{V_R/Z_c + I_R}{2} e^{\gamma x} - \frac{V_R/Z_c - I_R}{2} e^{-\gamma x} \quad (5.27)$$

donde $Z_c = \sqrt{z/y}$ es la *impedancia característica* de la línea, y $\gamma = \sqrt{yz}$ la *constante de propagación*.

Las ecs. (5.26) y (5.27) dan los valores de V e I , así como sus ángulos de fase, en cualquier punto de la línea, en función de la distancia x desde el extremo receptor, supuesto conocidos V_R, I_R y los parámetros de la línea.

5.5 LINEAS DE TRANSMISIÓN LARGAS: INTERPRETACION DE LAS ECUACIONES

Tanto γ como Z_c son expresiones complejas. La parte real de la constante de propagación se llama *constante de amortiguación* α y se mide en neper por unidad de longitud. El coeficiente de la parte imaginaria de γ es la llamada *constante de fase* β , midiéndose en radianes por unidad de longitud. O sea,

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (5.28)$$

Con lo que las ecs. (5.26) y (5.27) se convierten en

$$V = \frac{V_R + I_R Z_c}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \frac{V_R - I_R Z_c}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (5.29)$$

y

$$I = \frac{V_R/Z_c + I_R}{2} e^{\alpha x} e^{j\beta x} - \frac{V_R/Z_c - I_R}{2} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \quad (5.30)$$

Las propiedades de $e^{\alpha x}$ y $e^{j\beta x}$ ayudan a explicar las variaciones de tensión y corriente, en cualquier instante, en función del punto considerado a lo largo de la línea. El término $e^{\alpha x}$ cambia de valor cuando lo hace x , mientras que $e^{j\beta x}$, igual a $\cos \beta x + j \sin \beta x$, siempre vale 1, produciendo una fase de β radianes por unidad de longitud de la línea.

El primer término de la ec. (5.29), $[(V_R + I_R Z_c)/2] e^{\alpha x} e^{j\beta x}$, aumenta su valor y adelanta en fase, a medida que aumenta la distancia al extremo receptor. Por el contrario, cuando se avanza a lo largo de la línea desde el extremo transmisor, el término considerado disminuye en valor absoluto y, a la vez, va retrasándose en fase. Esta es la característica de una onda progresiva y es análoga al comportamiento de una onda en el agua que en un punto varía de amplitud con el tiempo, a la vez que se retrasa en fase y su valor máximo disminuye con la distancia al origen. La variación del valor instantáneo no está expresado en el término, pero se comprende, puesto que V_R e I_R son vectores. El primer término de la ec. (5.29) se denomina *tensión incidente*.

El segundo término de la misma ecuación, $[(V_R - I_R Z_c)/2] e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$, disminuye en magnitud y se retrasa en fase desde el extremo receptor al extremo distribuidor. Se le llama *tensión reflejada*. En cualquier punto de la línea, la tensión es la suma de las componentes incidente y reflejada de la tensión en aquel punto.

Como la fórmula de la corriente es análoga a la de la tensión, también podemos considerarla compuesta por las corrientes incidente y reflejada.

Si se termina la línea en su impedancia característica Z_c , la tensión en el extremo receptor V_R es igual a $I_R Z_c$ y no existe onda reflejada de tensión ni de corriente, como puede verse sustituyendo $I_R Z_c$ por V_R en las ecs. (5.29) y (5.30). Una línea terminada en su impedancia característica se llama *línea plana* o *línea infinita*. Este último nombre deriva del hecho que una línea de longitud infinita no puede tener onda reflejada. Corrientemente las líneas de distribución de fuerza no se terminan en su impedancia característica, pero, en cambio, las líneas de comunicaciones se terminan de esa forma para eliminar la onda reflejada. Un valor típico de Z_c es 400 ohmios para una línea de un solo circuito, y 200 ohmios para una de dos circuitos en paralelo. El ángulo de fase de Z_c normalmente está comprendido entre 0 y -15° . Las líneas de conductores agrupados tienen valores inferiores a Z_c puesto que dichas líneas tienen una L inferior y una C superior a las de las líneas de un sólo conductor por fase.

En el trabajo de redes, la impedancia característica se llama a veces *impedancia de sobretensión*. Sin embargo, este término se reserva, normalmente, para el caso especial de una línea sin pérdidas. Si una línea no tiene pérdidas, su resistencia y su conductancia son cero, con lo que la impedancia característica se reduce a $\sqrt{L/C}$, resistencia pura. Cuando se opera con altas frecuencias o con sobretensiones debidas a rayos, es corriente despreciar las pérdidas, siendo importante la impedancia de sobretensión. La carga de la impedancia de sobretensión (SIL) de una línea es la potencia suministrada por ésta a una carga, óhmica pura, igual a su impedancia de sobretensión. Cargada de esta forma, la línea suministra una corriente de

$$|I_L| = \frac{|V_L|}{\sqrt{3} \times \sqrt{L/C}} \quad A$$

donde $|V_L|$ es la tensión entre líneas en la carga. Como ésta es óhmica pura,

$$\text{SIL} = \sqrt{3} |V_L| \frac{|V_L|}{\sqrt{3} \times \sqrt{L/C}} \quad \text{vatios}$$

o con $|V_L|$ en kilovoltios,

$$\text{SIL} = \frac{|V_L|^2}{\sqrt{L/C}} \quad \text{MW} \quad (5.31)$$

Los ingenieros de redes, expresan, a veces, la potencia transmitida por la línea por unidad de SIL, esto es, como la relación entre la potencia transmitida y la carga de la impedancia de sobretensión. Por ejemplo, puede expresarse la carga permisible de una línea de transporte como una fracción de su SIL, y SIL suministra una comparación de las capacidades de transporte de carga de las líneas.

Una *longitud de onda* es la distancia, a lo largo de la línea, entre dos puntos de una onda que difieren en fase 360° ó 2π radianes. Si λ es el defase en radianes por milla, la longitud de onda en millas es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (5.32)$$

A la frecuencia de 60 Hz, una longitud de onda es, aproximadamente 3000 millas. La velocidad de propagación, en millas por segundo, es el producto de la longitud de onda, en millas por la frecuencia en Hz, o

$$\text{Velocidad} = f\lambda \quad (5.33)$$

Si no existe carga en la línea, I_R es cero y, como indican las ecs. (5.29) y (5.30) las tensiones incidente y reflejada son iguales, en amplitud y fase, en el extremo receptor. Por el contrario, en el mismo punto, las corrientes incidente y reflejada son iguales, pero defasadas una de otra 180° . De esta forma, en el extremo receptor de una línea abierta, se anulan entre sí las corrientes incidente y reflejada, no ocurriendo esto en ningún otro punto de la línea, a menos que ésta carezca completamente de pérdidas, de tal forma que la constante de amortiguación α sea cero.

EJEMPLO 5.1 Una línea de transporte, a 60 Hz, de un solo circuito tiene 225 millas de longitud. La carga es de 125 000 kW a 200 kV con un factor de potencia 100%. Calcular las tensiones incidente y reflejada en los extremos receptor y transmisor de la línea. Determinar la tensión de línea en el extremo distribuidor a partir de las tensiones incidente y reflejada. Calcular la longitud de onda y la velocidad de propagación. Los parámetros de la línea son

$$R = 0.172 \Omega/\text{mi} \quad L = 2.18 \text{ mH}/\text{mi}$$

$$C = 0.0136 \mu\text{F}/\text{mi} \quad G = 0$$

Solución

$$z = 0.172 + j2\pi \times 60 \times 2.18 \times 10^{-3}$$

$$= 0.172 + j0.822 = 0.841/78.2^\circ \Omega/\text{mi}$$

$$y = 0 + j2\pi \times 60 \times 0.0136 \times 10^{-6}$$

$$= 0 + j5.12 \times 10^{-6} = 5.12 \times 10^{-6}/90^\circ \text{ S}/\text{mi}$$

$$\gamma l = \sqrt{yz} l = 225 \sqrt{0.841 \times 5.12 \times 10^{-6}} \angle \frac{78.2^\circ + 90^\circ}{2}$$

$$= 0.467/84.1^\circ = 0.0481 + j0.465$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{0.841}{5.12 \times 10^{-6}}} \angle \frac{78.2^\circ - 90^\circ}{2} = 405/-5.9^\circ \Omega$$

$$V_R = \frac{200,000}{\sqrt{3}} = 115 200/0^\circ \text{ V respecto al neutro}$$

$$I_R = \frac{125 000 000}{\sqrt{3} \times 200 000} = 361/0^\circ \text{ A}$$

Representando la tensión incidente por V^+ y la reflejada por V^- , en el extremo receptor, donde $x = 0$. Tenemos:

$$V_R^+ = \frac{V_R + I_R Z_c}{2} = \frac{115 200/0^\circ + 361/0^\circ \times 405/-5.9^\circ}{2}$$

$$= 57 600 + 72 500 - j7 500 = 130 100 - j7 500$$

$$= 130 100/-3.3^\circ \text{ V}$$

$$V_R^- = \frac{V_R - I_R Z_c}{2} = \frac{115 200/0^\circ - 361/0^\circ \times 405/-5.9^\circ}{2}$$

$$= 57 600 - 72 500 + j7 500 = -14 900 + j7 500$$

$$= 16 700/153.3^\circ \text{ V}$$

Y en el extremo distribuidor $x = l$,

$$V_S^+ = \frac{V_R + I_R Z_c}{2} e^{\alpha l} e^{j\beta l} = 130 100/-3.3^\circ e^{0.0481} e^{j0.465}$$

$$= 130 100/-3.3^\circ \times 1.049/26.6^\circ = 136 500/23.3^\circ \text{ V}$$

$$V_S^- = \frac{V_R - I_R Z_c}{2} e^{-\alpha l} e^{-j\beta l} = 16 700/153.3^\circ \left(\frac{1}{1.049} /-26.6^\circ \right)$$

$$= 15 900/126.7^\circ \text{ V}$$

La tensión entre línea y neutro en el extremo distribuidor es:

$$V_S = 136 500/23.3^\circ + 15 900/126.7^\circ$$

$$= 125\,300 + j54\,000 - 9\,500 + j12\,750$$

$$= 115\,800 + j66\,750 = 133\,800/\underline{30^\circ} \text{ V}$$

La tensión entre conductores en el extremo distribuidor es:

$$V_S = \sqrt{3} \times 133.8 = 232 \text{ kV}$$

La longitud de onda y la velocidad de propagación se calcula de la siguiente forma:

$$\beta = \frac{0.465}{225} = 0.002065 \text{ rad/mi}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{0.002065} = 3\,040 \text{ mi}$$

$$\text{Velocidad} = f\lambda = 60 \times 3\,040 = 182\,400 \text{ mi/s}$$

5.6 LÍNEAS DE TRANSMISIÓN LARGAS: FORMA HIPERBÓLICA DE LAS ECUACIONES

Las ondas de tensión, incidente y reflejada, se determinan muy rara vez cuando se calcula la tensión de una línea de transporte. La razón de haber estudiado la tensión y la corriente de una línea en función de sus componentes incidente y reflejada, es que este análisis es muy útil para comprender perfectamente algunos fenómenos que se presentan en las líneas de transporte. Una forma de las ecuaciones, más conveniente para calcular la corriente y la tensión de una línea eléctrica es la determinada empleando las funciones hiperbólicas. Estas vienen definidas en forma exponencial por las siguientes relaciones:

$$\text{sen h } \theta = \frac{\epsilon^\theta - \epsilon^{-\theta}}{2} \quad (5.34)$$

$$\text{cos h } \theta = \frac{\epsilon^\theta + \epsilon^{-\theta}}{2} \quad (5.35)$$

Sacando factores comunes en las ecs. (5.26) y (5.27) y sustituyendo los términos exponenciales por las funciones hiperbólicas, encontramos las nuevas ecuaciones que dan la tensión y la corriente en cualquier punto de la línea:

$$V = V_R \cosh \gamma x + I_R Z_c \sinh \gamma x \quad (5.36)$$

y

$$I = I_R \cosh \gamma x + \frac{V_R}{Z_c} \sinh \gamma x \quad (5.37)$$

Para encontrar la tensión y la corriente en el extremo generador, ponemos $x=l$, con lo que

$$V_S = V_R \cosh \gamma l + I_R Z_c \sinh \gamma l \quad (5.38)$$

$$I_S = I_R \cosh \gamma l + \frac{V_R}{Z_c} \sinh \gamma l \quad (5.39)$$

Del análisis de estas ecuaciones vemos que las constantes generalizadas del circuito para una línea larga son

$$A = \cosh \gamma l \quad C = \frac{\sinh \gamma l}{Z_c} \quad (5.40)$$

$$B = Z_c \sinh \gamma l \quad D = \cosh \gamma l$$

Las ecs. (5.38) y (5.39) permiten encontrar V_R o I_R en función de V_S e I_S según las siguientes expresiones:

$$V_R = V_S \cosh \gamma l - I_S Z_c \sinh \gamma l \quad (5.41)$$

$$I_R = I_S \cosh \gamma l - \frac{V_S}{Z_c} \sinh \gamma l \quad (5.42)$$

En las líneas trifásicas equilibradas, la corriente es la de línea y la tensión es la existente entre línea y neutro, esto es, la tensión de línea dividida por $\sqrt{3}$. Para resolver las ecuaciones es preciso, previamente, determinar los valores de las funciones hiperbólicas. Como normalmente, γl es un valor complejo, las funciones hiperbólicas son también complejas y no se pueden encontrar directamente en las tablas corrientes, o calculadoras antes de la invasión de los computadores digitales; una serie de gráficos, algunos adaptados a los valores que comúnmente encontramos en los cálculos de las líneas de transmisión, fueron utilizados para evaluar las funciones hiperbólicas de argumentos complejos. Ahora el computador digital suministra un medio común para incorporar dichas funciones en nuestros cálculos.

Si no se dispone de gráficos especiales o computadores se pueden calcular las funciones hiperbólicas de variable compleja por varios métodos. Las siguientes ecuaciones son los desarrollos de los senos y cosenos hiperbólicos de variable compleja en función de los senos y cosenos circulares e hiperbólicos de variable real:

$$\cosh (\alpha l + j\beta l) = \cosh \alpha l \cos \beta l + j \sinh \alpha l \sin \beta l \quad (5.43)$$

$$\sinh (\alpha l + j\beta l) = \sinh \alpha l \cos \beta l + j \cosh \alpha l \sin \beta l \quad (5.44)$$

Las ecs. (5.43) y (5.44) permiten el cálculo de las funciones hiperbólicas con argumentos complejos. La correcta unidad de βl es el radián que es la unidad encontrada para βl al calcular la parte compleja de γl . Las ecs. (5.43) y (5.44) pueden comprobarse sustituyendo en ellas las formas exponenciales de las funciones hiperbólicas y circulares.

Otro método conveniente para el cálculo de las funciones hiperbólicas es su desarrollo en serie. Desarrollando por Maclaurin se tiene:

$$\cosh \theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots \quad (5.45)$$

y

$$\sinh \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots \quad (5.46)$$

Las series convergen rápidamente para los valores de γl que se presentan corrientemente en las líneas eléctricas, y se logra suficiente precisión calculando únicamente unos cuantos términos.

Un tercer método de calcular las funciones hiperbólicas complejas se deriva de las ecs, (5.34) y (5.35): Sustituyendo θ , por $\alpha + j\beta$, tenemos

$$\cosh(\alpha + j\beta) = \frac{\epsilon^{\alpha} \epsilon^{j\beta} + \epsilon^{-\alpha} \epsilon^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(\epsilon^{\alpha/\beta} + \epsilon^{-\alpha/-\beta}) \quad (5.47)$$

y

$$\sinh(\alpha + j\beta) = \frac{\epsilon^{\alpha} \epsilon^{j\beta} - \epsilon^{-\alpha} \epsilon^{-j\beta}}{2} = \frac{1}{2}(\epsilon^{\alpha/\beta} - \epsilon^{-\alpha/-\beta}) \quad (5.48)$$

EJEMPLO 5.2 Encontrar la tensión, la corriente y la potencia en el extremo distribuidor de la línea descrita en el ej. 5.1.

Solución De la solución del ej. 5.1,

$$Z_c = 405/-5.9^\circ \Omega \quad \gamma l = 0.0481 + j0.465$$

$$V_R = 115 \text{ 200}/0^\circ \text{ V voltios respecto al neutro} \quad I_R = 361/0^\circ \text{ amperios}$$

De las ecs. (5.43) y (5.44)

$$\begin{aligned} \cosh \gamma l &= \cosh 0.0481 \cos 0.465 + j \sinh 0.0481 \sin 0.465 \dagger \\ &= 1.0012 \times 0.894 + j0.0481 \times 0.447 = 0.895 + j0.0215 \\ &= 0.895/1.38^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh \gamma l &= \sinh 0.0481 \cos 0.465 + j \cosh 0.0481 \sin 0.465 \\ &= 0.048 \times 0.894 + j1.0012 \times 0.448 = 0.0429 + j0.449 \\ &= 0.449/84.5^\circ \end{aligned}$$

De la ec. (5.38)

$$\begin{aligned} V_s &= 115 \text{ 200} \times 0.895/1.38^\circ + 361 \times 405/-5.9^\circ \times 0.449/84.5^\circ \\ &= 103 \text{ 000}/1.38^\circ + 65 \text{ 600}/78.6^\circ \\ &= 103 \text{ 000} + j2 \text{ 480} + 13 \text{ 000} + j64 \text{ 400} \\ &= 116 \text{ 000} + j66 \text{ 880} = 133 \text{ 800}/30.0^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

y de la ec. (5.39)

$$\begin{aligned} I_s &= 361 \times 0.895/1.38^\circ + \frac{115 \text{ 200}}{405/-5.9^\circ} \times 0.449/84.5^\circ \\ &= 323/1.38^\circ + 128/90.4^\circ = 323 + j7.8 - 0.9 + j128 \\ &= 322 + j136 = 350/22.9^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

$$\dagger 0.465 \text{ rad} = 26.6^\circ$$

En el extremo distribuidor

$$\begin{aligned} \text{Tensión de línea} &= \sqrt{3} \times 133.8 = 232 \text{ kV} \\ \text{Corriente de línea} &= 350 \text{ A} \\ \text{Factor de potencia} &= \cos(30.0^\circ - 22.9^\circ) = 0.9923 \\ \text{Potencia} &= \sqrt{3} \times 232 \times 350 \times 0.9923 = 140 \text{ 000 kW} \end{aligned}$$

Para encontrar la regulación de tensión reconocemos la constante generalizada del circuito $|A| = 0.895$ y de la ec. (5.16); la regulación de tensión es

$$\frac{133.8/0.895 - 115.2}{115.2} = 29.8\%$$

5.7 CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA LINEA LARGA

Como ya se apuntó en la sec. 5.3 los esquemas en T y en π no representan exactamente una línea de transporte porque no tienen en cuenta que los parámetros de la línea están repartidos uniformemente. La diferencia entre los circuitos en T y en π y la línea real aumenta a medida que ésta es más larga. Sin embargo, es posible encontrar el circuito equivalente de una línea larga de transporte y representarla con precisión, en lo que se refiere a los valores en los extremos de la línea, por medio de una red con los parámetros concentrados. Supongamos que un circuito en π , análogo al de la fig. 5.5, es el equivalente de una línea larga, pero llamemos Z' al ramal serie e $Y'/2$ a los ramales en paralelo, para distinguirlo de los correspondientes del circuito nominal en π . La ec. (5.5) da la tensión en el extremo transmisor de un circuito simétrico π , en función de la impedancia y admitancia y de la tensión y corriente en el extremo receptor. Sustituyendo en la ec. (5.5) Z e $Y/2$ por Z' e $Y'/2$ obtendremos la tensión en el extremo distribuidor del circuito equivalente.

$$V_s = \left(\frac{Z'Y'}{2} + 1 \right) V_R + Z'I_R \quad (5.49)$$

Al ser equivalentes el circuito y la línea, los coeficientes de V_R e I_R de la ec. (5.49) han de ser iguales a los correspondientes de la ec. (5.38). Igualando los coeficientes de I_R en las dos ecuaciones,

$$Z' = Z_c \sinh \gamma l \quad (5.50)$$

$$Z' = \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh \gamma l = z l \frac{\sinh \gamma l}{\sqrt{zy} l}$$

$$Z' = Z \frac{\sinh \gamma l}{\gamma l} \quad (5.51)$$

donde Z , igual a $z l$, es la impedancia total de la línea. La expresión $(\sinh \gamma l)/\gamma l$ es el factor por el que hay que multiplicar la impedancia del circuito nominal π para convertirla en la del circuito equivalente en π . Para pequeños valores de γl , $\sinh \gamma l$ y γl son casi iguales, lo que demuestra que el circuito nominal en π representa con toda precisión la línea de transporte de longitud media, en lo que se refiere al ramal serie de la misma.

Para estudiar los ramales en paralelo del circuito equivalente en π , igualaremos los coeficientes de V_R en las ecs. (5.38) y (5.49), con lo que

$$\frac{Z'Y'}{2} + 1 = \cosh \gamma l \quad (5.52)$$

Sustituyendo Z' por $Z_c \sinh \gamma l$, tenemos

$$\frac{Y'Z_c \sinh \gamma l}{2} + 1 = \cosh \gamma l \quad (5.53)$$

y

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} \quad (5.54)$$

Otra forma de la expresión de la admitancia en paralelo del circuito equivalente puede hallarse sustituyendo en la ec. (5.54) la siguiente identidad:

$$\tanh \frac{\gamma l}{2} = \frac{\cosh \gamma l - 1}{\sinh \gamma l} \quad (5.55)$$

Puede comprobarse la identidad sustituyendo las funciones hiperbólicas por sus equivalentes exponenciales de las ecs. (5.34) y (5.35) y recordando que $\tanh \theta = \sinh \theta / \cosh \theta$ tenemos:

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_c} \tanh \frac{\gamma l}{2} \quad (5.56)$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Y}{2} \frac{\tanh (\gamma l/2)}{\gamma l/2} \quad (5.57)$$

donde Y , igual a γl , es la admitancia total, en paralelo, de la línea. La ec. (5.57) da el factor de corrección a emplear para convertir la admitancia de los ramales en paralelo del circuito nominal en π a la correspondiente del circuito equivalente de la misma forma. Como $\tanh (\gamma l/2)$ y $\gamma l/2$ son casi iguales para pequeños valores de γl , el circuito nominal en π representa con toda precisión la línea de transporte de longitud media, en la que ya vimos previamente que el factor de corrección a introducir en el ramal serie era despreciable. El circuito equivalente en π está representado en la fig. 5.8. De la misma manera se podría encontrar el circuito equivalente, en T, de una línea de transporte.

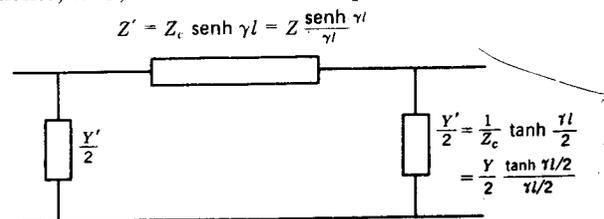


Fig. 5.8 Circuito equivalente en π de una línea de transmisión.

EJEMPLO 5.3 Encontrar el circuito equivalente en π de la línea descrita en el ej. 5.1 y compararla con el nominal de la misma forma.

Solución Como ya se conocen del ej. 5.2 los valores de $\sinh \gamma l$ y $\cosh \gamma l$, emplearemos las ecs. (5.50) y (5.54).

$$Z' = 405 / -5.9^\circ \times 0.449 / 84.5^\circ = 182 / 78.6^\circ \Omega \text{ en el ramal serie}$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{0.895 + j0.0215 - 1}{182 / 78.6^\circ} = \frac{-0.105 + j0.0215}{182 / 78.6^\circ} = \frac{0.107 / 168.4^\circ}{182 / 78.6^\circ}$$

$$= 0.000588 / 89.8^\circ \text{ U en cada ramal en paralelo}$$

El circuito nominal π tiene una impedancia serie de

$$Z = 225 \times 0.841 / 78.2^\circ = 189 / 78.2^\circ \Omega$$

y los ramales iguales en paralelo,

$$\frac{Y}{2} = \frac{5.12 \times 10^{-6} / 90^\circ}{2} \times 225 = 0.000575 / 90^\circ \text{ U}$$

Comparando los valores encontrados para los circuitos nominal y equivalente en π , se ve que las diferencias son pequeñas para una línea corriente de 225 mi, de lo que se deduce que el esquema nominal en π puede presentar bastante bien a las líneas largas, cuando no se requiere gran precisión.

5.8 FLUJO DE POTENCIA EN LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN

Aunque el flujo de potencia en cualquier punto a lo largo de una línea de transmisión siempre puede encontrarse si se conocen o se pueden calcular la tensión, la corriente y el factor de potencia se pueden derivar ecuaciones muy interesantes para la potencia en términos de las constantes ABCD. Lógicamente las ecuaciones se aplican a cualquier red de dos pares de terminales. Repitiendo la ec. (5.8) y resolviendo para la corriente del terminal receptor, I_R obtenemos

$$V_S = AV_R + BI_R \quad (5.58)$$

$$I_R = \frac{V_S - AV_R}{B} \quad (5.59)$$

tomando

$$A = |A| / \alpha \quad B = |B| / \beta$$

$$V_R = |V_R| / 0^\circ \quad V_S = |V_S| / \delta$$

obtenemos

$$I_R = \frac{|V_S|}{|B|} / \delta - \beta - \frac{|A| \cdot |V_R|}{|B|} / \alpha - \beta \quad (5.60)$$

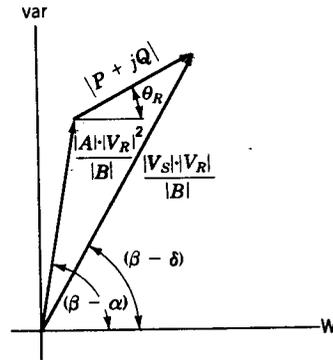


Fig. 5.9 Vectores de la ec. (5.61) dibujados en el plano complejo con magnitudes y ángulos.

Luego la potencia compleja $V_R I_R^*$ en el terminal receptor es

$$P_R + jQ_R = \frac{|V_S| \cdot |V_R|}{|B|} / \beta - \delta - \frac{|A| \cdot |V_R|^2}{|B|} / \beta - \alpha \quad (5.61)$$

y la potencia real y reactiva en el terminal receptor son

$$P_R = \frac{|V_S| \cdot |V_R|}{|B|} \cos(\beta - \delta) - \frac{|A| \cdot |V_R|^2}{|B|} \cos(\beta - \alpha) \quad (5.62)$$

$$Q_R = \frac{|V_S| \cdot |V_R|}{|B|} \sin(\beta - \delta) - \frac{|A| \cdot |V_R|^2}{|B|} \sin(\beta - \alpha) \quad (5.63)$$

observando que la expresión para la potencia compleja $P_R + jQ_R$ es —según la ec. (5.61)— la resultante de combinar dos vectores expresados en forma polar, podemos dibujar estos vectores en el plano complejo cuyas coordenadas horizontal y vertical están dadas en unidades de potencia (vatios y vars). La fig. 5.9 muestra las dos cantidades complejas y su diferencia como lo expresa la ec. (5.61). La fig. 5.10 muestra los mismos vectores con el origen de los ejes coordenados desplazado. Este dibujo es un diagrama de potencia con la resultante cuya magnitud es $|P_R + jQ_R|$, or $|V_R| |I_R|$, formando un ángulo θ_R con el eje horizontal. Como es de esperarse, las componentes real e imaginaria de $|P_R + jQ_R|$ son

$$P_R = |V_R| \cdot |I_R| \cos \theta_R \quad (5.64)$$

y

$$Q_R = |V_R| \cdot |I_R| \sin \theta_R \quad (5.65)$$

donde θ_R es el ángulo de fase por el cual V_R adelanta a I_R , como se estudió en el cap. 2. El signo de Q concuerda con el convenio que asigna valores positivos a Q cuando la corriente está retrasada respecto a la tensión.

A continuación determinaremos algunos puntos del diagrama de potencias de la fig. 5.10, correspondientes a varias cargas para valores fijos de $|V_S|$ y $|V_R|$. En primer lugar, haremos notar que el punto n no depende de la corriente I_R y que no cambiará en tanto $|V_R|$ permanezca constante. Observaremos, además, que la distancia entre los puntos n y k es constante para valores fijos de $|V_S|$ y $|V_R|$. Por tanto, como al cambiar la carga varía la distancia de 0 a k , este último punto, al tener que mantenerse a distancia constante del punto fijo n , tiene que moverse sobre una circunferencia cuyo centro es n . Por esto, todos los puntos representativos de cargas de una red con valores fijos de $|V_S|$ y $|V_R|$ están sobre una circunferencia determinada por los valores de las tensiones dadas. Si un nuevo valor de $|V_S|$ se mantiene constante con el mismo valor de $|V_R|$, el punto n queda invariable, pero se obtiene una nueva circunferencia de radio nk .

El punto n puede situarse tomando $|A| \cdot |V_R|^2 / |B|$ desde el origen formando, en el tercer cuadrante, un ángulo $\beta - \alpha$ con el eje horizontal. Se obtiene mayor precisión situando el punto n mediante el cálculo de sus coordenadas rectangulares. El examen de la fig. 5.10 nos da para el diagrama en el extremo receptor:

$$\text{Radio del círculo del extremo receptor} = \frac{|V_S| \cdot |V_R|}{|B|} \quad \text{VA}$$

Coordenadas del centro del círculo del extremo receptor

$$\begin{aligned} \text{Horizontal} &= -\frac{|A|}{|B|} \cdot |V_R|^2 \cos(\beta - \alpha) \quad \text{W} \\ \text{Vertical} &= -\frac{|A|}{|B|} \cdot |V_R|^2 \sin(\beta - \alpha) \quad \text{var} \end{aligned} \quad (5.66)$$

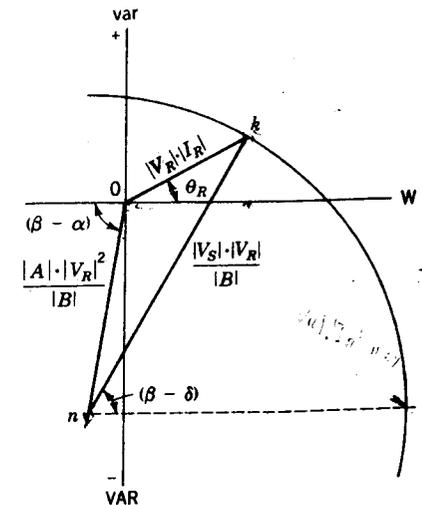


Fig. 5.10 Diagrama de potencia obtenido por el desplazamiento del origen de los ejes coordenados de la fig. 5.9.

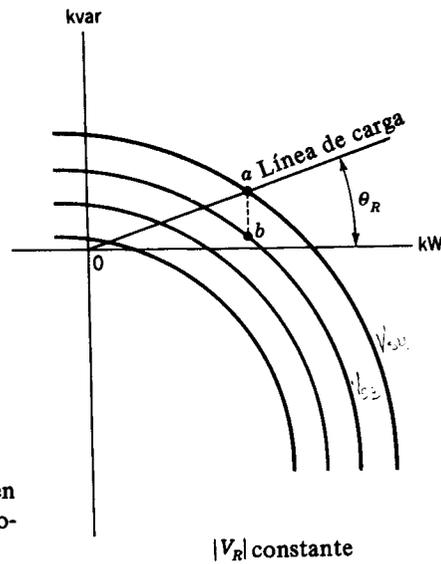


Fig. 5.11 Círculos de potencias en el extremo receptor para varios valores de $|V_s|$ y $|V_R|$ constante.

Como las ecs. (5.66) y los diagramas de potencias se han desarrollado a partir de las constantes de una red de dos pares de terminales, las tensiones están en voltios, respecto al neutro, por fase y las coordenadas son vatios y vars, por fase, si el circuito representado por la red es un circuito trifásico. Si sustituimos las tensiones entre líneas y neutro por las de línea, cada longitud de diagrama se multiplica por 3, puesto que el producto de dos tensiones es el que define cada longitud y la tensión de línea de un circuito trifásico equilibrado es $\sqrt{3}$ veces la tensión entre línea y neutro. Así, cuando se utilizan las tensiones de línea en las ecs. (5.66), los vatios y vars del diagrama son valores trifásicos totales. En los sistemas de potencia, las tensiones de línea se especifican en kilovatios y los valores de potencia se miden en kilovatios, kilovars y kilovoltio-amperios trifásicos totales o en megavatios, megavars y megavoltio-amperios. Las coordenadas dadas por la ec. (5.66) son *megavatios* y *megavars* para las tres fases totales si los términos de tensión son *kilovoltios de línea a línea*. Esto también se aplica a las ecs. (5.61) a (5.63)

Si se mantiene constante la tensión en el extremo receptor y se trazan los diagramas de este extremo, para diversos valores de la tensión en el extremo distribuidor, las circunferencias obtenidas son concéntricas, puesto que la situación del centro de las circunferencias correspondientes al extremo receptor es independiente de la tensión en el extremo distribuidor. La fig. 5.11 representa una familia de circunferencias del extremo receptor para una tensión constante en el extremo transmisor. La línea de carga dibujada en la fig. 5.11 es útil si varía el módulo de la carga permaneciendo constante su factor de potencia. El ángulo formado por la línea de carga en el origen y el eje horizontal es aquel cuyo coseno es el factor de potencia de la carga. La línea de carga de la fig. 5.11 se ha trazado para cargas en retardo, puesto que todos sus puntos están en el primer cuadrante y tienen voltio-amperios reactivos de signo positivo.

Si no varía la tensión en el extremo distribuidor, las circunferencias del extremo receptor, para diferentes tensiones en dicho extremo, no son concéntricas, porque las ecs. (5.66) indican que los centros de las circunferencias están en un punto distinto para

cada valor de $|V_R|$ pero todos ellos sobre una recta que pasa por el origen. Los radios de las circunferencias varían también con $|V_R|$.

Desde la llegada de los computadores digitales los diagramas de círculo han sido de poco uso práctico. Se han introducido para ilustrar algunos conceptos de operación de la línea de transmisión. Por ejemplo, analizando la fig. 5.10 hay una limitación para la potencia que puede transmitirse al extremo receptor de la línea. Para magnitudes específicas de tensión de los terminales distribuidor y receptor. Un incremento en la potencia entregada significa que el punto k se mueve a lo largo del círculo hasta que el ángulo $\beta - \delta$ sea cero, esto es, más potencia se entregará hasta que δ sea igual a β . Un incremento posterior en δ resulta en una menor potencia recibida. La máxima potencia es

$$P_{R,\max} = \frac{|V_S| \cdot |V_R|}{|B|} - \frac{|A| \cdot |V_R|^2}{|B|} \cos(\beta - \alpha) \quad (5.67)$$

La carga debe extraer una gran corriente adelantada para lograr la condición de máxima potencia recibida.

En la fig. 5.11 la longitud de la línea vertical desde el punto A hasta la intersección de la línea de carga en el círculo $|V_{S4}|$ al punto B sobre el círculo $|V_{S3}|$ es la cantidad de potencia reactiva negativa que los condensadores deben extraer sumada en paralelo con la carga para mantener constante $|V_R|$ cuando la tensión del extremo distribuidor se reduce de $|V_{S4}|$ a $|V_{S3}|$. El aumento de unos pocos kilovars capacitivos resulta en una carga combinada con un factor de potencia unitario y una reducción posterior en $|V_S|$ para el mismo $|V_R|$. Naturalmente, este análisis significa que un $|V_S|$ resulta constante en un $|V_R|$ mayor, a medida que se agregan condensadores en paralelo con carga retrasada.

Uno de los múltiples resultados evidentes del estudio del diagrama del círculo de la fig. 5.11 es la variación de la tensión del extremo distribuidor para mantener constante la tensión del extremo receptor para diferentes valores de potencia real y reactiva recibida. Por ejemplo, para un θ_R constante en la carga a las coordenadas de la intersección de la línea de carga con un círculo de tensión del extremo distribuidor constante son P y Q de la carga para esos valores de $|V_S|$ y el $|V_R|$, para los cuales se dibuja el diagrama.

PROBLEMAS

- 5.1 Una línea trifásica, a 60 Hz, de un solo circuito y 10 mi, está formada por conductores *Waxwing*, colocados en triángulo equilátero con 5 pies entre centros. Alimenta a 11 000 voltios una carga equilibrada de 2 500 kW. Hallar la tensión en el extremo transmisor, cuando el factor de potencia sea del 80% en retardo, la unidad y del 90% en adelanto. Supóngase una temperatura del conductor de 50°C.
- 5.2 Deducir las ecuaciones que dan V_s e I_s , a partir del circuito nominal en T de una línea de transporte, en función de V_R , I_R , la impedancia total serie y la admitancia total en paralelo de la línea.
- 5.3 Hallar las constantes $ABCD$ de un circuito π que tiene una resistencia de 500- Ω en el ramal paralelo del extremo distribuidor, una resistencia de 1k Ω en el ramal paralelo, del extremo receptor, y una resistencia de 100 Ω para la rama en serie.
- 5.4 Hallar las constantes $ABCD$ del circuito T, que tiene una reactancia inductiva de 10 Ω en el brazo serie más próximo al extremo distribuidor, una reactancia inductiva de

20 Ω en el brazo serie más próximo al extremo receptor y una reactancia capacitiva de 1 k Ω en el brazo paralelo ¿Qué efecto se produce al intercambiar los dos brazos serie?

5.5 Derive las constantes $ABCD$ para la red compuesta de dos redes en serie en términos de las constantes de las redes individuales. Compruebe los resultados consultando la tabla A.6 del apéndice.

5.6 Las constantes $ABCD$ de una línea de transmisión trifásica son

$$A = D = 0.936 + j0.016 = 0.936/0.98^\circ$$

$$B = 33.5 + j138 = 142.0/76.4^\circ \Omega$$

$$C = (-5.18 + j914) \times 10^{-6} \text{ U}$$

La carga en el extremo receptor es 40 MW a 220 kV con un factor de potencia de 0.9 en retraso. Hallar la magnitud de la tensión en el extremo distribuidor y la regulación de tensión. Suponga que la magnitud de la tensión del extremo distribuidor permanece constante.

5.7 Una línea trifásica de transporte, a 60 Hz, tiene sus tres conductores dispuestos en un plano horizontal con una separación, entre sí, de 15 pies. Los conductores son *Ostrich*. La línea tiene 75 mi y lleva una carga a 115 kV de 30 000 kW con un factor de potencia de 0.8 en retardo. Encontrar la tensión, corriente, potencia y factor de potencia en el extremo distribuidor. ¿Cuál es el rendimiento del transporte? Supóngase una temperatura de los conductores de 50°C.

5.8 Una línea trifásica de transporte, a 60 Hz, tiene los parámetros siguientes:

$$R = 0.30 \Omega/\text{mi}$$

$$L = 2.10 \text{ mH}/\text{mi}$$

$$C = 0.014 \mu\text{F}/\text{mi}$$

La tensión en el extremo receptor, es de 132 kV. Si la línea está abierta en el extremo receptor, hallar el valor eficaz y el ángulo de fase de:

(a) La tensión incidente, respecto al neutro, en el extremo receptor. (Tómese esta tensión como referencia para calcular los ángulos de fase.)

(b) La tensión reflejada, respecto al neutro, en el extremo receptor.

(c) La tensión incidente, respecto al neutro, a 75 mi del extremo receptor.

(d) La tensión reflejada, respecto al neutro, a 75 mi del extremo receptor.

(e) La tensión resultante, respecto al neutro y la tensión de línea, a 75 mi del extremo receptor.

5.9 Encontrar las corrientes incidente y reflejada para la línea abierta del prob. 5.8 en el extremo receptor y a 75 mi de aquel punto.

5.10 Si la línea del prob. 5.8 tiene 75 mi de longitud y suministra una potencia de 40 000 kW, a 132 kV y 80% de factor de potencia en retardo, determinar la tensión, corriente, potencia y factor de potencia en el extremo transmisor. Calcúlese el rendimiento del transporte, la impedancia característica, la longitud de onda y la velocidad de propagación.

5.11 Evaluar $\cosh \theta$ y $\sinh \theta$ para $\theta = 0.45/80^\circ$.

5.12 Probar la ec. (5.55), sustituyendo las funciones hiperbólicas por sus equivalentes exponenciales.

5.13 Una línea trifásica, a 60 Hz, tiene 175 mi de longitud. Su impedancia serie total es de $35 + j140 \Omega$ ohmios y su admitancia en paralelo total, es de $930 \times 10^{-6}/90^\circ \text{ U}$. Suministra 40 000 kW a 220 kV con un factor de potencia en retardo del 90%. Encontrar la tensión en el extremo distribuidor por: (a) la aproximación de las líneas cortas; (b) la aproximación del circuito nominal en π y (c) la ecuación de las líneas largas.

5.14 Determinar el circuito equivalente en π de la línea del prob. 5.13.

5.15 Determinar el factor de regulación de la tensión de la línea descrita en el prob. 5.13. Suponer que la tensión en el extremo distribuidor permanece constante.

5.16 Una línea trifásica de transporte, a 60 Hz, tiene 240 mi de longitud. La tensión en el extremo distribuidor es de 220 kV. Los parámetros de la línea son $R = 0.2 \Omega/\text{mi}$, $X = 0.8 \Omega/\text{mi}$ e $Y = 5.3 \mu\text{S}/\text{mi}$. Encontrar la corriente en el extremo distribuidor, cuando no hay carga en la línea.

5.17 Si la carga de la línea descrita en el prob. 5.16 es de 75 000 kW a 220 kV, con factor de potencia la unidad, calcular la corriente, tensión y potencia en el extremo distribuidor. Suponer que la tensión en dicho extremo, se mantiene constante y calcular el factor de regulación de la tensión de la línea para la carga especificada anteriormente.

5.18 Construya un diagrama de círculo de potencia en el extremo receptor análogo al de la fig. 5.10 para la línea del prob. 5.13. Localice el punto correspondiente a la carga del prob. 5.13 y localice el centro de los círculos para diferentes valores de $|V_s|$ si $|V_R| = 220 \text{ kV}$. Dibuje el círculo que pasa por el punto de carga. De los radios medios del último círculo determine $|V_s|$, y compare este valor con los valores, calculados para el prob. 5.13.

5.19 Emplee el diagrama construido en el prob. 5.18 para determinar la tensión del extremo distribuidor para distintos valores de kilovars suministrados por condensadores sincrónicos o rotatorios en paralelo con la carga designada en el extremo receptor. Incluya valores de kilovars agregados para dar un factor de potencia unitario y un factor de potencia de 0.9 en adelanto en el extremo receptor. Suponga que la tensión del extremo distribuidor se ajusta para mantener 220 kV en la carga.

5.20 Un diagrama de círculo de potencia en el extremo receptor se dibuja para una tensión constante en el extremo receptor. Para una determinada carga a esta tensión en el extremo receptor la tensión del extremo distribuidor es de 115 kV. El círculo del extremo receptor para $|V_s| = 115 \text{ kV}$ tiene un radio de 5 pulg. Las coordenadas horizontal y vertical de los círculos en el extremo receptor son -0.25 pulg y -0.45 pulg , respectivamente. Hallar la regulación de tensión para la carga.

6

REPRESENTACION DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

El diagrama completo para un sistema trifásico rara vez es necesario para llevar la más uniforme y detallada información acerca del sistema. De hecho, el diagrama completo frecuentemente esconde, en vez de clarificar, la información que buscamos desde el punto de vista del sistema. En este capítulo vemos lo que significa un diagrama unifilar y cómo éste describe el sistema.

De gran importancia es la introducción de cantidades por unidad, que se usan en muchos cálculos en lugar de voltios, amperios y otras unidades semejantes. Aunque el concepto de por unidad es muy simple su aplicación a circuitos trifásicos requiere clarificación.

Algunas de las ayudas para el cálculo, tales como tablas para el cálculo cc y ac, se mencionan, aunque el computador digital los tiene casi desplazados como dispositivo sobre el cual un sistema de potencia puede representarse. El uso del computador digital en varios problemas de ingeniería en redes se justifica ampliamente así, como en los demás tópicos presentados.

6.1 DIAGRAMA UNIFILAR

Un sistema trifásico equilibrado se resuelve siempre como un circuito monofásico, formado por una de las tres líneas y un neutro de retorno; por esta razón, muy rara vez, es necesario representar en el esquema del circuito, más de una fase y el neutro. Con frecuencia se

hace todavía otra simplificación mayor, suprimiendo el cierre del circuito por el neutro e indicando sus partes componentes por medio de símbolos normalizados, mejor que por sus circuitos equivalentes. Los parámetros del circuito no se indican, y la línea de transmisión se representa por una sola línea entre los dos extremos. Al diagrama resultante de esta simplificación de un sistema eléctrico se le llama diagrama unifilar. Representa por medio de una línea simple y de símbolos normalizados, a las líneas de transmisión y aparatos asociados de un sistema eléctrico.

El objeto de un diagrama unifilar es suministrar de manera concisa los datos más significativos e importantes de un sistema. La importancia de las diferentes características de un sistema varía según el problema que se considere y la cantidad de información que se incluye en el diagrama depende del fin para el que se desea. Por ejemplo, la colocación de los interruptores y los relés no tiene importancia en un estudio de cargas; por tanto, éstos no se podrán si el fin primario del diagrama es realizar tal estudio. Por otra parte, la determinación de la estabilidad de un sistema en condiciones de régimen transitorio, resultantes de un fallo, depende de la velocidad con la que los relés e interruptores del circuito aislen la parte con fallo del sistema. Por tanto, la información sobre los interruptores puede ser de importancia trascendental. Algunas veces, los diagramas unificilares incluyen información sobre los transformadores de corriente y de tensión que unen los relés al sistema o que están instalados para medida. La información contenida, pues, en un diagrama unifilar, varía según el problema que se estudia y según la práctica de la compañía en particular que lo prepare.

La "American National Standards Institute" (ANSI) y el "Institute of Electrical and Electronic Engineers" (IEEE) han publicado un conjunto de símbolos normalizados para los diagramas eléctricos¹. No todos los autores siguen esos símbolos de una forma consistente especialmente en la representación de transformadores. La fig. 6.1 muestra algunos símbolos comúnmente usados. El símbolo básico para una máquina o inducido giratorio es un círculo, pero hay relacionadas tantas adaptaciones del símbolo básico, que pueden ser representadas todas las partes de la maquinaria eléctrica giratoria de uso corriente. Para el que no trabaje constantemente con diagramas unificilares es más claro indicar una máquina determinada por medio del símbolo básico seguido de información sobre su tipo y régimen.

Es importante conocer la situación de los puntos en los que un sistema está unido a tierra, con objeto de calcular la corriente que circula cuando se produce un fallo asimétrico que incluye la tierra. El símbolo normalizado para designar una estrella trifásica con el neutro a tierra, se ha representado en la fig. 8.1. Si se intercala una resistencia o una reactancia entre el neutro de la estrella y tierra para limitar la corriente a tierra durante un fallo, pueden añadirse los símbolos adecuados al símbolo normalizado de la estrella a tierra. Muchos transformadores en sistemas de transmisión son puestos a tierra firmemente. Los neutros de los generadores son generalmente puestos a tierra a través de altas resistencias y se han hecho algunos experimentos en los EE.UU. con neutros de generadores puestos a tierra a través de una reactancia inductiva sintonizada en paralelo con la capacitancia

¹ Véase *Graphic Symbols for Electrical and Electronics Diagrams* Y 32.2-1971, American National Standards Institute, Nueva York, o IEEE Std 315-1971.

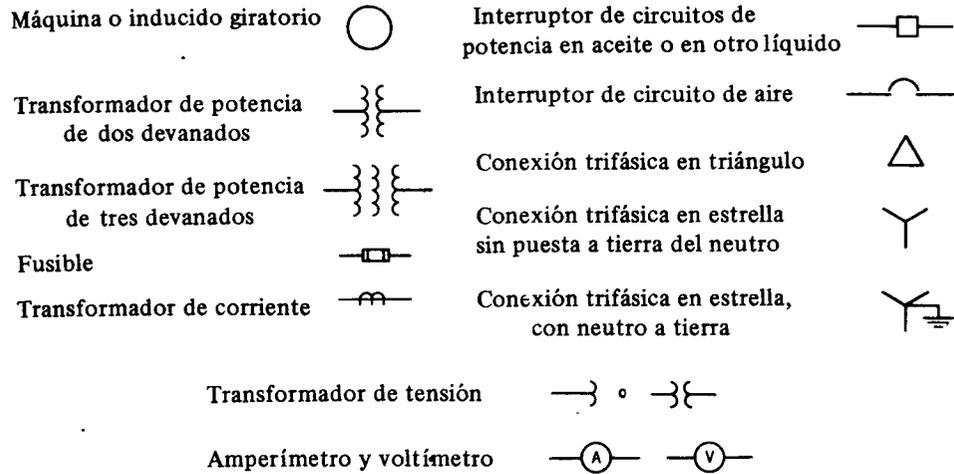


Fig. 6.1 Símbolos de aparatos.

distribuida a tierra del generador, de los bobinados de transformadores de baja tensión y de la línea entre el transformador y el generador². Tal bobina se llama *neutralizador de fallos a tierra*, y también puede usarse entre neutros de transformadores y tierra.

La fig. 6.2 es el diagrama unifilar de un sistema muy sencillo. Dos generadores, uno puesto a tierra por una reactancia y el otro por una resistencia, están conectados a una barra y, a través de un transformador elevador, a una línea de transporte. Un tercer generador, puesto a tierra por una reactancia, está conectado a una barra y, por un transformador, al otro extremo de la línea de transporte. A cada barra está unida una carga. En el diagrama se incluyen datos sobre las cargas, régimen de los generadores y transformadores y las reactancias de las diversas partes del circuito. La resistencia se desprecia muchas veces al efectuar cálculos de fallos y se omite en la información que acompaña a la fig. 6.2. Para los estudios de cargas hay que incluir las resistencias.

Las reactancias especificadas para los generadores en la fig. 6.2 se conocen como *reactancias subtransitorias*. El estudio de la maquinaria de corriente alterna, demuestra que la corriente que circula inmediatamente después de producirse un fallo, depende de un valor de la reactancia en el generador o el motor, que es diferente del valor que la determina en condiciones de régimen permanente. En el cap. 9 estudiamos el circuito equivalente al generador síncrono para el estado estacionario. En el cap. 11 se estudia la reactancia sobre condiciones transitorias. Por ahora sólo es necesario saber que la reactancia en el circuito equivalente de una máquina giratoria está en serie con un fem generado internamente. Los nombres con los cuales se identifican esas reactancias no tienen por qué causar confusión.

² Para un estudio de la teoría de neutralizadores de fallas a tierra, véase E.T.B. Gross y E.M. Gulachenski, *Experience of the New England Electric Company With Generator Protection by Resonant Neutral Grounding*, IEEE Trans. PAS, Vol. 92, No. 4, págs. 1186-1194, 1973.



No. 1, Generador-20 000 kVA; 6,6 kV; $X'' = 0,655$ ohmios
 No. 2, Generador-10 000 kVA; 6,6 kV; $X'' = 1,31$ ohmios
 No. 3, Generador-30 000 kVA; 3,81 kV; $X'' = 0,1452$ ohmios
 T_1 y T_2 , transformadores en banco trifásico, cada uno de ellos, 10.000 kVA; 3,81-38,1 kV; $X = 14,52$ referidos al lado de alta tensión.
 Reactancia de la línea de transporte = 17,4 ohmios.
 Carga A = 15.000 kW; 6,6 kV; f. de p. = 0,9 en retardo.
 Carga B = 30 000 kW; 3,81 kV; f. de p. = 0,9 en retardo.

Fig. 6.2 Diagrama unifilar de un sistema eléctrico.

6.2 DIAGRAMAS DE IMPEDANCIA Y REACTANCIA

Para estudiar el comportamiento de un sistema en condiciones de carga o al presentarse un cortocircuito, el diagrama unifilar tiene que transformarse en un diagrama de impedancias que muestre el circuito equivalente de cada componente del sistema, referido al mismo lado de uno de los transformadores. La fig. 6.3 representa el diagrama detallado de impedancias correspondientes al sistema de la fig. 6.2. El circuito equivalente de la línea de transporte se representa, con exactitud suficiente, por el H nominal que tenga la resistencia total y la reactancia inductiva de la línea en su brazo en serie y la capacidad total al neutro, dividida entre sus brazos en paralelo. En cada transformador se muestran la resistencia, la reactancia de dispersión y el paso para la corriente magnetizante. Cada generador está representado por la tensión generada en serie con valores adecuados de resistencia y reactancia. Si hay que hacer un estudio de cargas, las cargas en retraso A y B están representadas por una resistencia y una reactancia inductiva en serie. El diagrama de impedancias no incluye las impedancias limitadoras de corriente, representadas en el diagrama unifilar entre los neutros de los generadores y tierra, porque en condiciones de equilibrio, no circulan corrientes por la tierra y los neutros de los generadores están al mismo

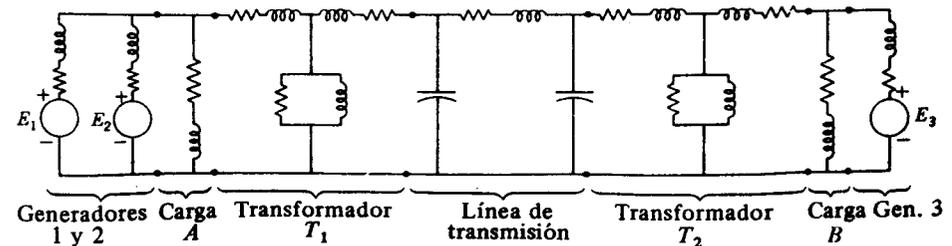


Fig. 6.3 Diagrama de impedancias correspondientes al diagrama unifilar de la fig. 6.2.

potencial que el neutro del sistema. Puesto que la corriente magnetizante de un transformador es, generalmente, insignificante comparada con la corriente de plena carga, la admitancia en paralelo se suprime normalmente en el circuito equivalente del transformador.

Como se ha mencionado antes, la resistencia se omite algunas veces aún en programas de computador digital. Por supuesto, esta supresión de la resistencia introduce errores, pero los resultados pueden ser satisfactorios ya que la reactancia inductiva de un sistema es mucho mayor que su resistencia. La resistencia y la reactancia inductiva no se suman directamente y la impedancia no es muy diferente de la reactancia inductiva si es pequeña la resistencia. Las cargas que no incluyen maquinaria giratoria, tienen poco efecto sobre la corriente total de la línea durante un fallo, por lo que, frecuentemente, se omiten. Por el contrario, las cargas con motores síncronos se incluyen siempre al hacer cálculos de fallos, porque sus f.e.m. generadas contribuyen a la corriente de cortocircuito. Si el diagrama se ha de utilizar para determinar la corriente, inmediatamente después de producirse un fallo, deben tenerse en cuenta los motores de inducción, con una f.e.m. generada en serie con una reactancia inductiva. Los motores de inducción se ignoran en el cálculo de la corriente, unos pocos ciclos después de que se produzca el fallo, porque la corriente con que un motor de inducción contribuye, desaparece muy rápidamente al quedar el motor en cortocircuito.

Si queremos simplificar nuestros cálculos de la corriente de fallo, suprimiendo todas las resistencias, la corriente magnetizante de cada transformador y la capacidad de la línea de transporte, el diagrama de impedancia se reduce al diagrama de reactancias de la fig. 6.4. Estas simplificaciones se aplican únicamente al cálculo de la falla y no a los estudios de flujo de carga, los cuales son objeto del cap. 8.

Los diagramas de impedancias y reactancias aquí estudiados, se llaman algunas veces, diagramas de secuencia positiva, puesto que representan impedancias para las corrientes equilibradas de un sistema trifásico simétrico. El significado de esta designación aparecerá claro en el cap. 12.

Cuando se representa un transformador por un circuito equivalente, no hay transformación de tensión correspondiente a la transformación de tensión entre los lados de alta y baja tensión del transformador real. La corriente en ambos extremos del circuito equivalente es idéntica si se desprecia la corriente magnetizante. En un transformador real, la corriente en los arrollamientos de alta y baja tensión sería idéntica únicamente para igual número de vueltas en el primario y en el secundario, despreciando la corriente magnetizante. En un circuito en el que los transformadores están representados por sus circuitos equivalentes, las impedancias adecuadas son las del circuito real, referido al lado del transformador para el que se construye el circuito equivalente.

Las impedancias del diagrama de la fig. 6.4 están en ohmios, respecto al circuito de alta tensión. Como la línea de transporte que se considera es la parte de alta tensión del circuito, no es necesaria corrección en el valor de la reactancia colocada en el circuito equivalente para representar la línea de transporte. La información contenida en el diagrama unifilar, especifica la reactancia de dispersión de los transformadores de alta tensión no siendo necesaria corrección en los valores de la reactancia de pérdida en el circuito equivalente.

La teoría de los transformadores demuestra que la impedancia del secundario de un transformador puede referirse a la del primario, multiplicando dicha impedancia por el cuadrado del cociente de las vueltas del arrollamiento primario y del secundario. Los

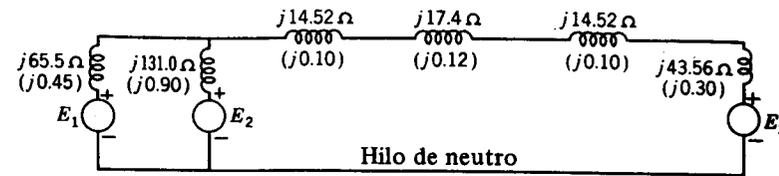


Fig. 6.4 Diagrama de reactancias adaptado de la fig. 6.3, suprimiendo todas las cargas, resistencias y admitancias en paralelo. Las reactancias están en ohmios referidos a los lados de alta tensión de los transformadores. Los valores entre paréntesis son reactancias por unidad, con base de 30.000 kVA y 66 kV.

generadores de la fig. 6.2 están en los lados de baja tensión de los transformadores, y sus reactancias deben referirse al circuito de alta tensión para el que se ha dibujado la fig. 6.4.

Los generadores 1 y 2 están conectados al circuito de alta tensión a través de transformadores; comúnmente podríamos esperar un transformador simple trifásico conectado internamente Y-Y. Tres transformadores monofásicos se describen aquí para resaltar el hecho de que cada fase se considera separadamente como parte de un sistema trifásico. La teoría es la misma para un transformador trifásico que para un banco de tres fases de transformadores monofásicos. La fig. 6.5 se aplica en cualquier caso para una conexión Y-Y. Los enrollados del transformador están representados esquemáticamente, y las fases de los enrollados primario y secundario dibujados en direcciones paralelas sobre el mismo transformador monofásico o para la unidad trifásica sobre la misma sección de núcleo magnético y enlazados por flujos idénticos excepto para pérdidas. La reactancia de 0.655 en fase del generador 1 está (en serie con el voltaje interno) a través del enrollado de 3.81 kV del transformador sin que importe si hay o no conexión entre el neutro del generador y la carga, puesto que el sistema está balanceado. El término del lado de alta tensión del transformador la impedancia es $0.655 \times (38.1/3.81)^2 = 65.5 \Omega$. Análogamente, en términos de alta tensión la reactancia del generador 2 es 131,0 Ω .

El procedimiento en el caso del generador 3, que está conectado a la línea por un transformador Δ -Y, no es tan obvia. La conexión del transformador se muestra en la fig. 6.6a. El generador, conectado en Y, está sobre el lado Δ del transformador. El voltaje de línea de 66 kV sobre el lado Y se reduce a 3.81 kV en el lado de baja tensión. En

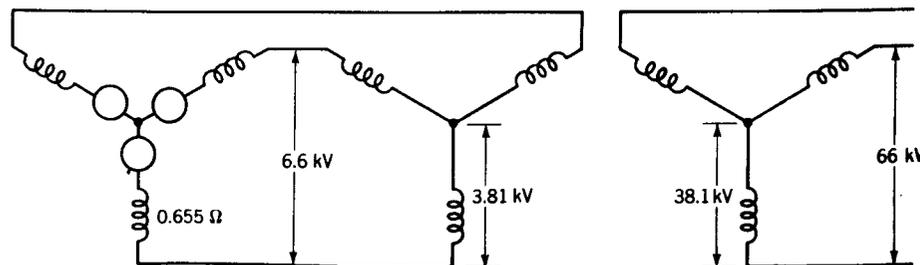


Fig. 6.5 Parte del circuito trifásico de la fig. 6.2 que muestra el generador 1 y el transformador T_1 .

cuanto se refiere a la tensión en el terminal de baja tensión, el transformador Y-Δ puede remplazarse por un banco transformador Y-Y que tiene una relación de espiras para cada transformador individual (o para cada par de enrollamientos por fase de un transformador trifásico) de 38.1/2.2 kV, como se indica en la fig. 6.6b. Los transformadores de las figuras 6.6a y b son equivalentes si no tenemos en cuenta los desplazamientos de fase. Como veremos en el cap. 12, hay un corrimiento de fase de los voltajes entre los lados de un transformador Δ-Y, el cual no necesitamos considerar aquí. La fig. 6.6b nos muestra que, vista desde el lado de alta tensión del transformador, la reactancia del generador 3 es $(38.1/2.2)^2 \times 0.1452 = 43.56 \Omega$. Este factor de multiplicación es $(\sqrt{3} \times 10)^2$, que equivale al cuadrado de la relación de espiras de los enrollados individuales del transformador Y-Δ.

Este estudio nos lleva a la conclusión de que para transferir el valor óhmico de la impedancia desde el nivel de voltaje sobre un lado del transformador trifásico hasta el nivel de voltaje en el otro lado, el factor de multiplicación es el cuadrado de la relación de los voltajes línea a línea sin que importe si la conexión del transformador es Y-Y o Δ-Y.

6.3 CANTIDADES POR UNIDAD

La tensión, la corriente, los kVA y la impedancia de un circuito se expresan frecuentemente en por ciento o por unidad de un valor base o de referencia que se elige para cada una de tales magnitudes. Por ejemplo, si se elige una tensión básica de 120 kV, las tensiones, cuyos valores sean 108, 120 y 126 kV se transforman en 0.90, 1.00 y 1.05 por unidad, ó 90, 100 y 105%, respectivamente. El valor por unidad de una magnitud cualquiera se define como la razón de su valor al valor base, expresado como un decimal. El valor por cien es igual a 100 veces el valor por unidad. Los métodos de cálculo que utilizan los valores por unidad o por ciento son mucho más sencillos que usando los valores reales en amperios, ohmios y voltios. El método por unidad tiene una ventaja sobre el método por ciento y es que el producto de dos magnitudes expresadas por unidad, viene, a su vez, expresado por unidad, en tanto que el producto de dos magnitudes en por ciento, tiene que dividirse por 100 para obtener el resultado en por ciento.

Las tensiones, corrientes, kVA y reactancias, están relacionadas entre sí, de tal forma que la elección de valores base para dos cualesquiera determina los valores base de las otras dos. Si se especifican los valores básicos de la corriente y la tensión, pueden ser determinados la impedancia base y los kVA básicos. La impedancia base es aquella que da lugar, a lo largo de ella, a una caída de tensión igual a la tensión base, cuando la corriente que circula por dicha impedancia sea igual al valor básico de la corriente. Los kVA básicos, en sistemas monofásicos, son el producto de la tensión base en kV por la corriente base en amperios. Normalmente, las magnitudes elegidas para seleccionar la base son los kVA y la tensión, en kV. En sistemas monofásicos o en sistemas trifásicos en los que el término "corriente" se refiere a la corriente de línea, el término tensión se refiere a la tensión respecto al neutro y los kVA son kVA por fase, relacionándose las diversas magnitudes por las fórmulas siguientes:

$$\text{Corriente base A} = \frac{\text{kVA}_{1\phi} \text{ base}}{\text{tensión base en kV}_{LN}} \quad (6.1)$$

$$\text{Impedancia base} = \frac{\text{tensión base } V_{LN}}{\text{corriente base en A}} \quad (6.2)$$

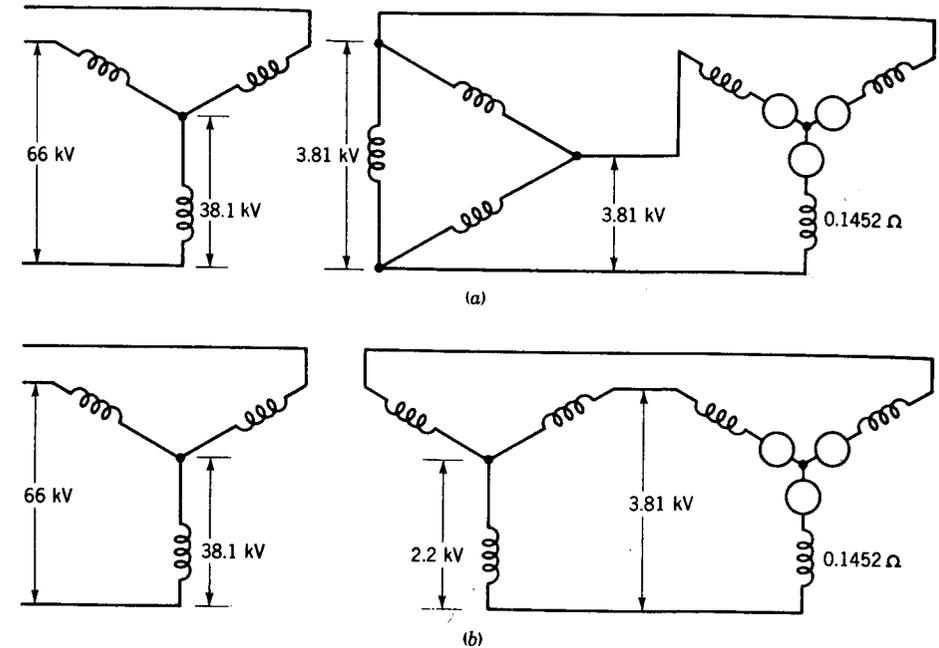


Fig. 6.6 Parte del circuito trifásico correspondiente a la fig. 6.3 indicando el generador 3 con (a) el transformador T_3 y (b) el equivalente Y del transformador T_3 .

$$\text{Impedancia base} = \frac{(\text{tensión base en kV}_{LN})^2 \times 1000}{\text{kVA}_{LN} \text{ base}} \quad (6.3)$$

$$\text{Impedancia base} = \frac{(\text{tensión base en kV}_{LN})^2}{\text{MVA}_{1\phi} \text{ base}} \quad (6.4)$$

$$\text{Potencia base en kW}_{1\phi} = \text{KVA}_{1\phi} \text{ base} \quad (6.5)$$

$$\text{Potencia base en MW}_{1\phi} = \text{MVA}_{1\phi} \text{ base} \quad (6.6)$$

$$\text{Impedancia por unidad de un elemento de circuito} = \frac{\text{impedancia real } \Omega}{\text{impedancia base } \Omega} \quad (6.7)$$

En estas ecuaciones los subíndices 1ϕ y LN indican "por fase" y "línea a neutro" respectivamente, donde las ecuaciones se apliquen a circuitos trifásicos. Si las ecuaciones se emplean para un circuito monofásico, kV_{LN} significa el voltaje a través de la línea monofásica o línea a tierra si un lado de la línea está a tierra.

Como los circuitos trifásicos se resuelven como una línea simple con neutro de retor-

no, las bases para las magnitudes del diagrama de impedancias son kVA por fase y kV de línea a neutro. Los datos se dan normalmente como kVA totales trifásicos o MVA y kV entre líneas. A causa de esta costumbre de especificar la tensión de línea y los kVA o MVA totales, puede originarse una confusión sobre la relación existente entre el valor por unidad de la tensión de línea y el valor por unidad de la tensión de fase. Aunque puede especificarse como base una tensión de línea, la tensión en el circuito monofásico, necesaria para la resolución, es la tensión respecto al neutro. La tensión básica, respecto al neutro, es la tensión básica entre líneas dividida por $\sqrt{3}$. Dado que éste es también el valor de la relación entre las tensiones de línea y respecto al neutro en un sistema trifásico equilibrado, el valor por unidad de una tensión de línea a neutro, con tensión base de línea a neutro, es igual al valor por unidad de la tensión de línea en el mismo punto, con tensión base de línea, si el sistema está equilibrado. De igual forma, los kVA trifásicos son tres veces los kVA por fase y los kVA base trifásica son tres veces los kVA base por fase. Por tanto, el valor por unidad de los kVA, con kVA trifásicos base, es idéntico al valor por unidad de los kVA por fase con kVA por fase básicos.

Un ejemplo numérico puede servir para entender las relaciones discutidas por ejemplo si

$$\text{kVA}_{3\phi} \text{ base} = 30\,000 \text{ kVA}$$

$$\text{kV}_{LL} \text{ base} = 120 \text{ kV}$$

donde los subíndices 3ϕ y LL significan "trifásico" y "línea a línea" respectivamente,

$$\text{kVA}_{1\phi} \text{ base} = \frac{30,000}{3} = 10\,000 \text{ kVA}$$

y

$$\text{kV}_{LN} \text{ base} = \frac{120}{\sqrt{3}} = 69.2 \text{ kV}$$

Para un voltaje red línea a línea de ~~100~~ 108 kV, el voltaje línea a neutro es $108/\sqrt{3} = 62.3$ kV, y

$$\text{voltaje por unidad} = \frac{108}{120} = \frac{62.3}{69.2} = 0.90$$

Para la potencia trifásica total de 18 000 kW, la potencia por fase es 6 000 kW, y

$$\text{potencia por unidad} = \frac{18\,000}{30\,000} = \frac{6\,000}{10\,000} = 0.6$$

Desde luego, en todo lo antedicho, pueden sustituirse kW y kVA por MW y MVA. A menos que se especifique de otra manera, el valor dado para la tensión base de un sistema trifásico es la tensión de línea y el valor dado para los kVA base o MVA base es la total trifásica.

La impedancia base y la corriente base pueden calcularse directamente a partir de los valores trifásicos base en kV y kVA. Si interpretamos que los kVA base y la tensión base en kV son los totales de las tres fases y la tensión base de línea, tenemos:

$$\text{Corriente base A} = \frac{\text{base kVA}_{3\phi}}{\sqrt{3} \times \text{tensión base en kV}_{LL}} \quad (6.8)$$

y de la ec. (6.3)

$$\text{Impedancia base} = \frac{(\text{tensión base en kV}_{LL} / \sqrt{3})^2 \times 1,000}{\text{base kVA}_{3\phi} / 3} \quad (6.9)$$

$$\text{Impedancia base} = \frac{(\text{tensión base en kV}_{LL})^2 \times 1,000}{\text{base kVA}_{3\phi}} \quad (6.10)$$

$$\text{Impedancia base} = \frac{(\text{tensión base en kV}_{LL})^2}{\text{base MVA}_{3\phi}} \quad (6.11)$$

Excepto en lo tocante a los subíndices, las ecs. (6.3) y (6.4) son idénticas a las ecs. (6.10) y (6.11) respectivamente. Los subíndices se han usado para expresar estas relaciones a fin de resaltar la distinción entre trabajar con cantidades trifásicas y cantidades por fase. Usamos estas ecuaciones sin los subíndices pero debemos (1) usar kilovatios línea a línea con kVA o MVA trifásicos y (2) usar kV línea a neutro con kVA o MVA por fase. La ec. (6.1) determina la corriente de base para sistemas monofásicos o para sistemas trifásicos donde las bases se especifican en kVA totales para las tres fases y en kV de línea a línea.

Si queremos convertir los valores en ohmios de las reactancias del diagrama de la fig. 6.4 a valores por unidad, podemos elegir como base 30 MVA y 66 kV, con lo que determinamos la impedancia base, según la ec. (6.11) en la forma siguiente:

$$\text{Impedancia base} = \frac{66^2}{30} = 145.2 \Omega$$

Dividiendo cada uno de los valores de la reactancia óhmica del diagrama por la impedancia base de 145.2 ohmios, se obtendrán los valores por unidad de tales reactancias. Cada una de las reactancias, por unidad, se han puesto en la fig. 6.4 dentro de un paréntesis debajo del valor óhmico correspondiente.

6.4 CAMBIO DE BASE PARA LOS VALORES POR UNIDAD

Algunas veces la impedancia por unidad de un componente de un sistema se expresa sobre una base distinta que la seleccionada como base para la parte del sistema en la cual está situado dicho componente. Dado que todas las impedancias de cualquier parte del sistema tienen que ser expresadas respecto a la misma impedancia base, al hacer los cálculos, es preciso tener un medio para pasar las impedancias por unidad de una a otra base. Sustituyendo la expresión de la impedancia base dada por las ecs. (6.3) o (6.10) en la ec. (6.7), tenemos

Impedancia por unidad de un elemento de circuito

$$= \frac{(\text{impedancia real en ohmios}) \times (\text{kVA base})}{(\text{tensión base en kV})^2 \times 1,000} \quad (6.12)$$

que demuestra que la impedancia por unidad es directamente proporcional a los kVA base e inversamente proporcional al cuadrado de la tensión base. Por tanto, para cambiar la impedancia por unidad respecto a una base nueva, se aplicará la ecuación siguiente:

$$\text{por unidad } Z_{\text{nuevos}} = \text{por unidad } Z_{\text{dados}} \left(\frac{\text{base kV}_{\text{dados}}}{\text{base kV}_{\text{nuevos}}} \right)^2 \left(\frac{\text{base kVA}_{\text{nuevos}}}{\text{base kVA}_{\text{dados}}} \right) \quad (6.13)$$

Esta ecuación no tiene ninguna relación con la transferencia del valor óhmico de la impedancia de un lado del transformador al otro. El gran valor de la ecuación está en el cambio de la impedancia por unidad que se da de una base particular a otra base.

EJEMPLO 6.1 La reactancia X'' de un generador es 0.20 por unidad basada en la placa del generador de 13.2 kV, 30 000 kVA. La base para los cálculos es 13.8 kV, 50 000 kVA. Encuentre X'' en esta nueva base.

Solución

$$X'' = 0.20 \left(\frac{13.2}{13.8} \right)^2 \frac{50}{30} = 0.306 \text{ por unidad}$$

6.5 SELECCIÓN DE LA BASE PARA LOS VALORES POR UNIDAD

La selección de los valores base de kVA y kV se hace con el objeto de reducir al mínimo, en la medida de lo posible, el trabajo exigido por el cálculo. Primero se selecciona una base para una parte del circuito. Después debe determinarse, de acuerdo con los principios que se desarrollarán en esta sección, la base en otras partes del circuito, separadas de la parte primera por transformadores. La base elegida debe ser tal que lleve a valores por unidad de la tensión y corriente de régimen, aproximadamente iguales a la unidad, de forma que se simplifique el cálculo. Se ahorrará mucho tiempo si la base se selecciona de forma que pocas magnitudes, por unidad, ya conocidas, tengan que convertirse a una nueva base.

Cuando un fabricante da la resistencia y la reactancia de un aparato en por ciento o por unidad, se sobreentiende que las bases son valores de kVA y kV nominales del aparato. Hay tablas disponibles que dan los valores aproximados de las impedancias por unidad de transformadores, generadores, motores síncronos y motores de inducción¹. Los valores obtenidos de las tablas están basados en valores medios para aparatos de tipo y tamaño similar. Como los motores, normalmente, se especifican por los valores nominales de caballos de vapor y tensión, los kVA nominales pueden determinarse solamente si se conocen el rendimiento y el factor de potencia. Si se carece de información sobre el rendimiento y el factor de potencia, pueden utilizarse las relaciones siguientes deducidas de valores medios para cada tipo particular de motor:

Motores de inducción

$$\text{kVA} = \text{Caballos de vapor}$$

Motores síncronos:

¹ Las tablas A.4 y A.5 dan algunos valores representativos. Otros valores pueden hallarse en "Electrical Transmission and Distribution Reference Book", 4a. ed., East Pittsburgh, Pa., 1964, publicado por los "Central Station of Westinghouse Electric Corporation". D.G. Fink y J.M. Carroll "Standard Handbook for Electrical Engineers", 10 ed. McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1969.

Con factor de potencia por unidad:

$$\text{kVA} = 0.85 \times \text{Caballos de vapor}$$

Con factor de potencia 0.8:

$$\text{kVA} = 1.10 \times \text{Caballos de vapor}$$

Los valores de la resistencia óhmica y de la reactancia de pérdida de un transformador dependen de que se midan en el lado de alta o baja tensión del transformador. Si se expresan por unidad, los kVA base se sobreentiende que son los nominales del transformador. La tensión base se sobreentiende que es la tensión nominal en el arrollamiento de baja tensión del transformador y la tensión nominal en el arrollamiento de alta tensión, si están referidos al lado de alta del transformador. La impedancia por unidad de un transformador es la misma, no importa si se determina desde los valores óhmicos referidos a los lados de alta o baja tensión de los transformadores, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.2 Un transformador monofásico se especifica como 110/440 V, 2.5 kVA. La reactancia de pérdidas medida desde el lado de baja tensión es 0.60 Ω . Determinar la reactancia de pérdidas por unidad.

Solución

$$\text{Impedancia base de baja tensión} = \frac{0.110^2 \times 1\,000}{2.5} = 4.84 \, \Omega$$

En por unidad

$$X = \frac{0.06}{4.84} = 0.0124 \text{ por unidad}$$

Si la reactancia de pérdidas se ha medido en el lado de alta tensión el valor es

$$X = 0.06 \left(\frac{440}{110} \right)^2 = 0.96 \, \Omega$$

$$\text{Impedancia base de alta tensión} = \frac{0.440^2 \times 1\,000}{2.5} = 77.5 \, \Omega$$

En por unidad

$$X = \frac{0.96}{77.5} = 0.0124 \text{ por unidad}$$

Se consigue una gran ventaja en el cálculo por unidad, por selección adecuada de bases diferentes para circuitos interconectados por un transformador. Para conseguir esta ventaja en un sistema monofásico, las tensiones base para circuitos conectados por un transformador deben estar en la misma relación que el número de vueltas de los devanados del transformador. Con esta elección de tensiones base y los mismos kVA base, el valor por unidad de una impedancia será el mismo si se expresa respecto a la base elegida para su propio lado del transformador que si se refiere al otro lado del transformador y se expresa respecto a la base de este lado.

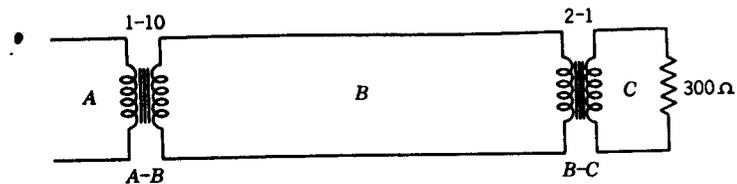


Fig. 6.7 Circuito del ej. 6.3.

EJEMPLO 6.3 Las tres partes de un sistema eléctrico monofásico, designadas por *A*, *B*, *C*, están interconectadas por medio de transformadores en la forma representada en la fig. 6.7. Los transformadores tienen las características siguientes:

A-B 10000 kVA; 13.9-138 kV; reactancia de dispersión, 10%

B-C 10000 kVA; 69-138 kV; reactancia de dispersión, 8%

Si en el circuito *B* se toman como base 10 000 kVA y 138 kV, determinar la impedancia por unidad de una carga óhmica pura de 300 ohmios en el circuito *C*, referida a los circuitos *C*, *B* y *A*. Dibujar el diagrama de impedancias despreciando la corriente magnetizante, las resistencias de los transformadores y las impedancias de línea. Determinar la regulación de tensión si la tensión en la carga es de 66 kV, con la hipótesis de que la tensión de entrada al circuito *A* permanece constante.

Solución

La tensión base para el circuito *A* = $0.1 \times 138 = 13.8$ kV

La tensión base para el circuito *C* = $0.5 \times 138 = 69$ kV

La impedancia base del circuito *C* = $\frac{69^2 \times 1000}{10000} = 476 \Omega$

La impedancia de carga, por unidad, en el circuito *C* = $\frac{300}{476} = 0.63$ p.u.

Como la selección de base en las diversas partes del circuito se determinó por la relación de vueltas de los transformadores, la impedancia por unidad de la carga, referida a cualquier parte del sistema, será la misma. Esto se comprueba como sigue:

Impedancia base del circuito *B* = $\frac{138^2 \times 1000}{10000} = 1900$

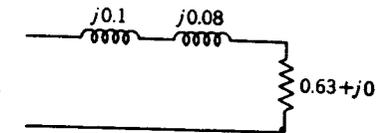
Impedancia de carga, referida al circuito *B* = $300 \times 2^2 = 1200$

Impedancia de carga, por unidad, referida a *B* = $\frac{1200}{1900} = 0.63$ por unidad

Impedancia base del circuito *A* = $\frac{13.8^2 \times 1000}{10000} = 19$

Impedancia de carga, por unidad, referida a *A* = $300 \times 2^2 \times 0.1^2 = 12 \Omega$

Fig. 6.8 Diagrama de impedancias del ej. 6.3. Impedancias por unidad.



Impedancia de carga referida a *A* = $\frac{12}{19} = 0.63$ por unidad

La fig. 6.8 es el diagrama de impedancias pedido, con las impedancias dadas por la unidad.

El cálculo del factor de regulación se lleva a cabo en la forma siguiente:

Tensión en la carga = $\frac{66}{69} = 0.957 + j0$ por unidad

Corriente de carga = $\frac{0.957 + j0}{0.63 + j0} = 1.52 + j0$ por unidad

Tensión de entrada = $(1.52 + j0)(j0.10 + j0.08) + 0.957$

= $0.957 + j0.274 = 0.995$ por unidad

Tensión de entrada = tensión en la carga, eliminándola

Por tanto,

Regulación = $\frac{0.995 - 0.957}{0.957} \times 100 = 3.97\%$

La ventaja antes señalada es la causa de que el principio seguido en el ejemplo anterior de selección de base para las diversas partes del sistema, se siga siempre al efectuar cálculos por unidad o por ciento. La base debe ser la misma en todas las partes del sistema y la elección de kV base en una parte de él determina los kV base que deben asignarse, de las otras partes del sistema. Siguiendo este principio de asignar kV base, es posible combinar en un diagrama de impedancias las impedancias por unidad determinadas en las diferentes partes del sistema.

Si se aplica el ejemplo anterior a un sistema trifásico, las tensiones base en los dos lados del transformador deben estar en la misma relación que las tensiones nominales de línea a neutro en ambos lados del transformador y que el número de espiras de los devanados de un transformador estrella-estrella. Por ejemplo, una base de 66 kV y 30 000 kVA en la línea de la fig. 6.2 exigirá una base de 3,81 kV, 30000 kVA para el circuito que contiene el generador 3 y una base de 6,6 kV para el circuito de los generadores 1 y 2. La reactancia por unidad del generador 3 es, según la ec. (6.12),

$\frac{0.1452 \times 30000}{3.81^2 \times 1000} = 0.30$ por unidad

La reactancia referida al circuito de alta tensión es de 43,56 Ω , y, por unidad, sobre la base de 66 kV, vale

$\frac{43.56 \times 30000}{66^2 \times 1000} = 0.30$ por unidad

De igual forma puede verificar el lector que las reactancias por unidad de los generadores 1 y 2 son 0.45 y 0.90, respectivamente, tanto si se calcula sobre base de 6.6 kV en su propio circuito o referido al lado de alta tensión y calculado sobre base de 66 kV. Así pues exactamente igual que en un sistema monofásico, el principio de selección de base en partes diferentes de un sistema trifásico, nos permite combinar en un diagrama de impedancias las impedancias por unidad calculadas en distintas partes del sistema, independientemente de que los transformadores estén conectados en Y-Y o en Δ-Y. Desde luego el principio es igualmente aplicable si los transformadores están conectados en Δ-Δ, ya que la transformación de tensiones es la misma que la realizada por transformadores Y-Y con los mismos valores nominales de tensión de línea a línea.

Examinemos la impedancia por unidad (resistencia y reactancia de pérdidas o de dispersión) para representar un transformador, excluyendo la corriente de magnetización, en un diagrama de impedancias en donde los voltajes base a los lados del transformador están en la misma proporción que los voltajes línea a línea nominales. Como ejemplo consideremos un transformador trifásico con especificaciones 10 000 kVA, 138 kV, con una reactancia de pérdidas del 10% y una base de 10 000 kVA, 138 kV sobre el lado de alta tensión. La resistencia y la reactancia de pérdidas de un transformador se miden en las enrollados de alta y baja tensión midiendo la impedancia de un lado cuando el otro está en corto circuito. La *R* y *X* medidas son la suma de los valores de alta y baja tensión referidos al lado del transformador donde se hizo la medición. Puesto que hacemos los cálculos sobre una base de línea a neutro, debemos determinar la impedancia de línea a neutro de una fase en el lado *Y* o en el lado *Y* equivalente de *A*. Si la reactancia de pérdida se especificó como 10%, la reactancia de cada fase medida a neutro sobre el lado de alta tensión es:

$$0.1 \frac{138^2}{10} = 190.4 \Omega$$

La razón de vueltas de los enrollados es

$$\frac{138/\sqrt{3}}{13.8} = 5.77$$

Si la reactancia de un enrollado de baja tensión se mide con el lado de alta tensión en corto circuito el valor es

$$190.4 \left(\frac{1}{5.77} \right)^2 = 5.72 \Omega$$

Sin embargo, puesto que los enrollados de baja tensión están conectados Δ, el valor de línea neutral para el circuito equivalente, esto es, la reactancia por fase de la *Y* equivalente, es 5.72/3. El voltaje sobre el estator del transformador es 13.8 kV y la reactancia por unidad es

$$\frac{5.72}{3} \frac{10}{13.8^2} = 0.1$$

el cual es el mismo que el valor por unidad sobre el lado *Y*.

Si el lado de baja tensión se conecta en *Y*, la nueva especificación es 10 000 kVA,

138-23.9 kV. El voltaje base para el lado de baja tensión es entonces 23.9 kV y el valor óhmico de 5.72 Ω es ahora la reactancia línea a neutro cuyo valor por unidad es:

$$5.72 \frac{10}{23.9^2} = 0.1$$

el cual es nuevamente el mismo que el valor por unidad en el lado *Y*.

Este razonamiento puede ser extendido al caso Δ-Δ con iguales resultados. Concluimos que la correcta selección de la base hace que los valores de resistencia y reactancia de pérdidas para un transformador sean los mismos en los lados de alta y baja tensión sin que interese la conexión trifásica (Y-Y, Δ-Δ, ó Δ-Y).

A fin de preparar un diagrama de impedancia con impedancias por unidad, empezamos con el diagrama unifilar y la información nominal impresa en motores, generadores y transformadores y sus valores óhmicos o impedancias por unidad más los datos acerca de las líneas de transmisión. Los siguientes puntos deben tenerse en cuenta.

- 1 Una base en kV y una base en kVA se selecciona en una parte del sistema. Los valores base para un sistema trifásico se entiende que son kV línea a línea y kVA o MVA trifásicos.
- 2 Para otras partes del sistema, esto es, en otros lados de transformadores, los kV base para cada parte se determinan de acuerdo con la razón de voltaje línea a línea de los transformadores. Los kVA base serán los mismos en todas las partes del sistema. Será de gran ayuda marcar los kV base de cada parte del sistema sobre el diagrama unifilar.
- 3 La información de impedancia disponible para transformadores, trifásicos generalmente se da en términos de unidades o por ciento y es de la base determinada por las especificaciones.
- 4 Para tres transformadores monofásicos conectados como unidad trifásica las especificaciones trifásicas se extraen de la especificación monofásica de cada transformador individual. La impedancia en porcentajes para la unidad trifásica es la misma que para cada transformador individual.
- 5 La impedancia por unidad dada sobre una base diferente a la determinada para la parte del sistema en el cual está localizado el elemento se cambia por medio de la ec. (6.13) a la base adecuada.

EJEMPLO 6.4 Un generador trifásico de 30 000 kVA y 13.8 kV tiene una resistencia subtransitoria del 15%. El generador alimenta a dos motores a través de una línea de transporte, con transformadores en ambos extremos, tal como se representa en el diagrama unifilar de la fig. 6.9. Los motores tienen como entradas nominales 20 y 10 000 kVA, ambos a 12.5 kV, con $X'' = 20\%$. El transformador trifásico T_1 tiene como valores nominales 35,000 kVA, 13.2 Δ-115 Y kV, con reactancia de dispersión del 10%. El transformador T_2 está compuesto de tres transformadores monofásicos, cada uno especificado como 10 000 kVA 12.5-67 kV con reactancia de dispersión del 10%. La reactancia en serie de la línea de transmisión es 80 Ω. Dibuje el diagrama de reactancia con todas las reactancias indicadas por unidad. Elija la especificación del generador como base en el circuito del generador.

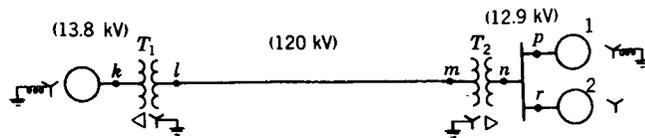


Fig. 6.9 Diagrama unifilar del ej. 6.4.

Solución La especificación del transformador T_2 es

$$3 \times 10\,000 = 30\,000 \text{ kVA}$$

y su razón de voltaje línea a línea es

$$12.5 - \sqrt{3} \times 67 = 12.5 - 116 \text{ kV}$$

Una base de 30,000 kVA, 138 kV en el circuito generador requiere una base de 30 000 kVA en todas las partes del sistema y los siguientes voltajes base:

$$\text{En la línea de transmisión: } 13.8 \frac{115}{13.2} = 120 \text{ kV}$$

$$\text{En el circuito del motor: } 120 \frac{12.5}{116} = 12.9 \text{ kV}$$

Estas bases se muestran entre paréntesis en el diagrama unifilar de la fig. 6.9. Las reactancias de los transformadores convertidas a la base adecuada son:

$$\text{Transformador } T_1: X = 0.1 \frac{30\,000}{35\,000} \left(\frac{13.2}{13.8} \right)^2 = 0.0784 \text{ por unidad}$$

$$\text{Transformador } T_2: X = 0.1 \left(\frac{12.5}{12.9} \right)^2 = 0.0940 \text{ por unidad}$$

La impedancia base de la línea de transmisión es

$$\frac{120^2 \times 1\,000}{30\,000} = 480 \, \Omega$$

y la reactancia de la línea es

$$\frac{80}{480} = 0.167 \text{ por unidad}$$

$$\text{Reactancia del motor 1} = 0.2 \frac{30\,000}{20\,000} \left(\frac{12.5}{12.9} \right)^2 = 0.282 \text{ por unidad}$$

$$\text{Reactancia del motor 2} = 0.2 \frac{30\,000}{10\,000} \left(\frac{12.5}{12.9} \right)^2 = 0.563 \text{ por unidad}$$

La fig. 6.10 es el diagrama de reactancia pedido.

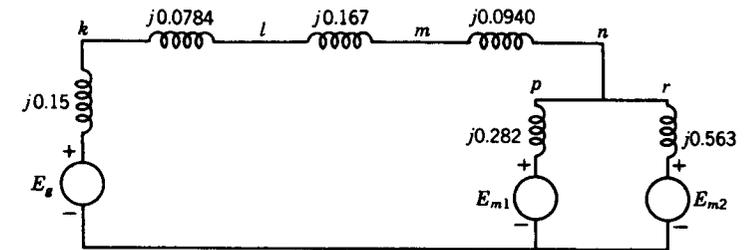


Fig. 6.10 Diagrama de reactancias del ej. 6.4. Reactancias por unidad sobre la base especificada.

EJEMPLO 6.5 Si los motores del ej. 6.4 tienen entradas de 16000 y 18000 kW, respectivamente, a 12,5 kV y ambos operan con un motor de potencia unitario, encuentre el voltaje en los terminales del generador.

Solución Ambos motores toman 24000 kW o

$$\frac{24\,000}{30\,000} = 0.8 \text{ por unidad}$$

Por tanto con $|V|$ e $|I|$ para los motores por unidad:

$$|V| \cdot |I| = 0.8 \text{ p.u.}$$

$$V = \frac{12.5}{12.9} \angle 0^\circ = 0.969 \angle 0^\circ \text{ por unidad}$$

$$I = \frac{0.8}{0.969} \angle 0^\circ = 0.826 \angle 0^\circ \text{ por unidad}$$

En el generador

$$V = 0.969 + 0.826(j0.0784 + j0.167 + j0.094)$$

$$= 0.969 + j0.280 = 1.009 \angle 16.1^\circ \text{ por unidad}$$

El voltaje terminal del generador es

$$1.009 \times 13.8 = 13.92 \text{ kV}$$

6.6 IMPEDANCIA POR UNIDAD DE TRANSFORMADORES DE TRES DEVANADOS

Los arrollamientos primario y secundario de un transformador de dos devanados tienen los mismos kVA nominales, pero los tres arrollamientos de un transformador de tres devanados pueden tener distintos kVA nominales. La impedancia de cada arrollamiento de un transformador de tres devanados puede venir dada en por ciento o por unidad sobre base del valor de régimen de su propio arrollamiento, o pueden realizarse ensayos para determinar las impedancias. En cualquier caso, todas las impedancias por unidad en el diagrama de impedancias deben expresarse respecto a los mismos kVA base.

Pueden medirse tres impedancias por el ensayo normal de cortocircuito, como sigue:

- Z_{ps} = Impedancia de dispersión, medida en el primario con el secundario en cortocircuito, y el terciario abierto.
- Z_{pt} = Impedancia de dispersión, medida en el primario con el terciario en cortocircuito y el secundario abierto.
- Z_{st} = Impedancia de dispersión, medida en el secundario con el terciario en cortocircuito y el primario abierto.

Si las tres impedancias, medidas en ohmios, se refieren a la tensión de uno de los devanados, la teoría de los transformadores demuestra que las impedancias de cada devanado por separado, referidas al mismo devanado, están relacionadas con las medidas en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} Z_{ps} &= Z_p + Z_s \\ Z_{pt} &= Z_p + Z_t \\ Z_{st} &= Z_s + Z_t \end{aligned} \quad (6.14)$$

en las que Z_p , Z_s y Z_t son las impedancias de los devanados primarios, secundario y terciario, referidas al circuito primario si Z_{ps} , Z_{pt} y Z_{st} son las impedancias medidas referidas al circuito primario. Resolviendo las ecs. (6.14), se obtiene

$$\begin{aligned} Z_p &= \frac{1}{2}(Z_{ps} + Z_{pt} - Z_{st}) \\ Z_s &= \frac{1}{2}(Z_{ps} + Z_{st} - Z_{pt}) \\ Z_t &= \frac{1}{2}(Z_{pt} + Z_{st} - Z_{ps}) \end{aligned} \quad (6.15)$$

Las impedancias de los tres arrollamientos (fig. 6.11) están conectadas en estrella para representar el circuito equivalente monofásico del transformador de tres devanados, despreciando la corriente magnetizante.

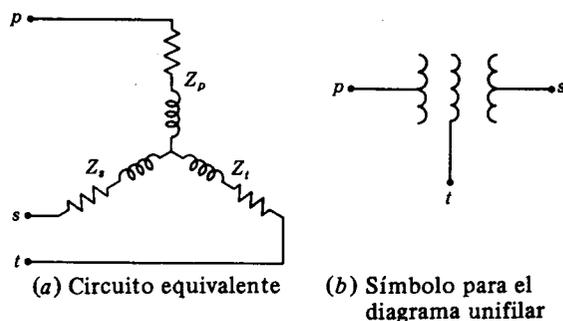


Fig. 6.11 Circuito equivalente de un transformador de tres devanados y símbolo correspondiente que debe utilizarse en el diagrama unifilar. Los puntos p , s y t unen el circuito del transformador a los circuitos equivalentes apropiados que representan las partes del sistema conectados a los arrollamientos primario, secundario y terciario.

El punto común es ficticio y no tiene relación con el neutro del sistema. Los puntos p , s y t están conectados a las partes del diagrama de impedancias que representan las partes del sistema unidas a los devanados primario, secundario y terciario del transformador. Como los valores óhmicos de las impedancias deben estar referidos a la misma tensión, se sigue que la conversión a impedancias por unidad requiere los mismos kVA base para los tres circuitos y tensiones base, en los tres circuitos, que estén en la misma relación que las tensiones de línea a línea nominales de los tres circuitos del transformador.

EJEMPLO 6.6 Los valores nominales trifásicos de un transformador de tres devanados son:

- Primario: Conectado en estrella, 66 kV, 15 MVA
- Secundario: Conectado en estrella, 13.2 kV, 10 MVA
- Terciario: Conectado en triángulo, 2.3 kV, 5 MVA

Despreciando la resistencia, las impedancias de pérdida valen:

$$Z_{ps} = 7\% \text{, sobre base de 15 MVA, 66 kV}$$

$$Z_{pt} = 9\% \text{, sobre base de 15 MVA, 66 kV}$$

$$Z_{st} = 6\% \text{, sobre base de 10 MVA, 13.2 kV}$$

Determinar las impedancias por unidad del circuito equivalente, conectado en estrella, para una base de 10 MVA y 66 kV en el circuito primario.

Solución Con una base en el circuito primario de 15 MVA y 66 kV, las bases adecuadas para las impedancias por unidad del circuito equivalente son 15 MVA, 66 kV para las magnitudes del circuito primario, 15 MVA, 13.2 kV para las del circuito secundario y 15 MVA, 2.3 kV para las del terciario.

Z_{sp} y Z_{pt} se han medido en el circuito primario y están ya, por consiguiente, expresadas en la base adecuada para el circuito equivalente. No es necesario cambio de tensión base para Z_{st} . El cambio de kVA base para Z_{st} se hace en la forma siguiente:

$$Z_{st} = 8\% \times 15/10 = 12\%$$

En por unidad, respecto a la base especificada,

$$Z_p = \frac{1}{2}(j0.07 + j0.09 - j0.12) = j0.02 \text{ por unidad}$$

$$Z_s = \frac{1}{2}(j0.07 + j0.12 - j0.09) = j0.05 \text{ por unidad}$$

$$Z_t = \frac{1}{2}(j0.09 + j0.12 - j0.07) = j0.07 \text{ por unidad}$$

EJEMPLO 6.7 Una fuente de tensión constante (barra infinita) alimenta a una carga óhmica pura de 5 MV y 2.3 kV y a un motor síncrono de 7.5 MVA y 13.2 kV, con una reactancia subtransitoria de $X'' = 20\%$. La fuente está conectada al primario del transformador de tres devanados, descrito en el ej. 6.6. El motor y la carga óhmica están conectados al secundario y al terciario del transformador. Dibujar el diagrama de impedancias por unidad, para una base de 66 kV y 15 MVA en el primario.

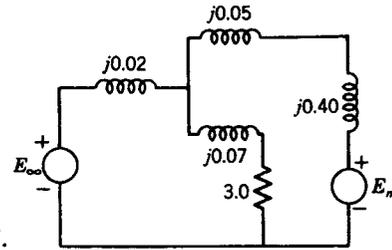


Fig. 6.12 Diagrama de impedancias del ej. 6.7.

Solución La fuente de tensión constante puede ser representada por un generador sin impedancia interna.

La resistencia de la carga es de 1.0 por unidad, sobre base de 5 MVA y 2.3 kV en el terciario. Expresada sobre base de 15 MVA y 2.3 kV, la resistencia de la carga es

$$R = 1.0 \times \frac{15}{5} = 3.0 \text{ por unidad}$$

Cambiando la reactancia del motor a una base de 10.000 kVA y 13.2 kV, se obtiene

$$X'' = 0.20 \frac{15}{7.5} = 0.40 \text{ por unidad}$$

La fig. 6.12 es el diagrama requerido.

6.7 VENTAJAS DE LOS CÁLCULOS POR UNIDAD

Efectuar los cálculos de sistemas eléctricos en función de los valores por unidad representa una enorme simplificación del trabajo. La verdadera apreciación del valor de método por unidad de la experiencia; sin embargo, resumiremos brevemente algunas de sus ventajas.

- 1 Los fabricantes explican normalmente la impedancia de un elemento de un aparato en por ciento o por unidad de los valores nominales que figuran en la placa de características.
- 2 Las impedancias por unidad de máquinas del mismo tipo, con valores nominales dentro de un amplio margen, tienen valores dentro de un margen muy estrecho, aunque los valores óhmicos difieran materialmente para máquinas de distintos valores nominales. Por esta razón, si no se conoce la impedancia, generalmente es posible seleccionarla a partir de datos medios tabulados, que proporcionan un valor razonablemente correcto. La experiencia en el trabajo por unidad familiariza con los valores adecuados de las impedancias por unidad para diferentes tipos de aparatos.
- 3 Si se especifica la impedancia en ohmios en un circuito equivalente, cada impedancia debe referirse al mismo circuito por multiplicación por el cuadrado de la relación de las tensiones nominales de los dos lados del transformador que conecta el circuito de referencia y el circuito que contiene la impedancia. La impedancia por unidad, una vez expresada en la base adecuada, es la misma referida a los dos lados del transformador.
- 4 La forma en que los transformadores se conectan en los sistemas trifásicos no afectan a las impedancias por unidad del circuito equivalente, aunque la conexión determina la relación entre las tensiones base de los dos lados del transformador.

6.8 CUADROS DE CÁLCULO C.C.

Aunque los computadores digitales han reemplazado casi completamente cualquier otro método de cálculo en los problemas de redes, veremos ahora la representación de una red que permite buenos resultados gracias a su simplicidad. En los últimos capítulos estudiaremos en detalle los cálculos de fallas, pero los cuadros de cálculo c.c. descritos aquí nos permitirán un mayor entendimiento del uso de los valores por unidad así como una introducción a un método práctico del cálculo de corrientes de cortocircuito en pequeños sistemas.

En los cuadros, alimentados con corriente continua, se dispone de muchas unidades de resistencia variable que pueden interconectarse por medio de cables flexibles y clavijas similares a las que suelen encontrarse en los cuadros telefónicos operados a mano. Solamente pueden representarse del diagrama de impedancias que se estudia las reactancias inductivas, y cada reactancia está representada en el cuadro por una resistencia. Los generadores y los rotores están reemplazados por una fuente de tensión continua, unida a la red por resistencias que representan la reactancia interna de cada máquina. En un sistema de corriente alterna, la corriente total que circula depende de la amplitud y el ángulo de fase de las tensiones internas de motores y generadores. En el cuadro de c.c. no hay ajuste de las tensiones individuales de motores y generadores y no hay nada que corresponda a las diferencias de fase de las tensiones.

Para estudiar las corrientes de cortocircuito en un cuadro de cálculo de corriente continua, se prepara un diagrama de reactancia a partir de un diagrama unifilar, tal como el de el sistema generador local de una planta industrial, representado en la fig. 6.13. Por supuesto, es preciso disponer de información de la que obtener las reactancias de las líneas y de los transformadores, generadores y motores. Si el sistema local se conecta a un sistema de potencia exterior, tal como en la fig. 6.13, el sistema exterior debe estar representado en el cuadro de cálculo c.c. por una conexión a la alimentación de continua, a través de una reactancia, determinada por la corriente, que el sistema de potencia suministraría por cortocircuito en el punto de conexión.

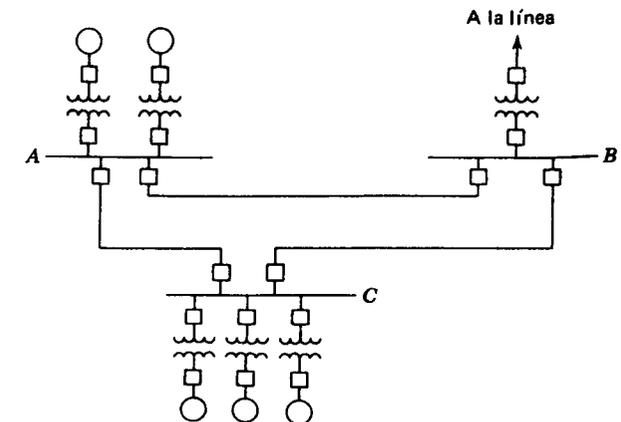


Fig. 6.13 Diagrama unifilar de un típico sistema eléctrico industrial de potencia.

Del teorema de Thévenin se deduce que el sistema eléctrico exterior de potencia está correctamente representado por una tensión y una impedancia en serie. El teorema citado establece que una red lineal que termina en dos puntos *a* y *b* y contiene un número cualquiera de f.e.m. puede ser sustituido por una sola f.e.m. y una impedancia en serie entre *a* y *b*. La f.e.m. es igual a la tensión a circuito abierto medida entre *a* y *b*. La impedancia en serie es la impedancia de la red, medida entre *a* y *b* con las f.e.m. en cortocircuito. Si las f.e.m. son constantes, la impedancia es la tensión a circuito abierto, entre *a* y *b*, dividida por la corriente que circula en un cortocircuito aplicado entre *a* y *b*. Las compañías de suministro de energía eléctrica proporcionan datos sobre las corrientes de cortocircuito I_{sc} , que pueden esperarse a través de sus sistemas. Usualmente los datos suministrados relacionan los MVA de cortocircuito, siendo

$$\text{de cortocircuito MVA} = \sqrt{3} \times (\text{kV nominales}) \times I_{sc} \times 10^{-3} \quad (6.16)$$

Despreciando la resistencia y la capacidad en paralelo, el circuito equivalente monofásico de Thévenin que representa el sistema es una f.e.m. igual a la tensión nominal de la línea dividida por $\sqrt{3}$, en serie con una reactancia inductiva de

$$X_{th} = \frac{(\text{nominales kV} / \sqrt{3}) \times 1000}{I_{sc}} \Omega \quad (6.17)$$

Despejando en la ec. (6.16) I_{sc} y sustituyendo en la ec. (6.17), tenemos

$$X_{th} = \frac{(\text{kV nominales})^2}{\text{MVA de cortocircuito}} \Omega \quad (6.18)$$

Si los kV base son iguales a los kV nominales, pasando a valores por unidad,

$$X_{th} = \frac{\text{base MVA}}{\text{MVA de cortocircuito}} \text{ por unidad} \quad (6.19)$$

$$X_{th} = \frac{I_{base}}{I_{sc}} \text{ por unidad} \quad (6.20)$$

Si el sistema eléctrico de potencia exterior es grande, comparado con el de la planta industrial, las perturbaciones dentro de la fábrica no afectan a la tensión en el punto de conexión. En tal caso se dice que el sistema exterior es una barra infinita y está representado por una tensión constante sin impedancia interna. En la hipótesis de que el sistema exterior sea una barra infinita, el diagrama de reactancias del sistema industrial de la fig. 6.13 se representa en la fig. 6.14, con las reactancias de los componentes del sistema por unidad, respecto a una base determinada seleccionada.

La fig. 6.15 muestra como se establece el sistema en el cuadro de cálculo c.c. Si se eligen 10 voltios para representar una tensión por unidad en el cuadro y 1 000 ohmios es una impedancia por unidad, la corriente base es 10 mA. Todas las f.e.m. internas de las máquinas del sistema de la fábrica y la f.e.m. que representa el sistema de potencia exterior se supone que tienen el mismo valor por unidad, y esta tensión por unidad, respecto a la base utilizada para el cuadro de cálculo, se conecta entre las barras positiva y negativa del cuadro. Las resistencias interconectadas en el circuito del cuadro de cálculo, con una resistencia por unidad igual a 1,000 Ω , están escritas sobre el diagrama, correspondiendo a las

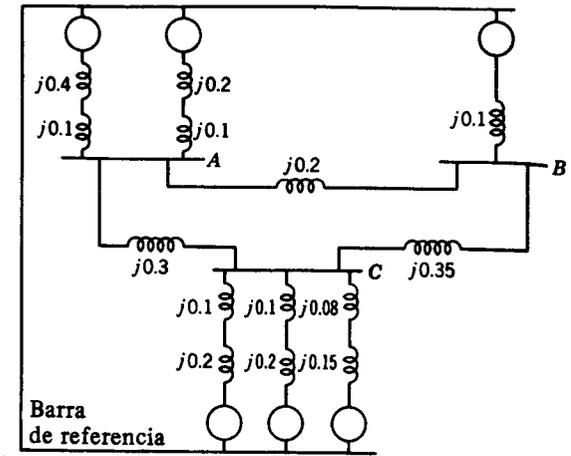


Fig. 6.14 Diagrama de reactancias del sistema de la fig. 6.13. Reactancias por unidad.

reactancias por unidad del diagrama de reactancias. En un sistema se produce un cortocircuito trifásico, si tres impedancias están conectadas en estrella y las tres líneas y si dichas impedancias se reducen a cero. Por consiguiente, un cortocircuito trifásico está representado en el circuito monofásico equivalente por un cortocircuito desde un punto del circuito al retorno común. En un cuadro c.c. esto se lleva a cabo, conectando la barra negativa a la unión de las resistencias que corresponde al punto en el que se produce el cortocircuito. En la fig. 6.15 se simula un cortocircuito trifásico en la barra C, cerrando el interruptor *S*, que corresponde a la conexión del punto C al retorno común en la fig. 6.14. Hasta que se efectúa esta conexión a la barra negativa del cuadro c.c., no circula corriente en el circuito. Intercalando un amperímetro en una rama cualquiera del circuito se obtiene la corriente en tal rama debida al fallo. La corriente puede registrarse en valores por unidad por lectura del amperímetro y ser convertida posteriormente en amperios, multiplicando por la corriente base, o pueden leerse los amperios que circulan en las ramas del cuadro y ser convertidos por medio de un factor a los amperios que circularían en el sistema real.

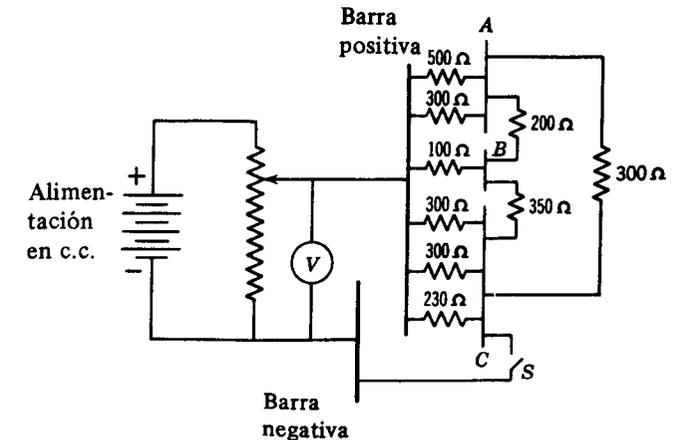


Fig. 6.15 Circuito de un cuadro de cálculo c.c. para representar el sistema de las figs. 6.13 y 6.14.

Si bien la corriente calculada a partir de las lecturas obtenidas en un cuadro de cálculo c.c es debida únicamente al fallo y no incluye la componente de corriente debida a las cargas del sistema, el error debido a la omisión de las corrientes de carga no es excesiva. La corriente total en cualquier parte del sistema durante un fallo, es desde luego, la suma de las componentes debidas a las cargas y debidas al fallo. La componente de la carga es pequeña con la corriente de fallo y la corriente de carga y la corriente de fallo tienen normalmente una diferencia de fase grande. Puede verse fácilmente que la resultante de un vector pequeño y un vector grande muy defasados entre sí tiene un módulo casi igual que el del vector grande. Por consiguiente, la corriente total en una rama durante un fallo es muy aproximadamente de igual valor absoluto que la componente debida solamente al fallo.

6.9 METODOS DE CALCULO

Debido a la complejidad de un sistema de potencia, los ingenieros empezaron a emplear los computadores digitales tan pronto como estos estuvieron disponibles. Antes del desarrollo de los grandes computadores digitales, los ingenieros de sistemas de potencia contaban con cuadros de cálculo c.a., también llamados analizadores de circuitos, en los cuales resistencias, inductancias y capacitancias variables se conectaban para formar una réplica de una fase del sistema real con valores en escala. Los componentes del circuito sobre el cuadro c.a. consisten en el equivalente de cada línea de potencia; son generadores que suministran ajuste independiente de la magnitud del voltaje y el ángulo de fase, unidades para representar cargas, circuitos equivalentes de transformadores y otros dispositivos equivalentes. El suministro de potencia para los cuadros es de 60 a 10000 Hz; muchos han sido, diseñados para 440 ó 480 Hz. Métodos de medida más elaborados suministran mediciones de corriente, voltaje, y potencia real y reactiva a cada unidad conmutando un conjunto de instrumentos maestros. En 1960 unos 50 cuadros de cálculo se usaban diaria y constantemente en Norteamérica. Algunos están todavía disponibles y son muy usados desde el punto de vista del aprendizaje, puesto que el circuito puede ser fácilmente modificado y los cuadros le dan al sistema como tal un sentido más real que pudiera darle el computador.

Los grandes computadores digitales son ideales para los estudios de flujo de carga, cálculos de fallos, distribución de carga económica, determinación de la estabilidad del sistema y muchos otros problemas en el diseño, control y operación diaria de un sistema de potencia. A lo largo de este libro, nos haremos conscientes de la contribución que los computadores digitales dan al trabajo del ingeniero de los sistemas de potencia.

No interesa cuál sea el método del cálculo, para muchos problemas el punto fundamental de partida es el diagrama unifilar con su correspondiente diagrama de impedancias.

PROBLEMAS

- 6.1 Dos generadores, conectados en paralelo a la misma barra, tienen reactancias subtransitorias de $X'' = 10\%$. El generador 1 es de 2 500 kVA, 2.4 kV y el 2, de 5 000 kVA, 2.4 kV. Determinar la reactancia por unidad de cada generador, tomando como valores base 15 MVA y 2.4 kV. Determinar la reactancia por unidad, de un generador único equivalente a los dos en paralelo sobre base de 15 000 kVA, 2.4 kV.
- 6.2 Tres motores de tensión nominal 6.9 kV están conectados a la misma barra. Los motores tienen las características siguientes:

- Motor 1:* 5 000 CV. f. de p. = 0.8; motor síncrono, $X'' = 17\%$
Motor 2: 3 000 CV. f. de p. = 1.0; motor síncrono, $X'' = 15\%$
Motor 3: 3 500 CV.; motor de inducción, $X'' = 20\%$.

Expresar las reactancias subtransitorias de estos motores por unidad, respecto a una base de 10 MVA, 6.6 kV.

- 6.3 Un transformador trifásico de 5 000 kVA con valores nominales de 66-13.2 kV con sus terminales de alta y baja tensión conectados en Y, alimenta una carga resistiva de 4 000 kW a 13.2 kV. ¿Cuál es la resistencia de carga en ohmios tal como se mide de línea a neutro sobre el lado de alta tensión del transformador?
- 6.4 Resuelva el prob. 6.3 si los devanados del transformador trifásico se conectan en Δ sobre el lado de baja tensión, con el mismo voltaje de alta tensión y las mismas resistencias de carga.
- 6.5 Un banco trifásico $\Delta - Y$ de transformadores monofásicos conecta tres resistencias de $12 - \Omega$ en Δ a una línea de potencia de 120 kV. Cada transformador se especifica como 15 MVA, 13.2-66 kV. Para una base en la línea de 120 kV, 50 MVA, determine el valor por unidad de las resistencias de carga para el diagrama de impedancias.
- 6.6 Una carga se especifica como 15 MVA a 13.2 kV factor de potencia 0.8 en atraso. La carga se conecta a una línea de potencia a través de un transformador especificado como 18 MVA, 13.8 $\Delta - 120 Y$ kV. Determine (a) los valores nominales de cada una de los tres transformadores monofásicos, que cuando se conectan adecuadamente son equivalentes al transformador trifásico, y (b) la impedancia compleja de la carga en por unidad en el diagrama de impedancias si la base en la línea de potencia es 120 kV, 20 MVA.
- 6.7 Un generador de 25 000 kVA, 13.8 kV tiene $X'' = 0.20$ por unidad y está conectado a una línea de potencia a través de un transformador con valores nominales de 30 000 kVA, 13.8 $\Delta - 230 Y$ kV con $X = 0.08$ por unidad. Si la base a usarse en los cálculos es 100 MVA, 220 kV para la línea de potencia, qué valores por unidad deben usarse para la reactancia del transformador y generador.
- 6.8 Un generador especificado como 100 MVA, 13.2 kV con $X'' = 20\%$ está conectado a través de un transformador $\Delta - Y$ a una línea de potencia serie que es de 40 Ω . La base elegida para los cálculos es de 200 MVA, 115 kV en la línea de potencia. Determine las reactancias del generador y transformador en por unidad para el diagrama de reactancia (a) si el transformador es una unidad trifásica especificada como 13.8 $\Delta - 120 Y$ kV, 100 MVA con $X = 8\%$ y (b) si el transformador está compuesto de tres unidades monofásicas, cada una especificada como 13.8-69 kV, 35 000 kVA. También determine la reactancia por unidad de la línea de potencia sobre la base escogida.
- 6.9 Una estación de transformación está formada por tres transformadores monofásicos que alimentan a una carga trifásica, formada por tres resistencias idénticas de 10 ohmios. Cada uno de los transformadores monofásicos tiene como valores nominales 10 MVA, 38.1-3.81 kV, con una reactancia de dispersión del 10%. La resistencia puede despreciarse. La carga está conectada al lado de baja tensión del banco. El primer símbolo en la designación de la conexión en la columna 1 de la tabla siguiente, indica la conexión del lado de alta tensión de los transformadores. Rellenar la tabla para una base de 30 MVA. La impedancia que se podría en un diagrama de impedancias es el valor óhmico o por unidad de la impedancia de una fase del circuito equivalente conectado en estrella.
- 6.10 Un generador trifásico de 15 000 kVA y 8.5 kV tiene una reactancia subtransitoria del 20%. Está conectado por un transformador, $\Delta - Y$, a una línea de transporte que

Tabla para el problema 6.9

Conexión del transformador (1)	Conexión de la carga (2)	Tensión base de la línea kV		Z base Ω		Z total lado A.T. Ω	Z de carga por unidad (8)	Z vista desde el circuito de A.T. p.u. (9)
		B.T. (3)	A.T. (4)	B.T. (5)	A.T. (6)			
Y-Y	Y	6.6						
Y-Y	Δ	6.6						
Y- Δ	Y	3.81						
Y- Δ	Δ	3.81						
Δ -Y	Y	6.6						
Δ -Y	Δ	6.6						

Nota: La columna 7 se refiere a la impedancia del transformador más la carga vista desde el lado de alta tensión del transformador. La columna 8 se refiere a la impedancia por unidad de la carga calculada respecto a la base para el circuito de carga. La columna 9 se refiere a la impedancia del transformador y de la carga, vista desde el lado de alta tensión del transformador, expresada por unidad, respecto a la base para el circuito de alta tensión.

tiene una reactancia en serie total de 70Ω . En el extremo de la línea correspondiente a la carga, hay un transformador reductor, Y-Y. Ambos transformadores están formados por transformadores monofásicos conectados para funcionamiento trifásico. Cada uno de los tres transformadores de cada banco tiene los valores nominales 6.667 kVA, 10-100 kV, con una reactancia del 10%. La carga, representada, como impedancia, toma 10 000 kVA a 12.5 kV, con 80% de factor de potencia en retardo. Dibujar el diagrama de impedancia de secuencia positiva, poniendo todas las impedancias por unidad. Tomar una base de 10 000 kVA, 12.5 kV en el circuito de carga. Determinar la tensión en los terminales del generador.

6.11 En la fig. 6.16 se ha representado el diagrama unifilar de un sistema eléctrico de potencia sin carga. Las reactancias de las dos secciones de la línea de transporte fi-

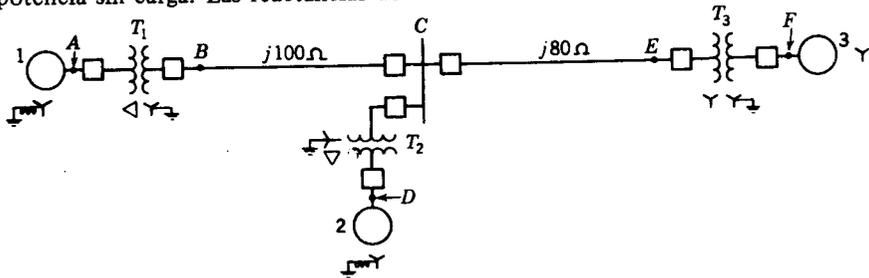


Fig. 6.16 Diagrama unifilar del prob. 6.11.

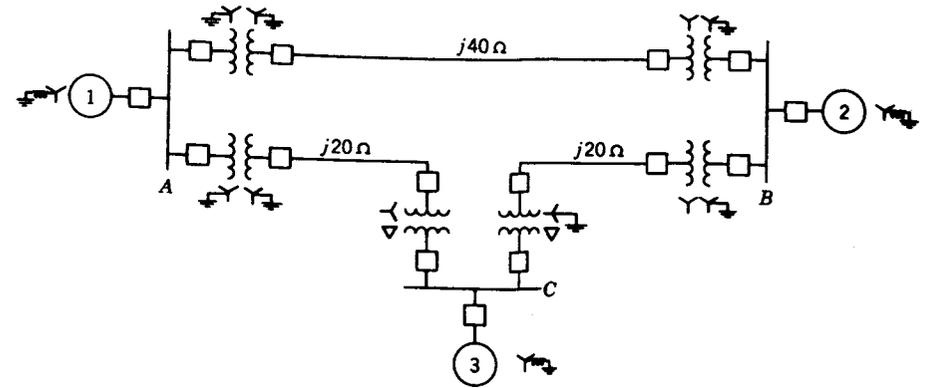


Fig. 6.17 Diagrama unifilar del prob. 6.12.

guran en el diagrama. Las características de los generadores y de los transformadores son las siguientes:

- Generador 1: 20 MVA; 6.9 kV; $X'' = 0.15$ por unidad
- Generador 2: 10 MVA; 6.9 kV; $X'' = 0.15$ por unidad
- Generador 3: 30 MVA; 13.8 kV; $X'' = 0.15$ por unidad
- Transformador T_1 : 25 MVA; 6.9 Δ -115Y kV; $X = 10\%$
- Transformador T_2 : 12 MVA; 6.9 Δ -115Y kV; $X = 10\%$
- Transformador T_3 : unidades monofásicas a 10 MVA, 7.5-75 kV; $X = 10\%$.

Dibujar el diagrama de impedancias, poniendo todas las reactancias por unidad y con letras para indicar los puntos correspondientes al diagrama unifilar. Elegir una base de 30 MVA y 6.9 kV en el circuito del generador 1.

6.12 Dibujar el diagrama de impedancias para el sistema representado en la fig. 6.17. Poner las impedancias por unidad. Despreciar la resistencia y utilizar como base 50 MVA y 138 kV en la línea de 40 ohmios. Las características de los generadores de los motores y de los transformadores son:

- Generador 1: 20 MVA; 13.2 kV; $X'' = 15\%$
- Generador 2: 20 MVA; 13.2 kV; $X'' = 15\%$
- Motor síncrono 3: 30 MVA; 6.9 kV; $X'' = 20\%$
- Transformadores trifásicos Y-Y: 20 MVA; 13.8Y-138Y kV; $X = 10\%$
- Transformadores trifásicos Y- Δ : 15 MVA; 6.9 Δ -138Y kV; $X = 10\%$

Todos los transformadores están conectados de forma que eleven la tensión de los generadores a la tensión de la línea de transporte.

6.13 Si la tensión de la barra C en el prob. 6.12 es de 6.6 kV, cuando el motor toma 24 MVA con 0.8 de factor de potencia en adelante, calcular las tensiones en las barras A y B. Suponer que los dos generadores contribuyen igualmente a la carga. Dar el resultado en voltios y por unidad según la base adoptada en el prob. 6.12. Determinar la tensión en A y B si el interruptor de circuito que une el generador 1 a la barra A está abierto, mientras el motor está tomando 12 MW a 6.6 kV con 0.8 de factor de potencia en adelante. Todos los demás interruptores permanecen cerrados.

6.14 Calcular la regulación de tensión en la barra C de la fig. 6.17 para las dos condiciones del prob. 6.13. Suponer que la tensión se mantiene constante en las barras A y B, si la carga de 24 MW se elimina cuando los dos generadores están conectados, y que la tensión es constante en la barra B cuando se elimina la carga de 12 MW estando sólo conectado el generador 2.

6.15 Los arrollamientos de un transformador de tres devanados tienen las características siguientes:

Primario: Conectado en Y; 6.6 kV, 15 000 kVA

Secundario: Conectado en Y; 33 kV, 10 000 kVA

Terciario: Conectado en Δ ; 2.2 kV, 7 500 kVA

Despreciando la resistencia, se calculan las siguientes impedancias de pérdida a partir de los ensayos de cortocircuito:

Medidas desde el lado del primario: $Z_{pt} = j0.232 \Omega$ $Z_{pt} = j0.290 \Omega$

Medida desde el lado del secundario: $Z_{st} = j8.70 \Omega$

Determinar las impedancias del circuito equivalente en estrella, con una base en el circuito primario de 15 000 kVA y 6.6 kV.

6.16 ¿Cómo se modifica el diagrama dibujado para el prob. 8.6 si los dos generadores se conectan a un sistema de potencia en lugar de a un motor síncrono? Suponer que las líneas de 20 ohmios se conectan directamente a la barra de alta tensión del sistema. La tensión nominal del sistema es de 132 kV y los MVA de cortocircuito del sistema en la barra son 2,000.

6.17 En una barra de 230 kV de un sistema de potencia los MVA de corto circuito son 500. Se desea efectuar los cálculos para una planta industrial que se alimente de esta barra. Si la base de voltaje para los cálculos sobre el lado de alta tensión del transformador que conecta la barra a la planta es de 220 kV, 20 MVA, ¿cuáles son los valores por unidad de la reactancia en serie y la tensión del generador del equivalente Thévenin del sistema de potencia?

6.18 En cierto sistema eléctrico de potencia la base es de 110 kV y 250 MVA. El sistema se ha representado en un cuadro de cálculo, con una base de 50 V y 1 000 Ω . Si en una unidad que representa en el cuadro una línea de transporte circulan 40 mA, ¿cuántos amperios circularán por la línea correspondiente en las condiciones simuladas en el cuadro?

6.19 Un cuadro de cálculo c.c. está preparado para estudiar un cortocircuito trifásico en una de las barras de un sistema que tiene una barra de 5 000 kVA y 2.300 V. En el cuadro de cálculo el 100% de tensión son 18 V, y el 100% de impedancias, 3,000 Ω . Si se intercala un miliamperímetro en serie con una de las unidades de resistencia del cuadro de cálculo se leen 10 mA. Determinar la corriente de fallo en la rama correspondiente del sistema.

6.20 Dibujar el diagrama y poner sobre él los valores de todas las resistencias a conectar en un cuadro de cálculo c.c. para estudiar el sistema del prob. 6.12. El cuadro tiene una tensión de 50 voltios al 100% y una impedancia al 100% de 10.000 Ω . ¿Qué tensión ha de aplicarse entre las barras positivas y negativas, si hay que estudiar un fallo cuando la línea trabaja a 132 kV?

ECUACIONES DE REDES Y SOLUCIONES

Antes de que existieran las calculadoras electrónicas digitales de alta velocidad, la herramienta normalmente aceptada para resolver los problemas de cargas era el analizador de red c.a (corriente alterna). El analizador de red c.c (corriente continua), bastaba, por regla general, para cálculos de fallos, aunque siempre es más exacto el de c.a. Los estudios de estabilidad precisaban de un analizador c.a, junto con una cantidad considerable de cálculos que habían de realizarse a mano o por medio de calculadores analógicos auxiliares. Puesto que los analizadores de redes son réplicas del sistema real, su utilización evitaba el tener que formular las ecuaciones de la red. La complejidad de los sistemas de potencia hace impracticable la solución ordinaria de las ecuaciones de red necesarias.

La velocidad y tamaño de las calculadoras digitales disponibles, las hacen comparables, y en muchos casos decididamente superiores a los analizadores de redes c.a, para todos los problemas anteriores, como iremos viendo en los capítulos siguientes. La resolución con una calculadora digital depende de las ecuaciones de la red; es, por tanto, muy importante para el ingeniero comprender la formulación de las ecuaciones de las que se deriva el programa seguido por el calculador para dicha resolución. Al analizar las ecuaciones de red y sus soluciones, no pretendemos llegar a un desarrollo detallado. Nuestro estudio se dirige más bien a las formas básicas de las ecuaciones, dando únicamente los fundamentos suficientes para ayudar a recordar al lector las ideas esenciales.

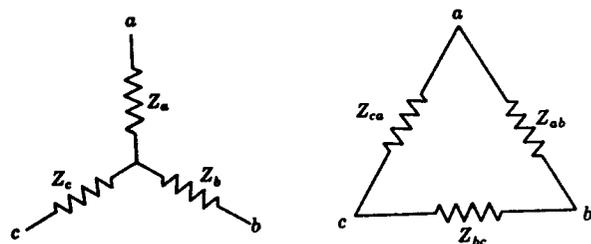


Fig. 7.1 Circuitos equivalentes Y-Δ.

7.1 ELIMINACIÓN DE NUDOS POR TRANSFORMACIONES ESTRELLA-MALLA

El número de ecuaciones necesarias para la resolución de una red se reduce por la eliminación de los *nudos*, que son las uniones formadas cuando dos o más elementos puros (R , L ó C , o una fuente ideal de tensión o de corriente), se conectan entre sí por sus terminales. La eliminación de nudos da lugar a una reducción de información sobre la red, pero esto puede no ser desventajoso. Cuando la resistencia y la inductancia están en serie, eliminamos, frecuentemente, de forma tácita, el nudo intermedio si no estamos interesados en conocer la tensión en dicho punto. La resistencia, la inductancia, e incluso, la capacidad no pueden ser individualizadas en el circuito físico (real), aun cuando el valor de una de ellas o de dos puede ser insignificante comparado con la tercera. Su separación en el análisis se realiza a efectos de simplificación y de representación simbólica.

El conocimiento de la tensión en un nudo común a más de dos elementos (esto es, cuando dos corrientes se unen para formar una tercera), es normalmente una parte conveniente de la solución, por lo que debe evitarse la eliminación del nudo. En los casos en que la tensión en un nudo particular no es importante, puede éste eliminarse con objeto de reducir el número de ecuaciones necesarias para la resolución. La tensión en el nudo eliminado y la corriente que pasa por los elementos que concurren en el nudo, pueden determinarse por medio de cálculos adicionales basados en la información obtenida en la solución con el nudo eliminado. Si en el sistema, es preciso realizar muchos estudios de estabilidad, la eliminación de nudos reduce los cálculos a efectuar y es ventajoso, ya que tales estudios, raramente exigen información sobre las tensiones en las barras.

Si en un nudo determinan solamente tres elementos y ninguno es una fuente, el nudo puede eliminarse por una transformación Y - Δ. La fig. 7.1 muestra a Y y a su Δ equivalente. Las relaciones entre las impedancias son:

$$Z_{ab} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} = Z_a Z_b \sum \frac{1}{Z_Y} \quad (7.1)$$

$$Z_{bc} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} = Z_b Z_c \sum \frac{1}{Z_Y} \quad (7.2)$$

$$Z_{ca} = \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} = Z_c Z_a \sum \frac{1}{Z_Y} \quad (7.3)$$

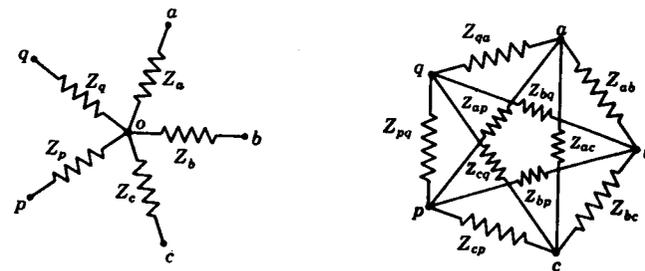


Fig. 7.2 Circuitos equivalentes estrella-malla.

en las que $\sum (1/Z_Y)$ es la suma de las inversas de las tres impedancias conectadas en Y. Estas ecuaciones son útiles para determinar las impedancias conectadas en Δ equivalentes a las conectadas en Y.

Si queremos pasar de impedancias conocidas, conectadas en Δ, a sus equivalentes en Y, las ecuaciones utilizadas son:

$$Z_a = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} = \frac{Z_{ab} Z_{ca}}{\sum Z_{\Delta}} \quad (7.4)$$

$$Z_b = \frac{Z_{ab} Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} = \frac{Z_{ab} Z_{bc}}{\sum Z_{\Delta}} \quad (7.5)$$

$$Z_c = \frac{Z_{bc} Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} = \frac{Z_{bc} Z_{ca}}{\sum Z_{\Delta}} \quad (7.6)$$

en las que $\sum Z_{\Delta}$ es la suma de las tres impedancias conectadas en Δ.

Si en un nudo determinan más de tres impedancias, puede éste eliminarse aplicando las ecuaciones generales de conversión estrella-malla. En la fig. 7.2 se representan cinco impedancias conectadas en estrella, que se unen en el nudo o , así como la malla equivalente tiene una impedancia entre cada par posible de los terminales iniciales. La impedancia conectada entre cada par de terminales, tales como p y q , en la malla, viene dada por

$$Z_{pq} = Z_p Z_q \sum \frac{1}{Z_o} \quad (7.7)$$

en la que $\sum (1/Z_o)$ es la suma de las inversas de todas las impedancias unidas al nudo o en el circuito en estrella inicial. Un circuito estrella con n terminales tiene n impedancias. Una malla con n terminales tiene $n(n-1)/2$ elementos de impedancia, lo que conlleva más elementos de impedancia que la estrella en n terminales excepto cuando $n = 3$. Por tanto, en general, no puede hallarse un equivalente estrella para una malla dada, puesto que un mayor número de ecuaciones, $n(n-1)/2$, se deben satisfacer para la malla que las n incógnitas existentes. Puesto que el número de elementos en que Y y Δ son iguales, puede hallarse un equivalente Y para cualquier Δ.

Si un cierto número de generadores y motores síncronos están conectados a través de

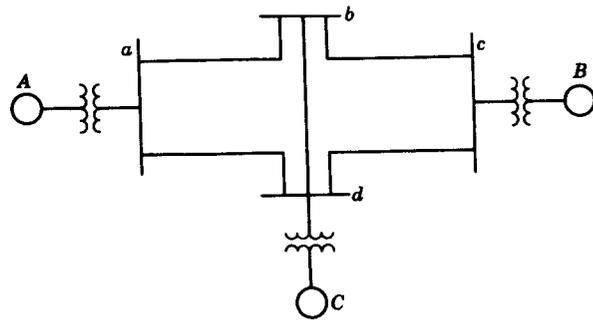


Fig. 7.3 Diagrama unifilar del ej. 7.1.

una red que tiene varios nudos y se conocen las f.e.m. de dichos generadores y motores, la salida de cada uno puede determinarse eliminando todos los nudos de la red, excepto aquellos a los que las f.e.m. están conectadas. En la malla resultante, cada f.e.m. está conectada directamente a las otras por medio de una sola impedancia. La corriente que pasa por cada una de las impedancias es la diferencia de potencial entre los dos terminales de la impedancia dividida por el valor de éste.

EJEMPLO 7.1 Cuatro barras de alta tensión *a*, *b*, *c* y *d* están conectadas como se ve en el diagrama unifilar de la fig. 7.3. A las barras *a* y *c* se conectan dos generadores, suministrando carga a un motor síncrono en la barra *d*. A efectos de análisis todas las máquinas en cualquier barra, se consideran como una máquina simple, representada por una f.e.m. y una reactancia en serie. El diagrama de reactancias con las reactancias expresadas por unidad, se ha dibujado en la fig. 7.4. Los nudos están representados por puntos y todos tienen asignada una letra, excepto, los que unen reactancias en serie. Simplifíquese el circuito, eliminando todos los nudos, excepto, el neutro y *e*, *f* y *g*, a los que están conectadas las f.e.m. de las máquinas. Nótese que los nudos que se conservan, salvo el neutro, no tienen existencia física en el sistema.

Solución Los pasos sucesivos de reducción de la red se han representado en la fig. 7.5. El nudo *b* se ha eliminado transformando en el Δ equivalente las reactancias conec-

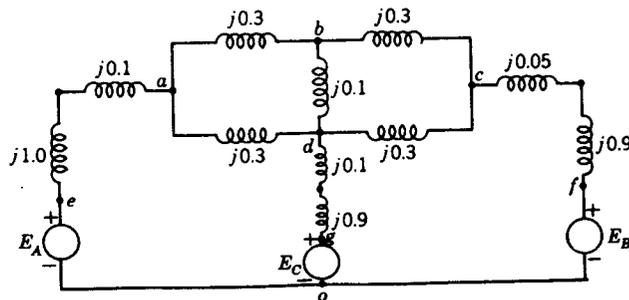


Fig. 7.4 Diagrama de reactancias del ej. 7.1.

tadas en Y que van desde *a*, *c* y *d* a *b*. Así se obtiene la fig. 7.5 a partir de la fig. 7.5. Los cálculos son

$$Z_{ac} = \frac{j0.3 \times j0.3 + j0.3 \times j0.1 + j0.3 \times j0.1}{j0.1} = \frac{-0.15}{j0.1} = j1.5 \text{ por unidad}$$

$$Z_{cd} = \frac{-0.15}{j0.3} = j0.5 \text{ por unidad}$$

$$Z_{da} = \frac{-0.15}{j0.3} = j0.5 \text{ por unidad}$$

Combinando las impedancias en serie entre *a* y *e*, *c* y *f* y *d* y *g*, eliminaremos los nudos sin rotular y obtendremos

$$Z_{ea} = j1.0 + j0.1 = j1.1$$

$$Z_{cf} = j0.9 + j0.05 = j0.95$$

$$Z_{dg} = j0.9 + j0.1 = j1.0$$

Si ahora combinamos las impedancias en paralelo de la fig. 7.5a entre *a* y *d* y entre *c* y *d*, obtendremos

$$Z_{ad} = Z_{cd} = \frac{j0.5 \times j0.3}{j0.5 + j0.3} = j0.1875$$

con lo que podremos dibujar la fig. 7.5b.

La fig. 7.5c, se obtiene por transformación del Δ formado por *a*, *c* y *d*, fig. 7.5b, en la Y equivalente. Los correspondientes cálculos son

$$Z_a = Z_c = \frac{j0.1875 \times j1.5}{j1.5 + j0.1875 + j0.1875} = j0.15$$

$$Z_d = \frac{j0.1875 \times j0.1875}{j1.5 + j0.1875 + j0.1875} = j0.0188$$

La fig. 7.5d resulta de la combinación de las impedancias en serie de la fig. 7.5c. La malla buscada, en este caso en Δ , se obtiene por una transformación final Y- Δ . El resultado se refleja en la fig. 7.5e y los cálculos necesarios se dan a continuación:

$$Z_{ef} = \frac{j1.25 \times j1.10 + j1.10 \times j1.02 + j1.02 \times j1.25}{j1.02} = \frac{-3.77}{j1.02} = j3.70$$

$$Z_{fg} = \frac{-3.77}{j1.25} = j3.02$$

$$Z_{ge} = \frac{-3.77}{j1.10} = j3.42$$

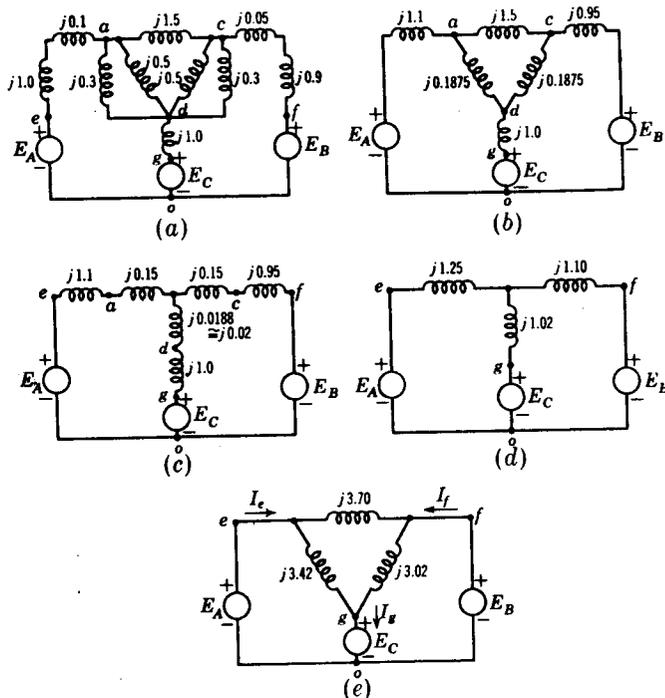


Fig. 7.5 Pasos sucesivos en la reducción de red del circuito cuyo diagrama de reactancias se representa en la fig. 7.4. Los pasos corresponden a los cálculos del ej. 7.1.

EJEMPLO 7.2 Si las f.e.m. internas en A, B y C (ejemplo 7.1), tienen los valores $E_A = 1.5/0^\circ$, $E_B = 1.5/15^\circ$, $E_C = 1.5/-36.9^\circ$, determinar, por unidad las potencias de salida en A y B, así, como la entrada en C.

Solución Las corrientes en el Δ de la fig. 7.5e son

$$I_{ef} = \frac{E_A - E_B}{Z_{ef}} = \frac{1.5/0^\circ - 1.5/15^\circ}{j3.70} = -0.105 - j0.014 \text{ por unidad}$$

$$I_{fo} = \frac{E_B - E_C}{Z_{fo}} = \frac{1.5/15^\circ - 1.5/-36.9^\circ}{j3.02} = 0.426 - j0.083 \text{ por unidad}$$

$$I_{oe} = \frac{E_C - E_A}{Z_{oe}} = \frac{1.5/-36.9^\circ - 1.5/0^\circ}{j3.42} = -0.263 + j0.088 \text{ por unidad}$$

Las corrientes en los terminales son:

Desde la central generadora A:

$$I_e = I_{ef} - I_{oe} = 0.158 - j0.102 = 0.188/-32.8^\circ \text{ por unidad}$$

Desde la central generadora B:

$$I_f = I_{fo} - I_{ef} = 0.531 - j0.069 = 0.536/-7.4^\circ \text{ por unidad}$$

Hacia la central motriz C:

$$I_o = I_{fo} - I_{oe} = 0.689 - j0.171 = 0.710/-13.9^\circ \text{ por unidad}$$

Las potencias buscadas son, por tanto,

De salida de A:

$$1.5 \times 0.188 \cos 32.8^\circ = 0.237 \text{ por unidad}$$

De salida de B:

$$1.5 \times 0.536 \cos (15^\circ + 7.4^\circ) = 0.743 \text{ por unidad}$$

Entrada en la carga:

$$1.5 \times 0.710 \cos (36.9^\circ - 13.9^\circ) = 0.985 \text{ por unidad}$$

La potencia trifásica total en cada central es el producto de los valores unitarios anteriores por los kVA base trifásicos.

Del trabajo necesario para reducir la compleja red de un típico sistema de potencia a un número de impedancias mínimo, nos hemos limitado a dar simplemente los ejemplos anteriores. Si existen más nudos y se necesitan ecuaciones estrella-malla generales a causa del número de ramas que terminan en un nudo, el trabajo aumenta considerablemente. Si no se supone que las impedancias son reactancias puras, la complicación que añade la utilización de números complejos es enorme. Sin embargo, posteriormente investigaremos otro método de reducción de redes, lo que es una operación de rutina para un computador digital. El tiempo exigido en la solución analítica conlleva inicialmente al desarrollo de los analizadores de redes. Actualmente, la existencia de las calculadoras digitales ha hecho que adquieran gran importancia para los ingenieros las ecuaciones de red y sus métodos de resolución, ya que dichas ecuaciones constituyen la base para la programación del computador para resolver muchos tipos de problemas.

7.2 ECUACIONES DE LOS LAZOS

Cada elemento de un circuito se llama *rama* y es el camino entre dos nudos. En la fig. 7.4 hay 11 nudos y 14 ramas. A veces es conveniente considerar solamente los nudos a los que se unen más de dos elementos, llamando a estos puntos de unión *nudos principales*. Si consideramos también que todos los elementos en serie entre nudos principales son ramas simples, encontraremos que la fig. 7.4 tiene 5 nudos y 8 ramas. Si se conocen las f.e.m., la determinación de la tensión en cada rama y todas las corrientes en las 8 ramas, requiere 16 ecuaciones, que pueden obtenerse aplicando la ley de Ohm y las leyes de corriente y tensión de Kirchhoff. Estas ecuaciones pueden resolverse simultáneamente para obtener los valores desconocidos; sin embargo, existen otros métodos que proporcionan una formulación más sencilla de las ecuaciones y una resolución más fácil.

Si cada elemento de una red se representa en un diagrama por una línea recta, se obtiene un *esquema (grafo)*. La fig. 7.6 es el grafo de la red de la fig. 7.4. Considerando sola-

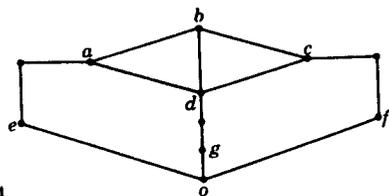


Fig. 7.6 Grafo de la red de la fig. 7.4.

mente los nudos principales, y realizando ciertos arreglos en cuanto a la situación de los nudos para obtener una figura geométrica más sencilla, el grafo se transforma en el de la fig. 7.7. Las ramas se han numerado para su identificación. Hay una parte de las matemáticas denominada topología, que estudia los grafos y proporciona métodos que ayudan a formular las ecuaciones de las redes.

Un *árbol* de un grafo es aquella parte compuesta de las ramas suficientes para unir todos los nudos sin formar un camino cerrado. Las ramas restantes se llaman *eslabones*. La fig. 7.8 representa a algunos de los árboles posibles de nuestro grafo. Por adición de un eslabón a un árbol, se obtiene un *lazo*. Se puede tener un conjunto definido de lazos, determinando el camino cerrado formado colocando cada eslabón *sólo* en el árbol.

En la fig. 7.9, las ramas de un árbol de nuestro grafo se señalan con línea de trazo grueso y los eslabones con línea de trazo fino. Las ramas del árbol son las números 1, 2, 4 y 7. Los eslabones, los números 3, 5, 6 y 8. Si se coloca el eslabón 3 en el grafo, el lazo resultante está formado por todas las ramas exteriores y el camino cerrado se indica por el número 3 encerrado en un circulito. Los lazos formados añadiendo cada uno de los otros eslabones, separadamente, son los caminos cerrados identificados por los números 5, 6 y 8, dentro de sus correspondientes circulitos. Para cada camino se muestra un sentido arbitrario de trazado por medio de una flecha y éste es el sentido supuesto positivo para la corriente en el eslabón.

Si nos imaginamos que la corriente en cada eslabón fluye independientemente en el recorrido cerrado del lazo determinado por el eslabón, la corriente en cada una de las ramas del árbol se halla por superposición de las llamadas "corrientes de lazo". Las flechas indican los sentidos supuestos positivos para cada corriente de lazo. La superposición de estas corrientes de lazos particulares, determina la corriente en cada rama, porque no podría pasar corriente por cualquier rama si las corrientes en los eslabones fueran nulas. Así

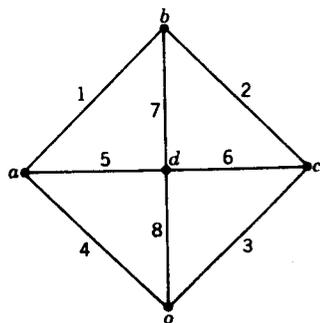


Fig. 7.7 Grafo de la fig. 7.6 reagrupado, considerando solamente los nudos principales.

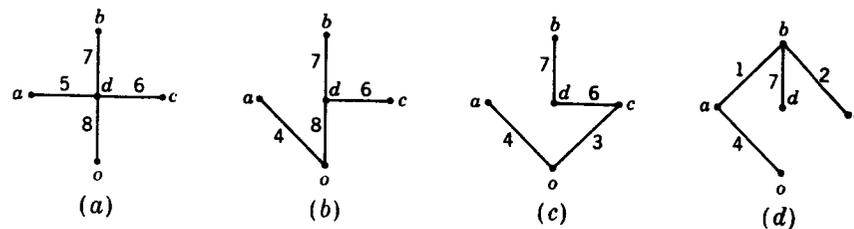


Fig. 7.8 Algunos árboles del grafo de la fig. 7.7.

pues, solamente las corrientes en los eslabones determinan las corrientes en todas las ramas. Por ejemplo, en la fig. 7.9, la corriente en la rama 2, que es común a los lazos 3 y 6, es igual a la suma de las corrientes en estos dos lazos, esto es, igual a la suma de las corrientes en los eslabones 3 y 6, como es evidente si se aplica la ley de Kirchhoff para las corrientes en el nudo *c*. El número de eslabones determina el número de ecuaciones independientes de corrientes de lazo, necesarias para determinar todas las corrientes en las ramas de la red.

Si el grafo de una red puede dibujarse sobre una superficie plana sin que haya líneas que se crucen, la red se llama *planar*. No es preciso que las líneas sean rectas. Los espacios abiertos en el diagrama de una red planar se llaman *mallas*. Una corriente de lazo que circula por el contorno de una malla se llama *corriente de malla*. En las redes sencillas es conveniente elegir un árbol tal, que todos los eslabones definan corrientes de malla, ya que estos se identifican fácilmente. El número de mallas es igual al número de eslabones, y, por tanto, al de ecuaciones de lazo independientes. Los lazos formados por los eslabones del árbol de la fig. 7.8a definen las corrientes de malla de nuestra red. Las redes complejas pueden no ser planares o ser difícil en ellas la identificación de las mallas. En tales casos, es recomendable utilizar el método del eslabón general. Si se resuelven las redes con calculadoras digitales, utilizando las ecuaciones de las corrientes de lazo, el programa puede hacerse de forma que el calculador forme un árbol de la red y determine las ecuaciones resultantes de añadir cada eslabón, separadamente, al árbol.

La fig. 7.10, es la misma fig. 7.4, en la que se han sumado las reactancias en serie y se han indicado los recorridos para las corrientes de malla. A las corrientes se han asignado

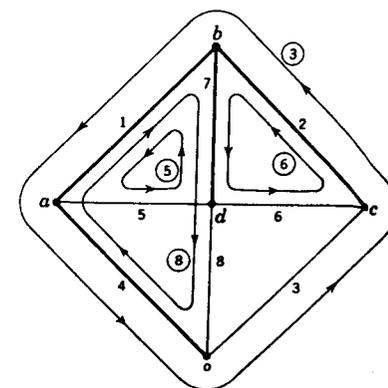


Fig. 7.9 Grafo de la fig. 7.7, con un árbol indicado por la línea gruesa y los eslabones por líneas de trazo fino. Las direcciones para el trazado de los lazos definidos por los eslabones se indican con flechas.

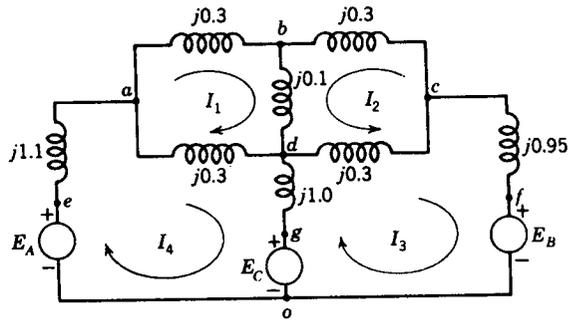


Fig. 7.10 Circuito del ej. 7.3. El circuito es el de la fig. 7.4, pero están indicados los lazos definidos en la fig. 7.8a y se han combinado las reactancias en serie. Los valores que se dan son impedancias por unidad.

números de acuerdo con el número del eslabón insertado en el árbol de la fig. 7.8a para obtener el lazo correspondiente. Por supuesto, podrían formarse otras corrientes de lazo eligiendo otro árbol diferente. Aplicando la ley de las tensiones de Kirchhoff para el recorrido de I_4 , obtenemos

$$0 = -E_A + I_4 Z_{ea} + (I_4 - I_1) Z_{ad} + (I_4 - I_3) Z_{dg} + E_C \quad (7.8)$$

y haciendo operaciones

$$E_A - E_C = I_1(-Z_{ad}) + I_3(-Z_{dg}) + I_4(Z_{ea} + Z_{ad} + Z_{dg}) \quad (7.9)$$

El primer miembro de la ec. (7.9) es la suma de las tensiones crecientes, a lo largo del lazo en el sentido supuesto positivo para la corriente del lazo. En el segundo miembro, la corriente del lazo considerado se multiplica por la suma de las impedancias de lazo. A este producto se añaden (con el signo correspondiente), las caídas de tensión originadas por las otras corrientes de lazo que circulan por una de las impedancias del lazo original.

La forma normal de escribir las ecuaciones de lazo de los cuatro lazos es

$$\begin{aligned} E_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2 + z_{13}I_3 + z_{14}I_4 \\ E_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2 + z_{23}I_3 + z_{24}I_4 \\ E_3 &= z_{31}I_1 + z_{32}I_2 + z_{33}I_3 + z_{34}I_4 \\ E_4 &= z_{41}I_1 + z_{42}I_2 + z_{43}I_3 + z_{44}I_4 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Los primeros miembros de las ecuaciones son los aumentos de f.e.m. a lo largo de los respectivos lazos. Las impedancias z_{11} , z_{22} , z_{33} y z_{44} , se llaman *impedancias propias* de los lazos y son iguales, respectivamente, a las sumas de las impedancias de los lazos 1, 2, 3 y 4. Las otras impedancias se llaman *impedancias mutuas* de los lazos y son comunes a los lazos indicados por los subíndices. Cada impedancia propia es o la impedancia real común a los dos lazos con los que se identifica o el valor negativo de la impedancia real, según que los sentidos supuestos positivos para las corrientes de los dos lazos sean iguales u

opuestos en la impedancia mutua. Por ejemplo, en el circuito de la fig. 7.10, $Z_{14} = -j0,3$ y $Z_{23} = +j0,3$.

El orden de los subíndices en las impedancias mutuas es el de *efecto-causa*; esto es, el lazo en el que tiene lugar la caída de tensión y el segundo, el de la corriente que lo origina. El mantenimiento de este orden en los subíndices, contribuye a la simetría de las ecuaciones, pero, por otra parte, es superfluo (con elementos bilaterales), ya que la corriente en el lazo 1 producirá la misma caída de tensión en el lazo 2 que produciría la misma corriente, por el lazo 2, en el lazo 1. Por tanto, $z_{12} = z_{21}$ y el mismo razonamiento puede aplicarse a las demás impedancias mutuas. Pueden presentarse impedancias mutuas entre partes de una red acopladas, solamente, por campos magnéticos.

La expresión general para la suma algebraica de las f.e.m. en el lazo k de una red que tiene N lazos independientes, es

$$E_k = \sum_{n=1}^N z_{kn} I_n \quad (7.11)$$

La ventaja de la forma normalizada de las ecuaciones de lazo, es que las mismas ecuaciones pueden aplicarse a cualquier red. Los pasos que es preciso seguir para la formulación numérica de las ecuaciones son los siguientes: determinación del número de ecuaciones de los lazos, determinación de impedancias en las ecuaciones y de las f.e.m. en los lazos.

EJEMPLO 7.3 Determinar las f.e.m. de los lazos y todas las impedancias en la forma normalizada de las ecuaciones de lazo del circuito de la fig. 7.10, si (como en el ej. 7.2), los f.e.m. individuales unitarias son $E_A = 1,5/0^\circ$, $E_B = 1,5/15^\circ$ y $E_C = 1,5/-36,9^\circ$.

Solución

$$E_1 = E_2 = 0$$

$$E_3 = E_C - E_B = 1,5/-36,9^\circ - 1,5/15^\circ = -0,25 - j1,29 \text{ por unidad}$$

$$E_4 = E_A - E_C = 1,5/0^\circ - 1,5/-36,9^\circ = 0,3 + j0,9 \text{ por unidad}$$

Las impedancias por unidad son,

$$z_{11} = j0,3 + j0,1 + j0,3 = j0,7$$

$$z_{22} = j0,3 + j0,1 + j0,3 = j0,7$$

$$z_{33} = j1,0 + j0,3 + j0,95 = j2,25$$

$$z_{44} = j1,1 + j0,3 + j1,0 = j2,4$$

$$z_{12} = z_{21} = j0,1 \quad z_{23} = z_{32} = j0,3$$

$$z_{13} = z_{31} = 0 \quad z_{24} = z_{42} = 0$$

$$z_{14} = z_{41} = -j0,3 \quad z_{34} = z_{43} = -j1,0$$

La solución simultánea de las cuatro ecuaciones de lazo, después de sustituir en ellas los valores anteriores, proporciona las cuatro corrientes de lazo y, a partir de éstas, pueden obtenerse las corrientes en todas las ramas.

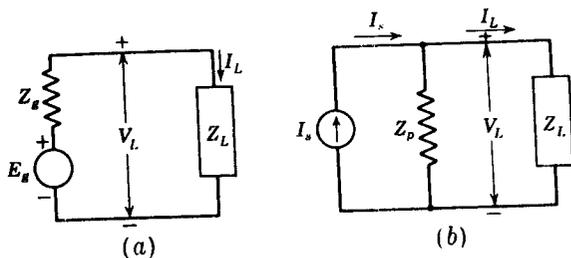


Fig. 7.11 Equivalencia de fuentes.

7.3 EQUIVALENCIA DE FUENTES

En algunos problemas de análisis de redes, constituye una ayuda poderosa la sustitución de una fuente de corriente constante en paralelo con una impedancia por una f.e.m. constante y una impedancia en serie. Las dos partes de la fig. 7.11 representan los dos circuitos. Ambas fuentes con sus impedancias asociadas están conectadas a los dos terminales de una red que tiene una impedancia de entrada Z_L . De momento la consideraremos una red pasiva; esto es, si existen f.e.m. internas en la red de carga, la supondremos cortocircuitadas y si existen fuentes de corriente, las supondremos abiertas.

En el circuito con la f.e.m. constante E_g e impedancia en serie Z_g , la caída de tensión en la carga es

$$V_L = E_g - I_L Z_g \tag{7.12}$$

en la que I_L es la corriente en la carga. En el circuito con fuente de corriente constante I_s e impedancia en paralelo Z_p , la caída de tensión en la carga es

$$V_L = (I_s - I_L) Z_p = I_s Z_p - I_L Z_p \tag{7.13}$$

Las dos fuentes y sus impedancias asociadas serán equivalentes si la tensión V_L es la misma, en ambos circuitos. Desde luego, valores iguales de V_L significa que I_L será la misma para cargas idénticas.

Comparando las ecs. (7.12) y (7.13) se ve que V_L será la misma en los dos circuitos y su impedancia en serie podrán intercambiarse con la fuente de corriente y la impedancia en paralelo, si se verifica

$$E_g = I_s Z_p \tag{7.14}$$

y

$$Z_g = Z_p \tag{7.15}$$

Estas relaciones demuestran que una fuente de corriente constante y una impedancia en paralelo pueden ser remplazadas por una f.e.m. constante y una impedancia en serie si la f.e.m. es igual al producto de la corriente constante por la impedancia en paralelo, y si la impedancia en serie es igual a la impedancia en paralelo. Recíprocamente una f.e.m. constante y una impedancia en serie pueden remplazarse por una fuente de corriente constante y una impedancia en paralelo si ésta es igual a la impedancia en serie y si la corriente constante es igual al valor de la f.e.m. dividida por su impedancia en serie.

Hemos visto las condiciones de equivalencia para el caso de fuentes conectadas a una red pasiva. Mediante el principio de superposición, puede demostrarse que también son aplicables si la salida es una red activa; esto es, si en la red de salida hay fuentes de tensión y de corriente. Para determinar la contribución de la alimentación, si la red de salida es activa, el principio de superposición exige cortocircuitar las f.e.m. en la red de salida y remplazar las fuentes de corriente por circuitos abiertos, dejando intactas las impedancias. De esta forma, la salida es una red pasiva por lo que se refiere a la componente de corriente de las fuentes intercambiables. Para determinar las componentes de corriente debidas a las fuentes de la red de carga, la f.e.m. de la fuente de alimentación se cortocircuita en un caso y la fuente de corriente se abre en el otro. Así, solamente Z_g , o su equivalente Z_p , está conectado a la entrada de la carga para determinar el efecto de las fuentes en la red de carga, sin tener en cuenta cuál sea el tipo de fuente de la alimentación. En consecuencia, al aplicar la superposición, los componentes aportados por las fuentes de la red de carga son independientes del tipo de alimentación, en tanto que la impedancia en serie de la f.e.m. sea igual a la impedancia en paralelo de la fuente de corriente constante. Se aplican, pues, las mismas condiciones de equivalencia tanto si la red de carga es pasiva como si es activa.

7.4 ECUACIONES DE NUDO

La formulación sistemática de las ecuaciones determinadas en los nudos de un circuito, aplicando la ley de las corrientes de Kirchhoff constituye la base para la resolución de los sistemas de potencia por medio de calculadoras. Con objeto de examinar algunos aspectos de estas ecuaciones, el circuito de la fig. 7.4 se ha vuelto a dibujar con ligeras modificaciones, obteniéndose la fig. 7.12. Las reactancias en serie se han combinado, por conveniencia como ya se hizo al dibujar la figura para escribir las ecuaciones de lazo, pero el circuito se ha modificado añadiendo capacidades al neutro en cada una de las barras de alta tensión del sistema original. Además, las f.e.m. y sus impedancias en serie se han sustituido por sus fuentes de corriente y resistencias en paralelo, equivalentes. Se han utilizado números en lugar de letras para designar a los nudos y a cada rama se le han asignado símbolos de admitancia. Los valores de las admitancias en cada rama son los inversos de las impedancias de la fig. 7.4 para las mismas ramas.

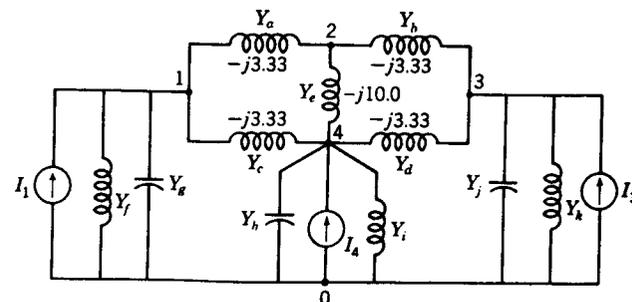


Fig. 7.12 Circuito de la fig. 7.4 con adición de condensadores y sustituyendo las fuentes de tensión por fuentes de corrientes. Los valores dados son admitancias por unidad.

Utilizaremos subíndices simples para designar la tensión de cada barra respecto al neutro, tomado como nudo de referencia. Si aplicamos la ley de las corrientes de Kirchhoff al nudo 1, igualando la corriente de la fuente hacia el nudo con la que sale de éste, tendremos

$$I_1 = V_1(Y_f + Y_g) + (V_1 - V_2)Y_a + (V_1 - V_4)Y_c \quad (7.16)$$

y para el nudo 2

$$0 = (V_2 - V_1)Y_a + (V_2 - V_3)Y_b + (V_2 - V_4)Y_c \quad (7.17)$$

que podemos escribir en la forma

$$I_1 = V_1(Y_f + Y_g + Y_a + Y_c) - V_2Y_a - V_4Y_c \quad (7.18)$$

$$0 = -V_1Y_a + V_2(Y_a + Y_b + Y_c) - V_3Y_b - V_4Y_c \quad (7.19)$$

Se pueden escribir ecuaciones similares para los nudos 3 y 4, pudiendo resolverse las cuatro ecuaciones simultáneamente para las tensiones V_1 , V_2 , V_3 , y V_4 . Todas las corrientes en las ramas pueden determinarse, una vez conocidas estas tensiones. De esta manera, el número de ecuaciones de nudo necesarias es una menos que el de nudos existentes en la red. La ecuación del quinto nudo no nos proporcionaría más información. Dicho de otra forma, el número de ecuaciones de nudo independientes es inferior en una unidad al de nudos.

No hemos escrito las otras ecuaciones porque ya vemos cómo pueden formularse las ecuaciones de nudo con notación normalizada. En las dos ecs. (7.18) y (7.19) se evidencia que la corriente que circula hacia la red, procedente de las fuentes de corriente conectadas a un nudo, es igual a la suma de varios productos. En un nudo cualquiera uno de los productos es la tensión en dicho nudo, multiplicado por la suma de todas las admitancias que terminan en él. Este producto corresponde a la corriente que fluye del nudo si la tensión es nula en los restantes. Los demás productos son iguales *con signo menos* al producto de la tensión en otro nudo por la admitancia conectada directamente entre el otro nudo y el nudo para el que la ecuación se formula. Por ejemplo, en el nudo 1 un producto es $-V_2Y_a$, siendo $-V_2$ la tensión, con signo menos, en el nudo que está conectado con el nudo 1 a través de Y_a . Este producto corresponde a la corriente que sale del nudo 1 cuando la tensión en todos los nudos, excepto el 2, son nulas. De esta forma, por el principio de superposición, la corriente total que sale del nudo es la suma de todos estos productos tensión-admitancia.

La forma normalizada de las cuatro ecuaciones de nudo independientes es

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 + Y_{14}V_4 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4 \\ I_3 &= Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 + Y_{34}V_4 \\ I_4 &= Y_{41}V_1 + Y_{42}V_2 + Y_{43}V_3 + Y_{44}V_4 \end{aligned} \quad (7.20)$$

La simetría de las ecuaciones en esta forma hace que puedan recordarse fácilmente, siendo clara su extensión para cualquier número de nudos. El orden de los subíndices es el de efecto-*causa*, como en la forma normalizada de las ecuaciones de lazo. Las admitancias Y_{11} , Y_{22} , Y_{33} e Y_{44} se llaman *admitancias propias* en los nudos, siendo cada una de ellas

igual a la suma de todas las admitancias conectadas directamente entre los dos nudos indicados por el subíndice doble. En la red de la fig. 7.12 la admitancia mutua Y_{12} es igual a $-Y_a$. En inglés, algunos autores llaman a las admitancias propias y a las admitancias mutuas "driving-point" y "transfer admitances", respectivamente.

Es preciso tener precaución al comparar las ecuaciones de lazo y de nudo. Las inversas de las impedancias propias y de las impedancias mutuas en los lazos *no* son las admitancias propias y las admitancias mutuas.

La adición de condensadores entre las barras de alta tensión y el neutro de la red que hemos estudiado afecta solamente a las admitancias propias. Solo son necesarias cuatro ecuaciones de nudo. Las corrientes en las ramas se determinan fácilmente una vez determinadas las tensiones en los nudos. Si la red, con los condensadores añadidos, se resolviera por las ecuaciones de lazo, se necesitarían tres ecuaciones más. Sin embargo, si los condensadores estuvieran situados en el lado de baja tensión de los transformadores de la red original, aparecerían tres nudos más, los que habían sido eliminados previamente combinando las impedancias en serie. Entonces, el número de ecuaciones de nudo independientes y el de ecuaciones de lazo independientes sería igual.

La expresión general para la corriente de la fuente hacia el nudo k de una red con N nudos independientes (esto es, N barras además del neutro) es

$$I_k = \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \quad (7.21)$$

Se puede escribir una ecuación como ésta para cada una de las N barras en las que la tensión de la red es desconocida. Si la tensión en un nudo cualquiera esta fijada, no se escribe la ecuación para tal nudo. Por ejemplo, si el módulo y el ángulo de las tensiones en dos barras de alta tensión, en nuestro ejemplo, estuvieran determinados, solo se necesitarían dos ecuaciones. Las ecuaciones de nudo se escribirían para las otras dos barras, las únicas en las que la tensión es desconocida. Una f.e.m. conocida con su impedancia en serie no necesita ser remplazada por la fuente de corriente equivalente si un terminal del elemento de f.e.m. está unido al nudo de referencia, ya que el nudo que separa la f.e.m. y la impedancia en serie es uno, cuya tensión se conoce. Esto se verá claramente en el ej. 7.5.

EJEMPLO 7.4 Escribir las ecuaciones de nudo necesarias para determinar las tensiones en las barras de la fig. 7.12. Omitiendo los condensadores en paralelo cuyas admitancias son Y_g , Y_h , y Y_j . La red es equivalente al de las figuras 7.4 y 7.10 y los datos son los mismos a los de los ejemplos anteriores de este capítulo.

Solución Las corrientes de las fuentes son

$$I_1 = \frac{E_A}{Z_{aa}} = \frac{1.5/0^\circ}{j1.1} = 1.36/\underline{-90^\circ} = 0 - j1.36 \text{ por unidad}$$

$$I_2 = \frac{E_B}{Z_{cf}} = \frac{1.5/15^\circ}{j0.95} = 1.58/\underline{-75^\circ} = 0.41 - j1.52 \text{ por unidad}$$

$$I_4 = \frac{E_C}{Z_{od}} = \frac{1.5/\underline{-36.9^\circ}}{j1.0} = 1.5/\underline{-126.9^\circ} = -0.9 - j1.2 \text{ por unidad}$$

Las admitancias en paralelo con las fuentes de corriente son

$$Y_f = \frac{1}{j1.1} = -j0.91 \text{ por unidad}$$

$$Y_i = \frac{1}{j1.0} = -j1.0 \text{ por unidad}$$

$$Y_k = \frac{1}{j0.95} = -j1.05 \text{ por unidad}$$

Las auto-admitancias unitarias son

$$Y_{11} = -j0.91 - j3.33 - j3.33 = -j7.57$$

$$Y_{22} = -j10.0 - j3.33 - j3.33 = -j16.66$$

$$Y_{33} = -j1.05 - j3.33 - j3.33 = -j7.71$$

$$Y_{44} = -j1.0 - j3.33 - j3.33 - j10.0 = -j17.66$$

y las admitancias mutuas unitarias son

$$Y_{12} = Y_{21} = +j3.33 \quad Y_{23} = Y_{32} = +j3.33$$

$$Y_{13} = Y_{31} = 0 \quad Y_{34} = Y_{43} = +j10.0$$

$$Y_{14} = Y_{41} = +j3.33 \quad Y_{24} = Y_{42} = +j3.33$$

Las ecuaciones de nudo son

$$-j1.36 = -j7.57V_1 + j3.33V_2 + 0 + j3.33V_4$$

$$0 = j3.33V_1 - j16.66V_2 + j3.33V_3 + j10.0V_4$$

$$0.41 - j1.52 = 0 + j3.33V_2 - j7.71V_3 + j3.33V_4$$

$$-0.9 - j1.2 = j3.33V_1 + j10.0V_2 + j3.33V_3 - j17.66V_4$$

EJEMPLO 7.5 La fig. 7.13 es la misma fig. 7.10, en la que se han asignado los números a los nudos y los valores por unidad escritos en la fig. 7.13, son admitancias en lugar de impedancias. Las f.e.m. E_A , E_B y E_C , por unidad, son iguales a $1.5/0^\circ$, $1.5/15^\circ$ y $1.5/-36.9^\circ$, respectivamente. Los datos son los mismos que en los ejemplos anteriores. Escribir las ecuaciones de nudo de la red sin sustituir por las fuentes de corriente.

Solución Los nudos, en los que las tensiones se mantienen constantes, tienen los números 5, 6 y 7. Las tensiones, por unidad, en estos nudos son

$$V_5 = 1.5/0^\circ = 1.5 + j0$$

$$V_6 = 1.5/15^\circ = 1.45 + j0.39$$

$$V_7 = 1.5/-36.9^\circ = 1.2 - j0.9$$

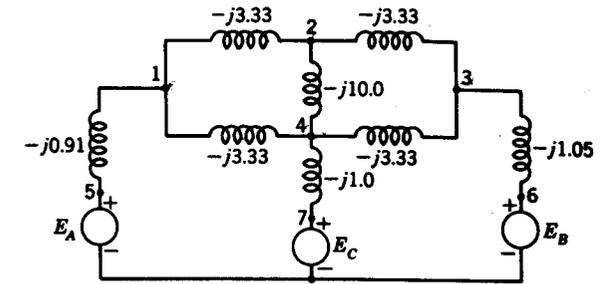


Fig. 7.13 Circuito del ej. 7.5. Los valores de la figura son admitancias por unidad.

La inspección del circuito nos da para las ecuaciones de nudo:

En el nudo 1

$$0 = -j7.57V_1 + j3.33V_2 + 0 + j3.33V_4 + j0.91(1.5 + j0)$$

En el nudo 2

$$0 = j3.33V_1 - j16.66V_2 + j3.33V_3 + j10.0V_4$$

En el nudo 3

$$0 = 0 + j3.33V_2 - j7.71V_3 + j3.33V_4 + j1.05(1.45 + j0.39)$$

En el nudo 4

$$0 = j3.33V_1 + j10.0V_2 + j3.33V_3 - j17.66V_4 + j1.0(1.2 - j0.9)$$

No se escriben las ecuaciones de los nudos 5, 6 y 7, en las que las tensiones son conocidas. Observemos, sin embargo, que sus valores se presentan en los productos $Y_{15}V_5$, $Y_{36}V_6$ y $Y_{47}V_7$ en las ecuaciones de los nudos 1, 3 y 4, respectivamente. Llevando a cabo las multiplicaciones indicadas en estos productos por tensiones conocidas y pasando el resultado al primer miembro de la ecuación correspondiente, obtendremos para el primer miembro de cada una de las cuatro ecuaciones, y en su orden, los valores $0 - j1.36$, 0 , $0.41 - j1.52$ y $-0.9 - j1.2$. Las ecuaciones son idénticas que las del ej. 7.4. Por tanto, resulta innecesaria la conversión de las fuentes de tensión a las equivalentes de corriente, ya que ello no reduce el número de ecuaciones que se requieren para resolver esta red. La admitancia del neutro afecta solamente a las admitancias propias, puesto que la barra del neutro es el nudo de referencia.

7.5 MATRICES

Hemos estudiado la forma normalizada de las ecuaciones de lazo y de nudo. El uso sistemático de los subíndices ha dado lugar a una simetría que hace que las ecuaciones sean fáciles de recordar. La simplicidad de la notación se evidencia cuando se consideran los símbolos de las impedancias y admitancias separadamente del resto de los símbolos de las ecuaciones. Por ejemplo, si separamos las admitancias de las ecuaciones de nudo de una

red con cuatro nudos independientes y disponemos dichas admitancias en filas y columnas en el orden en que aparecen en las ecuaciones, tendremos

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix}$$

Esta disposición se llama *matriz*. Cada una de las admitancias es un *elemento* de la matriz. Los elementos de una matriz procedentes de un sistema de ecuaciones pueden ser números, operadores o funciones, y no es preciso que tengan todas las mismas dimensiones. Identificaremos las matrices encerrando sus elementos entre corchetes.

Si queremos evitar la escritura de todos los elementos de la matriz de admitancias cada vez que tenemos que referirnos a ella, podemos elegir. Tipo de negritas para indicar que una sola letra representa la matriz. Por ejemplo podemos elegir **Y** para representar la matriz de admitancias. Comúnmente se designa por Y_{barra} a la matriz de admitancias propias y mutuas y se denomina como la matriz de admitancias de barra. De manera similar, las corrientes y las tensiones de las ecuaciones de nudo pueden expresarse con la notación matricial y representarse por los símbolos **I** y **V**. Igualando estos símbolos a las matrices que representan, tendremos

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

Las matrices pueden tener un número cualquiera de filas y columnas. Una matriz que tiene m filas y n columnas es una matriz $m \times n$. Las admitancias que hemos estado considerando forman una matriz 4×4 , y las disposiciones de corriente y tensión, matrices 4×1 .

Si se verifica que $m = n$, como en nuestro caso de las admitancias, se dice que la matriz es *cuadrada* y m es el *orden* de la matriz. La diagonal principal de una matriz cuadrada está formada por los elementos que van diagonalmente desde el vértice superior izquierdo al inferior derecho. Los elementos de la diagonal principal de una matriz de admitancias de nudo, son las admitancias propias de los nudos. Una matriz cuadrada se parece a un determinante, pero, en realidad, se trata de entes matemáticos distintos. A diferencia de un determinante, una matriz no tiene un valor y no necesita ser cuadrada.

El manejo de las matrices obedece a una serie de operaciones conocidas como las reglas del álgebra matricial. Estas reglas proporcionan un método ordenado para resolver ecuaciones. Las reglas definidas y la metodología del álgebra matricial son especialmente adecuadas para programar con calculadoras digitales. Lo simétrico de la notación y la sistemática de las operaciones son ventajas sustanciales del álgebra matricial. Ahora bien, el

álgebra matricial no hace necesariamente más breve el trabajo de cálculo numérico en la resolución del problema. La gran importancia de las calculadoras digitales en el análisis de los sistemas de potencia hace que sea esencial la comprensión de las operaciones básicas con matrices para los ingenieros que se ocupan de este tipo de problemas. El álgebra matricial constituye, con frecuencia, la base de explicación que se encuentra con más frecuencia en la literatura¹.

Si una matriz se designa por un símbolo, como por ejemplo **A**, sus elementos se designan frecuentemente por símbolos tales como a_{11} , a_{12} y a_{32} . Los subíndices indican la posición del elemento en la matriz y así, el primer número indica la fila y el segundo, la columna. Las filas se numeran de arriba a abajo y las columnas, de izquierda a derecha. De igual forma, algunos elementos de **B** son los b_{21} , b_{32} y b_{13} . La identificación de la posición en la matriz es consecuente con el convenio adoptado para el orden de los subíndices de las impedancias y admitancias de las formas normalizadas de las ecuaciones de lazo y de nudo.

Dos matrices $m \times n$ son iguales si cada elemento de una es idéntico al elemento de las correspondientes fila y columna de la otra. Y así, si **A** y **B** son dos matrices 2×2 y se verifica que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, se verificará también que $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$, y $a_{22} = b_{22}$.

Se llama *transposición* de una matriz a la operación de intercambiar las filas por columnas. Si el símbolo de una cierta matriz es **A**, la matriz transpuesta se representa por \mathbf{A}^T . Si **A** es una matriz 2×3 , su transpuesta, \mathbf{A}^T , será una matriz 3×2 . Simbólicamente, si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

será

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

Si una matriz cuadrada y su transpuesta son idénticas, se dice que la matriz es *simétrica* respecto a la diagonal principal. Por ejemplo, la matriz de las admitancias propias y admitancias mutuas nodales es simétrica respecto a la diagonal principal, porque el orden de los subíndices de las admitancias mutuas es indiferente; esto es $Y_{12} = Y_{21}$, y así sucesivamente.

¹ Nuestro estudio de las operaciones con matrices se limita al mínimo esencial para comprender la aplicación de la notación matricial a algunos de los problemas de sistemas de potencia que han de desarrollarse en este libro. La mayor parte de los textos modernos sobre circuitos eléctricos utilizan el álgebra matricial. Puede encontrarse un desarrollo más completo y matemático en el libro de B. Noble "Applied Linear Algebra", Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1969.

7.6 SUMA DE MATRICES

La suma de dos matrices $m \times n$, A y B es otra matriz, C , también $m \times n$, cada uno de cuyos elementos es la suma de los elementos correspondientes de las matrices A y B . Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \quad (7.25)$$

o con números

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 6 & 2 + 8 \\ 3 + 4 & 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

Para multiplicar una matriz por un número k , se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por dicho número. El proceso equivale a la suma de k matrices idénticas.

7.7 MULTIPLICACION DE MATRICES

Las reglas para efectuar la multiplicación de dos matrices pueden aclararse examinando la notación matricial de un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, las ecuaciones de nudo de una red con tres nudos independientes son

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 \\ I_3 &= Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 \end{aligned} \quad (7.26)$$

Con la notación matricial estas ecuaciones se expresan por

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{\text{barra}} \mathbf{V}$$

y, como veremos, es importante que la matriz de admitancia esté colocada delante de la matriz de tensiones en la expresión del producto. Las matrices de la ec. (7.27) son

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, el producto \mathbf{YV} debe ser la matriz de una columna

$$\begin{bmatrix} Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 \\ Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 \\ Y_{31}V_1 + Y_{32}V_2 + Y_{33}V_3 \end{bmatrix}$$

si la ec. (7.27) es la expresión matricial correcta de las ecs. (7.26).

La regla para la multiplicación que ha de cumplirse, al menos por lo que se refiere a las matrices especiales que hemos estudiado, es evidente. El primer elemento de la matriz de columna resultante es la suma de cada uno de los elementos de la primera fila de \mathbf{Y} , multiplicado por el elemento correspondiente de la matriz de columna \mathbf{V} ; esto es, el primer elemento de la matriz resultante es igual al primer elemento de la primera fila de \mathbf{Y} multiplicado por el elemento de la primera fila de la matriz \mathbf{V} , más el segundo elemento de la primera fila de \mathbf{Y} , multiplicado por el elemento de la segunda fila de la matriz \mathbf{V} , más el tercer elemento de la fila de \mathbf{Y} por el elemento de la tercera fila de \mathbf{V} . El elemento de la segunda fila de la matriz de columna resultante es la suma de los elementos de la segunda fila de \mathbf{Y} multiplicados por los elementos correspondientes de \mathbf{V} . El elemento de la tercera fila de la matriz resultante se determina de igual manera y el proceso se repite hasta que la matriz de columna resultante tiene el mismo número de elementos que filas tiene \mathbf{Y} .

En general, el producto de una matriz $m \times n$ por una $n \times p$, es otra matriz $m \times p$. Las reglas para la multiplicación se ilustran para el caso del producto de una matriz $\mathbf{A}, 3 \times 2$, por otra matriz $\mathbf{B}, 2 \times 2$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix} \quad (7.28)$$

La primera columna de la matriz producto es el producto de la primera matriz por la primera columna de la segunda matriz. La segunda columna de la matriz producto es el producto de la primera matriz por la segunda columna de la segunda matriz. El proceso se repite hasta obtener tantas columnas en la matriz producto como hayen en la segunda matriz. Las reglas de la multiplicación de matrices no son aplicables a menos que el número de columnas de la primera matriz sea igual al de filas de la segunda. La matriz $\mathbf{B}, 2 \times 2$, anterior tiene el mismo número de filas que columnas la matriz $\mathbf{A}, 3 \times 2$; en este caso se dice que \mathbf{B} es compatible con \mathbf{A} . Por el contrario, \mathbf{A} no es compatible con \mathbf{B} y el producto \mathbf{BA} no tiene definición en este caso.

Si dos matrices cuadradas \mathbf{A} y \mathbf{B} son del mismo orden, \mathbf{B} es compatible con \mathbf{A} , y \mathbf{A} es compatible con \mathbf{B} . Sin embargo, el producto \mathbf{AB} no es generalmente igual al \mathbf{BA} . Esto se expresa diciendo que, en general, el producto de dos matrices no es conmutativo. Como ejemplo tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 8 & 8 + 4 \\ 18 + 16 & 24 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 12 \\ 34 & 32 \end{bmatrix}$$

que es distinto de

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 + 24 & 12 + 32 \\ 4 + 6 & 8 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 44 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Al expresar el producto de dos matrices como \mathbf{AB} , se dice que la primera matriz \mathbf{A} pre-multiplica a \mathbf{B} , o \mathbf{B} postmultiplica a \mathbf{A} .

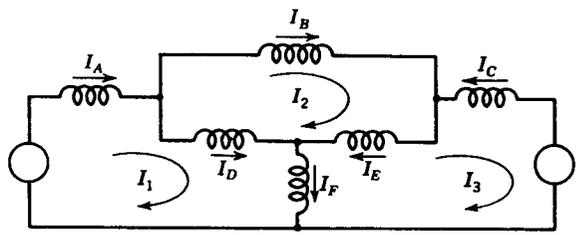


Fig. 7.14 Diagrama de reactancias del ej. 7.6.

EJEMPLO 7.6 La fig. 7.14 es el diagrama de reactancias de un sistema simple. Las corrientes en las ramas se representan por subíndices literales y en los lazos por subíndices numéricos. Determinar la matriz (llamada *matriz de transformación*) por la que puede premultiplicarse la matriz de corrientes de lazo para obtener la matriz de corrientes de rama.

Solución La matriz de transformación C tiene que estar relacionada con las matrices de corriente de rama y de lazo, de forma que se verifique

$$I_{rama} = C I_{lazo}$$

Cada fila de la matriz de transformación tiene que ser tal, que la suma de los productos de cada elemento de la fila por el elemento correspondiente de la matriz de columna de las corrientes de lazo, sea igual a la corriente de rama correspondiente. La ecuación matricial completa es

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \\ I_D \\ I_E \\ I_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$$

7.8 INVERSA DE UNA MATRIZ

En el álgebra matricial no se admite la división, pero el objetivo de esta operación en la resolución de ecuaciones se consigue por la obtención y el manejo de la *inversa* de una matriz. Para definir la inversa de una matriz debemos definir primero la matriz unidad.

Una matriz unidad U es una matriz cuadrada en la que todos los elementos de diagonal principal son 1 y todos los restantes, 0. La matriz unidad de tercer orden es

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(7.29)

Como puede comprobarse fácilmente, el producto obtenido por premultiplicación o postmultiplicación de una matriz cuadrada por la matriz unidad (el mismo orden es igual a la misma matriz cuadrada; esto es

$$UA = AU = A$$

(7.30)

La inversa de una matriz cuadrada A se designa por A⁻¹ y se define por

$$AA^{-1} = A^{-1}A = U$$

(7.31)

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 0.20 & -0.12 \\ 0.10 & 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}^{-1}$$

ya que

$$\begin{bmatrix} 0.20 & -0.12 \\ 0.10 & 0.04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.20 & -0.12 \\ 0.10 & 0.04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El método para determinar la inversa de una matriz puede seguirse resolviendo las ecuaciones de nudo. Si tenemos las ecuaciones de nudo con notación matricial

$$I = YV$$

(7.32)

y premultiplicamos ambos miembros por Y⁻¹, obtenemos

$$Y^{-1}I = Y^{-1}YV$$

(7.33)

$$Y^{-1}I = UV$$

(7.34)

$$Y^{-1}I = V$$

(7.35)

Así pues, la resolución de las ecuaciones de nudo para determinar V, cuando se conoce I, se puede efectuar premultiplicando ambos miembros de la ecuación matricial por Y⁻¹. La ec. (7.35) muestra que la inversa de la matriz de admitancias debe ser una matriz de impedancias a fin de que la ecuación tenga las unidades dimensionales apropiadas.

Las ecs. (7.26) son las ecuaciones de nudo de una red con tres nudos independiente.

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} I_2 + \frac{\Delta_{31}}{\Delta} I_3 \\
 V_2 &= \frac{\Delta_{12}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} I_2 + \frac{\Delta_{32}}{\Delta} I_3 \\
 V_3 &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta} I_1 + \frac{\Delta_{23}}{\Delta} I_2 + \frac{\Delta_{33}}{\Delta} I_3
 \end{aligned}
 \tag{7.36}$$

Resolviendo estas ecuaciones por determinantes, obtenemos en las que el denominador Δ de los coeficientes de las corrientes es el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix}
 \tag{7.37}$$

El numerador de los coeficientes de las corrientes es el cofactor de la admitancia en la fila y columna representadas por el subíndice. Por ejemplo, Δ_{21} es el cofactor de Y_{21} , o

$$\Delta_{21} = (-1)^{(2+1)} \begin{vmatrix} Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{32} & Y_{33} \end{vmatrix}
 \tag{7.38}$$

Comparando las ecs. (7.35) y (7.36) se ve que, para una matriz de tercer orden Y ,

$$Y^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}
 \tag{7.39}$$

en la que Δ y los elementos de la matriz han sido ya definidos antes. El desarrollo es para una matriz de tercer orden, pero su extensión a matrices de orden superior es evidente. Debe tenerse cuidado con el orden de los subíndices que identifican a los cofactores. Estos subíndices están en el orden columna-fila, que es el inverso del orden de los subíndices de la matriz invertida. Las condiciones necesarias para que una matriz tenga su inversa son que sea cuadrada y que $\Delta \neq 0$.

EJEMPLO 7.7 Determinar la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\Delta = 2 \times 10 - 6 \times (-5) = 50$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} &= 10 & \Delta_{21} &= -6 \\
 \Delta_{12} &= 5 & \Delta_{22} &= 2 \\
 \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.20 & -0.12 \\ 0.10 & 0.04 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

como ya se vio al estudiar la ec. (7.31).

EJEMPLO 7.8 Expresar las ecuaciones halladas en el ej. 7.4 en forma matricial y resolverlas para las tensiones de los nudos por inversión de matrices.

Solución La ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} 0 - j1.36 \\ 0 + j0 \\ 0.41 - j1.52 \\ -0.9 - j1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j7.57 & j3.33 & 0.0 & j3.33 \\ j3.33 & -j16.66 & j3.33 & j10.0 \\ 0.0 & j3.33 & -j7.71 & j3.33 \\ j3.33 & j10.0 & j3.33 & -j17.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada anterior se identifica como matriz de admitancias de barra Y_{barra} . Premultiplicando ambos miembros de la ecuación por la inversa de la matriz de admitancias se obtiene

$$\begin{bmatrix} j0.420 & j0.333 & j0.282 & j0.322 \\ j0.333 & j0.620 & j0.327 & j0.352 \\ j0.282 & j0.327 & j0.406 & j0.314 \\ j0.322 & j0.352 & j0.314 & j0.377 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 - j1.36 \\ 0 + j0 \\ 0.41 - j1.52 \\ -0.9 - j1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

La matriz cuadrada anterior se denomina matriz de impedancias de barra Z_{barra} . Efectuando la multiplicación de matrices indicadas,

$$\begin{bmatrix} 1.385 - j0.174 \\ 1.370 - j0.182 \\ 1.377 - j0.115 \\ 1.370 - j0.211 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix}$$

De manera que las tensiones en los nudos serán

$$\begin{aligned}
 V_1 &= 1.385 - j0.174 = 1.39 / -7.15^\circ \text{ por unidad} \\
 V_2 &= 1.370 - j0.182 = 1.39 / -7.57^\circ \text{ por unidad}
 \end{aligned}$$

$$V_3 = 1.377 - j0.115 = 1.38 / -4.78^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_4 = 1.370 - j0.211 = 1.39 / -8.75^\circ \text{ por unidad}$$

Estos cálculos pueden comprobarse parcialmente con referencia a los ej. 7.1 y 7.2. Las barras designadas con los números 1, 2, 3 y 4 en el ejemplo presente son las identificadas por *a*, *b*, *c* y *d* en los ej. 7.1 y 7.2. Si las tensiones en las barras, que hemos calculado, son correctas, debería encontrarse que la potencia que entra en los nudos 1 y 3 y sale del 4, es la misma que la calculada en el ej. 7.2, en el cual las corrientes de *entrada* en la red por las barras 1 y 3 y de *salida* en la barra 4, eran, por unidad, $0.188 / -32.8^\circ$, $0.536 / -7.4^\circ$ y $0.710 / -13.9^\circ$, respectivamente. Calculando las potencias, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Potencia de entrada en la red por el nudo 1} &= 1.39 \times 0.188 \cos(32.8^\circ - 7.2^\circ) \\ &= 0.237 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Potencia de entrada en la red por el nudo 3} &= 1.38 \times 0.536 \cos(7.4^\circ - 4.8^\circ) \\ &= 0.745 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Potencia de salida de la red por el nudo 4} &= 1.39 \times 0.710 \cos(13.9^\circ - 8.8^\circ) \\ &= 0.983 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

Estos valores están de acuerdo con los del ej. 7.2. Calculadas las tensiones en los nudos, el cálculo de las corrientes en las ramas es sencillo y directo.

La resolución de la red por las ecuaciones de nudo o de lazo era innecesaria, considerando lo hecho en los ej. 7.1 y 7.2. Una vez que encontramos la corriente de entrada en la red desde las fuentes de tensión, las tensiones en los nudos y las corrientes en las ramas se pudieron determinar en el ej. 7.2. La formulación sistemática de las ecuaciones de red y su resolución por operaciones con matrices en una calculadora digital es casi esencial para esta clase de problemas cuando la red es extensa. La inversión de una matriz de números reales es una operación pesada, incluso para una matriz 4×4 , pero una calculadora electrónica digital de tamaño medio invierte tal matriz en pocos segundos. Incluyendo el tiempo de impresión.

7.9 PARTICIÓN DE MATRICES

Para el manejo de matrices existe un método particularmente útil denominado *partición* y consiste en considerar varias partes de una matriz como submatrices que se toman como elementos simples al aplicar las reglas usuales de la multiplicación y de la suma. Por ejemplo supongamos una matriz 3×3 , *A*, donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

La matriz se ha partido en cuatro submatrices por medio de las líneas de trazos. Podemos escribirla en la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (7.41)$$

siendo las submatrices

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} & \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F} &= [a_{31} \quad a_{32}] & \mathbf{G} &= a_{33} \end{aligned}$$

Para seguir los pasos de la multiplicación matricial en función de las submatrices, supongamos que *A* ha de postmultiplicarse por otra matriz *B* para formar el producto *C*, siendo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

Partiendo la matriz en la forma indicada, tenemos

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

cuyas submatrices son

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J} = b_{31}$$

El producto es

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{F} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (7.44)$$

Consideradas las submatrices como elementos simples, tenemos

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{DH} + \mathbf{EJ} \\ \mathbf{FH} + \mathbf{GJ} \end{bmatrix} \quad (7.45)$$

El producto quedará determinado efectuando finalmente las multiplicaciones y sumas de submatrices indicadas.

Si C está constituido por dos submatrices M y N , tales que

$$C = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \quad (7.46)$$

se tendrá, comparando con la ecs. (7.45)

$$M = DH + EJ \quad (7.47)$$

$$N = FH + GJ \quad (7.48)$$

Si queremos determinar solamente la submatriz N , se demuestra por participación que,

$$\begin{aligned} N &= [a_{31} \quad a_{32}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} + a_{33}b_{31} \\ &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \end{aligned} \quad (7.49)$$

Para poder multiplicar matrices deben ser originalmente compatibles. Toda línea de partición vertical entre las columnas r y $r + 1$ del primer factor, exige una línea de partición horizontal que pase entre las filas y y $r + 1$ del segundo factor, para que las submatrices puedan ser multiplicadas. Las líneas de partición horizontal pueden dibujarse entre cualquier fila del primer factor y las verticales, entre cualquier columna del segundo o bien suprimidas en uno de ellos o en los dos. Al final de la sección próxima se presenta un ejemplo de aplicación de la partición de matrices.

7.10 ELIMINACION DE NUDOS POR ALGEBRA MATRICIAL

En los ej. 7.1 y 7.2 se han efectuado reducciones de redes para eliminar nudos. Sólo pueden ser eliminados aquellos nudos por los que la corriente no entra ni sale de la red. Veremos ahora como pueden eliminarse tales nudos operando con las matrices de las ecuaciones nodales normalizadas.

La expresión de las ecuaciones nodales normalizadas, con notación matricial, es

$$I = YV \quad (7.50)$$

en la que I y V son matrices de columna e Y una matriz cuadrada simétrica. Las matrices de columna deben disponerse de forma que los elementos asociados a los nudos que han de ser eliminados, estén en las filas inferiores de las matrices. Los elementos de la matriz cuadrada de impedancias se sitúan en correspondencia. Las matrices de columna se parten de forma que los elementos asociados con los nudos que se han de eliminar queden separados de los otros elementos. La matriz de admitancias se parte, de forma que los elementos relacionados solamente con nudos que se han de eliminar, queden separados de los otros elementos por medio de líneas horizontales y verticales. Partiendo de acuerdo con estas reglas, la ec. (7.50) se transforma en la

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & L \\ L^T & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_X \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

en la que I_X es la submatriz formada por las corrientes que entran en los nudos a eliminar y V_X la submatriz formada por las tensiones de dichos nudos. Desde luego, todos los elementos de I_X son cero, ya que los nudos no podrían ser eliminados en caso contrario. Las admitancias propias y mutuas que forman K son las relacionadas solamente con los nudos que se van a conservar. La M está constituida por las admitancias propias y mutuas relacionadas solamente con los nudos a eliminar. La L y su traspuesta L^T están formadas por las admitancias mutuas comunes a un nudo que se ha de conservar y otro que se ha de eliminar.

Efectuando la multiplicación indicada en la ec. (7.51), obtenemos

$$I_A = KV_A + LV_X \quad (7.52)$$

y

$$I_X = L^TV_A + MV_X \quad (7.53)$$

Como todos los elementos de I_X son cero, restando L^TV_A de ambos miembros de la ec. (7.53) y multiplicando ambos miembros por M^{-1} se llega a

$$-M^{-1}L^TV_A = V_X \quad (7.54)$$

Sustituyendo esta expresión de V_X en la ec. (7.52), obtenemos

$$I_A = KV_A - LM^{-1}L^TV_A \quad (7.55)$$

que es una ecuación nodal, cuya matriz de admitancias, es

$$Y = K - LM^{-1}L^T \quad (7.56)$$

La matriz de admitancias nos permite construir el circuito con los nudos eliminados, como veremos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7.9 La fig. 7.15, es la misma de la fig. 7.5b, salvo que en ésta se han numerado los nudos y los valores de las admitancias (mejor que de las impedancias), se han señalado también en el circuito. Los números se han distribuido de forma que los nudos que queremos eliminar, tengan los valores más altos. La numeración no corresponde, pues, con la de otros ejemplos. Determinar el circuito equivalente, eliminando los nudos 4, 5 y 6, y comparar el circuito con el de la fig. 7.5e.

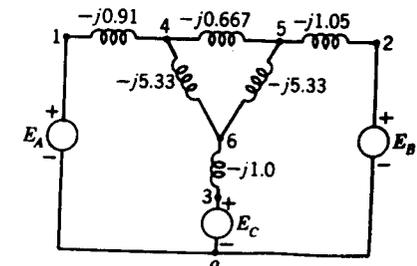


Fig. 7.15 Circuito del ej. 7.9. Los valores dados son impedancias por unidad. El circuito es idéntico al de la fig. 7.5 b.

Solución La matriz de admitancias partida para eliminar los nudos identificados es

$$Y = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T & \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j0.91 & 0.0 & 0.0 & j0.91 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -j1.05 & 0.0 & 0.0 & j1.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -j1.0 & 0.0 & 0.0 & j1.0 \\ \hline j0.91 & 0.0 & 0.0 & -j6.91 & j0.667 & j5.33 \\ 0.0 & j1.05 & 0.0 & j0.667 & -j7.05 & j5.33 \\ 0.0 & 0.0 & j1.0 & j5.33 & j5.33 & -j11.66 \end{bmatrix}$$

Se necesita invertir la submatriz situada en la parte inferior derecha. El determinante de esta submatriz es $\Delta = j128.5$, y el cofactor Δ_{11} vale -53.8 . Así pues, el elemento de la parte superior izquierda de la submatriz invertida, es $-53.8/j128.5 = j0.419$. Los otros elementos de \mathbf{M}^{-1} se determinan de manera similar, obteniéndose

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} j0.419 & j0.282 & j0.321 \\ j0.282 & j0.406 & j0.315 \\ j0.321 & j0.315 & j0.376 \end{bmatrix}$$

Con esto,

$\mathbf{LM}^{-1}\mathbf{L}^T$

$$= \begin{bmatrix} j0.91 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & j1.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & j1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j0.419 & j0.282 & j0.321 \\ j0.282 & j0.406 & j0.315 \\ j0.321 & j0.315 & j0.376 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j0.91 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & j1.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & j1.0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} j0.348 & j0.270 & j0.292 \\ j0.270 & j0.448 & j0.331 \\ j0.292 & j0.331 & j0.377 \end{bmatrix}$$

La matriz de admitancias de la red reducida es

$$Y = \mathbf{K} - \mathbf{LM}^{-1}\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} -j0.91 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -j1.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -j1.0 \end{bmatrix} - \mathbf{LM}^{-1}\mathbf{L}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -j0.562 & j0.270 & j0.292 \\ j0.270 & -j0.602 & j0.331 \\ j0.292 & j0.331 & -j0.623 \end{bmatrix}$$

Examinando la matriz de admitancias, puede observarse que cada uno de los elementos de la diagonal (admitancias propias), es la suma, con signo menos, de los elementos que no están en la diagonal de la misma fila. Por consiguiente, no puede haber admitancias conectadas entre cualquiera de las barras y tierra (que es el nudo de referencia). Las impedancias conectadas directamente entre nudos en el circuito resultante son las inversas, con signo menos, de las admitancias mutuas. Por tanto, las impedancias entre nudos son,

$$Z_{12} = \frac{-1}{j0.270} = j3.70 \text{ por unidad}$$

$$Z_{13} = \frac{-1}{j0.292} = j3.42 \text{ por unidad}$$

$$Z_{23} = \frac{-1}{j0.331} = j3.02 \text{ por unidad}$$

indicando los subíndices de los dos nudos conectados. Los valores concuerdan exactamente con los encontrados en el ej. 7.1 y representados en la fig. 7.5e. Las corrientes halladas en el ej. 7.2 pueden comprobarse aquí a partir de la matriz de admitancias y las tensiones dadas.

El ejemplo muestra lo sistemático del método, tan adecuado para calculadoras digitales.

7.11 MATRICES DE ADMITANCIAS E IMPEDANCIAS DE BARRA

En líneas anteriores de este capítulo estudiamos la forma general de las ecuaciones de lazo compuestas de las impedancias propias y mutuas de los lazos. Se ha dedicado más atención a las ecuaciones de nudo de las admitancias y se han empleado como ejemplos en nuestro breve estudio de operaciones matriciales; de donde observamos que la matriz de admitancias de nudos se identifica por el símbolo $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$. Para una red de tres nudos independientes.

$$\mathbf{Y}_{\text{barra}} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

La inversa de la matriz de admitancias de barra se conoce como la matriz de impedancias de barra y se identifica por $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$. Por definición.

$$\mathbf{Z}_{\text{barra}} = \mathbf{Y}_{\text{barra}}^{-1} \quad (7.58)$$

y para una red de tres nudos independientes

$$\mathbf{Z}_{\text{barra}} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

Puesto que $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ es simétrica con respecto a la diagonal principal, de igual manera lo debe ser $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$.

La estrecha relación entre $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ y $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$ es la razón por la que se usan mayúsculas para las matrices de admitancias e impedancias y se distinguen las impedancias de la \mathbf{Z}_{os} con minúsculas. Los elementos de impedancia de $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$ en la diagonal principal se llaman, *impedancias propias de los nudos* y los elementos fuera de la diagonal se conocen como *impedancias mutuas de los nudos*.

No se necesita determinar la matriz de admitancias para obtener $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$, y se han descrito métodos rápidos para desarrollar $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$ o partir de una lista de elementos de impedancia. Luego puede determinarse $\mathbf{Y}_{\text{barra}}$ por la invertida $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$.

Como veremos después, la matriz de impedancias de barra es importante y muy útil para efectuar cálculos de fallos. Con el fin de comprender el significado físico de las distintas impedancias en la matriz, las compararemos con las admitancias de nudos. Fácilmente lo podemos hacer analizando las ecuaciones en un nudo específico. Por ejemplo, comenzando con las ecuaciones de nudos expresadas como

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}_{\text{barra}} \mathbf{V} \quad (7.60)$$

tenemos en el nudo 2 de los tres nudos independientes

$$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 \quad (7.61)$$

Si V_1 y V_3 se reducen a cero haciendo que entren en cortocircuito los nudos 1 y 3 con nudo de referencia y se aplica la corriente I_2 al nudo 2, la admitancia mutua en el nudo 2 es

$$Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=V_3=0} \quad (7.62)$$

Así, la admitancia mutua, de un nudo específico puede medirse haciendo que entren en corto circuito los nudos restantes con el nudo de referencia y hallando luego la relación entre la corriente aplicada y el voltaje resultante en el nudo. La fig. 7.16 ilustra el método para una red reactiva de tres nudos. El resultado, lógicamente, es equivalente al de agregar todas las admitancias directamente conectadas al nudo, como hasta ahora ha sido nuestro procedimiento.

¹ Ver H. E. Brown, C. E. Person, L. K. Kirchmayer, y G. W. Stagg, Digital Calculation of 3-Phase Short Circuits by Matrix Method, *Trans. AIEE*, vol. 79, pt. III, págs. 1277-1282, 1960.

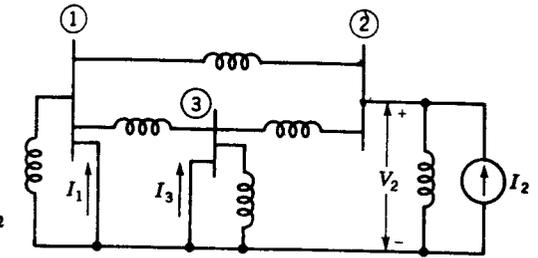


Fig. 7.16 Circuito para medir Y_{22} , Y_{12} y Y_{32} .

La fig. 7.16 también sirve para ilustrar la admitancia mutua. En el nudo 1 la ecuación que se obtiene por expansión de la ec. (7.60) es

$$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 \quad (7.63)$$

de la cual vemos que

$$Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=V_3=0} \quad (7.64)$$

Por tanto, la admitancia mutua se mide haciendo que entren en cortocircuito todos los nudos excepto el nudo 2 al nudo de referencia y aplicando la corriente I_2 en el nudo 2, como lo indica la fig. 7.16. Luego Y_{12} es la relación del negativo de la corriente que sale del nudo 1 se usa, ya que I_1 se define como la corriente que *entra* a la red. Como es de esperarse, la admitancia resultante es el negativo de la admitancia directamente conectada entre los nudos 1 y 2.

Hemos efectuado este estudio detallado de las admitancias de nudos para diferenciarlas claramente de las impedancias de la matriz de impedancias de barra.

Resolvemos la ec. (7.60) premultiplicando ambos lados de la ecuación por $\mathbf{Y}^{-1}_{\text{barra}} = \mathbf{Z}_{\text{barra}}$ para obtener.

$$\mathbf{V} = \mathbf{Z}_{\text{barra}} \mathbf{I} \quad (7.65)$$

y debemos recordar, cuando tratemos con $\mathbf{Z}_{\text{barra}}$, que \mathbf{V} e \mathbf{I} son matrices columna de las tensiones de nudos y de corriente que entran a los nudos provenientes de fuentes de corriente, respectivamente. La expansión de la ec. (7.65) para una red de tres nudos independiente resulta en

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 \quad (7.66)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 \quad (7.67)$$

$$V_3 = Z_{31}I_1 + Z_{32}I_2 + Z_{33}I_3 \quad (7.68)$$

De la ec. (7.67) observamos que la impedancia propia Z_{22} se determina colocando en circuito abierto las fuentes de corriente en los nudos 1 y 3 y aplicando la corriente I_2 en el nudo 2. Entonces

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=I_3=0} \quad (7.69)$$

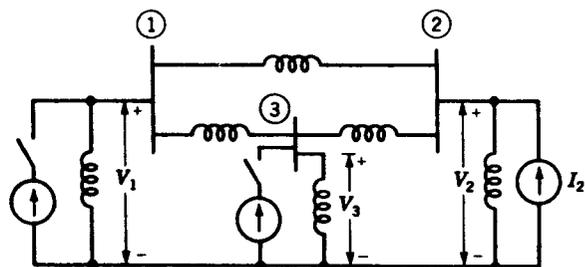


Fig. 7.17 Circuito para medir Z_{22} , Z_{12} y Z_{32} .

La fig. 7.17 muestra el circuito descrito. Puesto que Z_{22} se definió abriendo las fuentes de corriente conectadas a los otros nudos mientras que Y_{22} se encontró con los otros nudos en corto, no debemos esperar ninguna relación recíproca entre estas dos cantidades.

El circuito de la fig. 7.17 también nos permite medir algunas impedancias mutuas, puesto que vemos, por la ec. (7.66), que con las fuentes de corriente I_1 e I_3 abiertas.

$$Z_{12} = \frac{V_1}{I_2} \Big|_{I_1=I_3=0}$$

y de la ec. (7.68)

$$Z_{22} = \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=I_3=0}$$

Así podemos medir las impedancias mutuas Z_{12} y Z_{32} aplicando corriente en el nudo 2 y encontrando las relaciones de V_1 y V_3 a I_2 con las fuentes, abiertas en todos los nudos excepto el 2. Observemos que la admitancia mutua se mide con todos menos un nudo en corto circuito y que la impedancia mutua se mide con todas las fuentes abiertas menos una.

La ec. (7.66) nos indica que si aplicamos corriente en el nudo 1 con las fuentes de corriente 2 y 3 abiertas, la única impedancia por la que circula I_1 es Z_{11} . Bajo las mismas circunstancias, las ecs. (7.67) y (7.68) indican que I_1 produce tensiones en las barras 2 y 3 expresadas por

$$V_2 = I_1 Z_{21} \quad \text{y} \quad V_3 = I_1 Z_{31} \quad (7.70)$$

No podemos montar un circuito pasivo físicamente realizable con estas impedancias de acoplamiento, pero es importante caer en cuenta de las implicaciones del estudio anterior, ya que Z_{barra} a veces se usa en los estudios de carga y es extremadamente valiosa en el cálculo de fallas, como veremos posteriormente.

EJEMPLO 7.10 Un condensador tiene una reactancia de 5.0 por unidad y se conecta al nudo 2 del circuito de los ejes. 7.4, 7.5 y 7.8. Las fems E_A , E_B , E_C , y sus fuentes de corriente equivalentes son iguales a las de esos ejemplos. Encontrar la corriente que circula por el condensador.

Solución El equivalente Thévenin del circuito del nudo 2 hacia atrás tiene una fem de

$$E_{th} = 1.39 / -7.57^\circ \text{ por unidad}$$

que es la tensión V_2 encontrada en el ej. 7.8.

Para encontrar la impedancia Thévenin se hace que entren en corto circuito las fem o se abren las fuentes de corriente, y la impedancia entre el nudo 2 y el de referencia debe terminarse. A partir de $V = Z_{barra} I$ tenemos en el nudo 2.

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + Z_{24}I_4$$

Con las fem en corto circuito (o con las fem y sus impedancias en serie reemplazadas por las fuentes de corriente equivalentes y las admitancias en paralelo y con las fuentes de corriente abiertas) ninguna corriente entra al circuito proveniente de fuentes en los nudos 1, 3 y 4. La relación del voltaje aplicado al nudo 2 a la corriente que circula en la red es Z_{22} , y esta impedancia la conocemos, ya que calculamos Z_{barra} en el ej. 7.8. Refiriéndonos al ej. 7.8 hallamos.

$$Z_{th} = Z_{22} = j0.620$$

La corriente que circula por el condensador es

$$I_c = \frac{1.39 / -7.57^\circ}{j0.620 - j5.0} = 0.317 / 82.43^\circ \text{ por unidad}$$

EJEMPLO 7.11 Si se aplica una corriente de $-0.317/82.43^\circ$ por unidad en la red de los ejes. 7.4, 7.5 y 7.8 en el nudo 2, encontrar las tensiones resultantes en los nudos 1, 2, 3, y 4.

Solución Con las fem originales en corto circuito las tensiones en los nudos producidas por la corriente aplicada se calcula empleando la matriz de impedancias de barra, que encontramos en el ej. 7.8. Las impedancias buscadas están en la columna 2 de Z_{barra} . De $V = Z_{barra} I$, las tensiones con todas las fems en corto son

$$V_1 = I_2 Z_{12} = -0.317 / 82.43^\circ \times 0.333 / 90^\circ = 0.106 / -7.57^\circ$$

$$V_2 = I_2 Z_{22} = -0.317 / 82.43^\circ \times 0.620 / 90^\circ = 0.197 / -7.57^\circ$$

$$V_3 = I_2 Z_{32} = -0.317 / 82.43^\circ \times 0.327 / 90^\circ = 0.104 / -7.57^\circ$$

$$V_4 = I_2 Z_{42} = -0.317 / 82.43^\circ \times 0.352 / 90^\circ = 0.112 / -7.57^\circ$$

Por superposición se determinan las tensiones resultantes agregando los voltajes producidos por la aplicación de la corriente con las fem en corto al nudo de voltajes encontrado en el ej. 7.8. Los nuevos voltajes de nudo son

$$V_1 = 1.39 / -7.15^\circ + 0.106 / -7.57^\circ = 1.50 / -7.18^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_2 = 1.39 / -7.57^\circ + 0.197 / -7.57^\circ = 1.59 / -7.57^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_3 = 1.38 / -4.78^\circ + 0.104 / -7.57^\circ = 1.48 / -4.95^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_4 = 1.39 / -8.75^\circ + 0.112 / -7.57^\circ = 1.50 / -8.65^\circ \text{ por unidad}$$

Ya que los cambios en voltaje producidos por la corriente aplicada están a un mismo ángulo y este ángulo difiere muy poco de los voltajes originales, una aproximación da respuestas satisfactorias. El cambio en la magnitud del voltaje en la barra es aproximadamente igual al producto de la magnitud de la corriente por unidad y la magnitud de la im-

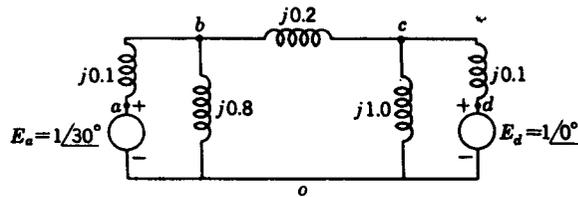


Fig. 7.18 Circuito para los prob. 7.1 a 7.4 y 7.7 a 7.9. Los valores de las tensiones y de las impedancias se dan por unidad.

pedancia apropiada. Estos valores, agregados a las magnitudes de las tensiones originales da las magnitudes de los nuevos voltajes, son bastante aproximados. Esta aproximación es válida puesto que la red es reactiva pura, pero suministra un buen estimativo donde la reactancia es considerablemente mayor que la resistencia, como generalmente es el caso.

Los últimos dos ejemplos ilustran la importancia de la matriz de impedancias de barra e indican cómo, agregando un condensador a una barra, se produce un aumento en los voltajes de barra. La suposición de que los ángulos de voltaje y las fuentes de corriente permanecen constantes después de conectar condensadores a la barra no es totalmente válida si estamos considerando la operación de un sistema de potencia. Consideraremos nuevamente condensadores en el cap. 9 y veremos un ejemplo utilizando un programa de computador de cargas para calcular el efecto de los condensadores.

7.12 RESUMEN

Este capítulo ha suministrado el bagaje esencial para entender las bases para la solución por computador de los estudios de cargas, que es el objetivo del capítulo siguiente. Para el estudio de cargas se emplea la matriz de admitancias de barra, aunque algunos ingenieros prefieren usar la matriz de impedancias de barra. El empleo de estas matrices se ha ilustrado con ejemplos. La matriz de impedancias de barra halla su mayor valor en los cálculos de fallas, que estudiaremos en los caps. 11 y 13.

PROBLEMAS

- 7.1 Reducir por transformaciones Y-Δ la red de reactancias de la fig. 7.18 a una conexión en Δ entre los nudos a, d y o.
- 7.2 Determinar la potencia de salida de las fuentes E_a y E_d de la red de la fig. 7.18.
- 7.3 Determinar las impedancias propias y mutuas de las ecuaciones de lazo de la red de la fig. 7.18. Al establecer las ecuaciones, hacer que los eslabones sean las ramas que contienen E_a y E_d y la rama que une los nudos b y c. Suponer que las corrientes de lazo tienen todas el sentido de las agujas del reloj. Numerar los lazos, de izquierda a derecha en el diagrama 1, 2 y 3.
- 7.4 Determinar las admitancias propias y mutuas en las ecuaciones de nudo necesarias para resolver la red de la fig. 7.18. Escribir las ecuaciones de nudo necesarias para determinar las tensiones desconocidas en los nudos.

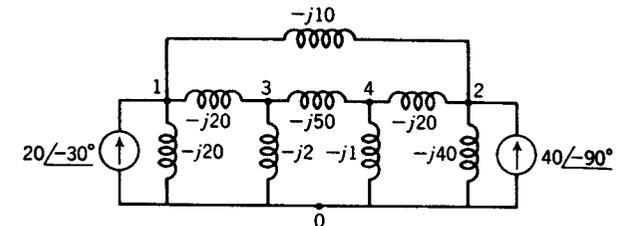


Fig. 7.19 Circuito para los probs. 7.10 y 7.11; los valores dados son las corrientes y las impedancias por unidad.

- 7.5 Determinar los productos de matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- 7.6 Determinar las inversas de las matrices:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- 7.7 Escribir las ecuaciones de lazo del prob. 7.3 en forma matricial y resolverlas para las corrientes de lazo por inversión de matriz. Determinar la potencia de salida en las fuentes E_a y E_d.
- 7.8 Convertir E_a y E_d y sus impedancias en serie, en la red de la fig. 7.18 en las fuentes de corriente equivalentes, escribiendo después las ecuaciones nodales en forma normalizada. Designese los nudos b y c por 1 y 2 respectivamente. Comparar las ecuaciones resultantes con las ecuaciones del prob. 7.4. Hallar las tensiones en los nudos b y c por inversión de matrices.
- 7.9 Determinar, a partir de las tensiones nodales halladas en el prob. 7.8, la potencia de salida de cada fuente de corriente de tal problema y comparar los resultados con las potencias halladas en los prob. 7.2 y 7.7.
- 7.10 Escribir las ecuaciones nodales en forma normalizada del circuito de la fig. 7.19.

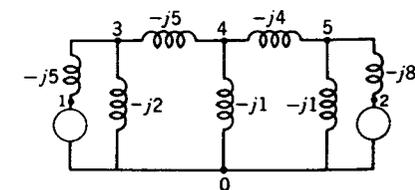


Fig. 7.20 Circuito para el prob. 7.12. Los valores de las admitancias son por unidad.

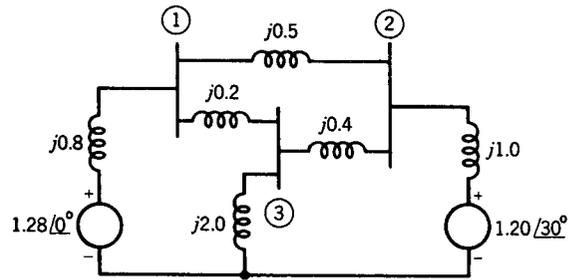


Fig. 7.21 Circuito para el prob. 7.13. Los valores dados son las tensiones y las impedancias por unidad.

Eliminar V_4 como variable resolviendo la ecuación del nudo 4 para V_4 y sustituyendo en las otras ecuaciones. De igual forma, eliminar V_3 y escribir las dos ecuaciones restantes en forma matricial.

- 7.11 Eliminar los nudos 3 y 4 del circuito de la fig. 7.19 por el método descrito en la sec. 7.10. Comparar la matriz resultante con la ecuación matricial del prob. 7.10, Dibujar el circuito definido por la matriz.
- 7.12 Eliminar los nudos 3, 4 y 5 del circuito de la fig. 7.20 por el método de la sec. 7.10 y dibujar el circuito definido por la matriz resultante.
- 7.13 Para la red reactiva de la fig. 7.21 encontrar (a) Z_{barra} , (b) el voltaje en cada barra, (c) la corriente que circula por un condensador que tiene una reactancia de 5.0 P.U. conectado en la barra 3 al neutro, (d) el cambio en tensión en cada barra cuando el condensador se conecta a la barra 3, y (e) la tensión en cada barra después de conectar el condensador. Puede suponerse que la magnitud y ángulo de cada uno de los voltajes generados permanece constante.

En el cap. 1, se vio la gran importancia que tienen los estudios de cargas en la planificación de las ampliaciones de un sistema de energía, así como en la determinación del funcionamiento óptimo de los sistemas existentes. La información que se obtiene de un estudio de cargas, es normalmente, el módulo y el ángulo de fase de las tensiones en cada barra y las potencias real y reactiva de cada línea. Sin embargo, mucha información adicional e importante viene en los listados de computador utilizados por las compañías de energía. La mayor parte de estas características será tratada a lo largo del presente capítulo.

Hasta la llegada de los grandes computadores digitales, las tablas de c.a. descritas en la sec. 6.9 eran el medio para hacer los estudios de cargas. El proceso era tedioso y consumía mucho tiempo. Los computadores digitales han remplazado casi completamente las tablas de c.a. para toda clase de estudios de energía, pero especialmente en las soluciones de flujo de cargas. En este capítulo estudiaremos dos métodos en los cuales se basa la solución al problema del estudio de cargas. Se evidencia la importancia de los computadores digitales en el diseño y operación de los sistemas de energía.

8.1 DATOS PARA LOS ESTUDIOS DE CARGAS

Para la solución del problema de estudios de cargas, pueden utilizarse, bien las admitancias mutua y propia que componen la matriz de admitancias de barra, Y_{barra} , o bien las impedancias propias y mutuas que componen Z_{barra} . Limitaremos nuestro estudio a los métodos que utilizan admitancia. El punto de partida en los datos que debe suministrar la calculadora es el diagrama unifilar del sistema. Para que la calculadora pueda determinar todos los elementos de Y_{barra} son necesarios los valores de las impedancias serie y las admitancias paralelo. También se debe informar de las características e impedancias de los transformadores, valor nominal de los condensadores en paralelo y el conjunto de tomas de los transformadores.

Las condiciones de funcionamiento deben elegirse siempre para cada estudio. En cada barra, excepto en una, debe especificarse la potencia real en la red. La potencia consumida por la carga es potencia negativa que entra al sistema. Las otras potencias son las de los generadores y potencias positivas o negativas que entran por las interconexiones. Además, en estas barras, hay que especificar o la potencia reactiva de la red o el valor de la tensión; esto es, en cada barra hay que decidir si hay que mantener constante el valor de la tensión o la potencia reactiva. Lo normal es fijar la potencia reactiva en las barras de la carga y el valor de la tensión en las barras de los generadores, por más que, a veces, se especifique la potencia reactiva en los generadores. En los programas de las calculadoras digitales hay que prever para el cálculo que se considere la tensión mantenida constante en una barra, mientras que la potencia reactiva permanece dentro de los límites fijados.

La única barra en la que no se especifica la potencia real, se denomina barra *oscilante* y, generalmente, es una barra a la que está conectado un generador. Es evidente que la potencia que entra al sistema no puede ser fijada por anticipado en cada barra porque no son conocidas las pérdidas del sistema hasta que el estudio no está completo. Los generadores en la barra oscilante suministran la diferencia entre la potencia real especificada que entra al sistema por las otras barras y la salida total del sistema más las pérdidas. En la barra oscilante, se especifican el módulo y el argumento de la tensión. La potencia real y reactiva en esta barra se determinan por el computador como parte de la solución.

8.2 METODO DE GAUSS-SEIDEL

La complejidad que presenta la obtención de una solución formal del problema de las cargas en una red de energía, radica en las diferencias en el tipo de datos especificados para las distintas barras del sistema. Aunque no es difícil la formulación del número de ecuaciones suficiente, no es práctico obtener una solución directa. La resolución de los problemas de carga por el método digital sigue un proceso iterativo, asignando valores estimados a las tensiones desconocidas en las barras y calculando una de las tensiones en las barras a partir de los valores estimados en las otras y las potencias real y reactiva especificadas. De esta forma se obtiene un nuevo conjunto de tensiones en las barras, que se emplea para calcular otro conjunto de tensiones en las barras; cada cálculo de un nuevo conjunto de tensiones se llama *iteración*. El proceso iterativo se repite hasta que los cambios en cada barra son menores que un valor mínimo especificado.

Examinamos primero la solución que expresa la tensión de una barra como función de las potencias real y reactiva entregadas a la barra por los generadores o suministrada a la carga conectada a la barra, las tensiones estimadas o previamente calculadas en las otras

barras y las admitancias propia y mutua de los nudos. Las ecuaciones fundamentales se obtienen partiendo de una formulación nodal de las ecuaciones de la red. Deduiremos las ecuaciones para un sistema de cuatro barras; después, escribiremos las ecuaciones generales. Designando la barra oscilante con el número 1, partiremos para el cálculo de la barra 2. Si P_2 y Q_2 son las potencias real y reactiva previstas que entran al sistema en la barra 2,

$$V_2 I_2^* = P_2 + jQ_2 \quad (8.1)$$

de donde I_2 se expresa como:

$$I_2 = \frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} \quad (8.2)$$

y en términos de las admitancias propia y mutua, de los nudos omitiendo los generadores y las cargas, puesto que la corriente en cada nudo se expresa como en la ec. (8.2).

$$\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4 \quad (8.3)$$

y despejando V_2 da

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} - (Y_{21}V_1 + Y_{23}V_3 + Y_{24}V_4) \right] \quad (8.4)$$

La ec. (8.4) da un valor de V_2 corregido sobre la base de los valores P_2 y Q_2 previstos, cuando los valores estimados inicialmente se sustituyen en el segundo miembro de las expresiones de las tensiones. El valor calculado para V_2 y el valor estimado para V_2^* no coincidirán. Sustituyendo el conjugado del valor calculado de V_2 por V_2^* en la ec. (8.4) para calcular otro valor de V_2 , se conseguiría una concordancia con un buen grado de exactitud después de varias iteraciones y sería el valor corregido de V_2 con las tensiones estimadas y prescindiendo de la potencia en las otras barras. Este valor *no* sería, sin embargo, la solución para V_2 con las condiciones de carga especificadas, porque las tensiones sobre las que se basa el cálculo de V_2 son valores estimados en las otras barras y las tensiones reales no son todavía conocidas. Se recomiendan en cada barra dos cálculos sucesivos de V_2 (el segundo igual que el primero, salvo la corrección de V_2^*), antes de pasar a la siguiente.

El valor corregido de la tensión, determinado en cada barra, se usa para calcular la tensión corregida de la siguiente. El proceso se repite sucesivamente en todas las barras (excepto en la oscilante) a lo largo de la red para completar la primera iteración. Después se vuelve a realizar todo el proceso, una y otra vez, hasta que el valor de la corrección de la tensión en cada barra es menor que el índice de precisión predeterminado.

Este procedimiento de solución de ecuaciones lineales algebraicas se conoce como el *método iterativo de Gauss-Siedel*. Si a través del proceso iterativo se utiliza el mismo conjunto de valores de tensión (en lugar de substituir inmediatamente el nuevo valor obtenido para el cálculo de la tensión en la próxima barra), el proceso se llama *método iterativo de Gauss*.

Es posible el desembocamiento en una solución errónea si las tensiones de partida son muy diferentes de los valores correctos. Este desembocamiento erróneo puede evitarse si las tensiones de partida tienen valores razonables y no difieren en fase. Las soluciones indeseables se distinguen fácilmente inspeccionando los resultados, puesto que las tensiones

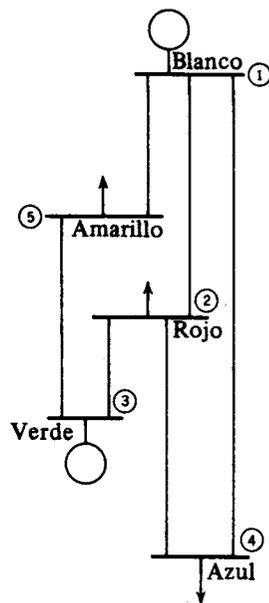


Fig. 8.1 Diagrama unifilar del ej. 8.1

del sistema normalmente no tienen un intervalo de fase mayor que 45° y la diferencia entre barras adyacentes es menor a 10° y frecuentemente más pequeña.

La tensión calculada en cualquier barra k , para un total de N barras y para P_k y Q_k dados, es

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left(\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \right) \quad (8.5)$$

siendo $n \neq k$. Los valores de las tensiones en el segundo miembro de la ecuación son los mejores valores previos para las barras correspondientes; esto es, cada tensión es la calculada por la última iteración (o la tensión estimada si no ha sido todavía efectuada la iteración en la barra en cuestión).

Como la ec. (8.5) se aplica solamente en las barras en las que las potencias real y reactiva están especificadas, es preciso un paso adicional en las barras en que el valor de la tensión ha de permanecer constante. Antes de estudiar este paso adicional veremos un ejemplo de los cálculos en una barra en la que las potencias real y reactiva están previstas.

EJEMPLO 8.1 La fig. 8.1 representa un diagrama unifilar de un sistema muy simple, en el que se ha omitido la barra del neutro. Los generadores están conectados a las barras 1 y 3. Las cargas están indicadas en las barras 2, 4 y 5. Las impedancias se dan en la tabla 8.1 para las seis líneas, identificadas por las barras en que terminan. Los valores de la tabla 8.2 de las potencias real y reactiva son positivos para la entrada de potencia en cada barra. Por tanto, los valores negativos de P y Q en las barras 2, 4 y 5 indican cargas inductivas. En la columna de las tensiones los valores para las barras de carga son las estimadas en principio. El módulo y el argumento de la tensión han de mantenerse constantes en la barra oscilante,

Tabla 8.1

Línea entre barras	R p.u.	X p.u.
1-2	0.10	0.40
1-4	0.15	0.60
1-5	0.05	0.20
2-3	0.05	0.20
2-4	0.10	0.40
3-5	0.05	0.20

y el módulo de la tensión ha de permanecer constante en la barra 3. Suponer que el cálculo iterativo parte de la barra 2, y determinar el valor de V_2 para la primera iteración por el procedimiento antes descrito.

Solución Con el objeto de aproximarnos a la exactitud de una calculadora digital, los cálculos abajo indicados se han realizado en una calculadora de mesa.

De la tabla 8.3 las admitancias de línea y las admitancias propias y mutuas para la barra 2 son

$$Y_{21} = -0.588235 + j2.352941 \text{ por unidad}$$

$$Y_{22} = 2.352941 - j9.411764 \text{ por unidad}$$

$$Y_{23} = -1.176471 + j4.705882 \text{ por unidad}$$

$$Y_{24} = -0.588235 + j2.352941 \text{ por unidad}$$

$$Y_{25} = 0 + j0$$

Por sustitución en la ec. (8.5) se obtiene

$$V_2 = \frac{1}{Y_{22}} \left\{ \frac{-0.6 + j0.3}{1.0 + j0} - [1.02(-0.588235 + j2.352941)] \right\}$$

Tabla 8.2

Barra	P p.u.	Q p.u.	V p.u.	Observaciones
1	1.02/0°	Barra oscilante
2	-0.6	-0.3	1.00/0°	
3	1.0	1.04/0°	Valor constante de la tensión
4	-0.4	-0.1	1.00/0°	Barra de carga (inductiva)
5	-0.6	-0.2	1.00/0°	Barra de carga (inductiva)

Tabla 8.3

Línea	G p.u.	B p.u.
1-2	0.588235	-2.352941
1-4	0.392157	-1.568627
1-5	1.176471	-4.705882
2-3	1.176471	-4.705882
2-4	0.588235	-2.352941
3-5	1.176471	-4.705882

$$\begin{aligned}
 & + 1.04(-1.176471 + j4.705882) + (-0.588235 + j2.352941) \} \\
 & = \frac{1}{Y_{22}} (-0.6 + j0.3 + 2.411764 - j9.647058) \\
 & = \frac{1.811764 - j9.347058}{2.352941 - j9.411764} = 0.980000 - j0.052500 \text{ por unidad}
 \end{aligned}$$

Antes de dejar la barra 2 para realizar cálculos similares en la barra siguiente, recalculamos V_2 con el valor corregido de V_2^* , en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 V_2 &= \frac{1}{Y_{22}} \left(\frac{-0.6 + j0.3}{0.980000 + j0.052500} + 2.411764 - j9.647058 \right) \\
 &= \frac{-0.594141 + j0.337951 + 2.411764 - j9.647058}{2.352941 - j9.411764} \\
 &= 0.976351 - j0.050965 \text{ por unidad}
 \end{aligned}$$

La experiencia con el método de Gauss-Seidel de resolución de los problemas de distribución de energía ha demostrado que se necesita un número excesivo de iteraciones antes de que la tensión corregida esté dentro de un índice aceptable de precisión, si la tensión corregida en una barra reemplaza simplemente al mejor valor anterior al progresar los cálculos entre barras. El número de iteraciones necesarias se reduce considerablemente si la corrección de la tensión de cada barra se multiplica por alguna constante que aumente el valor de la corrección para llevar el valor de la tensión más próximo al valor al que está convergiendo. Los multiplicadores que permiten esta convergencia mejorada se denominan *factores de aceleración*. La diferencia entre la tensión calculada nuevamente y el mejor valor anterior de la tensión en la barra se multiplica por el factor de aceleración apropiado para obtener una corrección mejor que añadir al valor anterior. El factor de aceleración para la componente real de la corrección puede ser distinto del de la componente imaginaria. Para un sistema cualquiera, existen valores óptimos para el valor de los factores de aceleración, y una elección desafortunada de tales factores puede dar lugar a una convergencia menos rápida o hacer imposible dicha convergencia. Normalmente el factor 1.6, tanto

para la parte real como para la imaginaria, suele ser adecuado. Para cada sistema particular puede estudiarse la forma de seleccionar el factor más acertado.

En una barra en la que se haya especificado el módulo de la tensión en lugar de la potencia reactiva, las componentes real e imaginaria de la tensión para cada iteración, se determinan calculando primero un valor para la potencia reactiva. De la ec. (8.5) deducimos

$$P_k - jQ_k = \left(Y_{kk}V_k + \sum_{n=1}^N Y_{kn}V_n \right) V_k^* \tag{8.6}$$

donde $n \neq k$. Si permitimos que $n = k$.

$$P_k - jQ_k = V_k^* \sum_{n=1}^N Y_{kn}V_n \tag{8.7}$$

$$Q_k = - \text{Im} \left\{ V_k^* \sum_{n=1}^N Y_{kn}V_n \right\} \tag{8.8}$$

en la que el símbolo Im significa "parte imaginaria de".

La potencia reactiva Q_k se evalúa por medio de la ec. (8.8) para los valores mejores previos de las tensiones en las barras, y este valor de Q_k se sustituye en la ec. (8.5) para determinar una nueva V_k . Las componentes de la nueva V_k se multiplican después por la relación del módulo constante especificado de V_k al módulo de V_k calculado por la ec. (8.5). El resultado es la tensión compleja corregida del valor especificado.

EJEMPLO 8.2 Determinar la tensión de la primera iteración de la barra 3 del ej. 8.1, calculada con la tensión estimada inicialmente para la barra 2, reemplazada por el valor hallado en el ej. 8.1 sin aplicar los factores de aceleración.

Solución Las admitancias propias y mutuas para la barra 3 son:

$$\begin{aligned}
 Y_{31} &= 0 + j0 \\
 Y_{32} &= -1.176471 + j4.705882 \text{ por unidad} \\
 Y_{33} &= 2.352941 - j9.411764 \text{ por unidad} \\
 Y_{34} &= 0 + j0 \\
 Y_{35} &= -1.176471 + j4.705882 \text{ por unidad}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ec. (8.8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 Q_k &= - \text{Im} \{ [1.04(2.352941 - j9.411764) \\
 & \quad + (0.976351 - j0.050965)(-1.176471 + j4.705882) \\
 & \quad \quad \quad + (-1.176471 + j4.705882)]1.04 \} \\
 &= 0.444913 \text{ por unidad}
 \end{aligned}$$

El valor calculado para Q_k se sustituye en la ec. (8.5), obteniéndose

$$V_3 = \frac{1}{Y_{33}} \left\{ \frac{1.0 - j0.444913}{1.04} - [(-1.176471 + j4.705882)(0.976351$$

$$\begin{aligned}
 & -j0.050965) + (-1.176471 + j4.705882) \} \\
 & = \frac{1}{Y_{33}} (0.961538 - j0.427801 + 2.085285 - j9.360334) \\
 & = \frac{3.046823 - j9.788135}{2.352941 - j9.411764} = 1.054984 + j0.059979 \text{ por unidad}
 \end{aligned}$$

Esta V_3 tiene que ser corregida ahora para que esté de acuerdo con el valor absoluto especificado. El módulo del V_3 que se acaba de calcular es 1.056688 y la V_3 compleja corregida de módulo 1.04 es

$$V_3 = \frac{1.04}{1.056688} (1.054984 + j0.059979) = 1.038322 + j0.059032 \text{ por unidad}$$

Los estudios de cargas pueden facilitarse con el uso de ecuaciones que comprenden la matriz de impedancia de barra. Recalcamos, sin embargo, que los generadores y las cargas, se consideran externas a la red cuando se solucionan las ecuaciones de carga en términos de las admitancias de nudo propia y mutua. Si excluimos los generadores y las cargas, las impedancias de todas las barras a tierra se componen únicamente de caminos de alta impedancia tales como la capacitancia de la línea a tierra, los condensadores estáticos y la impedancia debida a la corriente magnetizante del transformador. Esto significa que la corriente aplicada a un nudo encuentra una alta impedancia a su flujo si todos los otros nudos están en circuito abierto, como es el caso de la medición de las impedancias en el nudo del transformador. Así, estas impedancias son muy altas y, si se desprecian los caminos a tierra, se hacen infinitas. Por eso, sin caminos a tierra, el determinante de Y_{barra} es cero y en inverso no existe. Los estudios de cargas basados en la matriz de impedancias de barra, designan la barra del generador oscilante como referencia para la definición de Y_{barra} y Z_{barra} . La ecuación para la matriz de tensiones nodales con la barra de neutros como referencia es

$$V = Z_{barra} + V_R \quad (8.9)$$

donde V_R es la matriz columna cuyos elementos son la tensión de la barra oscilante.

8.3 METODO DE NEWTON-RAPHSON

La expansión en series de Taylor para una función de dos o más variables es la base del método de Newton-Raphson en la solución de problemas de estudio de cargas. Las derivadas parciales de orden superior a uno se desprecian en la serie de términos de la expansión de Taylor. Aquí no se da la justificación del método.

La mayoría de los programas comienzan con la iteración de Gauss-Seidel para obtener un buen valor inicial de tensión en la iteración de Newton-Raphson. Estas tensiones se

usan entonces para calcular P en todas las barras, excepto en la barra oscilante y Q en todas las barras donde la potencia reactiva se especifica. Entonces las diferencias entre los valores especificados y los calculados se emplean para determinar las correcciones en las tensiones de barra. El proceso se repite hasta que los valores calculados de P y Q o $|V|$ en todas las barras difiera de los valores especificados en menos que el índice de precisión determinada.

El procedimiento se explica mejor observando las ecuaciones pertinentes. Como en el método de Gauss-Seidel, se omite la barra oscilante de la solución iterativa, pues tanto el módulo como el argumento de la tensión de la barra oscilante se especifican. En la barra k , P_k y Q_k , en un sistema de N barras, están dadas por la ec. (8.7), que repetimos por conveniencia:

$$P_k - jQ_k = V_k^* \sum_{n=1}^N Y_{kn} V_n \quad (8.10)$$

donde

$$V_k = a_k + jb_k \quad (8.11)$$

y

$$Y_{kn} = G_{kn} - jB_{kn} \quad (8.12)$$

Reemplazando las ecs (8.11) y (8.12) en la ec. (8.10) obtenemos

$$P_k - jQ_k = (a_k - jb_k) \sum_{n=1}^N (G_{kn} - jB_{kn}) (a_n + jb_n) \quad (8.13)$$

Igualando las partes reales en ambos lados de la ecuación se obtiene P_k e igualando las partes imaginarias tenemos Q_k . En las barras donde la tensión se controla (barra p , por ejemplo), el cuadrado de la magnitud de la tensión es

$$|V_p|^2 = a_p^2 + b_p^2 \quad (8.14)$$

Como veremos, para cada iteración serán calculados los cambios en a_p y b_p , aunque la suma de los cuadrados de a_p y b_p deban converger al cuadrado del valor especificado en la barra de tensión controlada.

En el proceso iterativo los valores calculados de P_k , Q_k o $|V|^2$ deben ser comparados con los valores especificados, y se definen los siguientes términos:

$$\Delta P_k = P_{k, espec} - P_{k, calc} \quad (8.15)$$

$$\Delta Q_k = Q_{k, espec} - Q_{k, calc} \quad (8.16)$$

o si se especifica el valor de la tensión en la barra k .

$$\Delta |V_k|^2 = |V_{k, espec}|^2 - |V_{k, calc}|^2 \quad (8.17)$$

Estos valores de ΔP_k , ΔQ_k y $\Delta |V_k|^2$ son entonces usados para calcular nuevos valores para las tensiones de barra usando una ecuación que daremos sólo para un sistema de tres

¹ Véase H. E. Brown, G. K. Carter, H. H. Happ, y C. E. Person, *Power Flow Solution by Impedance Matrix Iterative Method*, Trans. AIEE, vol. 82, pt. III, pp. 1-10, 1963.

barras, donde la barra 1 es la barra oscilante, la barra 2, la barra de carga con P_2 y Q_2 especificados y la barra 3, la barra con P_3 y $|V_3|$ especificadas.

La ecuación para el sistema de 3 barras, omitiendo la barra oscilante, es

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \\ \Delta |V_3|^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial a_2} & \frac{\partial P_2}{\partial a_3} & \frac{\partial P_2}{\partial b_2} & \frac{\partial P_2}{\partial b_3} \\ \frac{\partial P_3}{\partial a_2} & \frac{\partial P_3}{\partial a_3} & \frac{\partial P_3}{\partial b_2} & \frac{\partial P_3}{\partial b_3} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial a_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial a_3} & \frac{\partial Q_2}{\partial b_2} & \frac{\partial Q_2}{\partial b_3} \\ \frac{\partial |V_3|^2}{\partial a_2} & \frac{\partial |V_3|^2}{\partial a_3} & \frac{\partial |V_3|^2}{\partial b_2} & \frac{\partial |V_3|^2}{\partial b_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \\ \Delta b_2 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

La matriz cuadrada de derivadas parciales se llama jacobiana. Los elementos de la jacobiana se encuentran tomando las derivadas parciales de las expresiones para P_k y Q_k y sustituyendo en ellas las tensiones supuestas en la primera iteración o calculadas en la última iteración. Las cantidades desconocidas en la ec. (8.18) son los elementos de la matriz columna de incrementos en las componentes real e imaginaria de las tensiones. La ecuación se puede solucionar invirtiendo la jacobiana. Los Δa_k y Δb_k se agregan a los valores anteriores de tensión para obtener nuevas tensiones y calcular P_k y Q_k o $|V_k|^2$, y el proceso se repite hasta que se alcanza el índice de precisión deseado¹. El método se resume en los siguientes pasos:

1. Se calculan P_k y Q_k o $|V_k|^2$ (para toda k excepto $k = 1$, donde la barra 1 es la barra oscilante) de las tensiones obtenidas por la iteración de Gauss-Seidel para la primera iteración de Newton-Raphson y obtenida en el paso 5 para iteraciones siguientes se usan las ecs. (8.13) y (8.14).
2. Se determinan ΔP_k y ΔQ_k o $|V_k|^2$ (para todo k , excepto para $k = 1$) de las ecs. (8.15) a (8.17). Si todos los valores son menores que el índice de precisión, para las iteraciones, se calculan P_1 y Q_1 y se da la solución completa incluyendo el flujo de la línea y otros resultados deseados.
3. Si no se ha alcanzado la precisión deseada, se evalúan los elementos de la jacobiana sustituyendo en las ecuaciones de derivadas parciales (obtenidas por diferenciación de las ecuaciones para P_k y Q_k) las tensiones supuestas para la primera iteración u obtenidas en el paso 5 para iteraciones siguientes.
4. Se resuelve la ec. (8.18) para Δa_k y Δb_k (para todo k excepto $k = 1$).

¹ Para una mejor explicación del método de Newton-Raphson y excelentes ejemplos numéricos de solución por los métodos de Gauss-Seidel y Newton-Raphson, véase G. W. Stagg y A. H. El-Abiad, *Computer Methods in Power System Analysis*, caps. 7 y 8, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1968.

5 Se determinan las nuevas tensiones de las barras agregando los incrementos de tensión a los valores anteriores.

6 Se regresa al paso 1.

El número de iteraciones requeridas por el método de Newton-Raphson usando las admitancias de las barras es prácticamente independiente del número de barras. El tiempo para el método de Gauss-Seidel aumenta casi directamente con el número de barras. De otro lado, el cálculo de los elementos de la jacobiana consume tiempo y el tiempo por iteración es considerablemente más largo en el método de Newton-Raphson. A excepción de sistemas muy pequeños, para la misma exactitud el método de Newton-Raphson consume menos tiempo de computador.

8.4 PROGRAMAS DE COMPUTADOR DIGITAL

Las empresas de energía utilizan programas muy elaborados para hacer estudios de cargas. Un programa típico es capaz de manejar sistemas de 2000 barras, 3000 líneas y 500 transformadores. Naturalmente, los programas pueden expandirse a tamaños aún mayores previniendo la disponibilidad de las suficientes facilidades del computador.

El programa requiere una tarjeta de datos para cada línea de transmisión, cada transformador y cada barra. Los datos entregados a la computadora por las tarjetas perforadas son similares para las líneas y los transformadores; estas tarjetas suministran la siguiente información:

- 1 El número de identificación de cada una de las dos barras a las cuales está conectada la línea o el transformador.
- 2 La resistencia y reactancia de la línea o transformador en porcentajes, sobre una base conveniente de MVA.
- 3 Carga total de la línea en megavars. Este valor cuenta para capacitancia paralelo de la línea y es igual a $\sqrt{3}$ veces la tensión nominal en kV por $|I_{crg}|$, como se definió en la ec. (4.26), dividido por 10^3 . Esto igual a $wC_n |V|^2$, donde $|V|$ es la tensión línea a línea en kV, y C_n es la capacidad de la línea al neutro, en faradios, para la longitud total de la línea. El programa crea una representación nominal π de la línea dividiendo los megavars de carga igualmente entre los dos terminales de la línea.

Como información adicional sobre la línea y transformador, la tarjeta incluye la base en MVA si ésta difiere de 100 MVA y los MVA nominales y de emergencia de cualquier línea para la cual la computadora calcula e imprime los MVA de carga. Si la tarjeta describe un transformador, ésta incluye su relación por unidad. Esta relación es 1.0 si la relación de las tensiones base en los dos lados del transformador es la misma que la relación de las tensiones línea a línea del transformador.

En el cap. 9 estudiaremos el cambio automático de las tomas del transformador y el corrimiento en el ángulo de fase, el cual también puede tenerse en cuenta por los datos de entrada en las tarjetas de los transformadores.

También se necesita una tarjeta por cada barra. Los datos suministrados en cada tarjeta de barra incluyen:

- 1 Nombre y número de barra.

- 2 Indicación de si la barra es una barra oscilante, una barra regulada donde la magnitud de la tensión se mantiene constante por generación de potencia reactiva o una barra con P y Q fijas.
- 3 Magnitud de la tensión de barra, que es la tensión a mantenerse constante en las barras reguladas y la barra oscilante, o la magnitud estimada de tensión en las barras no reguladas.
- 4 Angulo de fase de la barra, que es un estimativo del ángulo de la tensión de la barra con respecto a la barra oscilante. El ángulo designado a la barra oscilante permanecerá constante.
- 5 Generación deseada en megavatios.
- 6 Generación deseada en megavars, a menos que Q vaya a variar.
- 7 Límites superior e inferior de generación de megavars. Si para que se mantenga la tensión especificada se debe exceder el límite de generación reactiva, el programa permite variar la tensión.
- 8 Carga en megavatios y megavars.
- 9 Megavars totales de capacidades o reactancias estáticas en la barra.

8.5 INFORMACION OBTENIDA DE UN ESTUDIO DE CARGAS

La información obtenida de las soluciones digitales del estudio de cargas es una indicación de la gran contribución de las calculadoras digitales a la habilidad de los ingenieros de redes para obtener información de operación de sistemas aún no construidos y analizar los efectos de cambios en los existentes. La siguiente discusión no pretende enunciar toda la información obtenible, pero espera dar una idea de la gran importancia de las calculadoras digitales en la ingeniería de redes.

Los resultados impresos dados por la calculadora son una serie de tablas. Generalmente se considera como la más importante aquella tabla que da el número y nombre de cada barra, la magnitud de la tensión de la barra por unidad y el ángulo de fase, la generación y la carga en cada barra en megavatios y megavars, la carga de la línea y los megavars de capacidades o reactancias estáticas en la barra. Además de la información sobre la barra está el flujo de megavatios y megavars de las barras sobre cada línea de transmisión conectadas a ellas. La generación y la carga totales son dadas en megavatios y megavars. En la fig. 8.2 se muestra la tabulación descrita para el sistema de cinco barras de los ej. 8.1 y 8.2.

En la operación de sistemas de potencia, cualquier caída apreciable de tensión en el primario de un transformador causada por un cambio de carga puede hacer deseable cambiar el conjunto de tomas en el transformador provisto con tomas ajustables, a fin de mantener la tensión apropiada en la carga. Donde se especifique un cambio de tomas a fin de mantener la tensión dentro de los límites apropiados, es necesario examinar la convergencia total de la tensión. Si la tensión no está dentro de los límites fijados, el programa da a la calculadora un nuevo conjunto de iteraciones a realizar en las cuales hay un paso con el apropiado cambio de tomas. El proceso se repite tantas veces como sea necesario hasta producir una solución de acuerdo con las condiciones deseadas. El conjunto de tomas es registrado en la tabla de resultados.

Un estudio puede incluir los sistemas de varias compañías y dividirse en áreas designando a cada compañía un área diferente. El programa examina el flujo entre áreas, y las desviaciones del flujo previsto se evitarán causando el apropiado cambio de generación de

COMPANIA DE ENERGIA MULTICOLOR												
REPORT DE CALCULOS DE CARGA												
X-----												
AREA UNO												
DATOS DE LA BARRA												
-----GENERACION-----												
-----CARGA-----												
CAP/REAC												
LINEA DE FLUJO												
-----X-----												
BARRA	NOMBRE	VOLTIOS	ANGULO	MW	MVAR	MW	MVAR	BARRA	NOMBRE	MW	MVAR	TAP
1	Bianco	1.020	0.0	65.0	32.9	0.0	0.0					
2	Rojo	0.955	-3.9	0.0	0.0	60.00	30.00					
3	Verde	1.040	2.0	100.0	47.7R	0.0	0.0					
4	Azul	0.993	-8.0	0.0	0.0	40.00	10.00					
5	Amarillo	0.923	-2.1	0.0	0.0	60.00	20.00					

TOTALES DEL SISTEMA				165.1	80.6	160.00	60.00					
FIN DEL REPORTE PARA ESTE CASO												
FIN DEL FLUJO DE LA CARGA												
-----X-----												
22 ITERACIONES												
FLUJO EN LA BARRA												
PAG. 1												

Fig. 8.2 Solución de calculadora digital del problema de cargas del ej. 8.1- La base es 100 MVA.

un generador seleccionado en cada área. En un sistema práctico, se supervisa el intercambio de energía entre áreas para determinar cuándo un área dada está produciendo la cantidad de energía que se necesita para el intercambio deseado.

Entre otra información que se puede obtener está la lista de todas las barras donde la magnitud de la tensión se halla por encima o por debajo de 1.05 ó 0.95, respectivamente, u otros límites que pueden especificarse. Se puede obtener una lista de las cargas de las líneas en MVA. También se imprimen las pérdidas totales del sistema en megavatios, ($|I|^2 R$) y megavars ($|I|^2 X$) y los desajustes de P y Q en cada barra. El desajuste es una indicación de la precisión de la solución y es la diferencia entre P (y usualmente también Q) que entra y sale en cada barra.

8.6 RESULTADOS NUMÉRICOS

En la fig. 8.2 se muestran los resultados del estudio de cargas de los ejemplos 8.1 y 8.2. Este estudio se ha recorrido usando diferentes programas. El resultado reproducido en la fig. 8.2 corresponde a un programa modificado, atribuido a la Compañía Eléctrica de Filadelfia. El estudio requirió 22 iteraciones por el método de Gauss-Seidel. Con el mismo índice de precisión sólo fueron necesarias 3 iteraciones de Newton-Raphson después de una iteración de Gauss-Seidel. En la figura puede encontrarse más información aparte de los resultados tabulados. Por ejemplo, las pérdidas en cada línea, en megavatios y megavars, pueden encontrarse comparando los valores de P y Q en los dos terminales de la línea. Como un ejemplo vemos que de la barra 1 fluyen 24.81 MW a la línea que va a la barra 4 y a la barra 4 fluyen 23.72 MW de la línea. Evidentemente las pérdidas $|I|^2 R$ en la línea son 1.09 MW. En otra página de la impresión (no reproducida aquí) se enumeran las pérdidas totales del sistema como 5.2 MW y 20.6 MVar.

La información de la fig. 8.2 puede llevarse a un diagrama total del sistema. La fig. 8.3 muestra una parte de tal diagrama que corresponde a la barra 5. La P total que entra a la barra es 59.99 MW y la potencia que sale a la carga es 60 MW, que da 0.01 MW de desajuste. La calculadora ha redondeado los valores tabulados, pero en otra página de impresión se registra el desajuste de P en esta barra como 0.010 MW. El desajuste resultante en Q es también 0.01, pero el valor registrado tiene en cuenta tres dígitos significativos después del punto decimal, lo que da un desajuste de 0.006. La magnitud del desajuste es un criterio de precisión de los resultados. El desajuste en la barra 5 en P y Q resultó ser mayor que en cualquier otra barra.

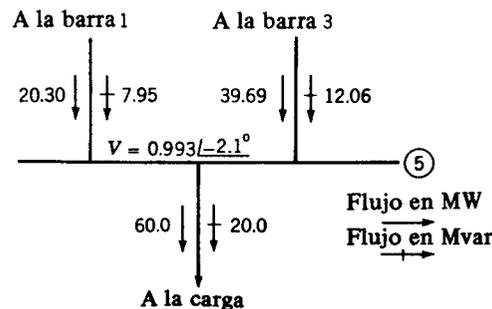


Fig. 8.3 Flujo de P y Q en la barra 5 para el sistema de los ejes. 8.1 y 8.2. Los números junto a las flechas indican el flujo de P y Q en megavatios y megavars. La tensión de barra se muestra en p.u.

Nos referimos nuevamente a este estudio de cargas en el siguiente capítulo para examinar los cambios en el flujo de P y Q en el sistema cuando la tensión en la barra 4 se aumenta instalando capacidades en la barra y colocando un transformador entre la barra y la línea que va a la barra 2. El propósito de este capítulo es explicar cómo se pueden controlar la tensión en la barra y el flujo de P y Q .

PROBLEMAS

- 8.1 Aplicar los datos del ej. 8.1 al cálculo de V_3 para el sistema de la fig. 8.1, en su primera iteración, si el programa parte del cálculo en la barra 3 en lugar de la 2.
- 8.2 Aplicar los datos del ej. 8.1 al cálculo de V_4 , para el sistema de la fig. 8.1, en su primera iteración, si el programa parte del cálculo en la barra 4 en lugar de la 2.
- 8.3 Extender el cálculo de los ejes. 8.1 y 8.2 a la determinación de la tensión V_4 con V_4^* en la ec. (8.5) igual a $1.0/0^\circ$ p.u. Recalcular después V_4 con el V_4^* corregido, como es costumbre, antes de pasar a la barra próxima. Utilizar el valor V_2 determinado en el ej. 8.1 y no considerar los factores de aceleración.
- 8.4 Dibuje un diagrama análogo al de la fig. 8.3 para la barra 2 del sistema del ej. 8.1 con base en la información de la fig. 8.2. ¿Cuál es el desajuste aparente en megavatios y megavars en esta barra? La calculadora registró un desajuste de 0.007 MW y 0.002 MVar.
- 8.5 De los valores dados en la fig. 8.2 para el flujo en la línea entre la barra 3 y la barra 5, determine las pérdidas $|I|^2 R$ e $|I|^2 X$ en la línea.
- 8.6 Si la tensión base para las líneas de transmisión en el sistema del ej. 8.1 es 110 kV, encuentre la corriente de línea en amperios que fluye por la línea entre la barra 3 y la barra 5. Determine las pérdidas en la línea $|I|^2 R$ y compare el resultado con el valor encontrado en el prob. 8.5. Responda a la misma pregunta si se especifica una tensión base de 220 kV habiendo rediseñado las líneas para tener la misma impedancia por unidad en la nueva base.
- 8.7 Como parte de la solución del ej. 8.1 la calculadora registró unas pérdidas totales de línea de 5.2 MW. Compare este valor con la suma de las pérdidas en cada línea individual, que pueden encontrarse de la lista de la fig. 8.2.
- 8.8 Calcule el valor registrado en la fig. 8.2 para la potencia que entra a la barra 4 de la barra 1, use la ec. (5.62) y note que $A = 1.0/0^\circ$, puesto que la capacidad paralelo de la línea puede despreciarse.

9

ALGUNOS PRINCIPIOS DE CONTROL DE CARGA

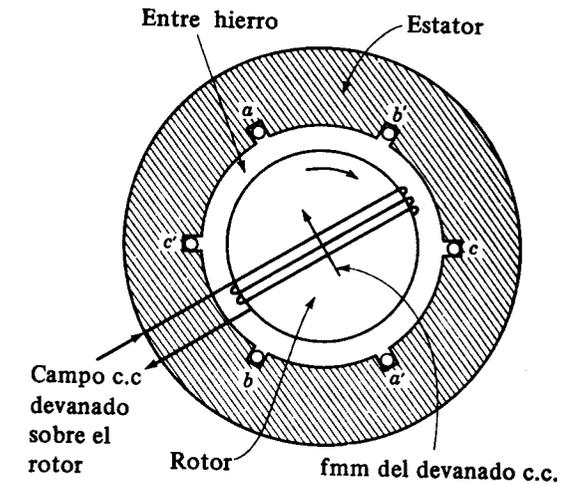


Fig. 9.1 Generador trifásico c.a elemental mostrando una vista final del rotor cilíndrico y la sección transversal del estator.

La fig. 9.1 muestra un generador trifásico muy elemental. La parte estacionaria, llamada el *estator* o la *armadura*, se muestra en una sección transversal. Los lados opuestos de una bobina, que es casi rectangular, están en las ranuras *a* y *a'*. Bobinas análogas están en las ranuras *b* y *b'*, *c* y *c'*. Los lados de las bobinas en las ranuras *a*, *b* y *c* están separadas 120°. Los conductores que se muestran en las ranuras indican una bobina de sólo una vuelta, pero una bobina como tal puede tener varias vueltas y por lo común está en serie con bobinas idénticas en ranuras adyacentes para formar un bobinado que tiene sus extremos en *a* y *a'*. Las bobinas con extremos en *b* y *b'*, *c* y *c'* son los mismos que los de *a* y *a'* excepto por su localización alrededor de la armadura.

El rotor cilíndrico tiene un bobinado c.c. y la dirección del flujo se establece por la corriente en el enrollado del motor en la forma que se indica. Cuando el rotor se desplaza por el primer movimiento, se inducen voltajes en las bobinas del estator. Se produce un ciclo de voltaje en cada bobina para cada revolución del rotor de dos polos. Si el rotor tiene cuatro polos y el doble de ranuras, con 60° grados mecánicos entre los lados de las bobinas en las ranuras *a*, *b* y *c*, se producen dos ciclos por revolución. Puesto que el número de ciclos por revolución es igual al número de pares de polos, siendo *p* el número de polos del rotor y *N* la velocidad del rotor en revoluciones por minuto, la frecuencia del voltaje generado es

$$f = \frac{p N}{2 \cdot 60} \text{ Hz} \tag{9.1}$$

Con un adecuado diseño del rotor y una correcta distribución de los bobinados alrededor del estator, se generan voltajes sinusoidales muy puros. Estos voltajes se llaman *voltajes generados sin carga* o simplemente *voltajes generados*. Si los extremos de las bobinas *a'*, *b'*, *c'* se conectan entre sí y la juntura se designa *o*, los voltajes generados (denominados *Ea*0,

Nuestras consideraciones del estudio de carga realizadas en el cap. 8 dan lugar a muchas preguntas acerca de la operación de los sistemas de potencia. Los objetivos que se estudiarán en este capítulo son: cómo se controla el flujo de potencia real y reactiva y cómo se mantiene la tensión en las barras.

Un repaso de algunos principios de las máquinas síncronas es importante a fin de entender su papel en la operación deseada del sistema. Se estudia el efecto de colocar una capacitancia en una barra y cómo los transformadores influyen en el flujo de potencia.

9.1 MAQUINA SINCRONICA

Un estudio completo de las máquinas síncronas c.a. requiere mucho más tiempo y espacio del que es necesario para lograr nuestro propósito de adquirir algún entendimiento de cómo la potencia real y reactiva suministradas por un generador, que es parte de un gran sistema de potencia, son controladas por la potencia mecánica entrada a la máquina y al campo de c.c. de excitación. También mencionaremos el motor síncrono. Si el lector ha estudiado la teoría de máquinas síncronas c.a., esta sección le servirá como repaso. Los otros tendrán que aceptar algunos principios sin demostración. Nuestro objetivo se cumplirá si el lector gana confianza en la representación de la máquina por un circuito equivalente simple.

Ebo, y *Eco* en concordancia con la notación adaptada en el cap. 2) están separados 120 grados eléctricos uno del otro¹.

Si una carga trifásica balanceada se conecta al generador, fluirán corrientes trifásicas balanceadas en las tres fases del enrollado del estator, que también se llama *enrollado de armadura*. La teoría de los generadores sincrónicos c.a, tal como se ha desarrollado en muchos textos, indica que las tres corrientes desplazadas 120° en fase circulando en las tres bobinas desplazadas 120° eléctricos en espacio alrededor del estator de la máquina, producirán una fuerza magnetomotriz (fmm) esencialmente sinusoidal girando alrededor del estator a la misma velocidad a la que el rotor gira². Por eso la fmm producida por las corrientes de estator, llamada la *fmm de la reacción de armadura*, es estacionaria con respecto a la fmm producida por el devanado c.c del rotor. El flujo neto a través del entrehierro entre estator y rotor se produce por la resultante de estas dos fmm.

El voltaje generado por el flujo resultante en cada fase, al que nos referimos como E_r , en la fase específica que estamos considerando, excede el voltaje terminal V_t de la fase solamente por la caída de voltaje debido a la corriente de armadura por la reactancia de pérdidas X_l del devanado si la resistencia de éste se deja de lado. Si la corriente es I_a , este voltaje es $jI_a X_l$; y si el voltaje terminal es V_t ,

$$V_t = E_r - jI_a X_l \quad (9.2)$$

El voltaje generado en una fase, cuando ninguna corriente de armadura fluye, como se describió anteriormente, es producido por el flujo debido a la fmm del campo c.c, enrollado sobre el rotor. En la fase a este voltaje es E_{ao} , que designaremos con la anotación de subíndice como E_f .

Ahora tendremos en cuenta el efecto de la fmm de la reacción de armadura. Para un generador con un rotor cilíndrico la brecha de aire entre rotor y estator, que está en el paso del flujo debido a la reacción de armadura, es la misma, sin que importe la posición del rotor relativa a la fmm de la armadura. Si el paso magnético *no está saturado*, el voltaje resultante E_r es el vector suma de E_f y E_{ar} , que son voltajes proporcionales a la fmm del campo del devanado c.c, y a la fmm de la reacción de armadura, respectivamente. Existe la teoría para el correcto desarrollo, teniendo en cuenta efectos de saturación y polos salientes.

La teoría de maquinaria muestra que cuando la corriente de estator o armadura atrasa el voltaje generado sin carga en 90°, la fmm de la reacción de armadura se substraerá directamente de la fmm sin carga. A la inversa, cuando la corriente de armadura adelanta el voltaje sin carga en 90°, crea una fmm que se agrega a la fmm sin carga. El voltaje sin carga E_f generado por el flujo producido por el campo c.c y E_{ar} , debido a la reacción de ar-

¹ En una máquina de dos polos los grados eléctricos y mecánicos son iguales. En una máquina de cuatro polos 2 ciclos, ó 7.20 grados eléctricos son producidos por la revolución del rotor de 360 grados mecánicos. El número de grados eléctricos es igual a $p/2$ veces el número de grados mecánicos.

² Por ejemplo, véase A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr, y A. Kusko, "Electric Machinery", 1a. ed. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971, para un estudio detallado de éste y otros aspectos de máquinas sincrónicas.

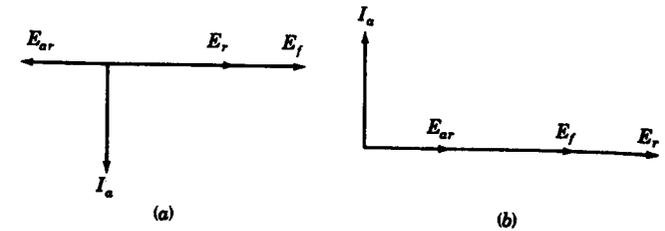


Fig. 9.2 Diagramas vectoriales que muestran la relación entre E y E_{ar} cuando la corriente entregada por un generador está (a) 90° en atraso de E_f y (b) 90° en adelanto de E_f .

madura producida por el atraso en 90° de corriente a E_f , deben oponerse uno a otro como se muestra en la fig. 9.2a. La fig. 9.2b muestra I_a en adelanto de 90° a E_c y a E_{ar} sumándose a E_f . Por tanto, podemos especificar una reactancia inductiva X_{ar} tal que

$$E_{ar} = -jI_a X_{ar} \quad (9.3)$$

La ec. (9.3) define E_{ar} con su ángulo de fase adecuado con respecto a I_a . Así, el voltaje generado en la fase a por el flujo en el entre-hierro es E_r , donde

$$E_r = E_f + E_{ar} = E_f - jI_a X_{ar} \quad (9.4)$$

y el voltaje terminal a neutro de la fase A es

$$V_t = \underbrace{E_f}_{\text{generado a no carga}} - \underbrace{jI_a X_{ar}}_{\text{debido a reaccion de armadura}} - \underbrace{jI_a X_l}_{\text{debido a la pérdida de reactancia de armadura}} \quad (9.5)$$

$$V_t = E_f - jI_a X_s \quad (9.6)$$

donde X_s se llama reactancia sincrónica, es igual a $X_{ar} + X_l$. Si se considera la resistencia de armadura R_a la ec. (9.6) se convierte en

$$V_t = E_f - I_a (R_a + jX_s) \quad (9.7)$$

R_a es por lo común mucho más pequeña que X_s y su omisión no trae graves consecuencias aquí, donde estamos interesados en la aproximación cualitativa.

Hemos llegado a una relación que nos permite representar el generador por medio de un simple pero muy útil circuito equivalente como el que se indica en la fig. 9.3 y que corresponde a la ec. (9.7).

Los principios que hemos estudiado pueden extenderse a un motor sincrónico. El circuito equivalente para el motor es idéntico al del generador en la dirección de I_a invertida. Los voltajes generados del generador y del motor son a menudo identificados con la anotación E_g y E_m , respectivamente, en lugar de E_f , especialmente cuando ellos están en el mismo circuito, como en la fig. 9.4, para el cual las ecuaciones son

$$V_t = E_g - jI_a X_s \quad (9.8)$$

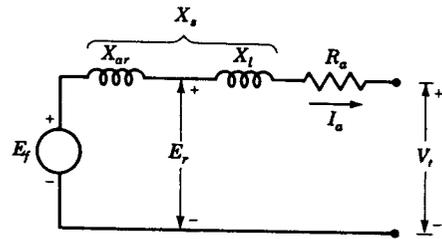


Fig. 9.3 Circuito equivalente de un generador c.a.

y

$$V_t = E_m + jI_a X_m \tag{9.9}$$

Las reactancias del generador y motor son X_g y X_m , respectivamente; la resistencia de armadura no se considera.

9.2 EFECTOS DE LA EXCITACION EN LA MAQUINA SINCRONICA

El cambiar la excitación de las máquinas síncronas es un factor importante para el control de la potencia reactiva. Primero, consideraremos un generador conectado por sus terminales a un gran sistema de potencia, tan grande que el voltaje V_t en los terminales del generador no se altera con los cambios en la excitación del generador. La barra a la cual se conecta el generador a veces se llama *barra infinita*, lo que significa que su voltaje permanece constante y ningún cambio de frecuencia ocurre sin interesar los cambios en la potencia de entrada o la excitación del campo de máquina síncrona, conectada a ella. Si decidimos mantener una cierta potencia de entrada del generador al sistema, $|V_t| \cdot |I_a| \cos \theta$ permanece constante a condición de que variemos el campo de excitación c.c. para variar $|E_g|$. Entonces, para un valor alto y un valor bajo de $|E_g|$ los diagramas vectoriales del generador se dan en la fig. 9.5. El ángulo δ se llama *ángulo de torque* o *ángulo de potencia* de la máquina. La excitación normal se define como excitación cuando

$$|E_g| \cos \delta = V_t \tag{9.10}$$

Para la condición de la fig. 9.5a el generador está sobreexcitado y suministra corriente de atraso al sistema. La máquina también puede considerarse extrayendo una corriente de adelanto del sistema. Como condensador, suministra potencia reactiva al sistema. La fig. 9.5b es para un generador subexcitado que suministra corriente en adelanto al sistema, o puede considerarse extrayendo corriente de atraso del sistema. El generador subexcitado suministra la potencia reactiva del sistema. Esta acción puede explicarse por la fmm

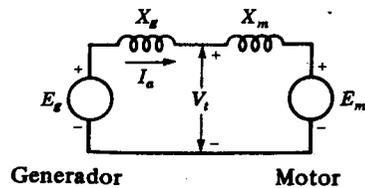


Fig. 9.4 Diagrama del circuito para un generador y un motor I_a es la corriente entregada por el generador y recibida por el motor.

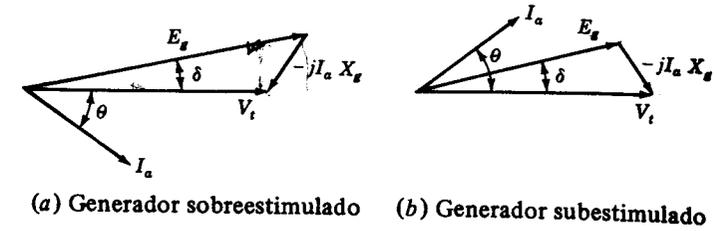


Fig. 9.5 Diagramas vectoriales de generadores (a) sobreestimado y (b) subestimado I_a es la corriente que entrega por el generador.

de la reacción de armadura. Por ejemplo, cuando el generador está sobreexcitado, debe entregar corriente en atraso y la corriente en atraso produce una fmm opuesta para reducir la sobreexcitación.

Notamos que E_g adelanta a V_t en la fig. 9.5, lo cual es siempre cierto para el generador y necesario para satisfacer la ec. (9.8).

La fig. 9.6 muestra motores síncronos sobreexcitados y subexcitados absorbiendo la misma potencia del mismo terminal de voltaje. El motor sobreexcitado extrae corriente en adelanto y actúa como un circuito capacitivo cuando se analiza desde la red a la cual suministra potencia reactiva. El motor subexcitado extrae corriente en atraso, absorbe potencia reactiva, y actúa como un circuito inductivo cuando se analiza desde la red. Vemos de la fig. 9.6 que E_m atrasa a V_t a fin de satisfacer la ec. (9.9), y esto es siempre cierto para un motor síncrono. Las figs. 9.5 y 9.6 nos muestran que los motores y generadores sobreexcitados *suministran* potencia reactiva al sistema y los motores y generadores subexcitados *absorben* potencia reactiva del sistema.

9.3 ANGULO DE POTENCIA DE LA MAQUINA SINCRONICA

Ahora vamos a examinar el ángulo de torque entre E_g o E_m y V_t que se muestran en las figs. 9.5 y 9.6. Supóngase que un generador alimentando un gran sistema entrega potencia en condiciones estables, de modo que exista un determinado ángulo δ entre V_t y E_g ; y E_g adelante a V_t . Si la potencia de entrada al generador desde el primer motor se incremen-

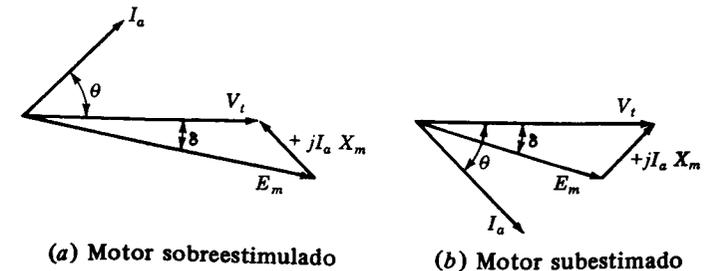
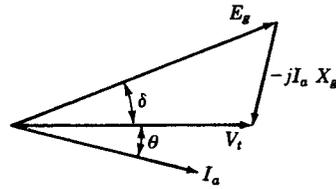


Fig. 9.6 Diagramas vectoriales de un motor (a) sobreestimado y (b) subestimado I_a es la corriente extraída por el motor

Fig. 9.7 Generador entregando más potencia que en la fig. 9.5a pero con la misma $|V_t|$ y $|E_g|$.



ta con $|E_g|$ constante, la velocidad del rotor comienza a incrementarse y el ángulo entre E_g y V_t crece. El incremento de δ resulta en una mayor I_a y menor θ , como puede verse comparando las figs. 9.5a y 9.7. Por tanto, el generador entrega más potencia al circuito, y la entrada desde el primer motor igualará otra vez la salida del circuito si las pérdidas se ignoran. El equilibrio se restablece a la velocidad correspondiente a la frecuencia de la barra infinita con un gran δ . La fig. 9.7 está dibujada para la misma excitación c.c. y por tanto el mismo ángulo $|E_g|$ como en la fig. 9.5a, pero la potencia de salida, es igual a $|V_t| \cdot |I_a| \cos \theta$ es más grande para la condición de la fig. 9.7 y el incremento en δ ha hecho que el generador entregue la potencia adicional al circuito. La dependencia de la potencia sobre el ángulo de potencia se indica también por medio de una ecuación que da $P + jQ$ suministrado por un generador en términos de δ . Si

$$V_t = |V_t| \angle 0^\circ \quad \text{y} \quad E_g = |E_g| \angle \delta$$

donde V_t y E_g se expresa en voltios a neutro o en por unidad, entonces

$$I_a = \frac{|E_g| \angle \delta - |V_t|}{jX_o} \quad (9.11)$$

e

$$I_a^* = \frac{|E_g| \angle -\delta - |V_t|}{-jX_o} \quad (9.12)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} P + jQ &= V_t I_a^* \\ &= \frac{|V_t| \cdot |E_g| \angle -\delta - |V_t|^2}{-jX_o} \\ &= \frac{|V_t| \cdot |E_g| \angle 90^\circ - \delta - |V_t|^2 \angle 90^\circ}{X_o} \end{aligned} \quad (9.13)$$

La parte real de la ec. (9.13) es

$$P = \frac{|V_t| \cdot |E_g|}{X_o} \cos(90^\circ - \delta) = \frac{|V_t| \cdot |E_g|}{X_o} \sin \delta \quad (9.14)$$

y la parte imaginaria de la ec. (9.13) es

$$Q = \frac{|V_t| \cdot |E_g|}{X_o} \sin(90^\circ - \delta) - \frac{|V_t|^2}{X_o}$$

$$= \frac{|V_t|}{X_o} (|E_g| \cos \delta - |V_t|) \quad (9.15)$$

Cuando valores dados en voltios en vez de por unidad se substituyen en las ecs. (9.14) y (9.15) para V_t y E_g , debemos ser cuidadosos al observar que V_t y E_g son voltajes línea a neutro y P y Q serán cantidades por fase. Sin embargo, los valores de voltaje línea a línea substituidos para V_t y E_g producirán los valores trifásicos para P y Q . Los P y Q por unidad de las ecs. (9.14) y (9.15) se multiplican por la base de MVA trifásicos o la base de MVA por fase dependiendo de si se necesita potencia trifásica o monofásica.

La ec. (9.14) muestra muy claramente la dependencia de la potencia transferida al circuito con el ángulo de potencia si $|E_g|$ y $|V_t|$ permanecen constantes. Sin embargo, si P y V_t son constantes, la ec. (9.14) muestra que δ debe reducirse si $|E_g|$ se incrementa por el aumento de la excitación del campo c.c. En la ec. (9.15) con P constante, un incremento en $|E_g|$ y una disminución en δ significa que Q se incrementa si es positivo o disminuye en magnitud y quizás llega a ser positivo si Q es negativo antes de incrementar la excitación, del campo. Esto concuerda con las conclusiones sacadas en la sec. 9.2.

La ec. (9.14) puede interpretarse como la potencia transferida de una barra en un circuito a otra barra a través de una reactancia X conectando las dos barras si los voltajes son V_1 y V_2 y δ es el ángulo por el cual V_1 adelanta V_2 .

$$P = \frac{|V_1| \cdot |V_2|}{X} \sin \delta \quad (9.16)$$

Análogamente, de la ec. (9.15), Q recibida en la barra 2 es

$$Q = \frac{|V_2|}{X} (|V_1| \cos \delta - |V_2|) \quad (9.17)$$

Las ecuaciones derivadas en la sec. 5.8 para desarrollar los diagramas circulares son más generales que las ecs. (9.16) y (9.17) porque en ellas se tienen en cuenta la resistencia y la capacitancia. Las ecs. (5.62) y (5.63) son idénticas a las ecs. (9.16) y (9.17) si el único parámetro considerado es la inductancia.

De las ecs. (9.16) y (9.17) vemos que un incremento en δ causa un cambio mayor en P que en Q cuando δ es pequeño. Esta diferencia se explica cuando reconocemos que $\sin \delta$ cambia ampliamente pero $\cos \delta$ cambia solamente en una pequeña cantidad con un cambio en δ cuando δ es menor de 10° a 15° .

9.4 ESPECIFICACION DE LOS VOLTAJES DE BARRA

En las secciones anteriores de este capítulo hemos considerado el generador síncrono desde el punto de vista de suministro de potencia a una barra infinita. Hemos examinado el efecto de la excitación del generador y el ángulo de potencia cuando el voltaje terminal del generador permanece constante. En estudios de cargas en un computador digital, sin embargo, encontramos que era necesario especificar la magnitud del voltaje o potencia en cada barra, excepto la barra oscilante donde el voltaje se especifica en magnitud y fase. Aunque el computador puede informarnos fácilmente los resultados sobre un sistema to-

tal de especificaciones de varias magnitudes de voltaje en barras determinadas, puede ser de mucha ayuda estudiar lo que sucede en casos muy simples.

Generalmente es en las barras en las que existe generación donde la magnitud del voltaje se especifica cuando el estudio de carga se hace en un computador. En tales barras, la potencia real P suministrada por el generador también se especifica. La potencia reactiva Q se determina al resolver el problema. Por tanto, nuestro propósito en este momento es examinar el efecto de la magnitud de la barra de voltaje especificada sobre el valor de la Q suministrada por el generador al circuito de potencia.

La fig. 9.8 muestra un generador representado por su circuito equivalente con las resistencias relativamente pequeñas ignoradas a fin de simplificar nuestro análisis. El sistema de potencia se representó por el voltaje de Thévenin E_{th} en serie con la impedancia Thévenin X_{th} , donde la resistencia nuevamente se ha ignorado. Para una potencia constante entregada por el generador, la componente de I en fase con E_{th} debe permanecer constante. El voltaje especificado en la barra es $|V_t|$, y

$$V_t = E_{th} + jIX_{th} \quad (9.18)$$

Los diagramas vectoriales para el circuito de la fig. 9.8 se muestran en la fig. 9.9 para tres ángulos de fase diferentes entre E_{th} e I . En todos los tres casos, la componente de I en fase con E_{th} es constante.

La fig. 9.9 muestra cómo grandes magnitudes de voltajes de barra V_t con potencia constante a la entrada de la barra, requieren un mayor $|E_g|$; por supuesto, un mayor $|E_g|$ se obtiene incrementando la excitación del devanado del campo c.c del generador. Incrementar el voltaje de la barra por un aumento en $|E_g|$ produce un mayor atraso en la corriente, como se ve en la fig. 9.9 y como esperamos concluir de nuestra discusión sobre el generador sincrónico. Cuando hacemos un estudio de carga, un incremento en el voltaje especificado en la barra de un generador significa que el generador que alimenta la barra aumenta su salida de potencia reactiva a la barra. Desde el punto de vista de operación del sistema, estamos controlando el voltaje de la barra y la generación de Q ajustando la excitación del generador.

Puesto que representamos el sistema por un equivalente Thévenin, suponemos que E_g y E_m permanecen constantes en magnitud y fase dentro del sistema. Esta suposición no es estrictamente cierta dentro de las condiciones reales de operación. Cuando se opera un cambio en la excitación de un generador, pueden hacerse otros cambios en otra parte del sistema. Un ejemplo en el cual se requiere cambiar E_g de generadores o motores en las otras barras, es la especificación para mantener el voltaje constante en estas barras. El programa del computador tiene en cuenta las condiciones que se imponen. Sin embargo, suponer constantes E_g y E_m en el sistema, excepto donde se hace un cambio, es muy útil para ilustrar el efecto de un cambio en la magnitud del voltaje en una barra determinada.

Fig. 9.8 Generador con voltaje interno E_g conectado a un sistema de potencia representado por su equivalente Thévenin.

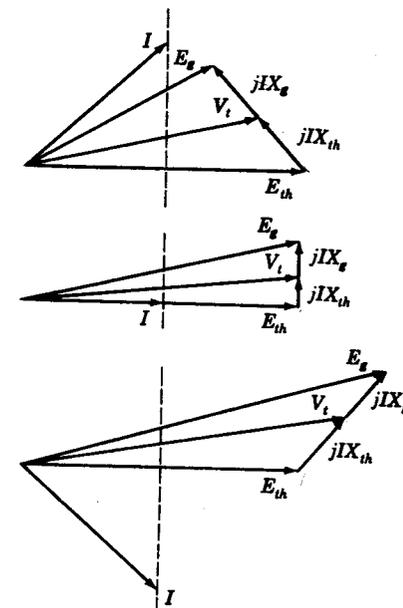
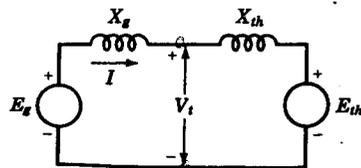


Fig. 9.9 Diagramas vectoriales de un generador suministrando la misma potencia a un sistema para tres valores diferentes del voltaje de la barra, V_t .

EJEMPLO 9.1 Un generador alimenta un gran sistema que puede representarse por su circuito equivalente de Thévenin conformado por un generador con un voltaje E_{th} en serie con $Z_{th} = j0.2$ por unidad. El voltaje en los terminales del generador es $V_t = 0.97/0^\circ$ por unidad cuando entrega una corriente de $0.8 - j0.2$ por unidad. La reactancia sincrónica del generador es 1.0 por unidad. Encuentre P y Q dentro del sistema en los terminales del generador y calcule E_g (a) para las condiciones descritas arriba y (b) si $|V_t| = 1.0$ por unidad cuando el generador está entregando la misma potencia P al sistema. Suponga que el sistema es tan grande que E_{th} no está afectado por el cambio en $|V_t|$. La barra en los terminales del generador no es una barra infinita, porque Z_{th} no es cero.

Solución (a) del generador en el sistema por unidad

$$P + jQ = 0.97(0.8 + j0.2) = 0.776 + j0.194 \text{ por unidad}$$

y

$$\begin{aligned} E_g &= 0.97 + j1(0.8 - j0.2) \\ &= 1.17 + j0.8 = 1.42 / 34.4^\circ \text{ por unidad} \end{aligned}$$

(b) para encontrar P y Q cuando $|V_t| = 1.0$ debemos hallar el ángulo de fase de V_t en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E_{th} &= 0.97 - j0.2(0.8 - j0.2) \\ &= 0.93 - j0.16 = 0.944 / -9.76^\circ \text{ por unidad} \end{aligned}$$

El ángulo de fase de V_t se determina encontrando el ángulo δ entre V_t y E_{th} para $|V_t| = 1.0$ y $P = 0.776$. Por la ec. (9.16).

$$\frac{1.0 \times 0.944}{0.2} \sin \delta = 0.776$$

$$\delta = 9.46^\circ$$

(por lo cual V_t adelanta a E_{th}). Por tanto

$$V_t = 1.0 / \underline{-9.76^\circ + 9.46^\circ} = 1.0 / \underline{-0.3^\circ} = 1.0 - j0.005$$

$$I = \frac{1.0 - j0.005 - (0.93 - j0.16)}{j0.2}$$

$$= \frac{0.07 + j0.155}{j0.2} = 0.775 - j0.350$$

$$= 0.850 / \underline{-24.3^\circ}$$

y

$$E_g = 1.0 - j0.005 + j1(0.775 - j0.350)$$

$$= 1.350 + j0.770 = 1.55 / \underline{29.7^\circ} \text{ por unidad}$$

En los terminales del generador dentro del sistema

$$P + jQ = 1.0 / \underline{-0.3^\circ} \times 0.850 / \underline{24.3^\circ}$$

$$= 0.850 / \underline{24.0^\circ} = 0.776 + j0.346 \text{ por unidad}$$

Este ejemplo comprueba nuestro razonamiento según el cual, especificando un terminal de voltaje elevado en una barra de un sistema conectada a un generador, da como resultado un gran suministro de potencia reactiva al sistema por el generador y requiere de un mayor voltaje generado, que se obtiene al incrementar la excitación del campo c.c. del generador. En este ejemplo Q se incrementa desde 0.194 a 0.346 por unidad y $|E_g|$ de 1.42 a 1.55 por unidad.

9.5 BANCOS DE CONDENSADORES

Otro método muy importante de controlar el voltaje de una barra es mediante un banco de condensadores en paralelo en las barras a niveles de transmisión y distribución a lo largo de las líneas o en subestaciones o cargas. Esencialmente los condensadores son un medio de suministrar vars en el punto de instalación. Los bancos de condensadores pueden estar permanentemente conectados, pero como reguladores de voltaje pueden estar alternativamente activados o desactivados del sistema según la demanda de carga. La conmutación puede ser manual o automática, bien sea por medio de relojes de tiempo o en respuesta al voltaje o a los requerimientos de potencia reactiva. Cuando están en paralelo con una carga que tiene un factor de potencia en atraso, los condensadores son la fuente de una parte o quizás de toda la potencia reactiva de la carga. Así, los condensadores reducen la corriente de línea necesaria para alimentar la carga y reducir la caída de voltaje

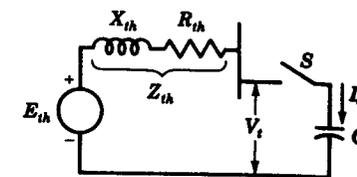


Fig. 9.10 Circuito que indica un condensador que va a conectarse por medio del interruptor S a un sistema representado por su equivalente Thévenin.

en la línea, a medida que se mejora el factor de potencia. Como los condensadores disminuyen los requerimientos reactivos de los generadores, a la salida hay más potencia real disponible. El lector puede revisar el efecto del factor de potencia en la regulación de voltaje refiriéndose a la fig. 5.4.

En el programa de computador para estudio de cargas la magnitud del voltaje puede especificarse solamente si hay una fuente de generación de potencia reactiva. Por tanto, en barras de carga en las cuales no hay generadores deben suponerse bancos de condensadores, y el computador especificará el valor requerido de Q .

Si los condensadores se aplican a un nudo determinado, el incremento en voltaje en el nudo puede determinarse por el teorema de Thévenin. La fig. 9.10 muestra el sistema representado por un equivalente Thévenin en el nudo donde los condensadores fueron aplicados cerrando un interruptor. La resistencia en el circuito equivalente está indicada, pero siempre es más pequeña que la reactancia inductiva. Con el interruptor abierto, el voltaje V_t en el nudo es igual al voltaje Thévenin E_{th} . Cuando el interruptor se cierra, la corriente que transmite el condensador es:

$$I_c = \frac{E_{th}}{Z_{th} - jX_c} \quad (9.19)$$

El diagrama vectorial se indica en la fig. 9.11. El incremento en V_t ocasionado por la adición del condensador es casi igual a $|I_c| X_{th}$ si suponemos que E_{th} son idénticos antes de colocar el condensador. Este diagrama vectorial sirve para explicar el incremento del voltaje en la barra donde el condensador está instalado. El ej. 7.10 se introdujo como parte de nuestro estudio de Z_{barra} ; y debe revisarse, puesto que muestra cómo el cambio, en la magnitud del voltaje debido al condensador agregado puede colocarse en todas las barras de un sistema donde no hay barras reguladas y las cargas están representados por impedancias.

Hemos hecho aquí otra vez la suposición de que E_g y E_m permanecen constantes en el sistema, tal como se describió en la sec. 9.4; la suposición no es estrictamente cierta pero suministra un buen estimativo del incremento de los voltajes de barra debido a la

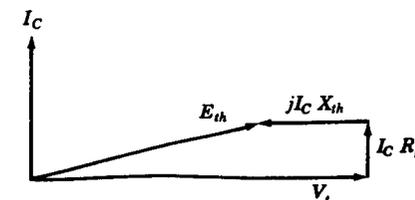


Fig. 9.11 Diagrama vectorial del circuito de la fig. 9.10 con el condensador conectado. Antes de conectar el condensador $V_t = E_{th}$.

adición de condensadores, excepto en las barras donde el voltaje se mantiene constante. Si los condensadores se agregan a una barra de carga que está alejada de cualquier generación, el estimativo es muy bueno para las barras cercanas.

El estudio de cargas del cap. 8 mostró un voltaje en la barra 4 de 0.923 por unidad. El mismo programa de estudio de cargas puede emplearse para determinar la cantidad de potencia reactiva que debe suministrarse por los condensadores a esta barra para lograr que el voltaje alcance un valor especificado. El procedimiento es diseñar la barra 4 como una barra regulada para mantener un voltaje especificado y, con un generador en la barra, suministrar solamente potencia reactiva. Si las pérdidas del generador se ignoran, un generador como tal es equivalente a un motor sincrónico, sin carga, sin pérdidas y sobreexcitado, que se conoce como *condensador sincrónico*. El computador determina la cantidad necesaria de potencia reactiva que puede suministrarse por condensadores estáticos o sincrónicos.

Cuando el voltaje de la barra 4 se especifica como 0.950 por unidad, la generación de potencia reactiva requerida es 8.4 Kvar. Esta entrada de potencia reactiva en la barra 4 también hace que el voltaje en la barra 2 aumente de 0.955 a 0.962 por unidad. En la barra 5, la única que está sin regular, el voltaje permanece igual debido a su separación de la barra 4 por las barras reguladas 1 y 3.

El flujo de potencia real y reactiva determinada por el computador en las líneas conectadas a la barra 4 con y sin los condensadores se muestra en la fig. 9.12. La caída del voltaje en la línea desde la barra 1 a la barra 4 se reduce suministrando potencia reactiva a la barra 4 porque la potencia reactiva que fluye en esta línea se reduce. Agregando condensadores a la barra 4, la potencia reactiva en la línea 2-4 invierte su dirección, lo que significa que la barra 4 está dando corriente en adelanto sobre esta línea y la caída de tensión a lo largo de esta línea también se reduce. El incremento de voltaje en la barra 4, obtenido al colocar los condensadores en la barra, resulta de hacer que la potencia reactiva que llega a la barra 4 sobre las dos líneas de potencia se distribuya entre las líneas para lograr la caída de voltaje necesaria en cada una.

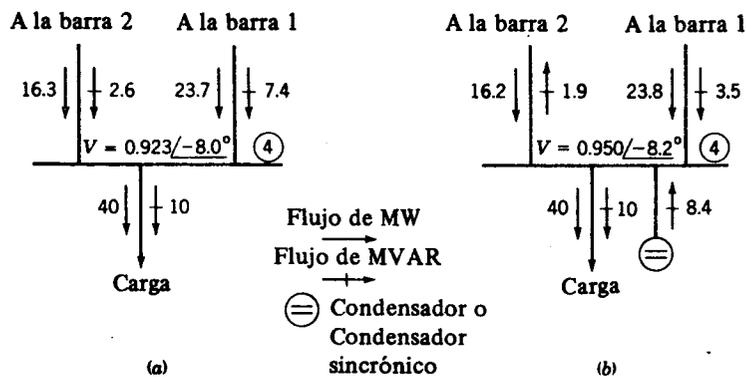


Fig. 9.12 Flujo de P y Q en la barra 4 del sistema del ej. 8.1 (a) como se encontró en el estudio original de carga y (b) con condensadores agregados a la barra para subir el voltaje a 0.950 por unidad.

9.6 CONTROL POR MEDIO DE TRANSFORMADORES

Los transformadores suministran un medio adicional de controlar el flujo de la potencia real y reactiva. Nuestro concepto corriente de la función de los transformadores en un sistema de potencia es el de cambiar de un nivel de voltaje a otro, como cuando un transformador convierte el voltaje de un generador al voltaje de la línea de transmisión. Sin embargo, hay transformadores que suministran un pequeño ajuste en la magnitud del voltaje, generalmente en el intervalo de $\pm 10\%$, y otros en los cuales el desplazamiento del ángulo de fase de los voltajes de línea son componentes importantes de un sistema de potencia. Algunos transformadores regulan la magnitud y el ángulo de fase.

Casi todos los transformadores suministran derivaciones sobre los devanados a fin de ajustar la relación de transformación cambiando las tomas cuando el transformador está desenergizado. Un cambio en una toma puede hacerse mientras el transformador está energizado; este transformador se llama *transformador cambiador de toma con carga* (LTC) ó *transformador cambiador de toma sobre carga* (TCUL). El cambio de toma es automático y operado por motores que responden a relevos colocados para mantener el voltaje a un nivel preestablecido. Hay circuitos especiales que permiten el cambio sin interrumpir la corriente.

Un tipo de transformador diseñado para pequeños ajustes de voltaje en vez de cambios de los niveles de voltaje, es el que se conoce como *transformador regulante*. La fig. 9.13 muestra un transformador regulante para controlar la magnitud del voltaje; la fig. 9.14 muestra un transformador regulante para el control de fase. El diagrama vectorial de la fig. 9.15 ayuda a explicar el desplazamiento en el ángulo de fase. Cada uno de los tres devanados sobre los cuales se hace la derivación están sobre el mismo núcleo magnético, así como la fase del devanado cuyo voltaje está a 90° fuera de fase con el voltaje desde el neutro al punto conectado al centro del devanado con derivaciones. Por ejemplo, el vol-

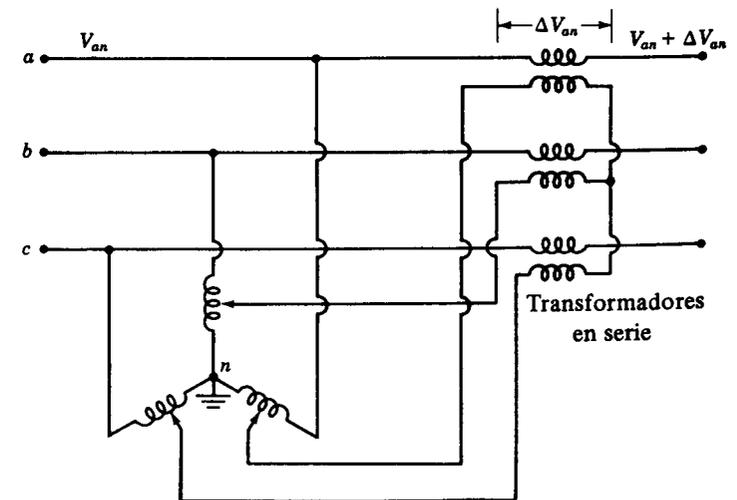


Fig. 9.13 Transformador regulante para el control de la magnitud del voltaje.

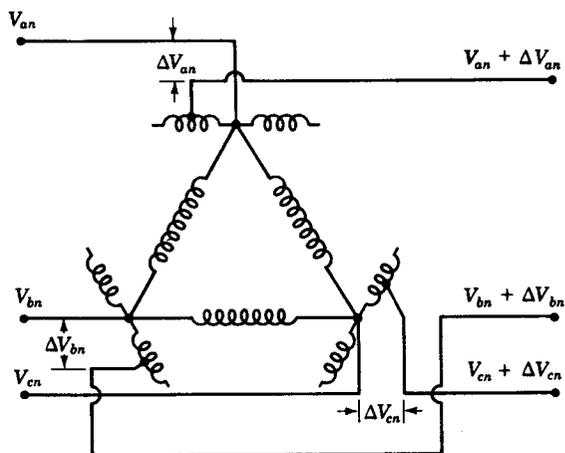


Fig. 9.14 Transformador regulante para control del ángulo de fase. Los devanados dibujados paralelos entre sí están enrollados sobre el mismo núcleo magnético.

taje a neutro V_{cn} se incrementa mediante una componente ΔV_{an} que está en fase a 180° fuera de fase con V_{bc} . La fig. 9.15 muestra cómo los tres voltajes de línea están desplazados en fase con muy poco cambio en magnitud.

El procedimiento para determinar Y_{barra} y Z_{barra} por unidad para un circuito que contiene un transformador regulante es el mismo que el de cualquier transformador cuya relación de espiras es diferente a la relación utilizada para seleccionar la relación de los voltajes base por los dos lados del transformador. Un transformador como el descrito, que investigaremos ahora, se dice que tiene una relación de espiras no nominal.

Si tenemos dos barras conectadas por un transformador, y si la relación de voltajes de línea a línea del transformador es la misma que la relación de voltajes base de las dos barras, el circuito equivalente (ignorando la corriente de magnetización) es simplemente la impedancia del transformador por unidad en la base elegida, conectada entre las barras. La fig. 9.16 a es un diagrama unifilar de transformadores en paralelo. Vamos a suponer que una de ellas tiene la relación de voltaje $1/n$, la cual es también la relación de voltajes

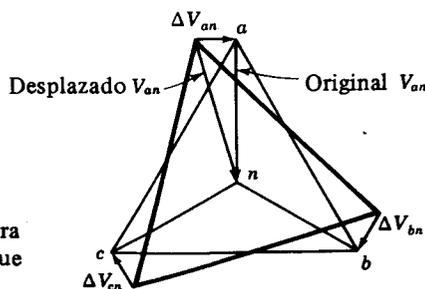


Fig. 9.15 Diagrama vectorial para el transformador regulante que se muestra en la fig. 9.14

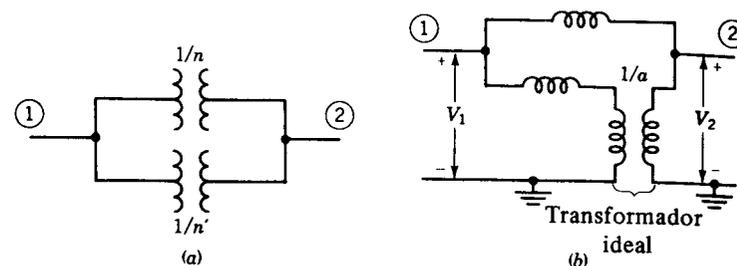


Fig. 9.16 Transformadores con diferente relación de espiras conectados en paralelo. (a) diagrama unifilar, (b) diagrama de reactancia por unidad. La relación de espiras $1/a$ es igual a n/n' .

base en los dos lados del transformador, y que la relación de voltajes del otro es $1/n'$. El circuito equivalente es el de la fig. 9.16b Necesitamos el transformador ideal (sin impedancia) con la relación $1/a$ en el diagrama de reactancias por unidad teniendo cuidado con la relación de espiras no nominales del segundo transformador, porque los voltajes de base fueron determinados por la relación de espiras del primer transformador.

Si tenemos un transformador regulante (en vez de un LTC, que cambia el nivel de voltaje en la medida en que cambia la derivación), la fig. 9.16b puede interpretarse como dos líneas de potencia en paralelo con un transformador regulante en una línea.

Evidentemente, nuestro problema es encontrar las admitancias de los nudos de la fig. 9.17, que es una representación más detallada del LTC, el cual tiene una relación de espiras de $1/n'$ o del transformador regulante con la razón de transformación $1/a$. La admitancia Y en la figura es el equivalente de la impedancia por unidad del transformador, pues la admitancia Y se muestra en el lado del transformador ideal cercano al nudo 1; el lado de cambio de toma (o el lado correspondiente n') está cercano al nudo 2. Esta designación es importante en el uso de las ecuaciones que van a derivarse. Si estamos considerando un transformador con una relación de espiras a es n'/n la razón. Si tenemos un transformador regulante, a puede ser real o imaginario, tal como 1.02 para un 2% de refuerzo en magnitud ó $e^{j\pi/60}$ para 3° de corrimiento en fase.

La fig. 9.17 ha sido rotulada para mostrar las corrientes I_1 e I_2 entrando a los dos nodos, y los voltajes son V_1 y V_2 referidos al nodo de referencia. La expresión compleja para la potencia en el transformador ideal en dirección del nodo 1 es

$$S_1 = \frac{V_2}{a} I_1^* \tag{9.20}$$

y en el transformador desde el nodo 2

$$S_2 = V_2 I_2^* \tag{9.21}$$

Puesto que suponemos un transformador ideal sin pérdidas, la potencia en el transformador ideal desde el nodo 1 debe ser igual a la potencia de salida del transformador desde el nodo 2, y así

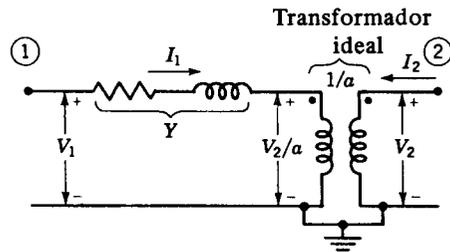


Fig. 9.17 Diagrama detallado de reactancia por unidad del transformador de la fig. 9.16b, cuya relación de espiras es $1/a$.

$$\frac{V_2}{a} I_1^* = -V_2 I_2^* \quad (9.22)$$

y

$$I_1 = -a^* I_2 \quad (9.23)$$

La corriente I_1 puede expresarse por

$$I_1 = \left(V_1 - \frac{V_2}{a} \right) Y \quad (9.24)$$

ó

$$I_1 = V_1 Y - V_2 \frac{Y}{a} \quad (9.25)$$

Substituyendo $-a^* I_2$ por I_1 y resolviendo para I_2 encontramos

$$I_2 = -V_1 \frac{Y}{a^*} + V_2 \frac{Y}{aa^*} \quad (9.26)$$

comparando las ecs. (9.25) y (9.26) tenemos, ya que $aa^* = |a|^2$, las admitancias de nodos.

$$Y_{11} = Y \quad Y_{22} = \frac{Y}{|a|^2} \quad (9.27)$$

$$Y_{12} = -\frac{Y}{a} \quad Y_{21} = -\frac{Y}{a^*}$$

El equivalente π correspondiente a estos valores de admitancias de nodo puede encontrarse solamente si a es real, de modo que $Y_{21} = Y_{12}$. Si los transformadores cambian su magnitud pero no la fase, el circuito es el de la fig. 9.18. Este circuito no puede realizarse si Y tiene una componente real, lo que requeriría una resistencia negativa en el circuito. El fac-

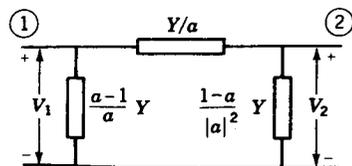


Fig. 9.18 Circuito con las admitancias de nodo de las ecs. (9.27) cuando a es real.

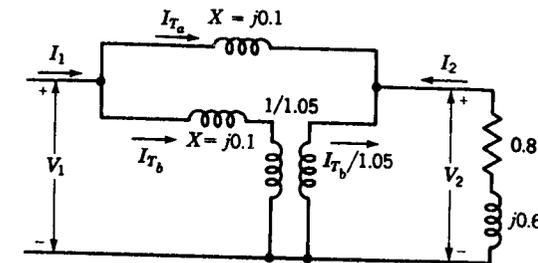


Fig. 9.19 Circuito para el ej. 2.2. Valores en por unidad.

tor importante, sin embargo, es el que podemos tener en cuenta para magnitud desplazamiento de fase, y transformadores con relación de espiras no nominales en los cálculos para obtener Y_{barra} y Z_{barra} .

EJEMPLO 9.2 Dos transformadores se conectan en paralelo alimentando una impedancia a neutro por fase de $0.8 + j0.6$ por unidad a un voltaje $V_2 = 1.0/0^\circ$ por unidad. El transformador T_a tiene una relación de voltajes igual a la relación de los voltajes de base en los dos lados del transformador. Este transformador tiene una impedancia de $j0.1$ por unidad en la base apropiada. El segundo transformador T_b tiene una elevación en la carga de 1.05 veces la de T_a (devanados secundarios en 1.05 de la derivación) y esta impedancia es $j0.1$ por unidad sobre la base del circuito y en el lado de baja tensión. La fig. 9.19 muestra el circuito equivalente con el transformador T_b representado por su impedancia y un transformador ideal. Encuentre la potencia compleja transmitida a la carga a través de cada transformador.

Solución

$$I_2 = -\frac{1.0}{0.8 + j0.6} = -0.8 + j0.6$$

$$a = 1.05$$

Para determinar la corriente en cada transformador necesitamos encontrar V_1 de la ecuación.

$$I_2 = V_1 Y_{21} + V_2 Y_{22}$$

donde las admitancias de nodo son las de la combinación en paralelo de los dos transformadores. Para el transformador T_a solamente.

$$Y_{21} = -\frac{1}{j0.1} = j10$$

$$Y_{22} = \frac{1}{j0.1} = -j10$$

para el transformador T_b solamente

$$Y_{21} = -\frac{1/j0.1}{1.05} = j9.52$$

$$Y_{22} = \frac{1/j0.1}{|1.05|^2} = -j9.07$$

Para los dos transformadores en paralelo

$$Y_{21} = j10 + j9.52 = j19.52$$

$$Y_{22} = -j10 - j9.07 = -j19.07$$

Entonces, la ecuación de nodos para I_2 .

$$-0.8 + j0.6 = V_1(j19.52) - j19.07 \times 1.0$$

$$V_1 = 1.008 + j0.041$$

$$V_1 - V_2 = 0.008 + j0.041$$

Por tanto

$$I_{T_a} = (V_1 - V_2)(-j10) = 0.41 - j0.08$$

De la ec. (9.23) la corriente en la barra 2 desde el transformador T_b es I_{T_b}/a^* , y de la fig. 9.19 esta corriente es $-(I_{T_a} + I_2)$, dando

$$\frac{I_{T_b}}{a^*} = -I_2 - I_{T_a} = 0.8 - j0.6 - (0.41 - j0.08) = 0.39 - j0.52$$

Las potencias complejas son

$$S_{T_a} = V_2 I_{T_a}^* = 0.41 + j0.08 \text{ por unidad}$$

$$S_{T_b} = V_2 \left(\frac{I_{T_b}}{a^*} \right)^* = 0.39 + j0.52 \text{ por unidad}$$

Una solución aproximada a este problema se encuentra reconociendo que la fig. 9.20 con el interruptor S cerrado es también un circuito equivalente para el problema si el voltaje ΔV , que está en la rama del circuito equivalente al transformador T_b , es igual a $a-1$ por unidad. En otras palabras, si T_a está suministrando una relación de voltaje 5% mayor que T_b , a es igual a 1.05 y ΔV es igual a 0.05 por unidad. Extendiéndonos, podemos decir que la corriente aumentada por ΔV circula alrededor del lazo indicado por I_{circ} . Con el in-

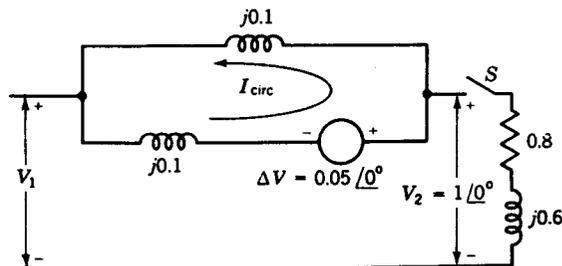


Fig. 9.20 Circuito equivalente cuando el interruptor S está próximo al de la fig. 9.19.

terruptor S abierto y con S cerrado ninguna de esas corrientes van a través de la impedancia de carga porque es mucho más grande que la impedancia del transformador, y así, podemos usar el principio de superposición. Entonces

$$I_{circ} = \frac{0.05}{j0.2} = -j0.25 \text{ por unidad}$$

Con ΔV en cortocircuito la corriente en cada paso es la mitad de la corriente de carga, o $0.4-j0.3$. Entonces, superponiendo las corrientes circulantes da.

$$I_{T_a} = 0.4 - j0.3 - (-j0.25) = 0.4 - j0.05$$

$$I_{T_b} = 0.4 - j0.3 + (-j0.25) = 0.4 - j0.55$$

tal que

$$S_{T_a} = 0.40 + j0.05 \text{ por unidad}$$

y

$$S_{T_b} = 0.40 + j0.55 \text{ por unidad}$$

Estos valores, aunque aproximados, son casi iguales a los valores originales; este método se usa a menudo debido a su simplicidad.

Este ejemplo muestra cómo el transformador con derivación superior está suministrando gran parte de la potencia reactiva de la carga. La potencia real está distribuida por igual entre los transformadores. Puesto que ambos transformadores tienen la misma impedancia, deben compartir la potencia real y reactiva si tienen igual relación de vueltas. En ese caso, cada uno está representado por la misma reactancia por unidad de $j0.1$ entre las dos barras y lleva igual corriente. Cuando los dos transformadores están en paralelo podemos variar la distribución de potencia reactiva entre los transformadores ajustando las relaciones de magnitud de voltaje. Cuando dos transformadores en paralelo, de igual número de KVA, no comparten los KVA por igual porque sus impedancias difieren, los KVA pueden prácticamente igualarse ajustando la magnitud del voltaje a través de un cambio de derivación.

Si una línea de transmisión determinada lleva una potencia reactiva o muy pequeña o muy grande, un transformador regulante para ajustar la magnitud del voltaje puede colocarse en un extremo de la línea a fin de hacer que la línea transmita una potencia reactiva grande o pequeña. Podemos investigar esto por medio de un cambio automático de derivación en el programa de carga de un computador digital. Por ejemplo, podemos lograr el voltaje en la barra 4 del ej. 8.1 colocando un transformador regulador de magnitud en la línea de la barra 2 a la barra 4 en la barra 4, e indicamos al computador que considere esto como un LTC con una derivación para mantener el voltaje de la barra alrededor de 0.950 por unidad. Hay un paso definido entre la colocación de las derivaciones, y no es obligatorio que el voltaje sea exactamente 0.950 por unidad. Los resultados logrados en la barra 4 se muestran en el diagrama unifilar de la fig. 9.21. Se supuso reactancia por unidad de 0.08 para el LTC.

Cuando el voltaje de la barra 4 se eleva por el LTC en la línea 2-4, la caída de voltaje sobre la línea 1-4 debe ser menor y esperamos que esto se produzca gracias a una reduc-

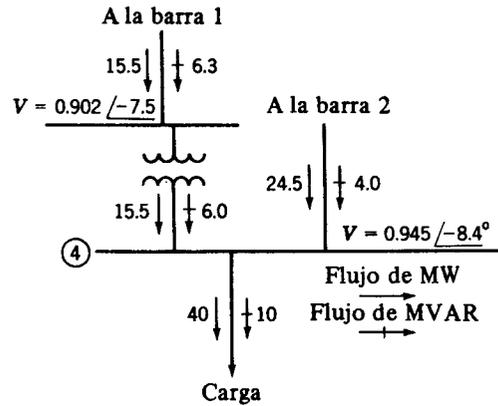


Fig. 9.21 Flujo de P y Q en la barra 4 del sistema de la fig. 8.1 cuando un transformador regulante en la línea 2-4 en la barra 4 aumenta V_4 a 0.945 por unidad.

ción del flujo de potencia reactiva a través de la línea con muy poco cambio en la potencia real. Al comparar las fig. 9.21 con la fig. 9.12a observamos que la Q fluyendo en la barra 4 a través de la línea 1-4 se reduce de 7.4 a 4 Mvar sin mucho cambio en P . Para suministrar los 10 Mvar requeridos por la carga 6 Mvar fluyen ahora en la barra 4 a través de la línea desde la barra 2 y el LTC. Los megavars incrementados en la línea hacen que el voltaje en el lado de baja tensión del LTC sea muy bajo, pero los transformadores elevan el voltaje hasta 0.945 por unidad en la barra 4 seleccionando la derivación adecuada.

Con relación a las ecs. (9.16) y (9.17) vemos que aumentando la magnitud del voltaje en la barra 4 (lo cual corresponde a aumentar $|V_2|$ en las ecuaciones) mientras se mantiene $|V_1|$ constante, ocasiona un mayor cambio en Q que en P si permanece constante. En el caso de la línea 1-4 la disminución en entre las barras también contribuyen a mantener P aproximadamente constante cuando $|V_4|$ se incrementa.

El voltaje en la barra 2 cae de un valor original de 0.955 por unidad a 0.949. Por vía comparativa, notamos en la sec. 9.5 que el voltaje en la barra 2 aumentó a 0.962 por unidad cuando se agregaron condensadores a la barra 4. La razón para la reducción en el voltaje en la barra 2 en el caso presente es que el incremento de la potencia reactiva suministrada a la barra 4 desde la barra 2 produjo un incremento en la potencia reactiva, que alimentó la barra 2 desde las barras 1 y 3 reguladas en voltaje.

Para determinar el efecto de los desplazamientos de fase de los transformadores necesitamos únicamente tomar a como un número complejo con una magnitud unitaria en las ecs. (9.27).

EJEMPLO 9.3 Repita el ej. 9.2, pero haciendo que T_b incluya un transformador que tenga la misma relación de vueltas que T_a y un transformador regulante con un desplazamiento de fase de 3° ($a = e^{j\pi/60} = 1.0/3^\circ$). La impedancia de los dos componentes de los dos componentes de T_b es $j0.1$ por unidad sobre la base de T_a .

Solución Para el transformador T_a solamente como en el ej. 9.2,

$$Y_{21} = j10 \quad Y_{22} = -j10$$

y para el transformador T_b

$$Y_{21} = \frac{j10}{a^*} = 10/93^\circ$$

$$Y_{22} = \frac{-j10}{|1.0/3^\circ|^2} = -j10$$

Combinando los transformadores en paralelo da

$$Y_{21} = 10/90^\circ + 10/93^\circ = -0.523 + j20.0$$

$$Y_{22} = -j10 - j10 = -j20$$

Siguiendo el procedimiento del ej. 9.2 tenemos

$$-0.8 + j0.6 = V_1(-0.523 + j20) + (-j20)(1.0)$$

$$V_1 = \frac{-0.8 + j20.6}{-0.523 + j20} = \frac{0.418 - j10.77 + j16.0 + 412.0}{400} = 1.03 + j0.013$$

$$V_1 - V_2 = 0.03 + j0.013$$

$$I_{T_a} = (0.03 + j0.013)(-j10) = 0.13 - j0.30$$

$$\frac{I_{T_b}}{a^*} = 0.8 - j0.6 - (0.13 - j0.30) = 0.67 - j0.30$$

$$S_{T_a} = 0.13 + j0.30 \text{ por unidad}$$

$$S_{T_b} = 0.67 + j0.30 \text{ por unidad}$$

Como en el ej. 9.2, podemos obtener una solución apropiada del problema insertando una fuente de voltaje ΔV en serie con la impedancia del transformador T_b . El voltaje por unidad adecuado es

$$a - 1 = 1.0/3^\circ - 1.0/0^\circ = (2 \sin 1.5^\circ)/91.5^\circ = 0.0524/91.5^\circ$$

$$I_{\text{circ}} = \frac{0.0524/91.5^\circ}{0.2/90^\circ} = 0.262 + j0.0069$$

$$I_{T_a} = 0.4 - j0.3 - (0.262 + j0.007) = 0.138 - j0.307$$

$$I_{T_b} = 0.4 - j0.3 + (0.262 + j0.007) = 0.662 - j0.293$$

tal que

$$S_{T_a} = 0.138 + j0.307 \text{ por unidad}$$

$$S_{T_b} = 0.662 + j0.293 \text{ por unidad}$$

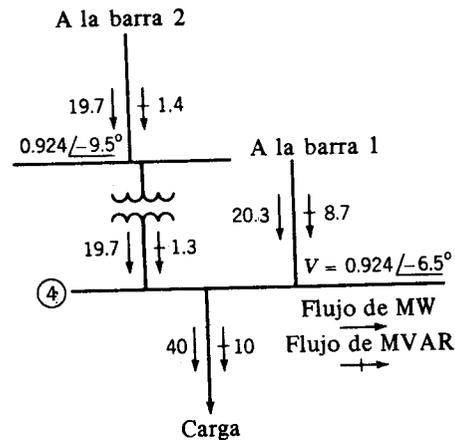


Fig. 9.22 Flujo de P y Q en la barra 4 del sistema de la fig. 8.1 cuando un transformador regulante en la línea 2-4 en la barra 4 causa un desplazamiento de fase de 3° a través de sus terminales.

De nuevo los valores aproximados son muy próximos a los valores encontrados previamente.

El ejemplo muestra que el transformador con desplazamiento de fase se utiliza ampliamente para controlar la cantidad de potencia real pero tiene poco efecto en el flujo de potencia reactiva. Los ej. 9.2 y 9.3 son ilustrativos de dos líneas de potencia en paralelo con un transformador regulante en una de las líneas. Por ejemplo, las ecs. (9.27) se aplicarían a una línea de transmisión que tuviera un transformador regulante o un transformador con una razón de vueltas no nominales a un extremo y con una admitancia paralelo olvidando o incluyendo la impedancia del transformador en la impedancia serie de la línea. En ese caso, Y en las ecs. (9.27) debe ser el recíproco de la impedancia serie de la línea por unidad. En un estudio de carga en un computador digital un transformador al final de la línea puede tenerse en cuenta agregando una barra, de modo que el transformador esté directamente conectado a las barras en ambos lados.

La fig. (9.22) muestra el flujo de potencia real y reactiva y el voltaje en la barra 4 del sistema del ej. 8.1 cuando un transformador de desplazamiento de fase se coloca en la línea 2-4 en la barra 4. El dato que entra al computador especifica un desplazamiento de 3° a través del transformador. El resultado fue un desplazamiento en la potencia real desde la línea 1-4 a la línea 2-4, lo cual era de esperarse en nuestro estudio de transformadores o líneas de transmisión en paralelo. Este cambio en Q está en correspondencia con la ec. (9.17) aun en el caso de que no ignoremos la resistencia, y esto se explica por la reducción en P entre las barras 1 y 4, lo cual incrementa a Q sobre esa línea.

9.7 RESUMEN

Este capítulo ha presentado algunos métodos de control del voltaje y el flujo de potencia desde el punto de vista de la comprensión acerca de cómo se logra este control. El estudio de cargas en un computador es el mejor método para obtener respuestas cuantitativas a efectos de operaciones de control específicas.

Hemos visto cómo el generador sincrónico entrega una cantidad creciente de potencia reactiva al sistema al que está conectado a medida que el estímulo se aumenta. Alternati-

vamente, cuando este estímulo se reduce, proporciona menos potencia reactiva y cuando está sobreestimulado saca potencia reactiva del sistema. Este análisis se hizo suponiendo que el generador está alimentando un gran sistema y que el voltaje terminal permanece constante. Luego se extendió a un generador alimentando un sistema representado por su equivalente Thévenin.

Cuando estudiamos la aplicación de condensadores a la carga vimos que la potencia reactiva proporcionada por los condensadores produce un aumento en el voltaje de la carga. Ya que al incrementar el estímulo del generador sincrónico se provoca la entrada, de potencia reactiva al sistema, el efecto es igual a agregar condensadores y producir un aumento en el voltaje en la barra del generador a menos que el sistema sea muy grande.

Como la magnitud del voltaje y la potencia del generador entregada son por lo general especificadas para un estudio de cargas, examinamos cómo el estímulo del generador debe variarse para encontrar el voltaje de barra especificado para P constante desde el generador. Finalmente derivamos las expresiones para P y Q del generador en términos de $|V_t|$, $|E_g|$, y el ángulo de potencia δ para mostrar la dependencia de la potencia real, con δ .

Se estudiaron resultados de la conexión en paralelo de dos transformadores cuando la relación de la magnitud de voltaje era diferente o cuando uno suministraba un desplazamiento de fase. Las ecs. (9.27) nos suministran las ecuaciones para las admitancias de nodo de los circuitos equivalentes de tales transformadores. Se dan ejemplos para mostrar cómo los transformadores LTC que controlan la magnitud del voltaje y regulan los transformadores de magnitud y los tipos de desplazamiento de fase, pueden controlar el flujo de potencia real y reactiva en las líneas de transmisión.

PROBLEMAS

- Un generador conectado a la barra de un gran sistema tiene una reactancia sincrónica de 1.0 por unidad, y su resistencia puede ignorarse. Si el voltaje de la barra es $1.0/0^\circ$ por unidad y el generador suministra a la barra una corriente de 0.8 por unidad en atraso al voltaje de la barra en 36.9° (factor de potencia = 0.8), encuentre la magnitud y el ángulo del voltaje sin carga E_g del generador y P y Q entregados a la barra. Dibuje cuidadosamente el diagrama vectorial mostrando V_t , E_g y $jX_s I_a$.
- Derive ecuaciones análogas a las ecs. (9.14) y (9.15) para P y Q en la barra 2 desde la línea que conecta las barras 1 y 2 si $V_1 = |V_1|/\alpha$ y $V_2 = |V_2|/\beta$ y la impedancia de la línea es $Z = |Z|/\theta$.
- Encuentre el ángulo de potencia entre E_g y V_t , la corriente I_a , y Q entregado a la barra por el generador del prob. 9.1 si la potencia de salida del generador es igual a la del prob. 9.1, pero con el estímulo al generador (a) disminuido de tal modo que E_g sea 15% inferior y (b) incrementado en tal forma que E_g sea 15% superior. ¿Cuál es el cambio en por ciento de Q en cada caso?
- Un sistema de potencia por el cual un generador se va a conectar a determinada barra puede representarse por su voltaje Thévenin. $E_{th} = 0.9/0^\circ$ por unidad en serie por $Z_{th} = 0.25/90^\circ$ por unidad. Cuando se conecta al sistema, E_g del generador es generador es $1.4/30^\circ$ por unidad. La reactancia sincrónica del generador en la base del sistema es 1.0 por unidad. (a) Encuentre el voltaje de barra V_t y P y Q transferidos al sistema en la barra; (b) si el voltaje de barra se aumenta a $|V_t| = 1.0$ por

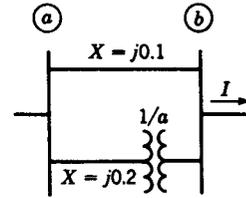


Fig. 9.23 Circuito para el prob. 9.7

unidad para la misma P transferida al sistema, encuentre el valor de E_g requerido y el valor de Q transferido al sistema en la barra. Suponga que todas las otras fem en el sistema no cambian en magnitud ni ángulo; esto es, E_{th} y Z_{th} son constantes.

- 9.5 En el prob. 7.13 los voltajes en las tres barras fueron calculados antes y después de conectar un condensador de neutro a la barra 3. Determine P y Q entrando o saliendo de la barra 3 en las líneas de transmisión a través de la reactancia conectada entre la barra y neutro y desde el condensador antes y después de conectarse; suponga que los voltajes generados permanecen constantes en magnitud y fase. Dibuje diagramas análogos a las de la fig. 9.12 para mostrar los valores calculados.
- 9.6 La fig. 9.12 muestra cómo se deben suministrar 8.4 Mvar por un banco de condensadores a la barra 4 del sistema de 60 Hz del ej. 8.1 para subir el voltaje de la barra a 0.950 por unidad. Si el voltaje de base es 110 kV, encuentre la capacitancia en cada fase si los condensadores se conectan en (a) Y , (b) Δ .
- 9.7 Dos barras a y b se conectan entre sí a través de impedancias $X_1 = 0.1$ y $X_2 = 0.2$ por unidad en paralelo. La barra b es una barra de carga que suministra una corriente $I = 1.0 / -30^\circ$ por unidad. El voltaje de barra V_b es $1.0 / 0^\circ$ por unidad. Encuentre P y Q en la barra a a través de cada una de las ramas en paralelo (a) en el circuito descrito (b) si un transformador regulante se conecta a la barra b en la línea de mayor reactancia para dar un refuerzo del 3% en magnitud del voltaje hacia la carga ($a = 1.3$), y (c) si el transformador regulante avanza la fase 2° ($a = e^{j\pi/90}$). Utilice el método de la corriente circulante para las partes (b) y (c), y suponga que V_a está ajustado para cada parte del problema de modo que V_b permanezca constante. La fig. 9.23 muestra el diagrama unifilar de las barras a y b del sistema con el transformador regulante en su lugar. No tenga en cuenta la impedancia del transformador.
- 9.8 Dos reactancias $X_1 = 0.10$ y $X_2 = 0.15$ por unidad están en paralelo entre dos barras a y b en un sistema de potencia. Si $V_a = 1.05 / 10^\circ$ y $V_b = 1.0 / 0^\circ$ por unidad, ¿cuál debe ser la relación de espiras del transformador regulante a insertarse en serie con X_2 en la barra b de modo que no haya flujo de vars en la barra b desde la rama cuya reactancia es X_1 ? Emplee el método de la corriente circulante, e ignore la reactancia del transformador regulante P y Q de la carga y V_b permanecen constantes.
- 9.9 Dos transformadores, cada uno especificado como 115Y-13.2 Δ kV operan en paralelo para alimentar una carga de 35 MVA, 13.2 kV con un factor de potencia de 0.8 en atraso. El transformador 1 está especificado como 20 MVA con $X = 0.09$ por unidad, y el transformador 2.15 MVA con $X = 0.07$ por unidad. Encuentre la salida en MVA de cada transformador y los MVA a los cuales la carga total debe limitarse de tal forma que ningún transformador se sobrecargue. Si las tomas del transformador 1 se ponen a 111 kV para dar un 3.5% de refuerzo en voltaje en el dado de baja tensión del transformador comparado con el transformador 2, que permanece en la toma de 115 kV, encuentre la salida en MVA de cada transformador para la carga total original de 35 MVA y el máximo de MVA de la carga total, logrando que no se

sobrecarguen los transformadores. Utilice una base de 35 MVA, 13.2 kV en el lado de baja tensión. El método de la corriente circulante es satisfactorio para este problema.

- 9.10 Si la impedancia de la carga en la barra b del circuito descrito en el prob. 9.7 es $0.866 + j0.5$ por unidad, y si V_a es $1.04 / 0^\circ$ por unidad (el voltaje V_b y la corriente de carga no se conocen), encuentre V_b para las condiciones descritas en las partes (a) (b), y (c) del prob. 9.7. También encuentre P y Q en la barra b a través de cada una de las ramas en paralelo para los tres casos. Las ecs. (9.27) deben emplearse, y la impedancia de carga puede incluirse en Y_{22} de las ecuaciones de admitancias de nodo del circuito completo.

10

FUNCIONAMIENTO ECONOMICO DE LOS SISTEMAS DE POTENCIA

El costo de los productos y servicios concierne al ingeniero. En un sistema de potencia para la obtención de un beneficio sobre el capital invertido, es muy importante un funcionamiento adecuado. Las tarifas fijadas por los organismos reguladores y la importancia de la conservación de los combustibles fósiles ejercen una gran presión sobre las compañías que han de tratar de lograr una eficiencia máxima de explotación y mejorarla continuamente para mantener una relación razonable entre lo que paga el consumidor por kilovatio-hora y lo que le cuesta a la compañía su suministro, frente a los precios constantemente crecientes de combustibles, mano de obra, materiales y mantenimiento.

La ingeniería ha trabajado, con notable éxito, en el aumento de rendimiento de calderas, turbinas y generadores, habiendo conseguido una mejora continua, de tal forma que puede decirse que cada nueva unidad que se añade a una central térmica, trabaja con mejor rendimiento que cualquiera de las viejas. Al operar un sistema para una condición dada de carga, debe determinarse la contribución de cada central o planta generadora y, dentro de cada una de éstas, la de cada unidad, de forma que el costo de la energía suministrada sea un mínimo. El objeto de este capítulo es ver en qué forma ha resuelto la ingeniería este problema.

Un método primitivo de reducir al mínimo el costo consistía en suministrar energía para pequeñas cargas desde la central de mejor rendimiento. Al ir aumentando la carga, la energía debía ser suministrada desde la central de mejor rendimiento hasta alcanzar el punto de rendimiento óptimo de tal central. Al seguir aumentando la carga había que

comenzar a suministrar el sistema desde la segunda central de mejor rendimiento, no entrando la tercera hasta sobrepasar el punto de rendimiento óptimo de la segunda. Aun despreciando las pérdidas por transmisión, este método fallaba en la reducción del costo al mínimo.

Estudiaremos primeramente la distribución más económica de la salida de una central entre los generadores o unidades de dicha central. Como un sistema se amplía frecuentemente, añadiendo unidades dentro de las centrales existentes, las diversas unidades de una central tienen muchas veces características diferentes. El método que se desarrollará es aplicable también a la programación económica de la salida de la central para una carga determinada del sistema, sin tener en cuenta las pérdidas por transmisión. Vamos a desarrollar un método de expresar las pérdidas por transmisión en función de las salidas de las diversas centrales. Determinaremos, después cómo debe programarse la salida de cada una de las centrales del sistema para conseguir un costo mínimo de la energía suministrada a la carga.

10.1 DISTRIBUCION DE CARGAS ENTRE UNIDADES DE UNA MISMA CENTRAL

Para determinar la distribución económica de la carga entre las diversas unidades, formadas por una turbina, un generador y una caldera, el costo de operación de la unidad debe expresarse en términos de la salida de potencia. El costo de combustible es el factor principal en plantas de combustibles fósiles, y el costo del combustible nuclear también puede expresarse como función de la salida. La mayor parte de nuestra energía eléctrica continuará proviniendo de los combustibles fósiles por muchos años hasta que un mayor número de centrales nucleares estén en funcionamiento y otras fuentes de energía estén en capacidad de asumir parte del trabajo. En este presupuesto basaremos nuestro estudio sobre la economía de los combustibles, en la convicción de que otros costos que son función de la salida de potencia pueden incluirse en la expresión para el costo del combustible independientemente de si la fuente de energía es de combustible fósil o nuclear. En la fig. 10.1 se muestra una curva típica entrada-salida, la que representa una relación de la entrada de combustible para una central de combustible fósil en Btu por hora con respecto a la salida de potencia de la unidad en megavatios. Las ordenadas de la curva se convierten a dólares por hora multiplicando la entrada de combustible por el costo de combustible en dólares por millón de Btu.

Si se dibuja una línea por el origen a cualquier punto sobre la curva de entrada-salida, el inverso de la pendiente es la salida de la potencia en megavatios dividida por la entrada en millones de Btu por hora, ó la razón de la energía de salida en megavatios-hora al combustible de entrada medido en millones de Btu. Esta proporción es la eficiencia del combustible. La eficiencia máxima ocurre en el punto en que la pendiente de la línea desde el origen a un punto sobre la curva es mínima, es decir, el punto donde la línea es tangente a la curva. Para la unidad cuya curva de entrada-salida se muestra en la fig. 10.1, la eficiencia máxima se encuentra para una salida de aproximadamente 65 MW, que implica una entrada de 640×10^6 Btu/h. El combustible requerido es 9.85×10^6 Btu/Mwh. Por comparación, cuando la salida de la unidad es de 20 MW, el combustible requerido es 12.0 Bth/Mwh.

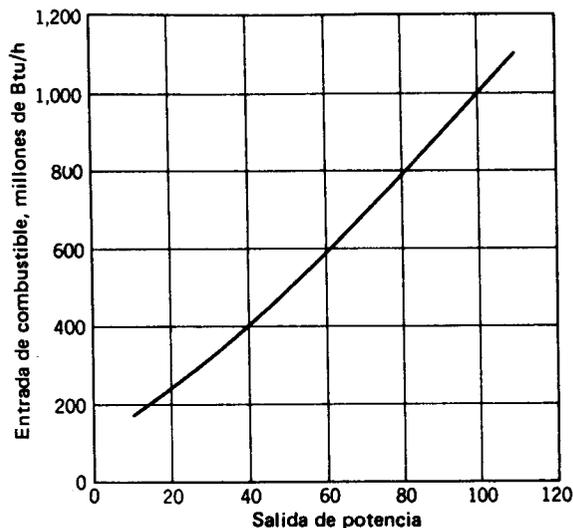


Fig. 10.1 Curva de entrada-salida para unidad generadora indicando la entrada de combustible con respecto a la salida de potencia.

Lógicamente, el combustible requerido para una salida dada fácilmente se convierte a dólares por megavatio-hora. Como veremos, el criterio para distribución de la carga entre dos unidades cualesquiera se basa en si al aumentar la carga en una unidad, a medida que la carga disminuye en la otra unidad en la misma cantidad, resulta en un aumento ó disminución en el costo total. Así, estamos tratando la variación del costo, que se determina por las pendientes de las curvas de entrada-salida de las dos unidades. Si expresamos las ordenadas de la curva de entrada-salida en dólares por hora y definimos.

F_n = entrada a la unidad n , en dólares por hora

P_n = salida de la unidad n , en megavatios

la variación del costo de combustible de la unidad, en dólares por megavatio-hora, será dF_n/dP_n .

La variación del costo de combustible en una unidad generadora para una salida de potencia determinada es el límite de la relación entre el incremento en el costo de la entrada de combustible en dólares por hora y el correspondiente incremento de potencia en la salida de megavatios, cuando el incremento de potencia de salida tiende a cero. Aproximadamente, la variación en el costo del combustible podría obtenerse determinando el aumento de costo de combustible en un intervalo de tiempo determinado, durante el cual la salida de potencia ha aumentado en una cantidad pequeña. Por ejemplo, la variación del costo aproximado en cualquier salida específica es el costo adicional en dólares por hora al aumentar la salida en 1 MW. Realmente la variación del costo se determina midiendo la pendiente de la curva entrada-salida y multiplicando por el costo por Btu en las unidades adecuadas. Como los milésimos de dólar (décimas de centavo) por kilovatio-hora son equivalentes a los dólares por megavatio-hora y como un kilovatio es una cantidad de potencia

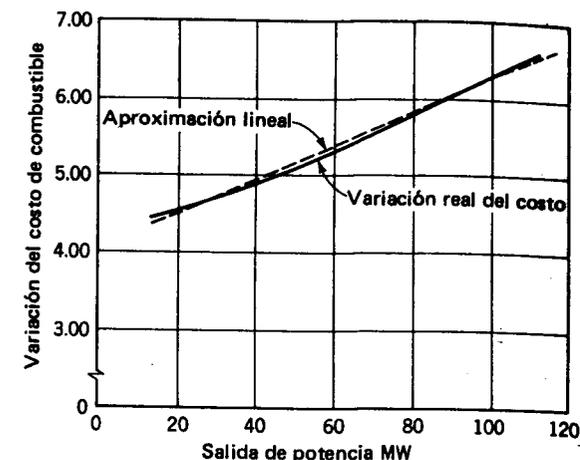


Fig. 10.2 Variación del costo de combustible con respecto a la salida de potencia para la unidad cuya curva de entrada-salida se indica en la fig. 10.1.

muy pequeña frente a la salida normal de una unidad de una central térmica, la variación del costo de combustible puede considerarse como el costo de combustible en milésimos por hora para suministrar un incremento en la salida de un kilovatio.

En la fig. 10.2 se ha representado la variación del costo de combustible en función de la salida de potencia. Este gráfico se ha obtenido midiendo la pendiente de la curva entrada-salida en la fig. 10.1 y tomando un costo de combustible de 50 centavos por millón de Btu. Sin embargo, el costo del combustible en términos de Btu no es muy predecible, y el lector no debe suponer que las cifras de costos de este capítulo son aplicables en todo momento. En la fig. 10.2 puede verse que la variación del costo es sensiblemente lineal respecto a la salida de potencia en un amplio intervalo. En el trabajo analítico la curva comúnmente se aproxima por una recta. La línea de trazos en la figura es una buena representación de la curva. La ecuación de la recta es

$$\frac{dF_n}{dP_n} = 0.023P + 4.0$$

de modo que cuando la salida de potencia es 100 MW, la variación del costo es 6.3 dólares por megavatio-hora. Este valor es el costo aproximado por hora al aumentar la salida en 1 MW y el ahorro en costo por hora al reducir la salida en 1 MW. Al multiplicar la ecuación por dP e integrando de 100 a 101 resulta 6.3115 dólares por hora.

Con lo anteriormente expuesto, disponemos ya de la base para comprender el principio que ha de servir de guía para la distribución de la carga dentro de las unidades de una central. Supongamos, por ejemplo, que la salida total de una central es suministrada por dos unidades, y que la carga se divide entre estas dos unidades, de tal forma que la variación del costo de combustible de una es mayor que la de la otra. Supongamos ahora que parte de la carga se transfiere de la unidad con variación del costo más alto a la otra. La disminución de carga en la unidad con variación del costo mayor dará lugar a una reduc-

ción de costo mayor que el incremento de costo por adición de la misma carga a la unidad con variación de costo más bajo. La transferencia de carga de una unidad a la otra puede continuar con una reducción en el costo total de combustible hasta que la variación del costo en las dos unidades sea igual. El mismo razonamiento es extensible a una central con más de dos unidades. Así pues, el criterio para el reparto económico de la carga entre las unidades de una central, es que todas las unidades deben funcionar con la misma variación del costo de combustible. Si es preciso aumentar la salida de la central, la variación del costo a que funciona cada unidad aumentará, pero conservándose igual para todas ellas.

El criterio que hemos desarrollado intuitivamente puede determinarse matemáticamente. Sea una central con K unidades, tendremos

$$F_T = F_1 + F_2 + \dots + F_K = \sum_{n=1}^K F_n \quad (10.1)$$

$$P_R = P_1 + P_2 + \dots + P_K = \sum_{n=1}^K P_n \quad (10.2)$$

en la que F_T es el costo total de combustible y P_R la potencia total en las barras de la central, transferida al sistema. El costo de combustible de las unidades individuales es F_1, F_2, \dots, F_K y sus salidas correspondientes $P_1, P_2, P_3, \dots, P_K$. Nuestro objetivo es obtener un valor mínimo de F_T para un P_R dado, lo que exige que el diferencial total sea $dF_T = 0$. Puesto que el costo del combustible depende de la salida de potencia de cada unidad.

$$dF_T = \frac{\partial F_T}{\partial P_1} dP_1 + \frac{\partial F_T}{\partial P_2} dP_2 + \dots + \frac{\partial F_T}{\partial P_K} dP_K = 0 \quad (10.3)$$

Con el costo total del combustible dependiendo de las diferentes unidades, el requisito de P_R constante significa que la ec. (10.2) es una restricción al mínimo valor de F_T . La restricción de que P_R permanezca constante exige que $dP_R = 0$, y así

$$dP_1 + dP_2 + \dots + dP_K = 0 \quad (10.4)$$

Multiplicando la ec. (10.4) por λ y restando la ecuación resultante a la ec. (10.3) resulta, cuando se agrupan términos,

$$\left(\frac{\partial F_T}{\partial P_1} - \lambda \right) dP_1 + \left(\frac{\partial F_T}{\partial P_2} - \lambda \right) dP_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_T}{\partial P_K} - \lambda \right) dP_K = 0 \quad (10.5)$$

Esta ecuación se logra si cada término es igual a cero. Cada una de las derivadas parciales se convierte en derivada total, puesto que el costo del combustible de una unidad varía sólo si la salida de potencia de esa unidad cambia. Por ejemplo, $\frac{\partial F_T}{\partial P_K}$ se hace dF_T/dP_K . La ec. (10.5) se logra si

$$\frac{dF_1}{dP_1} = \lambda, \frac{dF_2}{dP_2} = \lambda, \dots, \frac{dF_K}{dP_K} = \lambda \quad (10.6)$$

y así todas las unidades deben funcionar a la misma variación del costo de combustible para obtener un costo mínimo en dólares por hora. Así hemos demostrado matemáticamente el mismo criterio al que llegamos intuitivamente. El procedimiento se conoce como el método de los multiplicadores de Lagrange. Necesitaremos este desarrollo matemático cuando consideremos el efecto de las pérdidas en la transmisión sobre la distribución de cargas entre varias centrales para conseguir un mínimo en el costo del combustible para una carga especificada del sistema.

Si la variación del costo de combustible de las unidades es aproximadamente lineal respecto a la salida de potencia en el campo de funcionamiento que se considera, las ecuaciones que representan las variaciones del costo de combustible como funciones lineales de la salida de potencia, simplifican el cálculo. Puede prepararse un programa para asignar las cargas a cada unidad de una central, suponiendo valores diversos de λ , obteniendo las salidas correspondientes de cada unidad y sumando las salidas para determinar la carga de la central para cada valor supuesto para λ . La curva de λ en función de la carga de la central establece el valor de λ al cual debería funcionar cada unidad para una carga dada de la central. Si se especifican las cargas máximas y mínimas para cada unidad, algunas unidades no podrán funcionar con la misma variación de costo del combustible que las otras unidades y permanecer dentro de los límites especificados de cargas muy pequeñas y muy pesadas de la central.

EJEMPLO 10.1 La variación unitaria del costo de combustible, en dólares por megavatio-hora, viene dada para las dos unidades de una central por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dF_1}{dP_1} = 0.020P_1 + 4.0 \quad \frac{dF_2}{dP_2} = 0.024P_2 + 3.2$$

Suponer que las dos unidades trabajan durante todo el tiempo y que la carga total varía desde 50 a 250 MW, debiendo ser las cargas máxima y mínima de cada unidad 125 y 20 MW, respectivamente. Determinar la variación del costo de combustible y la distribución de carga entre las unidades para tener el costo mínimo en varias cargas totales.

Solución Para cargas pequeñas, la unidad 1 tendrá mayor variación del costo de combustible y trabajará en su límite inferior de 20 MW, para cuya carga, el valor de dF_1/dP_1 es de 4.4 dólares por megavatio-hora cuando la salida de la unidad 2 es 20 MW, $dF_2/dP_2 = 3.68$ dólares por megavatio-hora. Por tanto, a medida que la salida de la central aumenta, la carga adicional debe provenir de la unidad 2 hasta que $dF_2/dP_2 = 4.4$ dólares. Hasta que se alcance ese punto la variación del costo de combustible λ de la central se determina únicamente por la unidad 2. Cuando la carga de la central es 50 MW, la unidad 2 suministrará 30 MW con $dF_2/dP_2 = 3.92$ dólares por megavatio-hora. Cuando $dF_2/dP_2 = 4.4$ dólares por megavatio-hora,

$$0.024P_2 + 3.2 = 4.4$$

$$P_2 = \frac{1.2}{0.024} = 50 \text{ MW}$$

y la salida de la central es de 70 MW. Las demás condiciones de funcionamiento se determinan tomando diversos valores para λ , y calculando la salida de cada unidad y la total de la central. Los resultados se han resumido en la tabla 10.1.

En la fig. 10.3 se ha representado λ en función de la salida de la central. Observamos que para $\lambda = 6,20$, la unidad 2 trabaja en su límite superior y la carga adicional tendría que proceder de la unidad 1 lo que determina el λ de la central.

Si queremos conocer la distribución de carga entre las unidades para una salida de la central de 200 MW, leeremos en la curva de la fig. 10.3 que el valor correspondiente de λ es 5.82 dólares por megavatio-hora. Las salidas de cada unidad individual se hallarán sustituyendo este valor de λ en las ecuaciones dadas. Así, tendremos:

$$\begin{aligned} 0.020P_1 + 4.0 &= 5.82 & \text{and} & & P_1 &= 91 \text{ MW} \\ 0.024P_2 + 3.2 &= 5.82 & \text{and} & & P_2 &= 109 \text{ MW} \\ P_1 + P_2 &= 200 \text{ MW} \end{aligned}$$

Las salidas de las unidades por separado pueden también leerse en la fig. 10.4, en la que las cargas económicas de las unidades se han representado en función de la salida total.

El ahorro conseguido por medio de la distribución económica de carga frente a cualquier distribución arbitraria, puede hallarse por integración de la expresión que da la variación del costo y comparando los incrementos y decrementos de costo en las unidades, cuando la carga se separa de su distribución más económica.

EJEMPLO 10.2 Determinar el ahorro en el costo de combustible, en dólares por hora en la distribución económica de una carga total de 180 MW, entre las dos unidades descritas en el ej. 10.1, comparada con la distribución a partes iguales de la misma carga total.

Solución El ej. 10.1 demuestra que la unidad 1 debe suministrar 80 MW y la 2. 100 MW. Si cada unidad suministra 90 MW, el aumento de costo en la unidad 1 es

$$\int_{80}^{90} (0.020P_1 + 4.0) dP_1 = \left| 0.010P_1^2 + 4.0P_1 \right|_{80}^{90} = \$57.0 \text{ dólares/hora}$$

Tabla 10.1 Salidas de cada unidad y salida total para diversos valores de λ . Para el ejemplo 10.1

Central λ \$/MWh	Unidad 1 P_1 , MW	Unidad 2 P_2 , MW	Central $P_1 + P_2$, MW
3.92	20.0	30.0	50.0
4.40	20.0	50.0	70.0
4.80	40.0	66.7	106.7
5.20	60.0	83.3	143.3
5.60	80.0	100.0	180.0
6.00	100.0	116.7	216.7
6.20	110.0	125.0	235.0
6.50	125.0	125.0	250.0

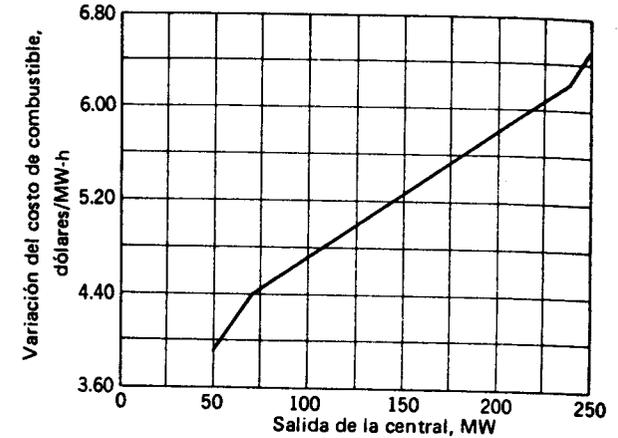


Fig. 10.3 Variación del costo de combustible en función de la salida de la central, con la carga total distribuida económicamente entre las unidades, según el ej. 10.1.

De igual forma, para la unidad 2,

$$\int_{100}^{90} (0.024P_2 + 3.2) dP_2 = \left| 0.012P_2^2 + 3.2P_2 \right|_{100}^{90} = -\$54.8 \text{ dólares/hora}$$

El signo menos indica un decremento en el costo, como podría esperarse por la disminución de salida. El resultado es un aumento neto de costo, ya que hemos partido de una distribución económica; aquél vale $57.0 - 54.8 = 2.20$ dólares por hora. La economía parece pequeña, pero esta cantidad ahorrada por hora supone durante un año de trabajo continuo un ahorro en el costo de combustible de 19.272 dólares.

El ahorro conseguido por la distribución económica de la carga justifica la existencia de dispositivos para controlar automáticamente la carga de cada unidad. Consideraremos

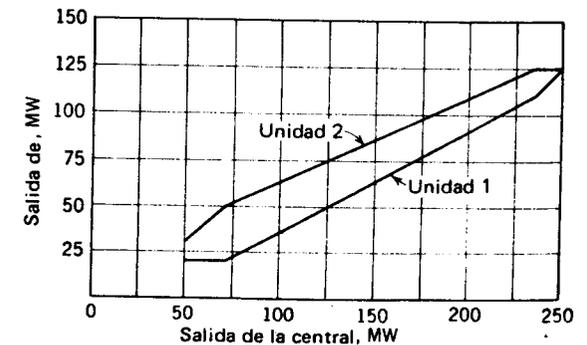


Fig. 10.4 Salida de cada unidad en función de la salida de la central para tener un funcionamiento económico del ej. 10.1.

el control automático brevemente, después de estudiar la coordinación de las pérdidas por transmisión con la distribución económica de la carga entre varias centrales.

10.2 PERDIDAS POR TRANSMISIÓN EN FUNCIÓN DE LA PRODUCCIÓN DE LA CENTRAL

Al determinar la distribución económica de la carga entre centrales, nos encontramos con la necesidad de considerar las pérdidas en las líneas de transmisión. Aunque la variación del costo de combustible en la barra de una central puede ser inferior que en la de otra central para una distribución dada de la carga entre las centrales, la central cuya variación del costo en sus barras sea inferior podrá estar mucho más alejada del centro de carga. Las pérdidas por transmisión desde la central, con variación de costo más pequeña, pueden ser tan grandes que la economía aconseje disminuir la carga en la central con variación del costo pequeña y aumentarla en la central con mayor variación del costo. Para coordinar las pérdidas por transmisión con el problema de distribución económica de cargas, es preciso que expresemos la pérdida total de energía por transmisión de un sistema en función de las cargas de las centrales.

Para poder ver con más claridad los principios que intervienen en la expresión de las pérdidas en función de la energía suministrada por las centrales, determinaremos dichas pérdidas en un sistema simple formado por dos centrales generadoras y una carga¹. En la fig. 10.5 se ha representado un sistema de este tipo. Si las resistencias de las líneas a , b y c son R_a , R_b y R_c , respectivamente, la pérdida total para el sistema de transmisión trifásica es

$$P_L = 3|I_1|^2 R_a + 3|I_2|^2 R_b + 3|I_1 + I_2|^2 R_c \quad (10.7)$$

Si suponemos que I_1 e I_2 están en fase,

$$|I_1 + I_2| = |I_1| + |I_2| \quad (10.8)$$

con lo que tendremos

$$P_L = 3|I_1|^2 (R_a + R_c) + 3 \times 2|I_1| |I_2| R_c + 3|I_2|^2 (R_b + R_c) \quad (10.9)$$

Si P_1 y P_2 son las salidas de potencia trifásica de las centrales 1 y 2, con factores de potencia pf_1 y pf_2 , y si las tensiones en las barras son V_1 y V_2 ,

$$|I_1| = \frac{P_1}{\sqrt{3} |V_1| pf_1} \quad \text{y} \quad |I_2| = \frac{P_2}{\sqrt{3} |V_2| pf_2} \quad (10.10)$$

Sustituyendo en la ec. (10.9), obtenemos

$$\begin{aligned} P_L &= P_1^2 \frac{R_a + R_c}{|V_1|^2 (pf_1)^2} + 2P_1 P_2 \frac{R_c}{|V_1| |V_2| (pf_1) (pf_2)} + P_2^2 \frac{R_b + R_c}{|V_2|^2 (pf_2)^2} \\ &= P_1^2 B_{11} + 2P_1 P_2 B_{12} + P_2^2 B_{22} \end{aligned} \quad (10.11)$$

¹ Puede encontrarse un estudio sencillo de las fórmulas de pérdidas, por un procedimiento parecido al de nuestra aproximación en el trabajo de D. C. Harker, titulado "A Primer on Loss Formulas" y publicado en las *Trans. AIEE*, vol. 77, III, págs. 1434-1436, año 1958.

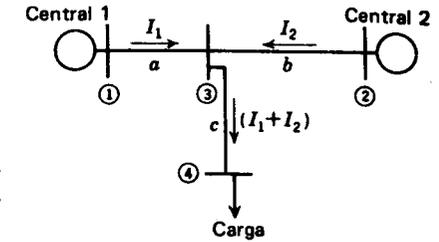


Fig. 10.5 Sistema simple constituido por dos centrales generadoras conectadas a una carga.

donde

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{R_a + R_c}{|V_1|^2 (pf_1)^2} \\ B_{12} &= \frac{R_c}{|V_1| |V_2| (pf_1) (pf_2)} \\ B_{22} &= \frac{R_b + R_c}{|V_2|^2 (pf_2)^2} \end{aligned} \quad (10.12)$$

B_{11} , B_{12} y B_{22} se llaman *coeficientes de pérdida* o *coeficientes B*. Si las tensiones de la ec. (10.12) son entre líneas en kV, con las resistencias en ohmios, las unidades correspondientes para los coeficientes de pérdida son 1/MW. Entonces, en la ec. (10.11) con potencias trifásicas P_1 y P_2 en megavatios, P_L vendrá también expresada en megavatios. Desde luego puede también operarse en valores "por unidad".

Para el sistema para el cual han sido deducidos y con la suposición de que I_1 e I_2 están en fase, estos coeficientes proporcionan la pérdida exacta, por medio de la ec. (10.11), solamente para los valores particulares de P_1 y P_2 que resultan de las tensiones y factores de potencia utilizados en las ecs. (10.12). Los coeficientes B son constantes, al variar P_1 y P_2 , sólo en tanto que las tensiones en las barras de las centrales mantengan un valor constante y los factores de potencia de la central sean también constantes. Afortunadamente, el uso de valores constantes para los coeficientes de pérdida en la ec. (10.11) proporciona resultados razonablemente exactos si los coeficientes se calculan para unas condiciones medias de funcionamiento y si no se producen diferencias de carga excesivas entre las centrales o en la carga total. En la práctica los sistemas grandes se cargan económicamente por medio de cálculos basados en un conjunto de coeficientes de pérdida que son lo suficientemente exactos durante la variación diaria de la carga. Si se producen cambios importantes en el sistema, será preciso calcular nuevos conjuntos de coeficientes.

Las pérdidas como función de las salidas de las centrales pueden expresarse por métodos diferentes a los de los coeficientes B . Posteriormente estudiaremos uno de esos métodos en forma general, pero el enfoque de los coeficientes B se entiende más fácilmente y es lo suficientemente válido para dar un tratamiento bastante adecuado de la pérdida de coordinación en la distribución económica de carga entre centrales.

EJEMPLO 10.3 Suponer para el sistema, cuyo diagrama unifilar se ha representado en la fig. 10.5, que $I_1 = 1.0/0^\circ$ p. u. e $I_2 = 0.8/0^\circ$ p. u. Si la tensión en la barra 3 es $V_3 = 1.0/0^\circ$ p. u., determinar los coeficientes de pérdida. Las impedancias de las líneas son $0.04 + j0.16$ p. u., $0.03 + j0.12$ p. u. y $0.02 + j0.08$ p. u. en las secciones *a*, *b* y *c* respectivamente.

Solución Normalmente, las corrientes de carga y las tensiones en las barras se deducen de los estudios de carga. Para este problema, las tensiones en las barras pueden calcularse a partir de los datos enunciados:

$$V_1 = 1.0 + (1.0 + j0)(0.04 + j0.16) = 1.04 + j0.16 \text{ por unidad}$$

$$V_2 = 1.0 + (0.8 + j0)(0.03 + j0.12) = 1.024 + j0.096 \text{ por unidad}$$

Las potencias se obtienen ordinariamente del estudio de cargas para la condición de funcionamiento utilizada para calcular los coeficientes de pérdida. En este problema P_1 y P_2 tienen que ser calculados.

$$P_1 = \text{Re} \{ (1.0 + j0)(1.04 + j0.16) \} = 1.04 \text{ por unidad}$$

$$P_2 = \text{Re} \{ (0.8 + j0)(1.024 + j0.096) \} = 0.8192 \text{ por unidad}$$

Como todas las corrientes tienen ángulos de fase nulos, el factor de potencia en cada nudo fuente es el coseno del ángulo de la tensión en el nudo, y el valor de la tensión por el factor de potencia es igual a la parte real de la expresión compleja de la tensión. Así,

$$B_{11} = \frac{0.04 + 0.02}{1.04^2} = 0.0554 \text{ por unidad}$$

$$B_{12} = \frac{0.02}{1.024 \times 1.04} = 0.0188 \text{ por unidad}$$

$$B_{22} = \frac{0.03 + 0.02}{1.024^2} = 0.0477 \text{ por unidad}$$

EJEMPLO 10.4 Calcular la pérdida por transmisión para el ej. (10.3) por la fórmula de la ec. (10.11) y comprobar el resultado.

Solución

$$\begin{aligned} P_L &= 1.04^2 \times 0.0554 + 2 \times 1.04 \times 0.8192 \times 0.0188 + 0.8192^2 \times 0.0477 \\ &= 0.06 + 0.032 + 0.032 = 0.124 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

Sumando las pérdidas en cada sección, calculadas por $I^2 R$, tenemos

$$\begin{aligned} P_L &= 1.0^2 \times 0.04 + 1.8^2 \times 0.02 + 0.8^2 \times 0.03 \\ &= 0.04 + 0.0648 + 0.0192 = 0.124 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

La exacta concordancia entre los dos métodos era de esperar puesto que los coeficientes de pérdida se determinaron para la condición para la cual se calculó la pérdida. El error

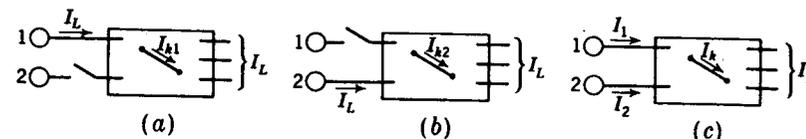


Fig. 10.6 Diagrama esquemático que representa a dos centrales generadoras conectadas a través de una red arbitraria a un número cualquiera de cargas. Se indica una de las ramas de la red.

que se introduce al utilizar los mismos coeficientes de pérdida para otras dos condiciones de funcionamiento, puede deducirse del examen de la tabla 10.2.

10.3 CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE PÉRDIDA

En la sección precedente hemos tratado de los coeficientes de pérdida en el caso de sistemas simples formados por una sola carga. El estudio completo de los coeficientes de pérdida se sale del objeto de este libro, sin embargo, podemos obtener ecuaciones sencillas, basadas en diversas suposiciones, para sistemas con cualquier número de cargas y de fuentes de energía. Nuestro procedimiento consistirá en desarrollar las ecuaciones para un sistema formado por dos centrales generadoras y un número indefinido de cargas. Las ecuaciones pueden extenderse fácilmente y satisfacer a sistemas con cualquier número de fuentes. Programas de computador empleados en el cálculo de los coeficientes B son mucho más complejos e incluyen un menor número de suposiciones que el procedimiento que estudiamos con fines de ilustración.

En la fig. 10.6, se representan dos centrales generadoras, unidas a una red de transmisión con un número arbitrario de cargas. Dentro del sistema, a una línea trifásica se la designa por una rama k . En la fig. 10.6a, el sistema se alimenta solamente por la fuente 1, pero están conectadas todas las cargas. La corriente total de carga I_L es suministrada solamente por la fuente 1, siendo la corriente en la línea k , I_{k1} . Sea

$$N_{k1} = \frac{I_{k1}}{I_L} \quad (10.13)$$

Tabla 10.2 Comparación de las pérdidas por transmisión calculadas con los coeficientes de pérdida e $I^2 R$, para los datos del ejemplo 10.3, con diversas condiciones de funcionamiento

I_1	I_2	P_1	P_2	P_L por coeficientes de pérdida	por $I^2 R$	Condiciones
1.0	0.8	1.040	0.819	0.124	0.124	Caso original
0.5	0.4	0.510	0.405	0.030	0.031	P_1, P_2 reducido 50%
0.5	1.3	0.510	1.351	0.128	0.126	0.53 de P_1 a P_2

Todas las cantidades se dan por unidad

y, de igual forma, con la fuente 2 suministrando toda la carga, como en la fig. 10.6b,

$$N_{k2} = \frac{I_{k2}}{I_L} \quad (10.14)$$

N_{k1} y N_{k2} se llaman *factores de distribución de corriente*. Por el principio de superposición, con las dos fuentes conectadas, como en la fig. 10.6c, la corriente en k , será

$$I_k = N_{k1}I_1 + N_{k2}I_2 \quad (10.15)$$

siendo I_1 e I_2 las corrientes desde las centrales 1 y 2 respectivamente.

Las dos hipótesis simplificativas que adoptamos son que la relación X/R es la misma para todas las ramas de la red y que todas las corrientes de carga tienen el mismo ángulo de fase. Estas hipótesis significan que los factores de distribución de corriente son reales en lugar de complejos. Si la red es alimentada por más de una central, las diversas corrientes en las ramas no están necesariamente en fase, aunque los factores de distribución de corriente pueden ser reales. Si ponemos

$$I_1 = |I_1| \cos \sigma_1 + j |I_1| \operatorname{sen} \sigma_1$$

$$I_2 = |I_2| \cos \sigma_2 + j |I_2| \operatorname{sen} \sigma_2$$

siendo σ_1 y σ_2 los ángulos de fase de I_1 e I_2 , respecto a una referencia común, obtenemos de la ec. (10.15) (con N_{k1} y N_{k2} reales),

$$|I_k|^2 = (N_{k1}|I_1| \cos \sigma_1 + N_{k2}|I_2| \cos \sigma_2)^2 + (N_{k1}|I_1| \operatorname{sen} \sigma_1 + N_{k2}|I_2| \operatorname{sen} \sigma_2)^2 \quad (10.16)$$

y desarrollando y simplificando

$$|I_k|^2 = N_{k1}^2 |I_1|^2 + N_{k2}^2 |I_2|^2 + 2N_{k1}N_{k2} |I_1| |I_2| \cos (\sigma_1 - \sigma_2) \quad (10.17)$$

Sustituyendo ahora

$$|I_1| = \frac{P_1}{\sqrt{3} |V_1| \operatorname{pf}_1} \quad \text{y} \quad |I_2| = \frac{P_2}{\sqrt{3} |V_2| \operatorname{pf}_2}$$

y haciendo R_k = resistencia de la rama k , obtenemos para la pérdida total por transmisión

$$P_L = \sum_k 3 |I_k|^2 R_k = \frac{P_1^2}{|V_1|^2 (\operatorname{pf}_1)^2} \sum_k N_{k1}^2 R_k + \frac{2P_1P_2 \cos (\sigma_1 - \sigma_2)}{|V_1| |V_2| (\operatorname{pf}_1) (\operatorname{pf}_2)} \sum_k N_{k1}N_{k2} R_k + \frac{P_2^2}{|V_2|^2 (\operatorname{pf}_2)^2} \sum_k N_{k2}^2 R_k \quad (10.18)$$

en la que el sumatorio \sum_k se extiende a todas las ramas. La pérdida de potencia se expresa ordinariamente por la ecuación

$$P_L = P_1^2 B_{11} + 2P_1P_2 B_{12} + P_2^2 B_{22} \quad (10.19)$$

en la que los coeficientes de carga son

$$B_{11} = \frac{1}{|V_1|^2 (\operatorname{pf}_1)^2} \sum_k N_{k1}^2 R_k$$

$$B_{12} = \frac{\cos (\sigma_1 - \sigma_2)}{|V_1| |V_2| (\operatorname{pf}_1) (\operatorname{pf}_2)} \sum_k N_{k1}N_{k2} R_k \quad (10.20)$$

$$B_{22} = \frac{1}{|V_2|^2 (\operatorname{pf}_2)^2} \sum_k N_{k2}^2 R_k$$

Las unidades para las magnitudes de las ecs. (10.19) y (10.20) son las mismas que se explicaron en la ec. (10.12); esto es, la resistencia, en ohmios; las tensiones entre líneas, en kilovoltios; los coeficientes de pérdida, en megavoltios recíprocos y la potencia trifásica en megavatios.

La forma general de la ecuación de pérdida para un número cualquiera de fuentes, es

$$P_L = \sum_m \sum_n P_m B_{mn} P_n \quad (10.21)$$

en la que \sum_m y \sum_n indican sumatorios independientes para incluir todas las fuentes. Por ejemplo, para tres fuentes,

$$P_L = P_1^2 B_{11} + P_2^2 B_{22} + P_3^2 B_{33} + 2P_1P_2 B_{12} + 2P_2P_3 B_{23} + 2P_1P_3 B_{13}$$

La expresión general para los coeficientes de pérdida, es la

$$B_{mn} = \frac{\cos (\sigma_m - \sigma_n)}{|V_m| |V_n| (\operatorname{pf}_m) (\operatorname{pf}_n)} \sum_k N_{km}N_{kn} R_k \quad (10.22)$$

La forma matricial de la ecuación de pérdidas por transmisión, es

$$\mathbf{P}_L = \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (10.23)$$

en la que, para un total de s fuentes, tenemos

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_s \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & B_{s2} & B_{s3} & \cdots & B_{ss} \end{bmatrix}$$

Además de las hipótesis hechas al deducir la expresión general de los coeficientes de pérdida, dados por la ec. (10.22), es preciso hacer otras hipótesis si queremos considerar los coeficientes como constantes, ya que la carga total y la distribución de carga entre las fuentes varía. Las hipótesis adicionales son:

1. Todas las corrientes de carga están en relación constante con la corriente total.
2. La tensión en la barra de cada fuente permanece constante en módulo.
3. El factor de potencia de cada fuente no varía; esto es, Q_n/P_n , es constante.

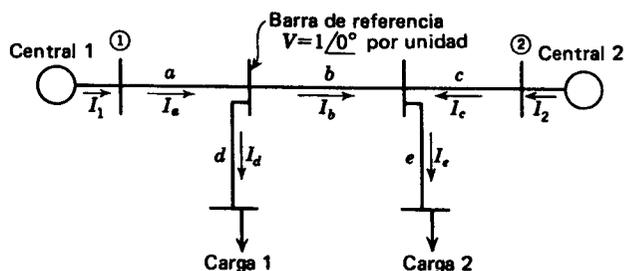


Fig. 10.7 Sistema de dos centrales generadoras y dos cargas.

4. Los ángulos de fase de las tensiones en las barras permanecen constantes. Esta hipótesis es equivalente a admitir que las corrientes de las fuentes mantienen ángulos de fase constantes, respecto a una referencia común, puesto que los factores de potencia de las fuentes se suponen constantes.

La hipótesis de que las corrientes de carga están en relación constante con la corriente total de carga es admisible para la mayor parte de las cargas. En efecto, la relación compleja es normalmente constante y supusimos que la relación era solamente real para simplificar las ecuaciones. Nuestra hipótesis adicional de que la relación es real para todas las cargas no es necesaria si la disponibilidad de un computador digital hace factible la aplicación de métodos más completos y complicados. Las cargas, cuyas corrientes no mantienen una relación constante con la corriente total de carga, se dice que son *no-conformes* y se tienen en cuenta por medio de modificaciones de la ecuación de pérdida. Por ejemplo, una carga constante puede representarse por una fuente negativa. Otras cargas pueden descomponerse en una componente constante y en otra que conserva la relación constante con la carga total.

Cuando se presentan variaciones extremas en las condiciones de funcionamiento, de forma que las otras hipótesis dan lugar a errores considerables en los cálculos, pueden determinarse una o dos conjuntos adicionales de coeficientes de pérdida para aplicarlos a las muy diferentes circunstancias. Muchas compañías suministradoras obtienen, no obstante, resultados suficientemente exactos sobre la base de un único conjunto de coeficientes calculados para las condiciones típicas o normales de funcionamiento.

EJEMPLO 10.5 La fig. 10.7, representa un sistema con dos fuentes, señaladas como central 1 y central 2, respectivamente. Hay dos cargas y una red de cinco ramas. La barra de referencia, cuya tensión es de $1.0/0^\circ$ p. u. se ha indicado en el esquema, siendo las corrientes y las impedancias en las ramas, las siguientes;

$$\begin{aligned} I_a &= 1.2 - j0.4 \text{ por unidad} & Z_a &= 0.02 + j0.08 \text{ por unidad} \\ I_b &= 0.4 - j0.2 \text{ por unidad} & Z_b &= 0.08 + j0.32 \text{ por unidad} \\ I_c &= 0.8 - j0.1 \text{ por unidad} & Z_c &= 0.02 + j0.08 \text{ por unidad} \\ I_d &= 0.8 - j0.2 \text{ por unidad} & Z_d &= 0.03 + j0.12 \text{ por unidad} \\ I_e &= 1.2 - j0.3 \text{ por unidad} & Z_e &= 0.03 + j0.12 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

Calcular los coeficientes de las fórmulas de pérdida por unidad y en megavatios recíprocos si la base es 50 MVA.

Solución Las corrientes de las cargas 1 y 2 son 0.4 y 0.6, respectivamente, de la corriente total de carga. Por tanto, los factores de distribución de corriente son

$$\begin{aligned} N_{a1} &= 1 & N_{b1} &= 0.6 & N_{c1} &= 0 & N_{d1} &= 0.4 & N_{e1} &= 0.6 \\ N_{a2} &= 0 & N_{b2} &= -0.4 & N_{c2} &= 1 & N_{d2} &= 0.4 & N_{e2} &= 0.6 \end{aligned}$$

Como las corrientes de las fuentes están especificadas, es preciso calcular las tensiones en las barras de las fuentes. En un caso práctico se haría un estudio de carga para determinar los factores de potencia en las barras, así, como las tensiones y ángulos de fase. Los ángulos de fase de las corrientes pueden ser calculados a partir de los ángulos de las tensiones en las barras y factores de potencia en las barras. Las tensiones en las barras de las centrales son

$$\begin{aligned} V_1 &= 1.0 + (1.2 - j0.4)(0.02 + j0.08) \\ &= 1.056 + j0.088 = 1.06/4.76^\circ \text{ por unidad} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= 1.0 - (0.4 - j0.2)(0.08 + j0.32) + (0.8 - j0.1)(0.02 + j0.08) \\ &= 0.928 - j0.050 = 0.93/-3.08^\circ \text{ por unidad} \end{aligned}$$

Los ángulos de fase de las corrientes en las centrales son

$$\sigma_1 = \tan^{-1} \frac{-0.4}{1.2} = -18.43^\circ \quad \sigma_2 = \tan^{-1} \frac{-0.1}{0.8} = -7.13^\circ$$

Por tanto,

$$\cos(\sigma_2 - \sigma_1) = \cos 11.30^\circ = 0.980$$

y los factores de potencia en las centrales, serán

$$pf_1 = \cos(4.76^\circ + 18.43^\circ) = 0.919$$

$$pf_2 = \cos(7.13^\circ - 3.08^\circ) = 0.998$$

Los coeficientes de pérdida son

$$B_{11} = \frac{0.02 \times 1.0^2 + 0.6^2 \times 0.08 + 0.4^2 \times 0.03 + 0.6^2 \times 0.03}{1.06^2 \times 0.919^2}$$

$$= 0.0678 \text{ por unidad}$$

$$B_{22} = \frac{0.02 \times 1.0^2 + 0.4^2 \times 0.08 + 0.4^2 \times 0.03 + 0.6^2 \times 0.03}{0.93^2 \times 0.998^2}$$

$$= 0.0562 \text{ por unidad}$$

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{(-0.4 \times 0.6 \times 0.08 + 0.4 \times 0.4 \times 0.03 + 0.6 \times 0.6 \times 0.03)(0.980)}{1.06 \times 0.93 \times 0.998 \times 0.92} \\ &= -0.0040 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

Como la base adoptada ha sido 50 MVA, estos coeficientes de pérdida han de multiplicarse por $\frac{1}{50}$ para obtener sus valores en megavatios recíprocos. Y así

$$B_{11} = \frac{0.0678}{50} = 0.1356 \times 10^{-2} \text{ MW}^{-1}$$

$$B_{22} = \frac{0.0562}{50} = 0.1124 \times 10^{-2} \text{ MW}^{-1}$$

$$B_{12} = -\frac{0.0040}{50} = -0.0080 \times 10^{-2} \text{ MW}^{-1}$$

10.4 DISTRIBUCION DE LA CARGA ENTRE CENTRALES

El método desarrollado para expresar las pérdidas por transmisión, en función de la salida de las centrales, hace posible que tengamos en cuenta las pérdidas por transmisión al hacer la programación de la salida de cada central para obtener la máxima economía en un sistema de carga dado. El tratamiento matemático del problema es similar al de la programación de unidades dentro de una central, con la excepción de que, ahora, incluiremos las pérdidas por transmisión como una ligadura adicional.

En la ecuación

$$F_T = F_1 + F_2 + \dots + F_K = \sum_{n=1}^K F_n \quad (10.24)$$

F_T , es ahora, el costo total de todo el combustible para el sistema completo y es la suma de los costos de combustible de las diversas centrales F_1, F_2, \dots, F_K . La alimentación total a la red desde todas las centrales, es

$$P_T = P_1 + P_2 + \dots + P_K = \sum_{n=1}^K P_n \quad (10.25)$$

siendo P_1, P_2, \dots, P_K , las aportaciones individuales a la red de cada central. El costo total de combustible del sistema es una función de las entradas de potencia. La relación de ligadura para el valor mínimo de F_T , es

$$\sum_{n=1}^K P_n - P_L - P_R = 0 \quad (10.26)$$

siendo P_R la energía total recibida por las cargas del sistema y P_L la pérdida en la transmisión expresada en función de los coeficientes de pérdida y la potencia suministrada a la red por cada central. Puesto que P_R es constante, $dP_R = 0$; por tanto

$$\sum_{n=1}^K dP_n - dP_L = 0 \quad (10.27)$$

y dado que costo mínimo significa $dF_T = 0$,

$$dF_T = \sum_{n=1}^K \frac{\partial F_T}{\partial P_n} dP_n = 0 \quad (10.28)$$

La pérdida por transmisión, P_L , depende de las salidas de las centrales, y dP_L se expresa por

$$dP_L = \sum_{n=1}^K \frac{\partial P_L}{\partial P_n} dP_n \quad (10.29)$$

Sustituyendo dP_L de la ec. (10.29) en la ec. (10.27), multiplicando por λ , y restando el resultado de la ec. (10.28) resulta

$$\sum_{n=1}^K \left(\frac{\partial F_T}{\partial P_n} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_n} - \lambda \right) dP_n = 0 \quad (10.30)$$

Esta ecuación se logra siempre que

$$\frac{\partial F_T}{\partial P_n} + \lambda \frac{\partial P_L}{\partial P_n} - \lambda = 0 \quad (10.31)$$

para cada valor de n . Reagrupando la ec. (10.31) y reconociendo que el cambiar la salida de una central solamente puede afectar el costo de esa central, tenemos

$$\frac{dF_n}{dP_n} \frac{1}{1 - \partial P_L / \partial P_n} = \lambda \quad (10.32)$$

o

$$\frac{dF_n}{dP_n} L_n = \lambda \quad (10.33)$$

en la que L_n se denomina factor de penalización de la central n y

$$L_n = \frac{1}{1 - \partial P_L / \partial P_n} \quad (10.34)$$

El multiplicador λ se expresa en dólares por megavatio-hora, cuando el costo de combustible está en dólares por hora y la potencia en megavatios. El resultado es análogo al obtenido en la programación de carga, dentro de las unidades de una central. El costo mínimo de combustible se obtiene, cuando la variación del costo de cada central, multiplicada por su factor de penalización, es igual para todas las centrales del sistema. Los productos son iguales a λ , que se denomina la λ del sistema y aproximadamente es el costo en dólares por hora al aumentar la carga total entregada en 1 MW. Para un sistema de tres centrales, por ejemplo,

$$\frac{dF_1}{dP_1} L_1 = \frac{dF_2}{dP_2} L_2 = \frac{dF_3}{dP_3} L_3 = \lambda \quad (10.35)$$

Las pérdidas por transmisión P_L , vienen dadas por la ec. (10.21). Para K centrales, la derivación parcial, respecto a P_n , da

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_n} = \frac{\partial}{\partial P_n} \sum_{m=1}^K \sum_{n=1}^K P_m B_{mn} P_n = 2 \sum_{m=1}^K P_m B_{mn} \quad (10.36)$$

Las ecuaciones simultáneas obtenidas escribiendo la ec. (10.32), para cada central del sistema, pueden resolverse suponiendo para λ un valor determinado. Entonces se determi-

na, para el valor adoptado de λ , la carga económica de cada central. Resolviendo las ecuaciones para varios valores de λ , se encuentran datos suficientes para representar la energía generada por cada central frente a la total. Si se calculan las pérdidas por transmisión para cada λ , pueden representarse las salidas de cada central frente a la carga total recibida. Si se transfiere energía, a través de líneas de interconexión, a otros sistemas o si se recibe de centrales hidráulicas, la distribución de la carga restante entre las centrales térmicas, viene afectada por los cambios en las pérdidas por transmisión originados por la circulación por estos puntos adicionales de entrada en el sistema. No intervienen nuevas variables, pero sí son necesarios unos coeficientes de pérdida adicionales. Por ejemplo, un sistema con cinco centrales térmicas, tres centrales hidráulicas y siete interconexiones, necesitaría una matriz de coeficiente de pérdida 15×15 , pero las únicas incógnitas a determinar para un valor cualquiera dado de λ son las cinco entradas al sistema desde las cinco centrales térmicas.

EJEMPLO 10.6 Un sistema está formado por dos centrales unidas por una línea de transmisión y una carga situada en la central 2. Como dato para la ecuación de pérdida sabemos que si se suministran 100 MW desde la central 1 a la carga, se produce una pérdida de 10 MW. Determinar la energía que ha de generar cada central y la energía recibida por la carga si el valor de λ para este sistema es de 6 dólares por megavatio-hora. Suponer que las variaciones del costo de combustible, vienen dados, aproximadamente, por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dF_1}{dP_1} = 0.007P_1 + 4.1 \text{ dólares/MW-h}$$

$$\frac{dF_2}{dP_2} = 0.014P_2 + 4.6 \text{ dólares/MW-h}$$

Solución Para un sistema de dos centrales

$$P_L = P_1^2 B_{11} + 2P_1 P_2 B_{12} + P_2^2 B_{22}$$

Como la carga está situada en la central 2, la variación de P_2 , no puede afectar a P_L . Por consiguiente,

$$B_{22} = 0 \quad B_{12} = 0$$

Si $P_1 = 100$ MW, $P_L = 10$ MW. Así,

$$10 = 100^2 B_{11}$$

$$B_{11} = 0.001 \text{ MW}^{-1}$$

y

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_1} = 2P_1 B_{11} + 2P_2 B_{12} = 0.002P_1$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_2} = 2P_2 B_{22} + 2P_1 B_{12} = 0$$

Los factores de penalización son

$$L_1 = \frac{1}{1 - 0.002P_1} \quad y \quad L_2 = 1.0$$

Para $\lambda = 6,0$

$$\frac{0.007P_1 + 4.1}{1 - 0.002P_1} = 6.0$$

$$P_1 = 100 \text{ MW}$$

$$0.014P_2 + 4.6 = 6.0$$

$$P_2 = 100 \text{ MW}$$

Por tanto, para $\lambda = 6,0$, el suministro económico de la carga exige un reparto por igual de dicha carga entre las dos centrales. La pérdida de potencia en la transmisión es

$$P_L = 0.001 \times 100^2 = 10 \text{ MW}$$

y la carga es

$$P_R = P_1 + P_2 - P_L = 190 \text{ MW}$$

EJEMPLO 10.7 En el sistema del ej. 10.6, siendo 190 MW la potencia recibida por la carga, determinar la economía en dólares por hora al tener en cuenta, en vez de despreciarlas, las pérdidas por transmisión en el cálculo de las cargas de las centrales.

Solución Si se desprecian las pérdidas por transmisión, las variaciones del costo de combustible en las dos centrales se igualan dando

$$0.007P_1 + 4.1 = 0.014P_2 + 4.6$$

La potencia suministrada a la carga es

$$P_1 + P_2 - 0.001P_1^2 = 190$$

Resolviendo estas dos ecuaciones en P_1 y P_2 , se obtienen para la potencia generada por las dos centrales, sin tener en cuenta las pérdidas por transmisión, los valores siguientes:

$$P_1 = 170 \text{ MW} \quad y \quad P_2 = 49 \text{ MW}$$

La carga en la central 1, ha aumentado de 100 a 170 MW. El aumento de costo de combustible es

$$\begin{aligned} \int_{100}^{170} (0.007P_1 + 4.1) dP_1 &= \left| \frac{0.007}{2} P_1^2 + 4.1P_1 \right|_{100}^{170} \\ &= 66.15 + 287.00 = \$353.15 \text{ dólares/h} \end{aligned}$$

La carga en la central 2 disminuye de 100 a 51 MW. El decremento (incremento negativo) en el costo para la central 2 es

$$\begin{aligned}
 - \int_{100}^{49} (0.014P_2 + 4.6) dP_2 &= - \left| \frac{0.014}{2} P_2^2 + 4.6P_2 \right|_{100}^{49} \\
 &= 53.19 + 234.60 = \$287.79 \text{ dólares/h}
 \end{aligned}$$

El ahorro neto al tener en cuenta las pérdidas por transmisión al programar la carga recibida de 190 MW, vale

$$353.15 - 287.79 = \$65.36 \text{ por hora}$$

10.5 MÉTODOS ALTERNOS PARA CALCULAR LOS FACTORES DE PENALIZACIÓN

El método más utilizado en el cálculo de $\partial P_L / \partial P_n$ para minimización de costos es el de expresar las pérdidas por transmisión como función de las salidas de la central en términos de los coeficientes B . La principal ventaja de este método es la simplicidad de la ecuación de pérdidas en términos de los coeficientes B , lo cual ha redundado en grandes ahorros en los costos de operación del sistema. El rápido desarrollo de los computadores digitales ha traído otros métodos atractivos. Aunque no examinaremos otros enfoques en detalle, estudiaremos brevemente un método alternativo.

Se ha desarrollado una expresión exacta para $\partial P_L / \partial P_n$ en términos de las admitancias de la línea y los ángulos de fase de los voltajes¹. Este método tiene la ventaja de no ocultar las constantes del sistema, como ocurre con el método de los coeficientes B , pero incluye cálculos extremadamente largos.

Otro método basado en las admitancias es mucho más sencillo y, aunque no es exacto, es bastante preciso². Este enfoque, igual al método exacto, se basa en el hecho de que

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_n} = \sum_{j=1}^K \frac{\partial P_L}{\partial \theta_j} \frac{\partial \theta_j}{\partial P_n} \quad (10.37)$$

donde θ_j es el ángulo de fase de la tensión en el nodo j en un sistema de K barras. Si se supone que los voltajes de barra son constantes, puede demostrarse que en términos de los ángulos de fase de las tensiones,

$$\frac{\partial P_L}{\partial \theta_j} = 2 \sum_{k=1}^K |V_j| \cdot |V_k| G_{jk} \text{sen}(\theta_k - \theta_j) \quad (10.38)$$

¹ J. R. Tudor y W. A. Lewis, "Transmission Losses and Economy Loading by the Use of Admittance Constants", IEEE Trans. Power Appar. Syst. vol. PAS-82, págs. 676-683, octubre 1963.

² E. F. Hill y W. D. Stevenson J., "An Improved Method of Determining Incremental Loss Factors from Power System Admittances and Voltages", IEEE Trans Power. Appar. Sgst., vol PAS-87, No. 6, págs. 1419-1425, junio 1968.

donde G_{jk} es la parte real de Y_{jk} de la matriz de admitancias de barra. La dificultad con la ec. (10.37) es la de expresar $\partial \theta_j / \partial P_n$; diferenciación directa es imposible debido a que los ángulos de fase de los voltajes no pueden expresarse en términos de las potencias generadas en las centrales.

Ya que los términos de $\partial \theta_j / \partial P_n$ expresan un cambio en el ángulo de fase del voltaje θ_j debido a un cambio en la P_n generado en la central cuando la generación en las otras centrales permanece constante, estos términos pueden aproximarse con estudios de carga. Para un modelo de carga típico la carga total recibida se aumenta incrementando cada carga individual en la misma cantidad d , por ejemplo en 5%. El cambio en la potencia total recibida más las pérdidas, se suministra por la central n mientras que las salidas de las otras centrales se mantienen constante. Se determinan los cambios en cada ángulo de fase de voltaje θ_j y se determinan las relaciones de cambio en ángulo de fase al cambio en la entrada de la central $\Delta \theta_j / \Delta P_n$ para todos los valores de j para la central n . Se corre el programa de estudio de carga del computador digital y se repite el proceso para cada central que suministre el cambio de carga. Se encuentra un conjunto de coeficientes A_{jn} , dado por

$$A_{jn} = \frac{\Delta \theta_j}{\Delta P_n} \quad (10.39)$$

Luego la variación de pérdida para la central n viene dada por

$$\frac{\partial P_L}{\partial P_n} = \sum_{j=1}^K \frac{\partial P_L}{\partial \theta_j} A_{jn} \quad (10.40)$$

Los valores de A_{jn} son prácticamente constantes independientemente de las diversas combinaciones del programa de generación y los niveles de carga. Así, una vez se ha determinado una matriz de coeficientes A_{jn} , un computador supervisando el flujo de carga puede calcular los factores de penalización de la central resolviendo continuamente las ecs. (10.38) y (10.40). Así, el computador controla el sistema para distribución económica de carga entre centrales, como se describe en la sección siguiente.

10.6 SUMINISTRO AUTOMÁTICO DE CARGA

En el funcionamiento de un sistema de potencia es común el control por computador de la salida de cada central, y de cada unidad dentro de la central. Se controla el intercambio de potencia con otros sistemas supervisando continuamente todas las salidas de la central y las interconexiones. Inicialmente, los computadores análogos realizaron la función de control bastante bien. Ahora, sin embargo, la mayoría de las instalaciones son digitales o una combinación de digital y analógica. Consideramos una de las diversas formas de cumplir el control deseado.

En el estudio de control el término *área* significa esa parte de uno o varios sistemas o compañías de potencia interconectados que absorbe (ajusta su generación de acuerdo con) sus propios cambios de carga. Supervisando el flujo de potencia en las líneas de interconexión entre áreas se determina si un área específica absorbe satisfactoriamente todos los cambios de carga dentro de sus límites. La función del computador es exigir que el área absorba sus propios cambios de carga y determinar la generación deseada de cada central en el área para un suministro económico.

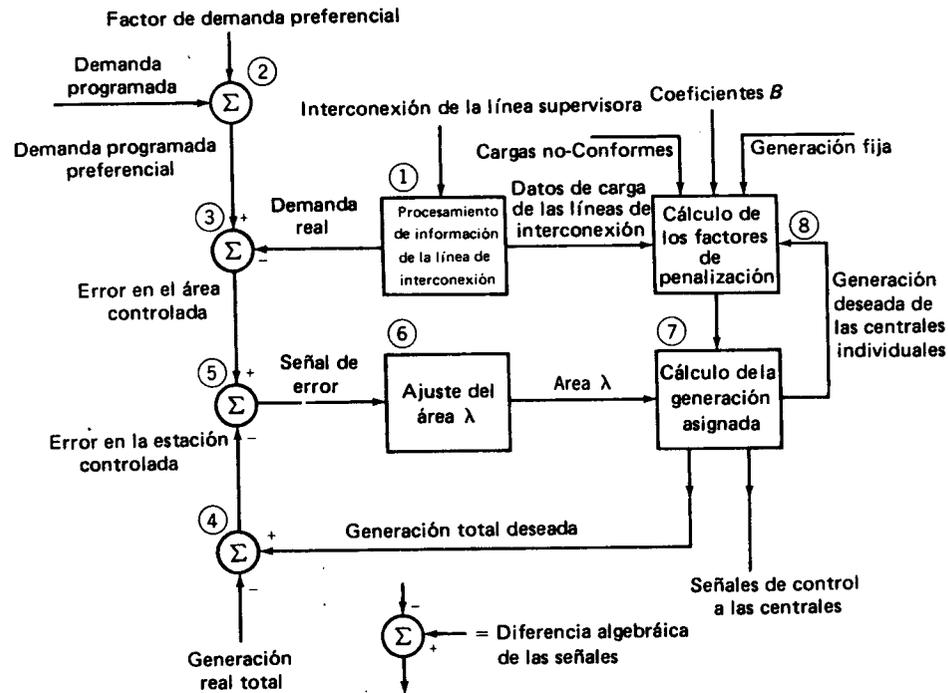


Fig. 10.8 Diagrama en bloques para ilustrar el funcionamiento del control por computador de una área específica.

El diagrama en bloques de la fig. 10.8 es la base de nuestro estudio del funcionamiento del computador que controla un área específica. Los números dentro de los círculos del diagrama sirven para identificar los puntos en el diagrama y simplificar nuestro estudio del funcionamiento de control. En el punto 1 se indica el procesamiento de la información acerca del flujo de potencia en las líneas de interconexión con respecto a otras áreas de control. La demanda es la suma algebraica de la potencia en las líneas de interconexión y es positiva cuando la potencia neta sale del área. Un área siempre tiene una demanda de potencia programada con otras áreas, lo que da como resultado una demanda programada para el área. En nuestro estudio consideramos la demanda programada saliente del área.

El punto 2 en el diagrama indica que la demanda programada se aumenta ó disminuye de acuerdo con la *demanda preferencial*. La demanda preferencial depende de si la demanda real es mayor ó menor que la demanda programada. El efecto de la demanda preferencial es pedir al área un mayor suministro de salida de potencia del área que la salida de potencia programada si la demanda real es inferior a la programada. De esta manera el área hará su parte aumentando la demanda del grupo entero de áreas interconectadas. Los círculos pequeños en el diagrama que encierran el símbolo indican puntos de suma. En este caso la demanda preferencial se está sumando a la demanda programada en una cantidad (positiva ó negativa) determinada por la desviación de la demanda.

En el punto 3 indica la diferencia algebraica de la demanda *real* respecto de la programada. El resultado se llama *error en el área controlada* (EAC), que puede ser positivo o negativo. Un EAC positivo significa que el área no está generando suficiente potencia para enviar la cantidad deseada fuera del área. Hay una deficiencia en la salida neta del área.

El *error en la estación controlada* (EEC) es la diferencia entre la generación real y la deseada de todas las centrales del área, como se indica en el punto 4. Este EEC es positivo cuando la generación deseada es mayor que la real.

La clave del funcionamiento total del control es la comparación de EAC y EEC. Su diferencia es la señal de error, como se indica en 5. Si EAC y EEC son positivos e iguales, la diferencia en la salida del área es igual al exceso de la generación deseada sobre la real y no se produce señal de error. La generación de las centrales se aumentará automáticamente para reducir el EEC, y al mismo tiempo el aumento resultante en la salida del área reducirá el EAC.

Si EAC excede a EEC, hay una señal de error que aumenta el λ del área (punto 6) y éste, a su vez, aumenta la generación deseada de la central (punto 7). Cada central recibe una señal para aumentar su salida, como lo determinan los principios de suministro económico.

Este estudio específicamente ha considerado el caso de demanda programada saliente del área (demanda programada positiva) con EAC igual o superior a EEC. El lector debe estar en condiciones de ampliar el estudio a otras posibilidades refiriéndose a la fig. 10.8.

El punto 8 en el diagrama se refiere el cálculo del factor de penalización para cada central. Aquí los coeficientes B se almacenan para calcular $\partial P_L / \partial P_n$. En el cálculo del factor de penalización se consideran cargas no-conformes, centrales en donde la generación es invariable y carga de las líneas de interconexión. Los factores de penalización se transmiten a la sección que calcula la generación deseada.

PROBLEMAS

10.1 En cierta unidad generadora de una central, el consumo de combustible, en millones de Btu por hora, puede expresarse, en función de la potencia de salida en megavatios, por la ecuación

$$0.00016P^3 + 0.024P^2 + 4.8P + 100$$

- Determinar la ecuación que da la variación del costo de combustible, en dólares/MWh, en función de la salida en megavatios, suponiendo que el costo de combustible es de 0.75 dólar por millón de Btu. Hallar una aproximación lineal.
- Hallar la ecuación para una buena aproximación lineal de la variación del costo de combustible en función de la potencia de salida.
- ¿Cuál es el costo promedio de combustible por megavatio-hora cuando la planta entrega 100 MW?
- ¿Cuál es aproximadamente el costo adicional por hora de combustible al aumentar la salida de la central de 100 a 101 MW?

10.2 Las variaciones del costo de combustible para las dos unidades de una central son

$$\frac{dF_1}{dP_1} = 0.020P_1 + 4.4 \quad \text{y} \quad \frac{dF_2}{dP_2} = 0.024P_2 + 3.2$$

en las que F viene dado en dólares por hora y P en megavatios. Si las dos unidades funcionan todo el tiempo y las cargas máxima y mínima de cada grupo son 125 y 20 MW, representar λ , en dólares/MWh, en función de la salida de la central, en megavatios, para el costo más bajo de combustible, cuando la carga total varía desde 40 a 250 MW.

10.3 Determinar la economía en dólares/hora en el reparto económico de la carga entre los grupos del prob. 10.2, comparado con el reparto a partes iguales para una salida total de 150 MW.

10.4 Una central tiene dos generadores que suministran la barra de la central, y ninguno debe funcionar por debajo de 20 MW ni por encima de 125 MW. La variación de costos con P_1 y P_2 en megavatios es

$$\frac{dF_1}{dP_1} = 0.030P_1 + 4.0 \quad \text{dólares/MWh}$$

$$\frac{dF_2}{dP_2} = 0.045P_2 + 3.5 \quad \text{dólares/MWh}$$

Para una distribución económica hallar el λ de la central cuando $P_1 + P_2$ es igual a (a) 40 MW, (b) 100 MW, (c) 225 MW.

10.5 Calcular la pérdida de potencia en el sistema del ej. 10.3 por los coeficientes de pérdida del ejemplo y por I^2R , para $I_1 = 1.5/0^\circ$ por unidad e $I_2 = 1.2/0^\circ$ por unidad. Suponer $V_3 = 1.0/0^\circ$ por unidad.

10.6 Determinar los coeficientes de pérdidas que darán la pérdida verdadera de potencia para el sistema del ej. 10.3 con los valores $I_1 = I_2 = 0.8/0^\circ$ por unidad y $V_3 = 1.0/0^\circ$ por unidad.

10.7 Calcular los coeficientes de las fórmulas de pérdida en por unidad y en megavatios recíprocos, con una base de 50 MVA para el sistema del Ej. 10.6, si las corrientes en las ramas son:

$$I_a = 1.6 - j0.4 \text{ por unidad} \quad I_d = 1.0 - j0.25 \text{ por unidad}$$

$$I_b = 0.6 - j0.15 \text{ por unidad} \quad I_e = 1.2 - j0.3 \text{ por unidad}$$

$$I_c = 0.6 - j0.15 \text{ por unidad}$$

10.8 Un sistema de potencia tiene solamente dos centrales generadoras; la potencia se distribuye económicamente con $P_1 = 120$ MW y $P_2 = 200$ MW. Los coeficientes de pérdida son:

$$B_{11} = 0.10 \times 10^{-2} \text{ MW}^{-1}$$

$$B_{12} = -0.01 \times 10^{-2} \text{ MW}^{-1}$$

$$B_{22} = 0.13 \times 10^{-2} \text{ MW}^{-1}$$

Al aumentar la carga total en 1 MW se produce un costo adicional de 5 dólares por hora. Hallar (a) el factor de penalización para la central 1, y (b) el costo adicional por hora al aumentar la salida de esta central en 1 MW.

10.9 En un sistema compuesto de dos centrales generadoras las variaciones de los costos en dólares por megavatio-hora con P y P en megavatios son

$$\frac{dF_1}{dP_1} = 0.020P_1 + 4.0 \quad \frac{dF_2}{dP_2} = 0.030P_2 + 4.5$$

El sistema funciona basado sobre condiciones de distribución económica con $P_1 = P_2 = 100$ MW y $\partial P_L / \partial P_2 = 0.2$. Hallar el factor de penalización de la central 1.

10.10 Un sistema de potencia funciona en condiciones de distribución económica con $\lambda = 6.4$ dólares por megavatio-hora. Si, al aumentar la salida de la central 2 en 100 KW (con las otras salidas constantes), resulta un aumento en las pérdidas $|I|^2 |R|$ de 15 KW para el sistema, ¿cuál es aproximadamente el costo adicional por hora si la salida de esta central se aumenta en 1 MW?

10.11 Un sistema de potencia se alimenta de dos centrales, ambas funcionando sobre condiciones de distribución económica. En las barras de las centrales 1 y 2 las variaciones de los costos son de 6.6 y 7.2 dólares por megavatio-hora, respectivamente. ¿Qué central tiene el mayor factor de penalización? ¿Cuál es el factor de penalización de la central 1 si el costo por hora al aumentar la carga en el sistema en 1 MW es de 8.2 dólares?

10.12 Calcular los valores abajo enumerados para el sistema del ej. 10.6 con λ del sistema = 6.5 dólares por megavatio-hora. Suponer costos de combustible sin carga de 125 y 250 dólares por hora para las centrales 1 y 2, respectivamente.

(a) P_1 , P_2 y la potencia suministrada a la carga con distribución económica con pérdidas por transmisión coordinadas.

(b) P_1 y P_2 para el valor de la potencia suministrada a la carga encontrada en la parte (a) pero con pérdidas por transmisión no coordinadas. Sin embargo, las pérdidas por transmisión deben incluirse al determinar la potencia total de entrada al sistema.

(c) Costo total de combustible en dólares por hora para las partes (a) y (b).

11

FALLOS TRIFASICOS SIMETRICOS EN MAQUINAS SINCRONICAS

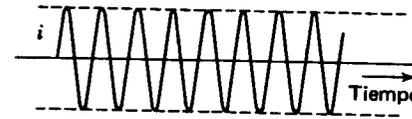


Fig. 11.1 La corriente en función del tiempo en un circuito RL para $a - \theta = 0$, siendo $\theta = \text{arc tg} (\omega L/R)$. La tensión es $|V_m| \text{sen} (\omega t + a)$, aplicada en el instante $t = 0$.

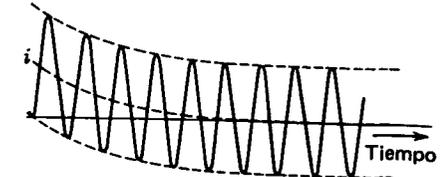


Fig. 11.2 La corriente en función del tiempo en un circuito RL para $a - \theta = -90^\circ$, siendo $\theta = \text{arc tg} (\omega L/R)$. La tensión es $|V_m| \text{sen} (\omega t + a)$, aplicada en el instante $t = 0$.

11.1 TRANSIENTES EN CIRCUITOS RL EN SERIE

La selección de un interruptor para un sistema de energía no depende solamente de la corriente que pasa por el interruptor en las condiciones normales de funcionamiento, sino también de la corriente máxima que ha de soportar momentáneamente y de la corriente que puede tener que interrumpir, a la tensión de la línea en que está colocado.

Con el objeto de abordar el problema de calcular la corriente inicial cuando se cortocircuita un alternador, consideremos lo que ocurre cuando se aplica una tensión alterna a un circuito con valores constantes de la resistencia y la inductancia. Sea la tensión aplicada $|V_{max}| \text{sen} (\omega t + \alpha)$, siendo t igual a cero en el momento de aplicar la tensión. Entonces α determina el módulo de la tensión cuando se cierra el circuito. Si la tensión instantánea es cero y aumenta en sentido positivo cuando se aplica, cerrando un interruptor, α vale cero. Si la tensión tiene su valor instantáneo positivo máximo, α vale $\pi/2$. La ecuación diferencial es

$$V_{\text{máx}} \text{sen} (\omega t + \alpha) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (11.1)$$

cuya solución es

$$i = \frac{V_{\text{máx}}}{|Z|} [\text{sen} (\omega t + \alpha - \theta) - e^{-Rt/L} \text{sen} (\alpha - \theta)] \quad (11.2)$$

en la que $|Z|$ es $\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ y θ es el $\text{arc tan}^{-1} (\omega L/R)$.

El primer término de la ec. (11.2) varía sinusoidalmente con el tiempo. El segundo término es aperiódico y disminuye exponencialmente con una constante de tiempo L/R . Este término aperiódico se denomina componente continua de la corriente. El término sinusoidal es el valor en régimen permanente de la corriente en un circuito RL para la tensión aplicada dada. Si el valor del término de régimen permanente no es cero cuando $t = 0$, aparece la componente continua en la solución para satisfacer la condición física de ser la corriente cero en el instante de cerrar el interruptor. Nótese que el término continuo no existe si el circuito se cierra en un punto de la onda de tensión tal que $\alpha - \theta = 0$ ó $\alpha - \theta = \pi$. La fig. 11.1 representa la variación de corriente con el tiempo de acuerdo con la ec. (11.2) cuando $\alpha - \theta = 0$. Si el interruptor se cierra en un punto de la onda de

Cuando en una red de energía se produce un fallo, la corriente que circula viene determinada por las f.e.m. de las máquinas de la red, por sus impedancias y por las impedancias de la red entre las máquinas y el fallo. La corriente que pasa por una máquina sincrónica inmediatamente después del fallo, la que circula varios ciclos más tarde y la persistente o valor correspondiente al estado-permanente del fallo son completamente distintas a causa del efecto de la corriente en el rotor sobre el flujo que genera la tensión en la máquina. La corriente varía con lentitud relativa desde su valor inicial hasta el correspondiente al estado permanente. Este capítulo estudia el cálculo de la corriente de fallo en distintos períodos y explica los cambios de reactancia y tensión interna de una máquina sincrónica al variar la corriente desde su valor inicial, al presentarse el fallo, hasta su valor en el estado permanente. La descripción del programa de computador para calcular los fallos de corriente se posponen hasta que estudiemos los fallos asimétricos, ya que los programas no están confinados a fallos trifásicos¹.

¹ Un texto dedicado totalmente al estudio de fallos es el P.M. Anderson, "Analysis of Faulted Power Systems", Iowa State University Press, Ames, Iowa, 1973.

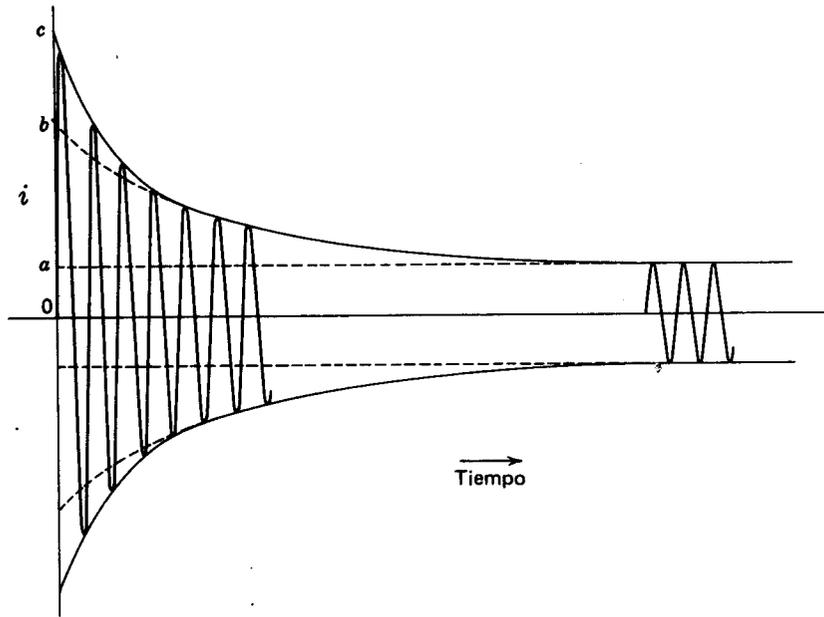


Fig. 11.3 La corriente en función del tiempo en un alternador de 208 V-30 kW, cortocircuitado funcionando en vacío. La componente unidireccional transitoria de la corriente ha sido eliminada al volver a dibujar el oscilograma.

tensión tal que $\alpha - \theta = \pm \pi/2$, la componente continua tiene un valor inicial máximo que es igual a la amplitud máxima de la componente sinusoidal. La fig. 11.2 representa la corriente en función del tiempo para $\alpha - \theta = -\pi/2$. La componente continua puede tener un valor cualquiera desde 0 hasta $|V_{max}|/|Z|$, según el valor instantáneo de la tensión al cerrar el circuito y del factor de potencia del circuito. En el instante de aplicar la tensión, las componentes continua y permanente tienen siempre el mismo valor absoluto, pero son de signo opuesto, para expresar el valor cero de la corriente en ese instante.

En la sec. 9.1 revisamos los principios de operación de un generador c. a. (alternador) el cual está formado por un campo magnético giratorio que genera una tensión en el devanado de un inducido que tiene resistencia y reactancia. La corriente que circula cuando se cortocircuita un alternador es similar a la que circula cuando se aplica súbitamente una tensión alterna a una resistencia y a una inductancia en serie. Sin embargo, hay diferencias importantes, porque la corriente en el inducido afecta al campo giratorio.

Para analizar el efecto de un cortocircuito trifásico en los terminales de un alternador sin carga, un procedimiento excelente consiste en tomar un oscilograma de la corriente en una de las fases al presentarse tal fallo. Como las tensiones generadas en las fases de una máquina trifásica están defasadas unas de otras en 120° eléctricos, el cortocircuito se aplica en puntos diferentes de la onda de tensión de cada fase. Por esta razón la componente unidireccional o de régimen transitorio de la corriente es diferente en cada fase. Si se elimina la componente continua de la corriente de cada fase, la representación gráfica de la corriente de cada fase en función del tiempo corresponde a la fig. 11.3. Por comparación

entre las figs. 11.1 y 11.3, puede verse la diferencia entre aplicar una tensión a un circuito *RL* ordinario y aplicar un cortocircuito a una máquina síncrona. En ninguna de las dos figuras existe componente continua. En una máquina síncrona, el flujo, a través del entrehierro, es mucho mayor en el instante de ocurrir el cortocircuito que unos pocos ciclos más tarde. La reducción del flujo es originado por la f.m.m. de la corriente en el inducido. Parte del estudio de la sec. 9.1 se refería al efecto de la corriente de inducido, que se denomina *reacción de inducido*. El circuito desarrollado en la sec. 9.1 se tiene en cuenta para la reducción del flujo debido a la reacción de inducido y se aplica a la condición estacionaria después de que el transiente *cd* ha desaparecido y después de que la amplitud de la onda que se muestra en la fig. 11.3 ha logrado su valor constante. Cuando sucede un cortocircuito en los terminales de una máquina síncrona se requiere de cierto tiempo para la reducción del flujo a través del entrehierro. A medida que el flujo disminuye, la corriente de inducido decrece porque la tensión generada por el flujo en el entrehierro determina la corriente que fluirá a través de la resistencia y la reactancia de pérdidas del devanado del inducido.

11.2 CORRIENTES DE CORTOCIRCUITO Y REACTANCIAS DE LAS MÁQUINAS SINCRÓNICAS¹

Con la fig. 11.3 pueden definirse ciertos términos interesantes para el cálculo de la corriente de cortocircuito en un sistema de energía. Las reactancias que definiremos se denominan reactancias de *eje-directo*, o simplemente *directas*, designación que resultará familiar a los que hayan estudiado la teoría de las dos reacciones en las máquinas de corriente alterna². La reactancia directa se utiliza para calcular las caídas de tensión originadas por aquella componente de la corriente en el inducido que está en cuadratura (defasada 90°) con la tensión generada en vacío. Dado que la resistencia en un circuito con fallo es pequeña comparada con la reactancia inductiva, la corriente en un fallo está siempre retardada en un ángulo grande, y se necesita la denominada reactancia directa. En lo siguiente es preciso recordar que la corriente representada en el oscilograma de la fig. 11.3 es la que circula en un alternador, que funciona en vacío, antes de que ocurra el fallo.

En la fig. 11.3 la distancia *oa* es el valor máximo de la corriente de cortocircuito permanente. Este valor de la corriente, por 0.707 es el valor eficaz $|I|$ de la corriente en régimen permanente de cortocircuito. La tensión en vacío del alternador $|E_g|$, dividida por la corriente en el régimen permanente $|I|$, se llama *reactancia síncrona* del alternador o

¹ Puede encontrarse un estudio más completo en el libro de C. F. Wagner y R. D. Evans, "Symmetrical Components", cap. V. Constants of Synchronous Machines págs. 74-109, McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1933. También, "Electrical Transmission and Distribution Reference Book", de C. F. Wagner, 4a. edición, cap. 6, Machine Characteristics in Central Station Engineers of the Westinghouse Electric Corporation, págs. 145-194, East Pittsburgh, Pa., 1964.

² Ver, por ejemplo, "Electric Machinery", de A. E. Fitzgerald y E. Kingsley, y A. Kusko, 3a. ed., págs. 312-319, McGraw-Hill Book Company., Nueva York, 1971.

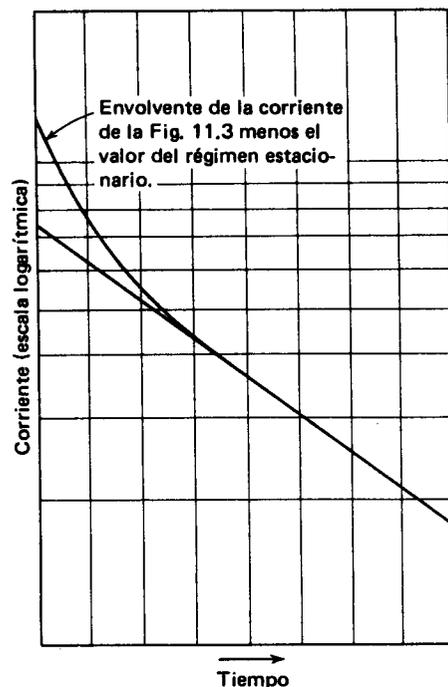


Fig. 11.4 Exceso de la envoltura de la corriente de la fig. 11.3 sobre la corriente máxima permanente, representada en papel semilogarítmico.

reactancia sincrónica directa X_d , puesto que el factor de potencia es bajo durante el cortocircuito. Se desprecia la resistencia relativamente pequeña del inducido.

Si la envoltura de la onda de corriente se hace retroceder hasta el instante cero y se desprecian unos pocos de los primeros ciclos en los que el decremento es muy rápido, la intersección determina la distancia ob . El valor eficaz de la corriente representado por esta intersección, o sea, 0.707 veces ob en amperios, es lo que se llama corriente en régimen transitorio o simplemente *corriente transitoria* $|I'|$. Con esto puede definirse una nueva reactancia de la máquina: la denominada *reactancia transitoria*, o, en este caso particular, *reactancia transitoria directa* X'_d , que es igual a $|E_g|/|I'|$ para un alternador funcionando en vacío antes del fallo. El punto de intersección que la envoltura de la corriente determina en el eje cero, si se desprecia el rápido decremento de unos pocos de los primeros ciclos, se puede determinar más exactamente representando en papel semilogarítmico el exceso de la envoltura sobre el valor permanente representado por oa , como se ha hecho en la fig. 11.4. La parte recta de la curva se prolonga hasta el eje de ordenadas para $t = 0$ y se añade la intersección al valor instantáneo de la corriente permanente para obtener el valor máximo instantáneo de la corriente transitoria que corresponde a ob en la fig. 11.3.

El valor eficaz de la corriente determinado por la intersección de la envoltura con el eje de ordenadas en el tiempo cero, se denomina *corriente subtransitoria* $|I''|$. En la fig. 11.3, la corriente subtransitoria es igual a 0.707 por la ordenada oc . A la corriente subtransitoria se le llama frecuentemente *corriente eficaz simétrica inicial*, lo que es más descriptivo porque lleva consigo la idea de despreciar la componente continua y tomar el

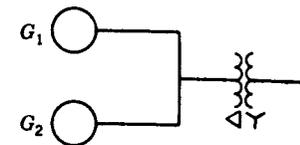


Fig. 11.5 Diagrama unifilar para el eje 11.1.

valor eficaz de la componente alterna de la corriente, inmediatamente después de presentarse el fallo. La *reactancia subtransitoria directa* X''_d para un alternador que funciona sin carga antes de presentarse el fallo trifásico en sus terminales es $|E_g|/|I''|$.

Las corrientes y reactancias antes estudiadas vienen definidas por las ecuaciones siguientes, que son aplicables a un alternador que funcione en vacío antes de producirse el fallo trifásico en sus terminales:

$$|I| = \frac{oa}{\sqrt{2}} = \frac{|E_g|}{X_d} \quad (11.3)$$

$$|I'| = \frac{ob}{\sqrt{2}} = \frac{|E_g|}{X'_d} \quad (11.4)$$

$$|I''| = \frac{oc}{\sqrt{2}} = \frac{|E_g|}{X''_d} \quad (11.5)$$

siendo $|I|$ = corriente permanente, valor eficaz.

$|I'|$ = corriente transitoria, valor eficaz, excluyendo la componente continua.

$|I''|$ = corriente subtransitoria, valor eficaz, excluyendo la componente continua.

X_d = reactancia sincrónica directa.

X'_d = reactancia transitoria directa.

X''_d = reactancia subtransitoria directa.

$|E_g|$ = valor eficaz de la tensión entre un terminal y el neutro en vacío oa , ob y oc son las intersecciones correspondientes a la fig. 11.3

En el trabajo analítico, las corrientes permanentes, transitoria y subtransitoria, pueden expresarse como vectores, tomando usualmente a E_g como referencia.

Las ecs. (11.3) a (11.5) indican el método para determinar la corriente de fallo en un generador cuando se conocen sus reactancias. Si el generador está en vacío cuando se presenta el fallo, la máquina se representa con la tensión en vacío respecto al neutro en serie con la reactancia adecuada. La resistencia se toma en cuenta si se desea mayor exactitud. Si existe una impedancia exterior al generador entre sus terminales y el cortocircuito, la impedancia exterior debe ser también incluida en el circuito.

EJEMPLO 11.1 Dos generadores están conectados en paralelo al terminal de bajo voltaje de un transformador trifásico $\Delta - Y$ como se indica en la fig. 11.5. El generador 1 tiene como valores nominales 50.000 kVA y 13.8 kV. El generador 2 tiene como valores nominales 25.000 kVA y 13.8 kV. Cada generador tiene una reactancia subtransitoria del 25%. El transformador es de 75.000 kVA y 13.8 $\Delta - 69Y$ kV, con una reactancia del

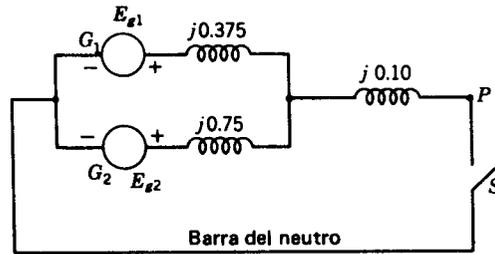


Fig. 11.6 Diagrama de reactancias para el Ej. 11.1

10%. Antes de que ocurra el fallo, la tensión en el lado de alta del transformador es de 66 kV. El transformador no tiene carga, y no circula corriente entre los generadores. Determinar la corriente subtransitoria en cada generador si se produce un cortocircuito trifásico en el lado de alta tensión del transformador.

Solución Tomando como base en el circuito de alta tensión 69 kV, 75.000 kVA, la tensión básica en el lado de baja es 13.8 kV.

Generador 1:

$$X'_d = 0.25 \frac{75.000}{50.000} = 0.375 \text{ por unidad}$$

$$E_{g1} = \frac{66}{69} = 0.957 \text{ por unidad}$$

Generador 2:

$$X'_d = 0.25 \frac{75.000}{25.000} = 0.750 \text{ por unidad}$$

$$E_{g2} = \frac{66}{69} = 0.957 \text{ por unidad}$$

Transformador:

$$X = 0.10 \text{ por unidad}$$

La fig. 11.6 representa el diagrama de reactancia antes del fallo. Cerrando el interruptor S se simula un fallo trifásico en P . Las tensiones internas de las dos máquinas pueden considerarse en paralelo, puesto que tienen que ser idénticas en valor absoluto y fase si no circulan corrientes entre ellas. La reactancia subtransitoria equivalente en paralelo es

$$\frac{0.375 \times 0.75}{0.375 + 0.75} = 0.25 \text{ por unidad}$$

Por consiguiente, como un vector con E_g como referencia, la corriente subtransitoria en el cortocircuito vale

$$I'' = \frac{0.957}{j0.25 + j0.10} = -j2.735 \text{ por unidad}$$

El voltaje en el lado delta del transformador es

$$(-j2.735)(j0.10) = 0.2735 \text{ por unidad}$$

y en los generadores 1 y 2

$$I''_1 = \frac{0.957 - 0.274}{j0.375} = -j1.823 \text{ por unidad}$$

$$I''_2 = \frac{0.957 - 0.274}{j0.75} = -j0.912 \text{ por unidad}$$

Para determinar la corriente en amperios, los valores por unidad hay que multiplicarlos por la corriente base del circuito, y así:

$$I''_1 = 1.823 \frac{75\,000}{\sqrt{3} \times 13.8} = 5.720 \text{ A}$$

$$I''_2 = 0.912 \frac{75\,000}{\sqrt{3} \times 13.8} = 2.860 \text{ A}$$

Aunque las reactancias no son verdaderas constantes de la máquina y dependen del grado de saturación del circuito magnético, sus valores están normalmente dentro de ciertos límites y pueden predecirse para algunos tipos de máquinas. La tabla A.4 da algunos valores típicos de reactancias de máquinas, necesarios para los cálculos de fallos y estudios de estabilidad. En general, las reactancias subtransitorias de generadores y motores se utilizan para determinar la corriente inicial que circula al producirse un cortocircuito. Para determinar la capacidad de interrupción de los interruptores, excepto aquellos que abren instantáneamente, se utiliza la reactancia subtransitoria para los generadores y la transitoria para los motores síncronos. En los estudios de estabilidad en los que el problema es determinar si un fallo originará la pérdida de sincronismo de la máquina con el resto del sistema, si el fallo es eliminado después de un cierto intervalo de tiempo, se aplican las reactancias transitorias.

11.3 TENSIONES INTERNAS DE MÁQUINAS EN CARGA EN CONDICIONES DE RÉGIMEN TRANSITORIO

Todo el estudio precedente corresponde a un alternador que no lleva corriente en el momento en que se presenta un fallo trifásico en los terminales de la máquina. Consideremos ahora un alternador que está en carga en el momento de producirse el fallo. La fig. 11.7a es el circuito equivalente de un alternador con una carga trifásica equilibrada. La impedancia exterior está entre los terminales del alternador y el punto P en que se produce el fallo. La corriente que fluye en el punto P antes de que el fallo ocurra es I_L , el voltaje en el fallo es V_f y el voltaje en el terminal del generador es V_t . Tal como se estudió, en el cap. 9, el circuito equivalente del alternador es su voltaje de circuito abierto E_g en serie con su reactancia sincrónica X_s . Si un fallo trifásico ocurre en el punto P del sistema, vemos que

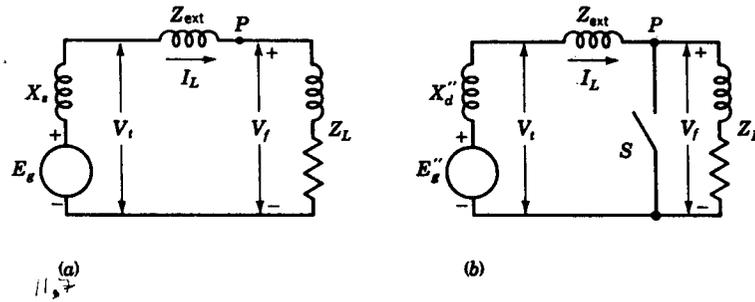


Fig. 11.7 Circuitos equivalentes de un alternador suministrando una carga trifásica equilibrada. La aplicación de un fallo trifásico en P se simula por el cierre del interruptor S. (a) Circuito equivalente del generador con carga; (b) circuito para el cálculo de I'' .

un corto circuito desde P_a neutro no llena las condiciones para calcular la corriente subtransiente puesto que la reactancia del generador debe ser X_d'' si fuéramos a calcular la corriente subtransiente I'' ó X_d' si fuéramos a calcular la corriente transiente I' .

El circuito que aparece en la fig. 11.7b da el resultado deseado. Aquí un voltaje E_g'' en serie con X_d'' suministra la corriente en el corto circuito a través de X_d'' y Z_{ext} cuando el interruptor S se cierra. Si podemos determinar E_g'' , esta corriente a través de X_d'' es I'' . con el interruptor S abierto vemos que

$$E_g'' = V_t + jI_L X_d'' \tag{11.6}$$

y esta ecuación define E_g'' , la cual se llama *tensión detrás de la reactancia subtransitoria*. Del mismo modo, cuando calculamos la corriente transitoria I' , la cual debe suministrarse a través de la reactancia transitoria X_d' , la tensión E_g' es la *tensión detrás de la reactancia transitoria*, donde

$$E_g' = V_t + jI_L X_d' \tag{11.7}$$

Las tensiones E_g'' y E_g' están determinadas por I_L y ambas son iguales a la tensión E_g de circuito abierto solamente cuando I_L es cero; en tal caso, E_g es igual a V_t .

Es importante notar que E_g'' en serie con X_d'' representa el generador antes de que el fallo ocurra e inmediatamente después de la falla solamente si la corriente en el generador antes de la falla es I_L . Por otra parte, E_g en serie con la reactancia sincrónica X_s es el circuito equivalente de la máquina para cualquier carga en condiciones estacionarias. Para un valor diferente de I_L en el circuito de la fig. 11.7 debe ser el mismo, pero se requiere un nuevo valor para E_g'' .

Los motores síncronos tienen reactancia del mismo tipo que los alternadores. Cuando se cortocircuita un motor, no recibe energía eléctrica de la línea, pero su campo permanece excitado y la inercia de su rotor y carga, unidas, mantiene la rotación durante un período indefinido. La tensión interna de un motor síncrono hace que contribuya con corriente al sistema, con lo que actúa realmente como alternador. Comparando con las fórmulas correspondientes para un alternador, la tensión de detrás de la reactancia subtransitoria y la tensión de detrás de la reactancia transitoria para un motor síncrono, se ve que tienen que venir dadas por las siguientes ecuaciones:

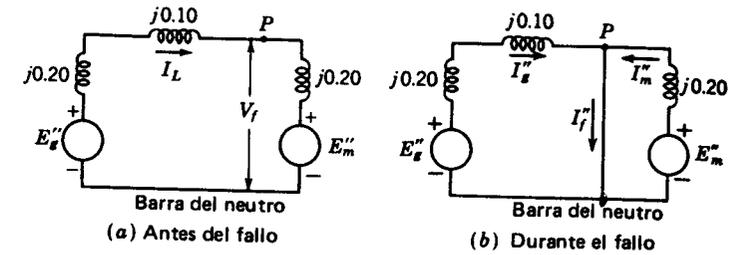


Fig. 11.8 Circuitos equivalentes para el ej. 11.2.

$$E_m'' = V_t - jI_L X_d'' \tag{11.8}$$

$$E_m' = V_t - jI_L X_d' \tag{11.9}$$

Los sistemas que tienen alternadores y motores en carga pueden resolverse por el teorema de Thévenin o utilizando las tensiones de detrás de las reactancias transitoria o subtransitoria, como puede verse en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 11.2 Un alternador y un motor síncrono tienen los valores nominales de 30 000 kVA y 13.2 kV, teniendo ambos reactancias subtransitorias del 20%. La línea que los une tiene una reactancia del 10% sobre la base de los valores nominales de las máquinas. El motor está tomando 20 000 kW con un factor de potencia de 0.8 (en adelante) y una tensión en sus terminales de 12.8 kV al producirse un fallo trifásico en los terminales de dicho motor. Determinar la corriente subtransitoria en el alternador, en el motor y en el fallo, utilizando las tensiones internas de las máquinas.

Solución Tomamos como base 30 000 kVA y 13.2 kV.

La fig. 11.8a representa el circuito equivalente del sistema descrito. Vemos que la fig. 11.8a es semejante a la fig. 11.7b y que antes del fallo, E_g'' y E_m'' pueden reemplazarse por E_g y E_m con las reactancias subtransientes reemplazadas por las reactancias sincrónicas. Sin embargo, para encontrar la corriente subtransiente necesitamos la representación de la fig. 11.8a.

Utilicemos la tensión en el fallo V_f como vector de referencia.

$$V_f = \frac{12.8}{13.2} = 0.97/0^\circ \text{ por unidad}$$

$$\text{Corriente base} = \frac{30.000 \text{ p}}{\sqrt{3} \times 13.2} = 1.312 \text{ A}$$

$$I_L = \frac{20,000}{0.8 \times \sqrt{3} \times 12.8} = 1.128/36.9^\circ \text{ A}$$

$$= \frac{1.128}{1.312} = 0.86/36.9^\circ \text{ por unidad}$$

$$I_L = 0.86(0.8 + j0.6) = 0.69 + j0.52 \text{ por unidad}$$

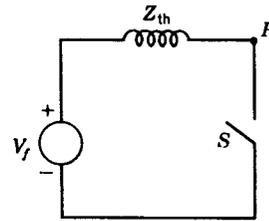


Fig. 11.9 Equivalente de Thévenin del circuito de la fig. 11.7b.

Para el generador,

$$\begin{aligned} V_t &= 0.970 + j0.1(0.69 + j0.52) \\ &= 0.970 + j0.069 - 0.052 = 0.918 + j0.069 \text{ por unidad} \\ E_g'' &= 0.918 + j0.069 + j0.2(0.69 + j0.52) \\ &= 0.918 + j0.069 + j0.138 - 0.104 = 0.814 + j0.207 \text{ por unidad} \\ I_g'' &= \frac{0.814 + j0.207}{j0.3} = 0.69 - j2.71 \text{ por unidad} \\ &= 1\,312(0.69 - j2.71) = 905 - j3\,550 \text{ A} \end{aligned}$$

Para el motor,

$$\begin{aligned} V_t &= V_f = 0.97/0^\circ \text{ por unidad} \\ E_m'' &= 0.97 + j0 - j0.2(0.69 + j0.52) = 0.97 - j0.138 + 0.104 \\ &= 1.074 - j0.138 \text{ por unidad} \\ I_m'' &= \frac{1.074 - j0.138}{j0.2} = -0.69 - j5.37 \text{ por unidad} \\ &= 1\,312(-0.69 - j5.37) = -905 - j7\,050 \text{ A} \end{aligned}$$

En el fallo,

$$\begin{aligned} I_f'' &= I_g'' + I_m'' = 0.69 - j2.71 - 0.69 - j5.37 = -j8.08 \text{ por unidad} \\ &= -j8.08 \times 1\,312 = -j10\,600 \text{ A} \end{aligned}$$

En la fig. 11.8b se han marcado los sentidos de I_g'' , I_m'' e I_f'' .

La corriente subtransitoria en el fallo puede encontrarse por medio del teorema de Thévenin, que se aplica a circuitos lineales bilaterales. Cuando se usan valores constantes para las máquinas síncronas, se asume la linealidad. Cuando el teorema se aplica al circuito de la fig. 11.7b, el circuito equivalente es un solo generador y una sola impedancia terminando en el punto de aplicación del fallo. El nuevo generador tiene una tensión interna igual a V_f , tensión en el punto del fallo antes de que este ocurra. La impedancia es aquella que se mide en el punto de aplicación del fallo mirando el circuito hacia atrás con todas las tensiones generadas en cortocircuito. Las reactancias subtransitorias deben usarse si se desea la corriente inicial. La fig. 11.9 es el equivalente Thévenin de la fig. 11.7b.

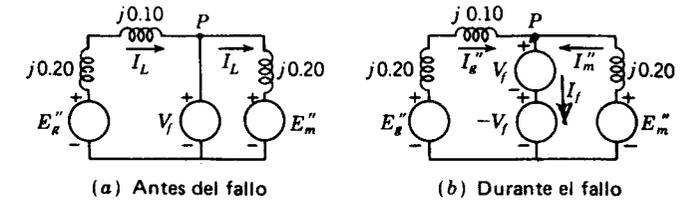


Fig. 11.10 Circuitos que ilustran la aplicación del teorema de superposición a la determinación de la proporción de la corriente de fallo en cada rama del sistema.

La impedancia Z_{th} es igual a $(Z_{ext} + jX_d'')Z_L / (Z_L + Z_{ext} + jX_d'')$. Al presentarse un cortocircuito trifásico en P , el cual es simulado con el cierre de S , la corriente subtransitoria en el fallo es

$$I'' = \frac{V_f}{Z_{th}} = \frac{V_f(Z_L + Z_{ext} + jX_d'')}{Z_L(Z_{ext} + jX_d'')} \quad (11.10)$$

EJEMPLO 11.3 Resolver el ej. 11.2, utilizando el teorema de Thévenin.

Solución

$$Z_{th} = \frac{j0.3 \times j0.2}{j0.3 + j0.2} = j0.12 \text{ por unidad}$$

$$V_f = 0.97/0^\circ \text{ por unidad}$$

En el fallo,

$$I_f'' = \frac{0.97 + j0}{j0.12} = -j8.08 \text{ por unidad}$$

La corriente anterior, determinada por aplicación del teorema de Thévenin es la que sale del circuito en el fallo, al reducirse a cero la tensión en tal punto. Si esta corriente originada por el fallo se divide entre los circuitos paralelos de los generadores inversamente a sus impedancias, los valores resultantes son las corrientes de cada máquina, debidas exclusivamente al cambio de la tensión en el punto de fallo. A las corrientes de fallo así atribuidas a cada máquina hay que añadir la corriente que circula en cada una antes del fallo para, así, obtener las corrientes totales en las máquinas después del fallo. El teorema de superposición proporciona la razón de esta adición de la corriente antes del fallo a la calculada por el teorema de Thévenin. La fig. 11.10a representa un generador con una tensión V_f conectado al fallo e igual a la tensión en el fallo antes de que éste se produzca. Este generador no ejerce efecto sobre la corriente que circula antes del fallo, y el circuito corresponde al de la fig. 11.8a. Si se añade, en serie con V_f otro generador con una f.e.m. del mismo valor absoluto, pero con un desfase de 180° respecto a V_f , se obtiene el circuito de la fig. 11.10b, que corresponde al de la fig. 11.8b. El principio de superposición aplicado cortocircuitando primero E_g'' , E_m'' y V_f , da las corrientes determinadas distribuyendo

las corrientes de fallo entre los dos generadores inversamente a las impedancias de sus circuitos. Cortocircuitando después el generador restante, $-V_f$ con E_g'', E_m'' y V_f en el circuito, se tiene la corriente que circula antes del fallo. Sumando los dos valores de corriente en cada rama se obtiene la corriente en la rama después del fallo. Aplicando el principio anterior al ejemplo que nos ocupa, tendremos:

$$\text{Corriente de fallo del generador} = -j8.08 \times \frac{j0.2}{j0.5} = -j3.23 \text{ por unidad}$$

$$\text{Corriente de fallo del motor} = -j8.08 \times \frac{j0.3}{j0.5} = -j4.85 \text{ por unidad}$$

A estas corrientes hay que añadir la corriente anterior al fallo I_L para obtener las corrientes subtransitorias totales en las máquinas:

$$I_o'' = 0.69 + j0.52 - j3.23 = 0.69 - j2.71 \text{ por unidad}$$

$$I_m'' = -0.69 - j0.52 - j4.85 = -0.69 - j5.37 \text{ por unidad}$$

Nótese que I_L tiene el mismo sentido que I_g'' pero opuesto a I_m'' .

Como en el ej. 11.2,

$$I_o'' = 905 - j3\ 550 \text{ A}$$

$$I_m'' = -905 - j7\ 050 \text{ A}$$

$$I_f'' = -j10\ 600 \text{ A}$$

Normalmente, al determinar la corriente en cada línea al ocurrir el fallo, se omite la corriente de carga. En el método de Thévenin el desprestigiar la corriente de carga significa que la corriente anterior al fallo en cada línea no se suma a la componente de la corriente que circula hacia el fallo desde la línea. El método del ej. 11.2 desprestia la corriente de carga si las tensiones de detrás de la reactancia subtransitoria de todas las máquinas se suponen iguales a la tensión V_f en el fallo antes de que éste ocurra, puesto que éste es el caso si no circulan corrientes en ninguna parte de la red antes del fallo.

Desprestigiar la corriente de carga en el ej. 11.3, tenemos

$$\text{Corriente de fallo del generador} = 3.23 \times 1\ 312 = 4\ 240 \text{ A}$$

$$\text{Corriente de fallo del motor} = 4.85 \times 1\ 312 = 6\ 360 \text{ A}$$

$$\text{Corriente en el fallo} = 8.08 \times 1\ 312 = 10\ 600 \text{ A}$$

La corriente de fallo total es la misma prescindiendo de si se considera o no la corriente de carga, pero difiere la contribución de las líneas. Cuando se incluye la corriente de carga, obtenemos del ej. 11.2

$$\text{Corriente de falla del generador} = |905 - j3\ 550| = 3\ 660 \text{ A}$$

$$\text{Corriente de falla del motor} = |-905 - j7\ 050| = 7\ 200 \text{ A}$$

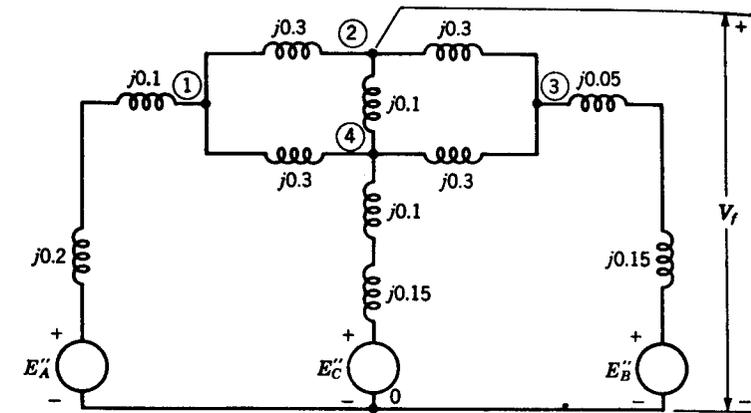


Fig. 11.11 Diagrama de reactancias obtenido de la fig. 7.4 al sustituir las reactancias subtransientes por las sincrónicas de las máquinas y los voltajes detrás de las reactancias subtransientes por voltajes generados sin carga. Los valores de las reactancias se dan en por unidad.

La suma aritmética de las magnitudes de las corrientes de generador y motor no son iguales a la corriente del fallo porque las corrientes del generador y del motor no están en fase.

11.4 MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE BARRA EN LOS CÁLCULOS DE FALLOS

Nuestro estudio de cálculos de fallos se ha limitado a circuitos simples, pero ahora extendemos nuestro estudio a circuitos generales. Sin embargo, vamos a proceder hasta las ecuaciones generales comenzando con un circuito específico con el cual ya estamos familiarizados. Si cambiamos en el circuito de la fig. 7.4 la reactancia en serie con el voltaje generado a reactancias subtransientes, y si la tensión generada la hacemos tensión detrás de la reactancia subtransiente, tenemos el circuito que aparece en la fig. 11.11. Si este circuito es el equivalente monofásico de un sistema trifásico y elegimos para estudio un fallo en la barra 2, podemos seguir el procedimiento de la sec. 11.3 y llamar V_f a la tensión en la barra 2 antes de que el fallo ocurra.

Un fallo trifásico en la barra 2 se representa con el circuito de la fig. 11.12 donde las tensiones generadas V_f y $-V_f$ en serie constituyen un cortocircuito. La tensión V_f generada por sí sola en esta rama no causará corriente en la rama. Con V_f y $-V_f$ en serie la rama es un cortocircuito, y la corriente en la rama es I_f'' . Se han marcado admitancias en vez de impedancias en valores por unidad sobre este diagrama. Si E_A'', E_B'', E_C'' y V_f están en cortocircuito, los voltajes y corrientes se deben solamente a $-V_f$. Entonces la única corriente que entra a un nodo desde una fuente es la de $-V_f$ y es $-I_f''$ en el nodo 2 (I_f'' desde el nodo 2) y no hay corriente en esta rama hasta la inserción de $-V_f$. Las ecuaciones de nodos en forma de matriz para el circuito y con $-V_f$ como única fuente son:

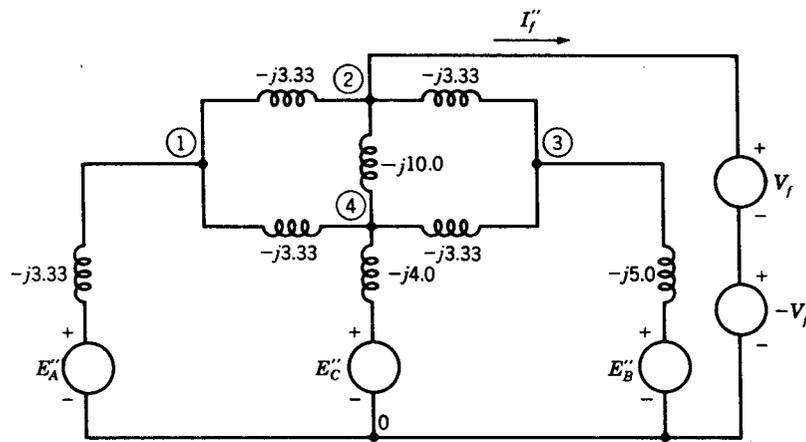


Fig. 11.12 Circuito de la fig. 11.11 con admitancias en por unidad y fallo trifásico en la barra 2 del sistema simulado por V_f y $-V_f$ en serie.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -I_f'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = j \begin{bmatrix} -10.0 & 3.33 & 0.0 & 3.33 \\ 3.33 & -16.67 & 3.33 & 10.0 \\ 0.0 & 3.33 & -11.67 & 3.33 \\ 3.33 & 10.0 & 3.33 & -20.67 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ -V_f \\ V_3^\Delta \\ V_4^\Delta \end{bmatrix} \quad (11.11)$$

donde el superíndice Δ indica que los voltajes se deben solamente a $-V_f$. El signo Δ se ha elegido para indicar el cambio en tensión debido al fallo. Invertiendo la matriz de admitancia de la barra correspondiente al circuito de la fig. 11.12 obtenemos la matriz de impedancia de la barra. Las tensiones de barra debidas a $-V_f$ están dadas por

$$\begin{bmatrix} V_1^\Delta \\ -V_f \\ V_3^\Delta \\ V_4^\Delta \end{bmatrix} = Z_{\text{barra}} \begin{bmatrix} 0 \\ -I_f'' \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.12)$$

y así

$$I_f'' = \frac{V_f}{Z_{22}} \quad (11.13)$$

y

$$V_1^\Delta = -I_f'' Z_{12} = \frac{-Z_{12}}{Z_{22}} V_f$$

$$V_3^\Delta = \frac{-Z_{32}}{Z_{22}} V_f \quad V_4^\Delta = \frac{-Z_{42}}{Z_{22}} V_f \quad (11.14)$$

Cuando la tensión del generador $-V_f$ entra en cortocircuito en el circuito de la fig. 11.12 y E_A'' , E_B'' , E_C'' , y V_f están en el circuito, las corrientes y voltajes en todas las partes del mismo son las que existían antes del fallo. Por el principio de superposición esas tensiones pre-fallo se suman a las dadas por las ecs. (11.14) encontrando las tensiones existentes después del fallo. Generalmente se supone que el circuito de fallos ha estado sin carga antes del fallo. En tal caso, ninguna corriente fluye antes del fallo y todas las tensiones a través de todo el circuito son las mismas e iguales a V_f . Suponiendo esto, nuestro trabajo se simplifica considerablemente, y aplicando el principio de superposición tenemos:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_f + V_1^\Delta = V_f - I_f'' Z_{12} \\ V_2 &= V_f - V_f = 0 \\ V_3 &= V_f + V_3^\Delta = V_f - I_f'' Z_{32} \\ V_4 &= V_f + V_4^\Delta = V_f - I_f'' Z_{42} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Estos voltajes existen cuando fluyen corrientes subtransientes y Z_{barra} se forma un circuito que tiene valores subtransientes para las reactancias del generador.

En términos generales para un fallo sobre una barra K , e ignorando las corrientes de pre-fallo

$$I_f = \frac{V_f}{Z_{kk}} \quad (11.16)$$

y la tensión post-fallo en la barra n es:

$$V_n = V_f - \frac{Z_{nk}}{Z_{kk}} V_f \quad (11.17)$$

Utilizando los valores numéricos de la ec. (11.11) invertimos la matriz, cuadrada Y_{barra} de esa ecuación y encontramos.

$$Z_{\text{barra}} = j \begin{bmatrix} 0.1502 & 0.0807 & 0.0431 & 0.0702 \\ 0.0807 & 0.1471 & 0.0692 & 0.0953 \\ 0.0431 & 0.0692 & 0.1226 & 0.0602 \\ 0.0702 & 0.0953 & 0.0602 & 0.1155 \end{bmatrix} \quad (11.18)$$

Por lo común V_f se supone como $1.0/0^\circ$ por unidad, y con esta hipótesis para nuestro circuito de fallos.

$$I_f'' = \frac{1}{j0.1471} = -j6.80 \text{ por unidad}$$

$$V_1 = 1 - \frac{j0.0807}{j0.1471} = 1 - 0.549 = 0.451 \text{ por unidad}$$

$$V_3 = 1 - \frac{j0.0692}{j0.1471} = 1 - 0.470 = 0.530 \text{ por unidad}$$

$$V_4 = 1 - \frac{j0.0953}{j0.1471} = 1 - 0.648 = 0.352 \text{ por unidad}$$

Las corrientes en cualquier parte del circuito se pueden deducir de los voltajes e impedancias. Por ejemplo, la corriente de fallo en la rama que conecta los nodos 1 y 4 fluyendo hacia el nodo 4 es:

$$I_{1-4}^j = \frac{V_1 - V_4}{j0.3} = \frac{0.451 - 0.352}{j0.3} = \frac{0.099}{j0.3} = -j0.330 \text{ por unidad}$$

La corriente desde el generador conectado al nodo 1 es:

$$I_A'' = \frac{E_A'' - V_1}{j0.3} = \frac{1 - 0.451}{j0.3} = \frac{0.549}{j0.3} = -j1.83 \text{ por unidad}$$

Otras corrientes pueden hallarse de forma semejante, y las tensiones y corrientes de fallo sobre cualquier barra se calculan fácilmente a partir de la matriz de impedancias.

11.5 CIRCUITO EQUIVALENTE DE LA MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE BARRA

Aunque no podemos establecer un circuito físicamente realizable empleando las impedancias del circuito de impedancias de la barra, podemos dibujar un circuito con impedancias mutuas *indicadas* entre ramas. Un diagrama como tal será de gran ayuda para entender el significado de las ecuaciones desarrolladas en la sec. 11.4.

En la fig. 11.13 se han dibujado corchetes entre la rama 2 y las otras tres ramas de un circuito que tiene cuatro nodos además del nodo de referencia.¹ Asociados con estos corchetes están los símbolos Z_{12} , Z_{32} y Z_{42} , los cuales identifican las impedancias mutuas del nodo 2 de la matriz de impedancias de barra. Las impedancias propias de la matriz de impedancias de barra son Z_{11} , Z_{22} , Z_{33} , y Z_{44} . Ninguna rama tiene flujo de corriente

¹ Esta red equivalente se dibuja en la forma adoptada por J. R. Nevenswander, "Modern Power Systems", Intext Educational Publishers, Nueva York, 1971, donde se refiere a la red equivalente de la matriz de impedancias de barra como el *equivalente de rastrillo*.

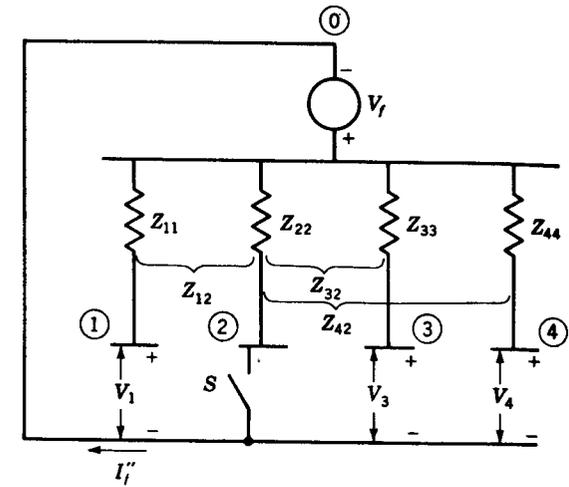


Fig. 11.13 Red equivalente a la matriz de impedancias de barra con cuatro nodos independientes. Al cerrar el interruptor S se simula un fallo en el nodo 2. Solamente se indican las admitancias mutuas para el nodo 2.

cuando el interruptor S está abierto. Cuando S se cierra, la corriente fluye solamente hacia el nodo 2. Interpretaremos los corchetes para significar que la corriente I_f'' hacia el nodo 2 en el circuito induce caídas de tensión de $I_f'' Z_{12}$, $I_f'' Z_{32}$ y $I_f'' Z_{42}$ en las ramas conectadas a los nodos 1, 3, y 4 respectivamente. Estas caídas de tensión están en la dirección de los nodos respectivos.

Si en el circuito de la fig. 11.13 se abre el interruptor S , todos los nodos estarán en la tensión V_f , como en la fig. 11.11 si E_A'' , E_B'' , y E_C'' son iguales a V_f . Si S está abierto, un examen del circuito muestra que las tensiones, en los cuatro nodos con respecto al nodo 0 de referencia, están a los valores especificados por las ecs. (11.15). Por tanto, si interpretamos las impedancias mutuas indicadas para este circuito como se describen anteriormente, el circuito es el equivalente al de la fig. 11.11 con el interruptor S abierto y el de la fig. 11.12 con S cerrado, aun despreciando la corriente pre-fallo.

Claro está que podemos simular cortocircuitos en las otras barras de una forma similar y extender la aproximación a un circuito general con cualquier número de nodos. Se puede indicar las otras impedancias mutuas del circuito equivalente por medio de corchetes adicionales y no hacerlo tan solo para una, pero se presentan confusiones al tener tantos corchetes para indicar las impedancias mutuas. De hecho, por lo general omitiremos los corchetes cuando dibujemos el circuito para la matriz de impedancias de barra, pero tenemos que darnos cuenta de que la impedancia mutua existe y debe considerarse al interpretar el circuito.

EJEMPLO 11.4 Determina la matriz de impedancias de barra para el circuito del ej. 8.1 para el cual los resultados de un estudio de flujo de cargas se indican en la fig. 8.2. Incluya las reactancias subtransientes de los generadores. Encuentre la corriente subtransiente en

una falla trifásica en la barra 2 y la corriente proveniente de la barra afectada sobre cada línea. La corriente pre-fallo se ignora y todas las tensiones se suponen 1.0 antes de que el fallo ocurra. Los generadores en las barras 1 y 3 tienen valores nominales de 75 y 125 MVA, respectivamente. La reactancia subtransiente de cada generador basada en su propio valor nominal es 0.15 por unidad. La base del sistema es 100 MVA. Ignore todas las resistencias.

Solución Las reactancias subtransientes del generador convertidas a la base de 100 MVA son

$$\text{Generador en barra 1: } X_d'' = 0.15 \times \frac{100}{75} = 0.20 \text{ por unidad}$$

$$\text{Generador en barra 3: } X_d'' = 0.15 \times \frac{100}{125} = 0.12 \text{ por unidad}$$

La red con las admitancias indicadas en por unidad se muestra en la fig. 11.14, para el cual la matriz de nodos de admitancia es

$$Y_{\text{barra}} = j \begin{bmatrix} -14.17 & 2.5 & 0.0 & 1.67 & 5.0 \\ 2.5 & -10.0 & 5.0 & 2.5 & 0.0 \\ 0.0 & 5.0 & -18.33 & 0.0 & 5.0 \\ 1.67 & 2.5 & 0.0 & -4.17 & 0.0 \\ 5.0 & 0.0 & 5.0 & 0.0 & -10.0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz de 5×5 se invierte en un computador digital para encontrar la matriz de cortocircuito

$$Z_{\text{barra}} = j \begin{bmatrix} 0.1258 & 0.0780 & 0.0445 & 0.0972 & 0.0852 \\ 0.0780 & 0.1928 & 0.0732 & 0.1468 & 0.0756 \\ 0.0445 & 0.0732 & 0.0933 & 0.0617 & 0.0689 \\ 0.0972 & 0.1468 & 0.0617 & 0.3668 & 0.0794 \\ 0.0852 & 0.0756 & 0.0689 & 0.0794 & 0.1770 \end{bmatrix}$$

La visualización de un circuito como el de la fig. 11.13 nos ayuda a encontrar las corrientes y tensiones deseadas.

La corriente subtransiente en una falla trifásica sobre la barra 2 es

$$I'' = \frac{1.0}{j0.1928} = -j5.187 \text{ por unidad}$$

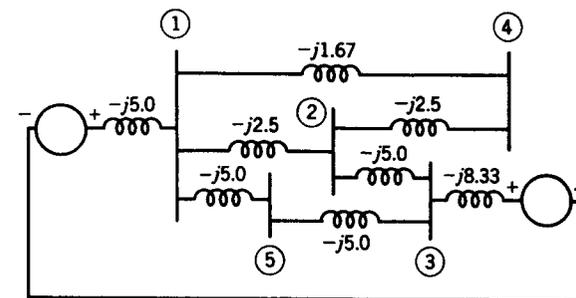


Fig. 11.14 Diagrama de reactancias para el ej. 11.4.

en las barras 1, 3 y 4 las tensiones en por unidad son

$$V_1 = 1.0 - (-j5.187)(j0.0780) = 0.595 \text{ por unidad}$$

$$V_3 = 1.0 - (-j5.187)(j0.0732) = 0.620 \text{ por unidad}$$

$$V_4 = 1.0 - (-j5.187)(j0.1468) = 0.239 \text{ por unidad}$$

las corrientes hacia la falla en por unidad son:

$$\text{Desde la barra 1: } 0.595(-j2.5) = -j1.488$$

$$\text{Desde la barra 3: } 0.620(-j5.0) = -j3.100$$

$$\text{Desde la barra 4: } 0.239(-j2.5) = -j0.598$$

$$\underline{\underline{-j5.186 \text{ por unidad}}}$$

De la misma matriz de corto circuito podemos encontrar información similar para las fallas sobre cualquiera de las otras barras.

11.6 SELECCIÓN DE INTERRUPTORES

La corriente subtransiente a la cual hemos dedicado mucho de nuestra atención es la corriente inicial simétrica y no incluye la componente c.c. Como hemos visto, la inclusión de la componente c.c. resulta de un valor de corriente eficaz inmediatamente después del fallo, el cual es mayor que la corriente subtransiente. Para interruptores en aceite por encima de 5 KV la corriente subtransiente multiplicada por 1.6 se considera como el valor eficaz de la corriente que hace saltar el interruptor y que debe soportar durante el primer ciclo después que el fallo ocurre. Esta corriente se denomina *corriente momentánea*, y por muchos años los interruptores se especificaron por su corriente momentánea como cualquier otro criterio.¹

¹ Véase G. N. Lester, High Voltage Circuit Breaker Standards in The USA: Past, Present, and Future, *Trans. IEEE Power Appar. Syst.*, vol 93, págs. 590-600, 1974.

Los valores de un interruptor se especificaban en kVA o MVA. Los kVA de interrupción son iguales a $\sqrt{3}$ veces los kV de la barra a los cuales el interruptor está conectado por la corriente que el interruptor debe ser capaz de manejar cuando sus contactos se reparan. Esta corriente es, por supuesto, menos que la corriente momentánea y depende de la velocidad del interruptor tal como 8.5; 3 ó $1\frac{1}{2}$ ciclos, lo cual es una medida del tiempo desde que ocurre el fallo hasta que se extingue el arco.

Se han realizado varios estudios sobre características y aplicaciones de los interruptores. La corriente que un interruptor debe suspender es generalmente asimétrica, pues todavía contiene alguna componente c.c. decayente. El plan de especificaciones preferidas para un interruptor c. a. de alto voltaje en aceite establece los valores nominales de la corriente de interrupción de los interruptores en términos de la componente de la corriente asimétrica, la cual es simétrica alrededor del eje cero². Esta corriente apropiadamente se llama *capacidad requerida de interrupción simétrica* o simplemente *corriente nominal simétrica de corto circuito*.

A menudo se omite el adjetivo simétrica. Los nuevos planes de especificaciones están de acuerdo con la base de corriente simétrica de las especificaciones de los interruptores S , comparados con el plan de especificación anterior el cual tiene en cuenta la corriente total (incluye la porción c. c.). La principal diferencia es que en muchos casos el nuevo método de especificación asegura que el interruptor seleccionado sobre la base de corriente simétrica a interrumpirse es capaz de interrumpir la corriente asimétrica existente y de resistir la corriente momentánea.

Los interruptores se identifican por la clase de voltaje nominal tal como 69 kV. Entre otros factores especificados están la corriente continua nominal, el voltaje máximo nominal, el factor de intervalo de voltaje K y la corriente de cortocircuito nominal a un máximo de kilovatios establecidos; K determina el intervalo de voltajes, sobre el cual es constante la corriente de cortocircuito nominal por el voltaje de operación. Para un interruptor de 69 kV que tiene un máximo especificado de 72.5 kV, un factor K de intervalo de voltaje de 1.21 y una corriente continua nominal de 1 200 A, la corriente nominal de corto circuito a voltaje máximo (corriente simétrica, que puede ser interrumpida a 72.5 kV) es 19 000 A. Esto significa que el producto $72.5 \times 19\ 000$ es el valor constante de la corriente nominal de cortocircuito por el voltaje de operación en el intervalo de 72.5 a 60 kV puesto que $72.5/1.25 = 60$. La corriente nominal de cortocircuito a 60 kV es $19\ 000 \times 1.21$ ó 23 000 A. A menores tensiones de operación esta corriente de cortocircuito no debe excederse. A 69 kV la corriente nominal de cortocircuito es

$$\frac{72.5}{69} \times 19\ 000 = 20\ 000\ \text{A}$$

Interruptores del tipo de 115 kV y mayores tienen un K de 1.0.

Un procedimiento simplificado para calcular la corriente simétrica de corto circuito,

² Véase Schedules of Preferred Ratings and Related Required Capabilities for A-C High-Voltage Circuit Breakers Rated on a Symmetrical Current Basis, ANSI C37.06-1971, American National Standards Institute, Nueva York.

es el llamado *método E/X* ¹, obviando todas las resistencias, todas las cargas estáticas y todas las corrientes de pre-falla. La reactancia subtransiente se usa para los generadores en el método E/X , y para motores sincrónicos la reactancia recomendada es X''_d del motor por 1.5 lo que es aproximadamente el valor de la reactancia transiente del motor. Los motores de inducción por debajo de 50 C. V. no se consideran, y varios factores de multiplicación se aplican a X''_d de grandes motores de inducción dependiendo de su tamaño. Si no hay motores presentes, la corriente simétrica de corto circuito es igual a la corriente subtransiente.

La impedancia por la cual debe dividirse el voltaje V_f para encontrar la corriente de corto circuito debe examinarse cuando se usa el método E/X . En la especificación de un interruptor para una barra K esta impedancia Z_{kk} de la matriz de impedancias de barra con las reactancias de máquina adecuadas donde la corriente de corto circuito está indicada por la ec. (11.6). Si la razón X/R de esta impedancia es 15 ó menos, un interruptor de tensión y kVA correctos puede usarse si la especificación de la corriente de interrupción iguala o excede la corriente calculada. Si la razón X/R no se conoce, la corriente calculada no debe ser mayor al 80% del valor permitido para el interruptor en la barra de tensión existente. La guía de aplicación de la ANSI establece un método para c. a. y c. c. que tiene en cuenta las constantes de tiempo para el decaimiento de la amplitud de corriente si la razón X/R pasa de 15. El método correcto también considera la velocidad del interruptor.

Este estudio de la selección de los interruptores se presenta no como un estudio de la aplicación de interruptores sino como una manera de indicar la importancia de entender los cálculos de los fallos. El siguiente ejemplo debe clarificar el principio.

EJEMPLO 11.5 Un generador de 25 000 kVA a 13.8 kV, con $X''_d = 15\%$ está conectado a través de un transformador que alimenta cuatro motores idénticos, como se representa en la fig. 11.15. Cada motor tiene $X''_d = 20\%$ y $X'_d = 30\%$ sobre una base de 5 000 kVA y 6.9 kV. Los valores trifásicos de régimen del transformador son 25 000 kVA, 13.8-6.9 kV, con una reactancia de dispersión del 10%. La tensión en la barra de los motores es de 6.9 kV al producirse un fallo trifásico en el punto P . Para el fallo especificado determine (a) la corriente subtransiente en el fallo, (b) la corriente subtransiente en el interruptor A , y (c) la corriente simétrica de cortocircuito (como se define para aplicaciones de interruptores) en el fallo en el interruptor A .

Solución (a) Para una base de 25 000 kVA, 13.8 kV en el circuito del generador, los valores base para los motores son 25 000 kVA, 6.9 kV. La reactancia subtransiente de cada motor es

$$X''_d = 0.20 \frac{25\ 000}{5\ 000} = 1.0 \text{ por unidad}$$

¹ Véase Application Guide for A-C High-Voltage Circuit Breaker Rated on a Symmetrical Current Basis, ANSI C37.010-1972, American National Standards Institute, Nueva York. Esta publicación también está en IEEE Std. 320-1972.

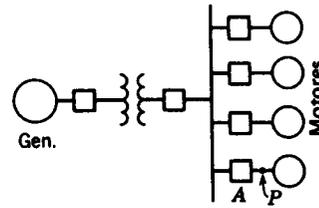


Fig. 11.15 Diagrama unifilar para el ej. 11.5.

La fig. 11.16, es el diagrama de valores subtransitorios de las reactancias.

Para un fallo en P,

$$V_f = 1.0 \text{ por unidad}$$

$$Z_{th} = j0.125 \text{ por unidad}$$

$$I_f'' = \frac{1.0}{j0.125} = -j8.0 \text{ por unidad}$$

La corriente básica en el circuito a 6.9-kV, es

$$\frac{25\,000}{\sqrt{3} \times 6.9} = 2\,090 \text{ A}$$

$$I_f'' = 8 \times 2\,090 = 16\,720 \text{ A}$$

(b) A través del disyuntor A pasa la contribución del generador y tres de los cuatro motores.

El generador contribuye con una corriente de

$$-j8.0 \times \frac{0.25}{0.50} = -j4.0 \text{ por unidad}$$

Cada motor aporta el 25% de la restante corriente de fallo o $-j1.0$ A por unidad. A través del interruptor A,

$$I'' = -j4.0 + 3(-j1.0) = -j7.0 \text{ por unidad} = 7 \times 2\,090 = 14\,630 \text{ A}$$

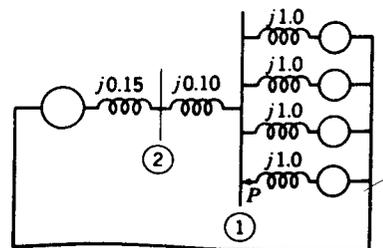


Fig. 11.16 Diagrama de reactancias para el ej. 11.5.

(c) Para calcular la corriente a interrumpir, hay que reemplazar la reactancia subtransitoria de $j1.0$ por la transitoria de $j1.5$ en los circuitos de los motores en la fig. 11.16. Entonces,

$$Z_{th} = j \frac{0.375 \times 0.25}{0.375 + 0.25} = j0.15 \text{ por unidad}$$

El generador aporta una corriente de

$$\frac{1.0}{j0.15} \times \frac{0.375}{0.625} = -j4.0 \text{ por unidad}$$

Cada motor aporta una corriente

$$\frac{1}{4} \times \frac{1.0}{j0.15} \times \frac{0.25}{0.625} = -j0.67 \text{ por unidad}$$

La corriente simétrica de corto circuito que debe ser interrumpida es

$$(4.0 + 3 \times 0.67) \times 2\,090 = 12\,560 \text{ A}$$

El procedimiento común es referir todos los interruptores conectados a una barra sobre una base de corriente en una falla sobre la barra. En tal caso, las especificaciones de interrupción para la corriente de cortocircuito de los interruptores conectados a la barra de 6.9 kV debe ser al menos

$$4 + 4 \times 0.67 = 6.67 \text{ por unidad}$$

ó

$$6.67 \times 2\,090 = 13\,940 \text{ A}$$

Un interruptor de 14.4 kV tiene un voltaje nominal máximo de 15.5 kV y un K de 2.67. A 15.5 kV su corriente nominal de interrupción de cortocircuito es de $2.67 \times 8\,900 = 23\,760$ A, a una tensión de $15.5/2.67 = 5.8$ kV. Esta corriente es la máxima que puede interrumpirse aun considerando que el interruptor puede estar en un circuito de menor tensión. La especificación para interrupción de corriente de cortocircuito a 6.9 kV es

$$\frac{15.5}{6.9} \times 8\,900 = 20\,000 \text{ A}$$

La capacidad requerida de 13 940 A está por debajo del 80% de 20 000 A y el interruptor es apropiado con respecto a la corriente de cortocircuito.

La corriente de cortocircuito se puede encontrar usando la matriz de impedancias de barra. Para este propósito se han identificado dos nodos en la fig. 11.16. El nodo 1 es la barra en el lado de baja tensión del transformador, y el nodo 2 está en el lado de alta tensión. Para una reactancia del motor de 1.5 por unidad.

$$Y_{11} = -j10 + \frac{1}{j1.5/4} = -j12.67$$

$$Y_{12} = j10$$

$$Y_{22} = -j10 - j6.67 = -j16.67$$

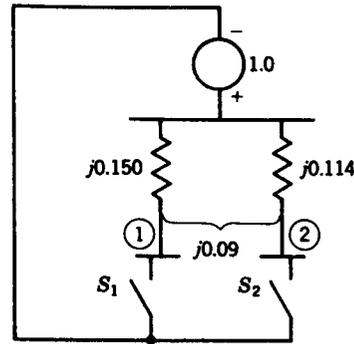


Fig. 11.17 Red equivalente a la impedancia de barra para la matriz de impedancias de barra del ej. 11.5.

La matriz nodal de admitancia es

$$Y_{\text{barra}} = j \begin{bmatrix} -12.67 & 10.0 \\ 10.0 & -16.67 \end{bmatrix}$$

y su inversa es

$$Z_{\text{barra}} = j \begin{bmatrix} 0.150 & 0.090 \\ 0.090 & 0.114 \end{bmatrix}$$

La fig. 11.17 es el circuito correspondiente a la matriz de impedancias de barra. Cerrando S_1 con S_2 abierto se representa un fallo sobre la barra 1.

La corriente simétrica de interrupción de cortocircuito en un fallo trifásico sobre el nodo 1 es

$$I_{sc} = \frac{1.0}{j0.15} = -j6.67 \text{ por unidad}$$

lo cual concuerda con nuestros cálculos anteriores. La matriz de impedancias de barra también nos da la tensión en la barra 2 con una falla sobre la barra 1.

$$V_2 = 1.0 - I_{sc} Z_{21} = 1.0 - (-j6.67)(j0.09) = 0.4$$

y, puesto que la admitancia entre los nodos 1 y 2 es $-j10$, la corriente en el fallo desde el transformador es

$$(0.4 - 0.0)(-j10) = -j4.0 \text{ por unidad}$$

lo cual también está de acuerdo con el resultado anterior.

También conocemos inmediatamente la corriente de cortocircuito en un fallo trifásico en el nodo 2, que, refiriéndonos a la fig. 11.17 con S_1 abierto y S_2 cerrado es

$$I_{sc} = \frac{1.0}{j0.114} = -j8.77 \text{ por unidad}$$

Aun cuando este ejemplo es simple, ilustra el valor de la matriz de impedancias de barra donde los efectos de un fallo en un número de barra van a ser estudiados. La inversión de la matriz no es necesaria como se indica en la sec. 7.11; Z_{barra} puede generarse directamente por un computador.

PROBLEMAS

- 11.1 Una tensión alterna de 60 ciclos con un valor eficaz de 100 voltios se aplica a un circuito RL , cerrando un interruptor. La resistencia es de 10 ohmios y la inductancia de 0,1 henrios.
 - (a) Determinar el valor de la componente continua de la corriente al cerrar el interruptor si el valor instantáneo de la tensión es de 50 voltios en ese momento.
 - (b) ¿Cuál es el valor instantáneo de la tensión que producirá una componente continua máxima de corriente al cerrar el circuito?
 - (c) ¿Cuál es el valor instantáneo de la tensión que dará lugar a que no exista componente continua de corriente al cerrar el interruptor?
 - (d) Si el interruptor se cierra, cuando el valor instantáneo de la tensión es cero, determinar la corriente instantánea 0.5, 1.5 y 5.5 ciclos después.
- 11.2 Un generador conectado, a través de un disyuntor de 5 ciclos, a un transformador tiene como valores nominales 7 500 kVA y 6.9 kV con reactancias $X_d'' = 9\%$, $X_d' = 15\%$ y $X_d = 100\%$. Está funcionando sin carga y a la tensión nominal en el momento de producirse un cortocircuito trifásico entre el disyuntor y el transformador. Determinar: (a) la corriente permanente de cortocircuito en el disyuntor, (b) la corriente eficaz simétrica inicial en el disyuntor, (c) la componente continua máxima posible de la corriente de cortocircuito en el disyuntor.
- 11.3 El transformador trifásico conectado al generador descrito en el Prob. 11.2, tiene los valores nominales siguientes: 7 500 kVA, 6.9Δ-115Y kV, $X = 10\%$. Si se produce un cortocircuito trifásico en el lado de alta tensión del transformador a la tensión nominal y sin carga, determinar: (a) la corriente eficaz simétrica inicial en los arrollamientos de alta del transformador, (b) la corriente eficaz simétrica en la línea en el lado de baja tensión.
- 11.4 Un generador de 60 ciclos y potencia nominal de 625 kVA a 480 V, con $X_d'' = 0.08$ por unidad, suministra una carga puramente resistiva de 500 kW a 480 V. La carga está conectada directamente a los terminales del generador. Si se cortocircuitan simultáneamente las tres fases de la carga, determinar la corriente eficaz simétrica inicial en el generador en por unidad sobre una base de 625 kVA y 480 V.
- 11.5 Un generador se conecta a través de un transformador a un motor síncrono. Reducidas a la misma base, las reactancias subtransitorias, por unidad, del generador y el motor son 0.15 y 0.35 respectivamente, y la reactancia de pérdida del transformador es de 0.10 por unidad. En los terminales del motor se produce un fallo trifásico cuando la tensión en los terminales del generador es de 0.9 por unidad y la corriente de salida del generador es de 1.0 por unidad con un factor de potencia en adelanto de 0.8. Determinar la corriente subtransitoria, en por unidad, en el fallo, en el generador y en el motor. Utilizar la tensión terminal en el generador como vector de referencia y obtener la solución: (a) calculando las tensiones detrás de la reactancia subtransitoria en el generador y el motor, y (b) utilizando el teorema de Thévenin.

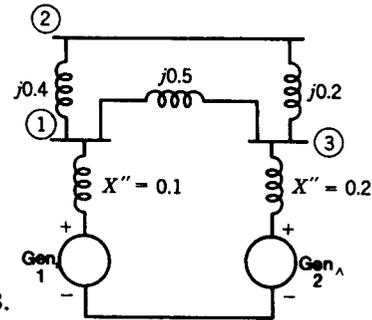


Fig. 11.18 Red para el Prob. 11.8.

- 11.6 Dos motores síncronos con reactancias subtransitorias de 0.80 y 0.25 por unidad, respectivamente, sobre una base de 480 V y 2.000 kVA se conectan a la barra de un sistema de energía. Esta barra está unida por una línea con una reactancia de 0.023 ohmios a la barra de un sistema. En la barra del sistema los MVA de cortocircuito son 9.6 para una tensión nominal de 480 V. Si la tensión en la barra del motor es de 440 V, despreciar la corriente de carga y determinar la corriente eficaz simétrica inicial en un fallo trifásico en la barra del motor.
- 11.7 La matriz de impedancias de barra para un circuito de cuatro barras con valores en por unidad es

$$Z_{\text{barra}} = j \begin{bmatrix} 0.15 & 0.08 & 0.04 & 0.07 \\ 0.08 & 0.15 & 0.06 & 0.09 \\ 0.04 & 0.06 & 0.13 & 0.05 \\ 0.07 & 0.09 & 0.05 & 0.12 \end{bmatrix}$$

Los generadores están conectados a las barras 1 y 2, y sus reactancias subtransientes estaban incluidas cuando se encontró Z_{barra} . Si la corriente pre-fallo se ignora, encuentre la corriente subtransiente en por unidad en el fallo para un fallo trifásico sobre la barra 4. Suponga que el voltaje en el fallo es 1.0 por unidad antes de que el fallo ocurra. Encuentre también la corriente por unidad desde el generador 2 cuya reactancia subtransiente es 0.2 por unidad.

- 11.8 Para el circuito que aparece en la fig. 11.18 encuentre la corriente subtransiente en por unidad desde el generador 1 y en la línea 1-2 y las tensiones en las barras 1 y 3 para una falla trifásica sobre la barra 2. Suponga que ninguna corriente fluye antes del fallo y que la tensión pre-fallo en la barra 2 es 1.0 por unidad. Use la matriz de impedancias de barra en los cálculos.
- 11.9 Si un fallo trifásico ocurre en la barra 3 del circuito de la fig. 11.11 cuando no hay carga (todas las tensiones de nodo a 1.0 por unidad), encuentre la corriente subtransiente en el fallo, las tensiones en las barras 1, 2, y 4, y la corriente desde el generador conectado a la barra 3.
- 11.10 Encuentre la corriente subtransiente en por unidad en un fallo trifásico sobre la barra 4 del circuito del ej. 8.1. Ignore la corriente pre-fallo, suponga que todas las tensiones de barra son 1.0 por unidad antes de que el fallo ocurra y utilice de los

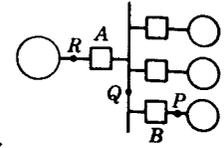


Fig. 11.19 Diagrama unifilar para el prob. 11.11.

cálculos ya hechos en el ej. 11.4. Encuentre también las corrientes en las líneas 1-4 y 2-4.

- 11.11 Un generador de 625 kVA a 2,4 kV con $X''_d = 0.08$ por unidad, se conecta a una barra a través de un disyuntor, como se muestra en la fig. 11.19. A la misma barra y por disyuntores se unen tres motores síncronos de 250 CV, 2,4 kV, 1.0 de factor de potencia, rendimiento 90% y $X''_d = 0.20$ por unidad. Los motores están funcionando a plena carga, factor de potencia unidad y tensión de régimen, con la carga equirepartida entre las máquinas.
- Dibujar el diagrama de impedancias, expresando éstas en por unidad sobre la base de 625 kVA y 2,4 kV.
 - Determinar la corriente eficaz simétrica inicial, por unidad, en el fallo y en los interruptores A y B para un fallo trifásico en el punto P. Simplificar los cálculos despreciando las corrientes anteriores al fallo.
 - Repetir (b) para fallo trifásico en el punto Q.
 - Repetir (b) para fallo trifásico en el punto R.
- 11.12 Un circuito disyuntor tiene un valor nominal de 34,5 kV y una corriente continua nominal de 1 500 A, tiene un factor de intervalo de voltaje K de 1.65. El máximo voltaje nominal es 38 kV, y la corriente nominal de ese voltaje es 22kA. Encuentre (a) el voltaje por debajo del cual la corriente de cortocircuito nominal no se incrementa cuando el voltaje de operación decrece, así como el valor de esa corriente y (b) la corriente nominal de cortocircuito a 34.5 kV.

12

COMPONENTES SIMÉTRICOS

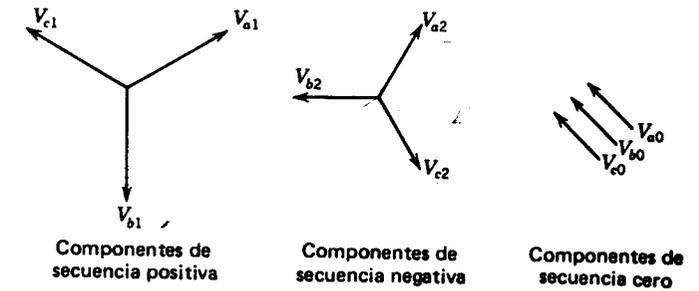


Fig. 12.1 Los tres conjuntos de vectores equilibrados que son los componentes simétricos de tres vectores desequilibrados.

de componentes son de igual longitud, siendo también iguales los ángulos formados por vectores adyacentes. Aunque el método es aplicable a cualquier sistema polifásico desequilibrado, limitaremos nuestro estudio a los sistemas trifásicos.

Según el teorema de Fortescue, tres vectores desequilibrados de un sistema trifásico pueden descomponerse en tres sistemas equilibrados de vectores. Los conjuntos equilibrados de componentes son:

- 1 Componentes de secuencia positiva, formados por tres vectores de igual módulo, con diferencias de fase de 120° y con la misma secuencia de fases que los vectores originales.
- 2 Componentes de secuencia negativa, formados por tres vectores de igual módulo, con diferencias de fases de 120° y con la secuencia de fases opuestas a la de los vectores originales.
- 3 Componentes de secuencia cero, formados por tres vectores de igual módulo y con una diferencia de fase nula.

Cuando se resuelve un problema por componentes simétricos, se acostumbra a designar las tres fases de un sistema por las letras a , b y c , de tal forma, que la secuencia de fases de las tensiones y corrientes en el sistema sea abc . Por tanto, la secuencia de fases de los componentes de secuencia positiva de los vectores desequilibrados, es abc y la de los componentes de secuencia negativa, acb . Si los vectores originales son tensiones, pueden designarse por V_a , V_b y V_c . Los tres conjuntos de componentes simétricos se designan con el subíndice adicional 1 para los componentes de secuencia positiva, 2 para los componentes de secuencia negativa y 0 para los componentes de secuencia cero. Los componentes de secuencia positiva de V_a , V_b y V_c , son V_{a1} , V_{b1} y V_{c1} . De igual forma, los componentes de secuencia negativa son V_{a2} , V_{b2} y V_{c2} y los de secuencia cero, V_{a0} , V_{b0} y V_{c0} . La fig. 12.1 muestra los tres conjuntos de componentes simétricos. Los vectores que representan corrientes, se representan por I con los mismos subíndices que las tensiones.

Como cada uno de los vectores desequilibrados originales es igual a la suma de sus componentes, los vectores originales expresados en función de sus componentes son

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} \quad (12.1)$$

$$V_b = V_{b1} + V_{b2} + V_{b0} \quad (12.2)$$

$$V_c = V_{c1} + V_{c2} + V_{c0} \quad (12.3)$$

En el año 1918 C. L. Fortescue, presentó en una reunión del "American Institute of Electrical Engineers", un trabajo que constituye una de las herramientas más poderosas para el estudio de los circuitos polifásicos desequilibrados¹. Desde entonces, el método de los componentes simétricos ha ido adquiriendo más importancia y ha sido el tema de numerosos artículos e investigaciones experimentales. Los fallos asimétricos en sistemas de transmisión, que pueden ser cortocircuitos, impedancia entre líneas, impedancia de una o dos líneas a tierra o conductores abiertos, se estudian por el método de los componentes simétricos.

12.1 SINTESIS DE VECTORES DESEQUILIBRADOS A PARTIR DE SUS COMPONENTES SIMÉTRICOS

El trabajo de Fortescue demuestra que un sistema desequilibrado de n vectores relacionados entre sí, puede descomponerse en n sistemas de vectores equilibrados denominados *componentes simétricos* de los vectores originales. Los n vectores de cada conjunto

¹ C. L. Fortescue, Method of Symmetrical Coordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks, *Trans. AIEE*, vol. 37, págs. 1027-1140, 1918.

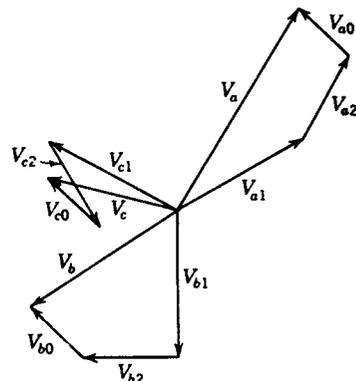


Fig. 12.2 Suma gráfica de los componentes representados en la fig. 12.1 para obtener tres vectores desequilibrados.

La síntesis de un conjunto de tres vectores desequilibrados a partir de los tres conjuntos de componentes simétricos de la fig. 12.1 se indican en la fig. 12.2.

El análisis de los sistemas de potencia por el método de los componentes simétricos presenta muchas ventajas, que se irán viendo gradualmente, a medida que vayamos aplicando dicho método al estudio de los fallos asimétricos en sistemas, por otra parte, simétricos. Aquí es suficiente que digamos que el método consiste en determinar los componentes simétricos de la corriente en el fallo. De esta forma, pueden encontrarse los valores de las corrientes y las tensiones en diversos puntos del sistema. El método es muy sencillo y permite predecir con gran exactitud el comportamiento del sistema.

12.2 OPERADORES

Es conveniente, por los desplazamientos de fase de los componentes simétricos de las tensiones y las corrientes en un sistema trifásico, disponer de un método taquigráfico para indicar la rotación de un vector 120°. El resultado de la multiplicación de dos números complejos, es igual al producto de sus módulos y a la suma de sus ángulos. Si el número complejo, que representa a un vector, se multiplica por un número complejo de módulo unidad y ángulo θ , el número complejo resultante representa a un vector igual al original, pero desplazado un ángulo θ .

El número complejo de módulo unidad y argumento θ es un operador que gira, al vector a que se aplica un ángulo θ .

Nos es ya familiar el operador j , que origina un giro de 90° y el operador -1 , que hace girar 180°. Dos aplicaciones sucesivas del operador j , dan lugar a un giro de 90° + 90°, lo que nos dice que, $j \times j$ equivale a una rotación de 180° y que, por tanto, j^2 es igual a -1 . En forma similar pueden hallarse las demás potencias de j .

La letra a se utiliza normalmente para designar al operador que origina una rotación de 120° en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj. Tal operador es un número complejo de módulo unidad y argumento de 120° y viene definido por las expresiones siguientes:

$$a = 1/120^\circ = 1e^{j2\pi/3} = -0.5 + j0.866$$

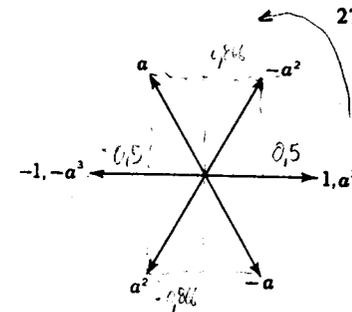


Fig. 12.3 Diagrama vectorial de las potencias del operador a .

Si se aplica a un vector el operador a dos veces consecutivas, el vector girará 240°. Tres aplicaciones sucesivas de a , girarán el vector 360°. Por tanto,

$$a^2 = 1/240^\circ = -0.5 - j0.866$$

$$a^3 = 1/360^\circ = 1/0^\circ = 1$$

La fig. 12.3 muestra los vectores que representan diversas potencias de a . En la tabla 12.1 se dan diversas combinaciones del operador a .

Es preciso hacer notar una importante diferencia entre los usos de los operadores j y a . El operador j es de módulo unidad a 90° y $-j$ significa que el número complejo j se cambia en un ángulo de 180° para dar un módulo unidad a 270°. Por tanto,

$$j = 1/90^\circ \quad \text{and} \quad -j = 1/270^\circ = 1/-90^\circ$$

De aquí que a veces se diga que $+j$ indica un giro de +90° y $-j$, de -90°. La afirmación es correcta, pero no puede aplicarse una afirmación similar al operador a , puesto que,

$$\text{pero} \quad a = 1/120^\circ \\ -a = 1/120^\circ \times 1/180^\circ = 1/300^\circ = 1/-60^\circ$$

Tabla 12.1 Funciones del operador a .

$a = 1/120^\circ = -0.5 + j0.866$
$a^2 = 1/240^\circ = -0.5 - j0.866$
$a^3 = 1/360^\circ = 1 + j0$
$a^4 = 1/120^\circ = -0.5 + j0.866 = a$
$1 + a = 1/60^\circ = 0.5 + j0.866 = -a^2$
$1 - a = \sqrt{3}/-30^\circ = 1.5 - j0.866$
$1 + a^2 = 1/-60^\circ = 0.5 - j0.866 = -a$
$1 - a^2 = \sqrt{3}/30^\circ = 1.5 + j0.866$
$a + a^2 = 1/180^\circ = -1 - j0$
$a - a^2 = \sqrt{3}/90^\circ = 0 + j1.732$
$1 + a + a^2 = 0 = 0 + j0$

Para aclarar esto, supongamos que el número complejo $p + jq$ es igual a $1/\theta^\circ$, operador que origina la rotación un ángulo positivo θ , siendo $\theta = \text{tg}^{-1}(q/p)$. Entonces, $p - jq$ es igual a $1/-\theta^\circ$, operador que origina la rotación en un ángulo negativo θ , siendo $\theta = \text{tg}^{-1}(q/p)$. Podemos, por consiguiente, establecer el hecho general de que dos números complejos de módulo unidad son operadores que originan la rotación en ángulos iguales y de sentido contrario, si dichos números complejos son conjugados entre sí.

12.3 COMPONENTES SIMÉTRICOS DE VECTORES ASIMÉTRICOS

Hemos visto (fig. 12.2), la síntesis de tres vectores asimétricos a partir de tres conjuntos de vectores simétricos. La síntesis se realizó de acuerdo con las ecs. (12.1) y (12.3). Examinemos ahora estas mismas ecuaciones para ver en qué forma podemos descomponer tres vectores asimétricos en sus componentes simétricos.

En primer lugar, observamos que el número de magnitudes desconocidas puede reducirse, expresando cada componente de V_b y V_c como el producto de una función del operador a y un componente de V_a . Con referencia a la fig. 12.1 se verifican las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} V_{b1} &= a^2 V_{a1} & V_{c1} &= a V_{a1} \\ V_{b2} &= a V_{a2} & V_{c2} &= a^2 V_{a2} \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$V_{b0} = V_{a0} \quad V_{c0} = V_{a0}$$

Repetiendo la ec. (12.1) y sustituyendo las ecs. (12.4), en las (12.2) y (12.3), obtenemos

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} \quad (12.5)$$

$$V_b = a^2 V_{a1} + a V_{a2} + V_{a0} \quad (12.6)$$

$$V_c = a V_{a1} + a^2 V_{a2} + V_{a0} \quad (12.7)$$

o bien, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \quad (12.8)$$

Por conveniencia hacemos

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \quad (12.9)$$

Entonces, como puede comprobarse fácilmente,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \quad (12.10)$$

y premultiplicando ambos miembros de la ec. (12.8), por \mathbf{A}^{-1} , se tendrá

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (12.11)$$

que nos enseña cómo descomponer tres vectores asimétricos en sus componentes simétricos. Estas relaciones son tan importantes que las escribiremos por separado en la forma ordinaria. De la ec. (12.11)

$$V_{a0} = \frac{1}{3}(V_a + V_b + V_c) \quad (12.12)$$

$$V_{a1} = \frac{1}{3}(V_a + aV_b + a^2V_c) \quad (12.13)$$

$$V_{a2} = \frac{1}{3}(V_a + a^2V_b + aV_c) \quad (12.14)$$

Si se necesitan, los componentes V_{b0} , V_{b1} , V_{b2} , V_{c0} , V_{c1} y V_{c2} se pueden determinar por las ecs. (12.4).

La ec. (12.12), demuestra que no hay componentes de secuencia cero si la suma de los vectores desequilibrados es cero. Como la suma de los vectores de tensión entre líneas en un sistema trifásico es siempre cero, los componentes de secuencia cero no existen nunca en las tensiones de línea, cualquiera que sea el desequilibrio. La suma de los vectores de las tres tensiones entre línea y neutro no es necesariamente cero y, por tanto, las tensiones, respecto al neutro, pueden tener componentes de secuencia cero.

Las ecuaciones procedentes podrían haber sido escritas para cualquier conjunto de vectores relacionados entre sí y, así, podríamos haberlas escrito para las corrientes en lugar de para las tensiones. Pueden resolverse analítica o gráficamente. Las ecuaciones anteriores son tan fundamentales que conviene escribirlas para las corrientes.

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} + I_{a0} \quad (12.15)$$

$$I_b = a^2 I_{a1} + a I_{a2} + I_{a0} \quad (12.16)$$

$$I_c = a I_{a1} + a^2 I_{a2} + I_{a0} \quad (12.17)$$

$$I_{a0} = \frac{1}{3}(I_a + I_b + I_c) \quad (12.18)$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(I_a + a I_b + a^2 I_c) \quad (12.19)$$

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(I_a + a^2 I_b + a I_c) \quad (12.20)$$

En un sistema trifásico, la suma de las corrientes en las líneas, es igual a la corriente I_n en el retorno por el neutro. Por tanto,

$$I_a + I_b + I_c = I_n \quad (12.21)$$

Comparando las ecs. (12.18) y (12.21), se obtiene (12.22)

$$I_n = 3I_{a0} \quad (12.22)$$

Si no hay retorno por el neutro de un sistema trifásico, I_n es cero y las corrientes en las líneas no contienen componentes de secuencia cero. Una carga conectada en Δ no tiene

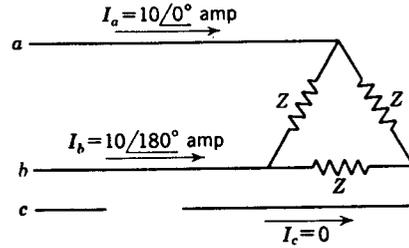


Fig. 12.4 Circuito para el ej. 12.1.

retorno por el neutro y, por tanto, las corrientes que van a una carga conectada en Δ no contienen componentes de secuencia cero.

EJEMPLO 12.1 Un conductor de una línea trifásica está abierto. La corriente que circula hacia la carga, conectada en Δ , por la línea a , es de 10 A. Con la corriente en a como referencia y suponiendo que c está abierto, determinar los componentes simétricos de las corrientes en las líneas.

Solución La fig. 12.4, es un esquema del circuito. Las corrientes en las líneas son

$$I_a = 10/0^\circ \text{ A} \quad I_b = 10/180^\circ \text{ A} \quad I_c = 0 \text{ A}$$

De las ecs. (12.18) a (12.20), se deduce

$$I_{a0} = \frac{1}{3}(10/0^\circ + 10/180^\circ + 0) = 0$$

$$I_{a1} = \frac{1}{3}(10/0^\circ + 10/180^\circ + 120^\circ + 0) \\ = 5 - j2.89 = 5.78/-30^\circ \text{ A}$$

$$I_{a2} = \frac{1}{3}(10/0^\circ + 10/180^\circ + 240^\circ + 0) \\ = 5 + j2.89 = 5.78/30^\circ \text{ A}$$

De las ecs. (12.4)

$$I_{b1} = 5.78/-150^\circ \text{ A} \quad I_{c1} = 5.78/90^\circ \text{ A}$$

$$I_{b2} = 5.78/150^\circ \text{ A} \quad I_{c2} = 5.78/-90^\circ \text{ A}$$

$$I_{b0} = 0 \quad I_{c0} = 0$$

Vemos que las componentes I_{c1} e I_{c2} tienen valores definidos, aunque la línea c está abierta y, por tanto, no pueden circular por ella las corrientes de la red. Como era de esperar la suma de los componentes en la línea c es nula. Desde luego, la suma de los componentes en la línea a es $10/0^\circ \text{ A}$ y la suma de los componentes en la línea b vale $10/180^\circ \text{ A}$.

12.4 DEFASE EN GRUPOS DE TRANSFORMADORES Y- Δ

Antes de pasar al estudio de los transformadores trifásicos, veamos el método normalizado de designar los terminales. Consideremos los arrollamientos primario y secundario sobre un núcleo común, representados en la fig. 12.5. El arrollamiento de alta tensión se designa con las letras H_1 y H_2 , y el de baja por las letras X_1 y X_2 . La corriente que circula de H_1 a H_2 tiende a producir un flujo en el núcleo común en el mismo sentido que la

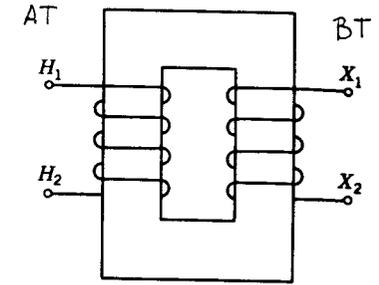


Fig. 12.5 Designaciones normalizadas de los arrollamientos de un transformador monofásico.

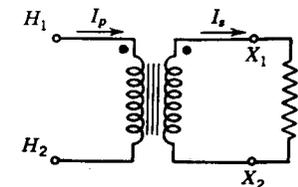
corriente que circula de X_1 a X_2 . La teoría de los transformadores demuestra que la corriente debe salir por el terminal X_1 cuando entra por el terminal H_1 , despreciando la corriente magnetizante puesto que las fuerzas magnetomotrices producidas por las corrientes en los dos enrollamientos deben cancelarse entre sí siempre. Sin este convenio de designación normalizada para los arrollamientos, un esquema, como el de la fig. 12.6 nos indicaría si las corrientes I_s e I_p están en fase o si su diferencia de fase es de 180° . Con la notación normalizada, sabemos que en la fig. 12.6, I_s e I_p están en fase ya que en ese caso producen f_{mm} en direcciones opuestas. Los terminales H_1 y X_1 son simultáneamente positivos, respecto a H_2 y X_2 . Si el sentido de la flecha de I_s se invirtiera, dejando invariable el de la flecha de I_p , I_s e I_p tendrían un defase de 180° . Por consiguiente, las corrientes en el primario y en el secundario o están en fase o defasadas 180° , según sea el sentido que se tome como positivo para la circulación de la corriente. De igual forma, las tensiones en el primario y en el secundario pueden estar en fase o defasadas 180° , según el terminal que se tome como positivo para especificar la caída de tensión.

Un método alternativo para identificar los enrollamientos es colocar un punto en un extremo de cada arrollamiento de tal forma que la corriente que fluye desde el terminal punteado al terminal sin marca de cada arrollamiento produce f_{mm} en la misma dirección. Así, los puntos de los enrollamientos en la fig. 12.6 indican que I_p e I_s están en fase y que los terminales punteados son positivos al mismo tiempo con respecto a los terminales sin marca.

Los terminales de alta tensión de los transformadores trifásicos se designan por H_1 , H_2 y H_3 y los terminales de baja, por X_1 , X_2 y X_3 . En los transformadores Y-Y o Δ - Δ las designaciones son tales, que las tensiones, respecto al neutro de los terminales H_1 , H_2 y H_3 están en fase con las tensiones, respecto al neutro de los terminales X_1 , X_2 y X_3 , respectivamente.

La fig. 12.7a representa el esquema de un transformador Y- Δ . Los terminales de alta tensión H_1 , H_2 y H_3 están unidos a las fases A, B y C. La disposición y la notación del diagrama se ajustan a un convenio que seguiremos siempre en todos los cálculos. Los arrolla-

Fig. 12.6 Esquema de los arrollamientos de un transformador monofásico con las designaciones normalizadas y los sentidos para las corrientes en el secundario y el primario.



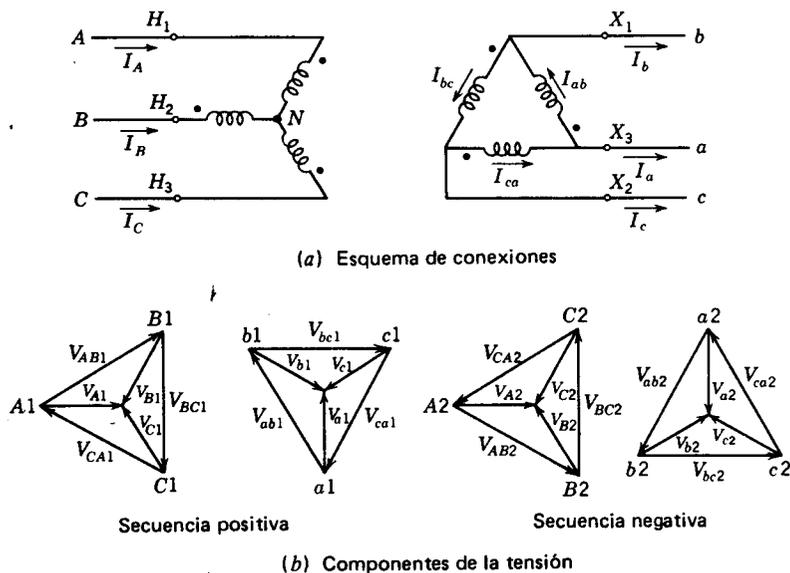


Fig. 12.7 Esquema de conexiones y diagramas vectoriales de tensión en un transformador trifásico, conectado en Y-Δ, donde el lado Y es el lado de alta tensión.

mientos dibujados paralelos son aquellos acoplados magnéticamente por estar devuados sobre el mismo núcleo. Se acostumbra utilizar mayúsculas para el lado de alta tensión del transformador y minúsculas para el de baja tensión. El arrollamiento AN es la fase del lado conectado en Y, que está acoplado magnéticamente con el arrollamiento de la fase bc del lado conectado en Δ. La localización de los puntos en los enrollamientos indica que Van está en fase con Vbc. Examinaremos posteriormente el caso en que el lado de la conexión Y es el enrollamiento de baja tensión. Si H₁ es el terminal al que se une la línea A, se acostumbra a conectar la fase B a H₂ y la fase C a H₃.

Las normas americanas para los transformadores en Y-Δ, exigen que la caída de tensión de H₁ al neutro esté adelantada en 30°, respecto a la caída de tensión de X₁ al neutro, independientemente de que el devanado Y o el Δ correspondan al lado de alta tensión. De igual forma, la tensión en H₂ va adelantada en 30° a la de X₂ y la de H₃, también 30°, a la de X₃. El diagrama vectorial para los componentes de la tensión se ha representado en la fig. 12.7b. En ella vemos, que V_{A1} está adelantada 30° sobre V_{b1}, lo que nos permite determinar que el terminal a cuya fase está conectado b, debe designarse por X₁.

La fig. 12.8a representa la conexión de las fases al transformador, de forma, que la tensión de secuencia positiva, respecto al neutro, V_{A1} va adelantada en 30° a la tensión de secuencia positiva, respecto al neutro, V_{b1}. Sin embargo, no es necesario designar las líneas conectadas a los terminales del transformador como lo hemos hecho. Con frecuencia la designación de las líneas es la indicada en la fig. 12.8b. Seguiremos aquí el esquema de la fig. 12.8a que está de acuerdo con los diagramas de conductores y vectoriales de la fig. 12.7, porque esta nomenclatura, es la más conveniente para los cálculos.

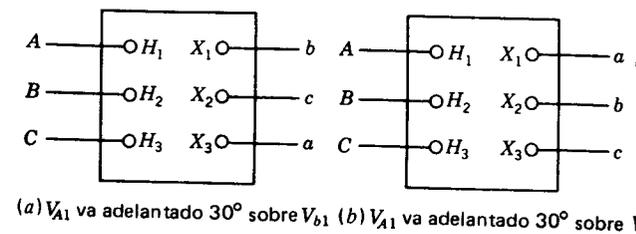


Fig. 12.8 Designación de las líneas conectadas a un transformador Y-Δ trifásico.

Si se prefiere el esquema de la fig. 12.8b, solamente es necesario intercambiar a por b, b por c, y c por a en lo que sigue.

Si se observan los diagramas vectoriales de la fig. 12.7, puede verse que V_{a1} va adelantado 90° respecto a V_{A1} y que V_{a2} va retrasado 90° respecto a V_{A2}. Los diagramas representan a V_{A1} y V_{A2} en fase, lo que no es necesariamente cierto, pero el defase entre V_{A1} y V_{A2} no varía la separación de 90° entre V_{a1} y V_{A1} o entre V_{a2} y V_{A2}.

Ya que la dirección especificada para I_A en la fig. 12.7a es hacia afuera del punto en el enrollamiento del transformador y la dirección de I_{bc} también es hacia afuera del punto en su arrollamiento, estas corrientes están 180° fuera de fase. Por tanto, las relaciones de fase entre las corrientes en los devanados en Y y Δ, son las representadas en la fig. 12.9. Vemos que I_{a1} lleva un adelanto de 90° respecto a I_{A2} e I_{a2} un retraso de 90° respecto a I_{A2}. Resumiendo las relaciones entre los componentes simétricos de las corrientes en los dos lados del transformador, se tiene que las tensiones y corrientes se expresan por unidad. Se ignoran la impedancia del transformador y la corriente magnetizante, lo cual explica por qué las magnitudes por unidad de voltaje y corriente son las mismas en ambos lados del transformador (por ejemplo |V_{a1}| igual a |V_{A1}|).

$$\begin{aligned} V_{a1} &= +jV_{A1} & I_{a1} &= +jI_{A1} \\ V_{a2} &= -jV_{A2} & I_{a2} &= -jI_{A2} \end{aligned} \tag{12.23}$$

Hasta el momento nuestro estudio del transformador Y-Δ se ha confinado al caso en que los enrollamientos de alta tensión se conectan en Y. La fig. 12.10 muestra los enrollamientos conectados en Δ, en el lado de alta tensión del transformador. La figura indica

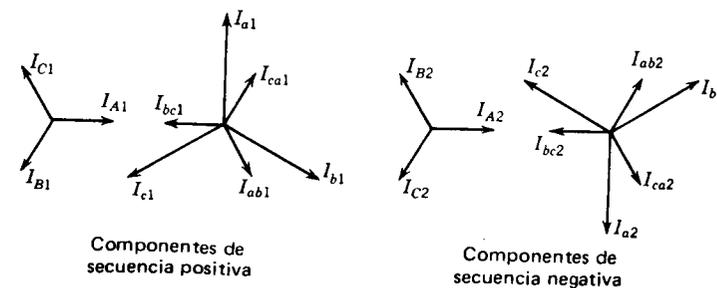


Fig. 12.9 Vectores de corriente de un transformador trifásico conectado en Y-Δ donde el lado Y es el lado de alta tensión.

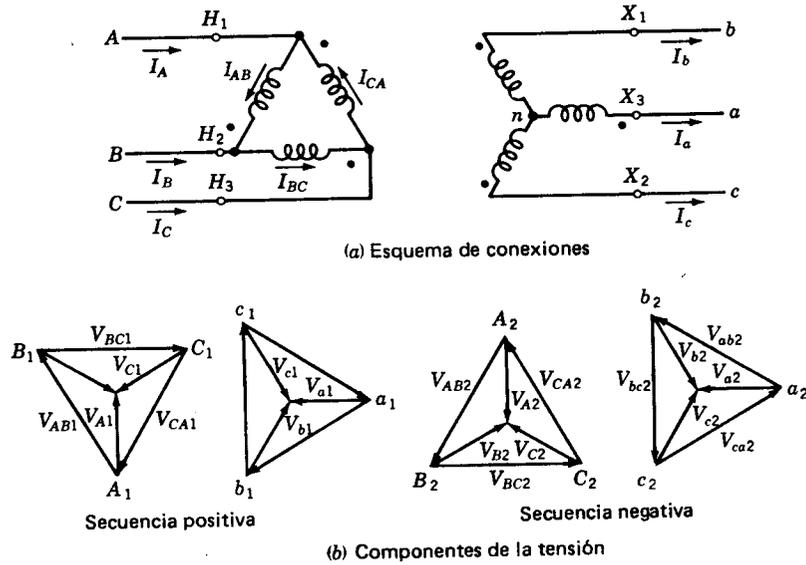


Fig. 12.10 Esquemas de conexiones y diagramas vectoriales de tensión en un transformador trifásico, conectado en Y-Δ, donde el lado Δ es el lado de alta tensión.

que para tener una secuencia positiva el voltaje de H_1 a neutro adelanta el voltaje de secuencia positiva de X_1 a neutro en 30° . V_{BC1} y V_{a1} deben estar 180° fuera de fase y las corrientes I_{BC1} e I_{a1} deben estar 180° fuera de fase como se muestra en la fig. 12.11. Los diagramas vectoriales para los voltajes y las corrientes señalan que las ecs. (12.23) aún son válidas.

Hemos supuesto el flujo de potencia del enrollamiento de alta tensión hacia el de baja tensión al indicar I_A, I_B, I_C hacia el transformador y I_a, I_b, I_c saliendo del transformador. Si suponemos el flujo de potencia en dirección contraria, las relaciones de voltaje permanecen iguales pero las corrientes de línea aparecerán en direcciones contrarias. Sin embargo, esto no produce cambio en los ángulos de fase de las corrientes de línea de primario y secundario entre sí. Por tanto, las ecs. (12.23) son válidas tanto para voltajes como para corrientes, independientemente de qué enrollamiento sea el primario.

EJEMPLO 12.2 Tres resistencias idénticas están conectadas en Y y tienen como unidad trifásica un valor nominal de 2.300 V y 500 kVA. Las resistencias están conectadas al lado en Y de un transformador Δ-Y. Las tensiones en la carga son

$$|V_{ab}| = 1\ 840\ \text{V} \quad |V_{bc}| = 2\ 760\ \text{V} \quad |V_{ca}| = 2\ 300\ \text{V}$$

Tomando como base 2.300 V, 500 kVA, determinar las tensiones y las corrientes en las líneas, por unidad, en el lado en Δ del transformador. Suponer que el centro de la carga no está conectado con el neutro del secundario del transformador.

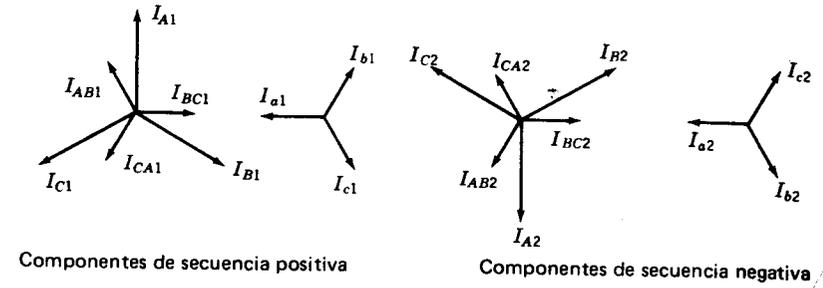


Fig. 12.11 Vectores de corriente de un transformador trifásico conectado en Y-Δ, donde el lado Δ es el lado de alta tensión.

Solución Expresada por unidad de la base especificada.

$$|V_{ab}| = \frac{1\ 840}{2\ 300} = 0.8 \text{ por unidad}$$

$$|V_{bc}| = \frac{2\ 760}{2\ 300} = 1.2 \text{ por unidad}$$

$$|V_{ca}| = \frac{2\ 300}{2\ 300} = 1.0 \text{ por unidad}$$

Suponiendo para V_{ca} un ángulo de 180° y utilizando la ley de los cosenos para determinar los ángulos de las otras tensiones, encontramos

$$V_{ab} = 0.8/\underline{82.8^\circ} \text{ por unidad}$$

$$V_{bc} = 1.2/\underline{-41.4^\circ} \text{ por unidad}$$

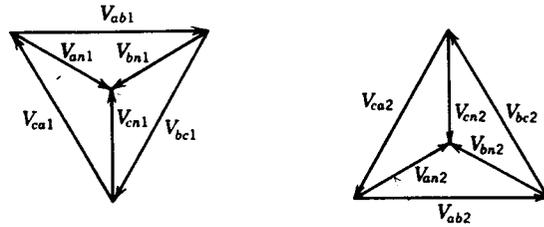
$$V_{ca} = 1.0/\underline{180^\circ} \text{ por unidad}$$

Los componentes simétricos de las tensiones en las líneas son

$$\begin{aligned} V_{a1} &= \frac{1}{3}(0.8/\underline{82.8^\circ} + 1.2/\underline{120^\circ - 41.4^\circ} + 1.0/\underline{240^\circ + 180^\circ}) \\ &= \frac{1}{3}(0.1 + j0.794 + 0.237 + j1.177 + 0.5 + j0.866) \\ &= 0.279 + j0.946 = 0.985/\underline{73.6^\circ} \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{a2} &= \frac{1}{3}(0.8/\underline{82.8^\circ} + 1.2/\underline{240^\circ - 41.4^\circ} + 1.0/\underline{120^\circ + 180^\circ}) \\ &= \frac{1}{3}(1.0 + j0.794 - 1.138 - j0.383 + 0.5 - j0.866) \\ &= -0.179 - j0.152 = 0.235/\underline{220.3^\circ} \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)} \end{aligned}$$

Para determinar las tensiones respecto al neutro de secuencia positiva y negativa, es preciso que observemos la diferencia de fase entre las tensiones de línea y las de fase en cargas equilibradas, conectadas en Y, para las secuencias positiva y negativa. Considere-



Componentes de secuencia positiva Componentes de secuencia negativa

Fig. 12.12 Componentes de secuencia positiva y negativa de las tensiones entre líneas y de línea a neutro de un sistema trifásico.

mos la fig. 12.12 en la que V_{ab1} y V_{ab2} se han tomado arbitrariamente como referencia. La elección de referencia no influye en los resultados. Vemos que

$$V_{an1} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{ab1} / -30^\circ \quad (12.24)$$

y

$$V_{an2} = \frac{1}{\sqrt{3}} V_{ab2} / 30^\circ \quad (12.25)$$

Determinamos V_{an} como suma de sus componentes.

$$V_{an} = V_{an1} + V_{an2} \quad (12.26)$$

Las otras tensiones respecto al neutro se hallan obteniendo sus componentes a partir de V_{an1} y V_{an2} por las ecs. (12.4). Si las tensiones respecto al neutro se expresan por unidad respecto a la tensión básica respecto al neutro y las tensiones en las líneas se dan por unidad respecto a la tensión básica entre líneas, el factor $1/\sqrt{3}$ debe suprimirse en las ecs. (12.24) y (12.25). Si ambas tensiones se toman respecto a la misma base o son voltios reales, las ecuaciones son correctas en la forma dada.

La ausencia de un neutro significa que no habrá corrientes de secuencia cero. Por tanto, las tensiones de fase en la carga contendrán solamente componentes de secuencia positiva y de secuencia negativa. Las tensiones de fase se determinan a partir de las ecs. (12.24) y (12.25), suprimiendo el factor $1/\sqrt{3}$, puesto que las tensiones en las líneas se expresan en función de la tensión básica entre líneas y la tensión de fase en por unidad de la tensión básica respecto al neutro. Así pues,

$$\begin{aligned} V_{a1} &= 0.985 / 73.6^\circ - 30^\circ \\ &= 0.985 / 43.6^\circ \text{ por unidad (tensión línea - neutro de barra)} \\ V_{a2} &= 0.235 / 220.3^\circ + 30^\circ \\ &= 0.235 / 250.3^\circ \text{ por unidad (tensión línea - neutro de barra)} \end{aligned}$$

Y como cada resistencia tiene una impedancia de $1.0/0^\circ$ por unidad,

$$I_{a1} = \frac{V_{a1}}{1.0/0^\circ} = 0.985 / 43.6^\circ \text{ por unidad}$$

$$I_{a2} = \frac{V_{a2}}{1.0/0^\circ} = 0.235 / 250.3^\circ \text{ por unidad}$$

El sentido que se toma como positivo para las corrientes es desde la alimentación hacia el primario en Δ del transformador y desde el lado en Y hacia la carga.

Multiplicando ambos lados de la ec. (12.23) por j , obtenemos para el lado de alta tensión del transformador

$$V_{A1} = -jV_{a1} = 0.985 / -46.4^\circ = 0.680 - j0.713$$

$$V_{A2} = jV_{a2} = 0.235 / -19.7^\circ = 0.221 - j0.079$$

$$V_A = V_{A1} + V_{A2} = 0.901 - j0.792$$

$$= 1.20 / -41.3^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_{B1} = a^2 V_{A1} = 0.985 / 193.6^\circ = -0.958 - j0.232$$

$$V_{B2} = a V_{A2} = 0.235 / 100.3^\circ = -0.042 + j0.232$$

$$V_B = V_{B1} + V_{B2} = -1.0$$

$$= 1.0 / 180^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_{C1} = a V_{A1} = 0.985 / 73.6^\circ = 0.278 + j0.944$$

$$V_{C2} = a^2 V_{A2} = 0.235 / 220.3^\circ = -0.179 - j0.152$$

$$V_C = V_{C1} + V_{C2} = 0.099 + j0.792$$

$$= 0.8 / 82.9^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = 0.901 - j0.792 + 1.0 = 1.901 - j0.792$$

$$= 2.06 / -22.6^\circ \text{ por unidad (voltaje línea - neutro de barra)}$$

$$= \frac{2.06}{\sqrt{3}} / -22.6^\circ = 1.19 / -22.6^\circ \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)}$$

$$V_{BC} = V_B - V_C = -1.0 - 0.099 - j0.792 = -1.099 - j0.792$$

$$= 1.355 / 215.8^\circ \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)}$$

$$= \frac{1.355}{\sqrt{3}} = 0.782 / 215.8^\circ \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)}$$

$$V_{CA} = V_C - V_A = 0.099 + j0.792 - 0.901 + j0.792 = -0.802 + j1.584$$

$$= 1.78 / 116.9^\circ \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)}$$

$$= \frac{1.78}{\sqrt{3}} / 116.9^\circ = 1.028 / 116.9^\circ \text{ por unidad (voltaje línea - línea de barra)}$$

Como la impedancia de carga en cada fase es una resistencia de $1.0/0^\circ$ por unidad, I_{a1} y V_{a1} tienen el mismo valor, por unidad, en este problema. Lo mismo puede decirse de I_{a2} y V_{a2} . Por consiguiente, I_A y V_A tienen que tener valores idénticos por unidad; o sea,

$$I_A = 1.20 / -41.3^\circ \text{ por unidad}$$

$$I_B = 1.0 / 180^\circ \text{ por unidad}$$

$$I_C = 0.80 / 82.9^\circ \text{ por unidad}$$

Cuando se resuelven problemas de fallos asimétricos de redes los componentes de secuencia positiva y negativa se leen por separado, teniendo en cuenta, si es necesario, el desfase, aplicando la ec. (12.23). Pueden elaborarse programas para computadores digitales que tengan en cuenta los efectos del desfase.

12.5 POTENCIA EN FUNCIÓN DE LOS COMPONENTES SIMÉTRICOS

Si se conocen los componentes simétricos de la corriente y la tensión, puede ser calculada directamente la potencia suministrada en un circuito trifásico a partir de los componentes. La demostración de este aserto constituye un buen ejemplo del manejo de los componentes simétricos por medio de matrices.

La potencia total compleja transmitida en un circuito trifásico por tres líneas, a , b y c , viene dada por

$$S = P + jQ = V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* \quad (12.27)$$

en la que V_a , V_b y V_c son las tensiones respecto al neutro en los terminales, e I_a , I_b e I_c , las corrientes que entran al circuito por las tres líneas. Puede existir o no neutro. Con la notación matricial

$$S = [V_a \ V_b \ V_c] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}^* \quad (12.28)$$

en la que se sobreentiende que la conjugada de una matriz tiene sus elementos que son conjugados de los elementos correspondientes de la matriz original.

Para introducir los componentes simétricos de las tensiones y corrientes, haremos uso de las ec. (12.8) y (12.9), obteniendo

$$S = [AV]^T [AI]^* \quad (12.29)$$

siendo

$$V = \begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I = \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \quad (12.30)$$

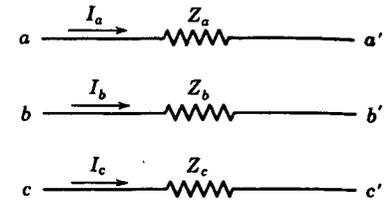


Fig. 12.13 Parte de un sistema trifásico con tres impedancias en serie desiguales.

La regla de la inversión del álgebra matricial¹ establece que la traspuesta del producto de dos matrices es igual al producto de las traspuestas de las matrices en orden inverso. De acuerdo con esta regla

$$[AV]^T = V^T A^T \quad (12.31)$$

Por tanto,

$$S = V^T A^T [AI]^* = V^T A^T A^* I^* \quad (12.32)$$

Observando que $A^T = A$ y que a y a^2 son conjugadas, obtenemos

$$S = [V_{a0} \ V_{a1} \ V_{a2}] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^* \quad (12.33)$$

o como $A^T A^* = 3U$,

$$S = 3 [V_{a0} \ V_{a1} \ V_{a2}] \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix}^* \quad (12.34)$$

La potencia compleja es por tanto

$$V_a I_a^* + V_b I_b^* + V_c I_c^* = 3V_0 I_0^* + 3V_1 I_1^* + 3V_2 I_2^* \quad (12.35)$$

que enseña cómo puede calcularse la potencia compleja a partir de los componentes simétricos de las tensiones y las corrientes de un circuito trifásico desequilibrado.

12.6 IMPEDANCIAS ASIMÉTRICAS EN SERIE

Aquí nos ocuparemos, en especial, de sistemas que normalmente están equilibrados y que se desequilibran solamente al producirse un fallo asimétrico. Sin embargo, consideremos las ecuaciones de un circuito trifásico con impedancias en serie desiguales. Vamos a obtener una conclusión que es importante para el análisis por componentes simétricos. En la fig. 12.13 se representa la parte asimétrica de un sistema con tres impedancias en serie

¹ Ver la referencia citada en la pág. 174 u otras obras de álgebra matricial.

desiguales, Z_a , Z_b y Z_c . Si suponemos que no hay inductancia mutua (no hay acoplamiento) entre las tres impedancias, la caída de tensión en la parte de sistema representado viene dado por la ecuación matricial.

$$\begin{matrix} \text{CAÍDA DE} \\ \text{TENSIÓN} \\ \text{EN EL SISTEMA} \end{matrix} \begin{bmatrix} V_{aa'} \\ V_{bb'} \\ V_{cc'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (12.36)$$

y en función de los componentes simétricos de la tensión y la corriente, por la

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} V_{aa'0} \\ V_{aa'1} \\ V_{aa'2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \quad (12.37)$$

en la que \mathbf{A} es la matriz definida por la ec. (12.9). Premultiplicando ambos miembros de la ecuación por \mathbf{A}^{-1} obtenemos una ecuación matricial, de la que deducimos

$$\begin{aligned} V_{aa'1} &= \frac{1}{3}I_{a1}(Z_a + Z_b + Z_c) + \frac{1}{3}I_{a2}(Z_a + a^2Z_b + aZ_c) \\ &\quad + \frac{1}{3}I_{a0}(Z_a + aZ_b + a^2Z_c) \\ V_{aa'2} &= \frac{1}{3}I_{a1}(Z_a + aZ_b + a^2Z_c) + \frac{1}{3}I_{a2}(Z_a + Z_b + Z_c) \\ &\quad + \frac{1}{3}I_{a0}(Z_a + a^2Z_b + aZ_c) \\ V_{aa'0} &= \frac{1}{3}I_{a1}(Z_a + a^2Z_b + aZ_c) + \frac{1}{3}I_{a2}(Z_a + aZ_b + a^2Z_c) \\ &\quad + \frac{1}{3}I_{a0}(Z_a + Z_b + Z_c) \end{aligned} \quad (12.38)$$

Si las impedancias son iguales (esto es, si $Z_a = Z_b = Z_c$), las ecs. (12.38) se reducen a

$$V_{aa'1} = I_{a1}Z_a \quad V_{aa'2} = I_{a2}Z_a \quad V_{aa'0} = I_{a0}Z_a \quad (12.39)$$

Por tanto, los componentes simétricos de corrientes desequilibradas que circulan por una carga en Y equilibrada o por impedancias en serie equilibradas, originan solamente caídas de tensión de igual secuencia, siempre que no haya acoplamiento entre las fases. Si las impedancias son desiguales, las ecs. (12.38) demuestran que la caída de tensión de cualquier secuencia es el resultado de las corrientes de las tres secuencias.

Si existe acoplamiento como inductancia mutua entre las tres impedancias de la fig. 12.13, la matriz cuadrada de las ecs. (12.36) y (12.37) contiene elementos fuera de la diagonal y las ecs. (12.38) tiene términos adicionales.

Aunque la corriente en un conductor cualquiera de una línea de transmisión trifásica induce una tensión en las otras fases, la forma en que la reactancia se calcula elimina la necesidad de considerar el acoplamiento. La auto-inductancia, calculada sobre la base de una transposición completa, incluye el efecto de la reactancia mutua. La hipótesis de transposición conduce a impedancias en serie iguales. Por tanto, las corrientes componen-

tes de cualquier secuencia dan lugar en una línea de transmisión a caídas de tensión de igual secuencia; esto es, las corrientes de secuencia positiva dan lugar únicamente a caídas de tensión de secuencia positiva. De la misma forma, las corrientes de secuencia negativa producen solamente caídas de tensión de secuencia negativa y las corrientes de secuencia cero, solamente caídas de tensión de secuencia cero. Las ecs. (12.38) son aplicables a cargas en Y desequilibradas, porque los puntos a' , b' y c' pueden unirse para formar un neutro. Se podrían estudiar otras variantes de estas ecuaciones para casos especiales tales como cargas monofásicas, en las que $Z_b = Z_c = 0$, pero limitaremos nuestro estudio a sistemas que están equilibrados antes de que se produzca un fallo.

12.7 IMPEDANCIAS DE SECUENCIA Y REDES DE SECUENCIA

La caída de tensión que se origina en una parte cualquiera de un circuito por la corriente de una secuencia determinada, depende de la impedancia de tal parte del circuito para la corriente de dicha secuencia. La impedancia de una sección cualquiera de una red equilibrada frente a la corriente de una secuencia, puede ser distinta a la impedancia frente a la corriente de otra secuencia.

La impedancia de un circuito cuando por él circulan solamente corrientes de secuencia positiva se llama *impedancia a la corriente de secuencia positiva*. Similarmente, si sólo existen corrientes de secuencia negativa, la impedancia se denomina *impedancia a la corriente de secuencia negativa*. Cuando existen únicamente corrientes de secuencia cero, la impedancia se llama *impedancia a la corriente de secuencia cero*. Estas designaciones de las impedancias de un circuito a las corrientes de las distintas secuencias se suelen abreviar, reduciéndolas a las denominaciones menos descriptivas siguientes: *impedancia de secuencia positiva*, *impedancia de secuencia negativa* e *impedancia de secuencia cero*.

El análisis de un fallo asimétrico en un sistema simétrico consiste en la determinación de los componentes simétricos de las corrientes desequilibradas que circulan. Como las corrientes componentes de la secuencia de una fase dan lugar a caídas de tensión solamente de la misma secuencia y son independientes de las corrientes de las otras secuencias, en un sistema equilibrado, las corrientes de cualquier secuencia pueden considerarse como circulando en una red independiente formada solamente por las impedancias a la corriente de tal secuencia. El circuito equivalente monofásico formado por las impedancias a la corriente de cualquier secuencia exclusivamente, se denomina *red de secuencia* para tal secuencia particular. La red de secuencia incluye las f.e.m. generadas de secuencia igual. Las redes de secuencia que transportan las corrientes I_{a1} , I_{a2} e I_{a0} se interconexiónan para representar diversas condiciones de fallos desequilibrados. Por tanto, para calcular el efecto de un fallo por el método de los componentes simétricos, es esencial determinar las impedancias de secuencia y combinarlas para formar las redes de secuencia.

12.8 REDES DE SECUENCIA DE GENERADORES SIN CARGA

En la fig. 12.14 se representa un generador sin carga, puesto a tierra a través de una reactancia. Si se presenta un fallo (no indicado en la figura) en los terminales del generador, circularán por las líneas las corrientes I_a , I_b e I_c . Si el fallo se relaciona con tierra, habrá una corriente en el neutro del generador, que designaremos por I_n . Una o dos de las corrientes en las líneas pueden ser nulas, pero las corrientes pueden descomponerse en sus componentes simétricas independientemente de lo desequilibradas que estén.

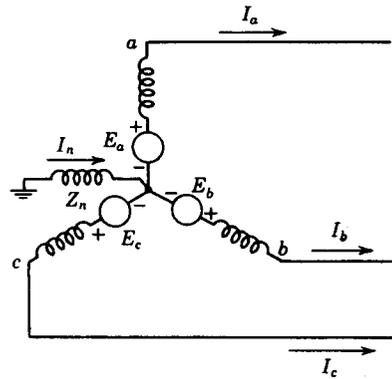


Fig. 12.14 Esquema de un circuito de un generador en vacío puesto a tierra por una reactancia. Las f. e. m. de cada fase son E_a , E_b y E_c .

Es muy sencillo dibujar las redes de secuencia. Las tensiones generadas son sólo de secuencia positiva, ya que el generador está proyectado para suministrar tensiones trifásicas equilibradas. Por tanto, la red de secuencia positiva está formada por una f.e.m. en serie con la impedancia de secuencia positiva del generador. Las redes de secuencia negativa y cero no contienen f.e.m. pero incluyen las impedancias del generador a las corrientes de secuencia negativa y cero respectivamente. Los componentes de secuencia de corriente se han dibujado en la fig. 12.15. Circulan por impedancias de su propia secuencia exclusivamente, lo que se indica utilizando los subíndices adecuados en las impedancias. Las redes de secuencia representadas en la fig. 12.15 son los circuitos monofásicos equivalentes de los circuitos trifásicos equilibrados, a través de los cuales se considera que circulan los componentes simétricos de las corrientes desequilibradas. La f.e.m., generada en la red de secuencia positiva, es la tensión en el terminal sin carga, respecto al neutro, que es también igual a las tensiones detrás de las reactancias transitorias y subtransitorias y a la tensión detrás de la reactancia sincrónica ya que el generador está sin carga. La reactancia en la red de secuencia positiva es la reactancia transitoria, subtransitoria o sincrónica, según que se estén estudiando las condiciones subtransitorias, transitorias o de régimen permanente.

La barra de referencia para las redes de secuencia positiva y negativa es el neutro del generador. Por lo que respecta a los componentes de secuencia positiva y negativa, el neutro del generador está al potencial de tierra, ya que solamente circula corriente de secuencia cero por la impedancia entre el neutro y tierra. La barra de referencia para la red de secuencia cero es la tierra del generador.

La corriente que pasa por la impedancia Z_n entre el neutro y tierra es $3I_{a0}$. En la fig. 12.15e vemos que la caída de tensión de secuencia cero, desde el punto a hasta tierra es $-3I_{a0}Z_n - I_{a0}Z_{g0}$, en la que Z_{g0} es la impedancia de secuencia cero por fase del generador. La red de secuencia cero, que es un circuito monofásico por el que se supone que pasa solamente la corriente de secuencia cero de una fase, debe tener, por tanto, una impedancia $3Z_n + Z_{g0}$, como se ve en la fig. 12.15f. La impedancia de secuencia cero total por la que pasa I_{a0} , vale

$$Z_0 = 3Z_n + Z_{g0} \tag{12.40}$$

Ordinariamente los componentes de corriente y tensión para la fase a se hallan a partir de las ecuaciones determinadas por las redes de secuencia. Las ecuaciones para los com-

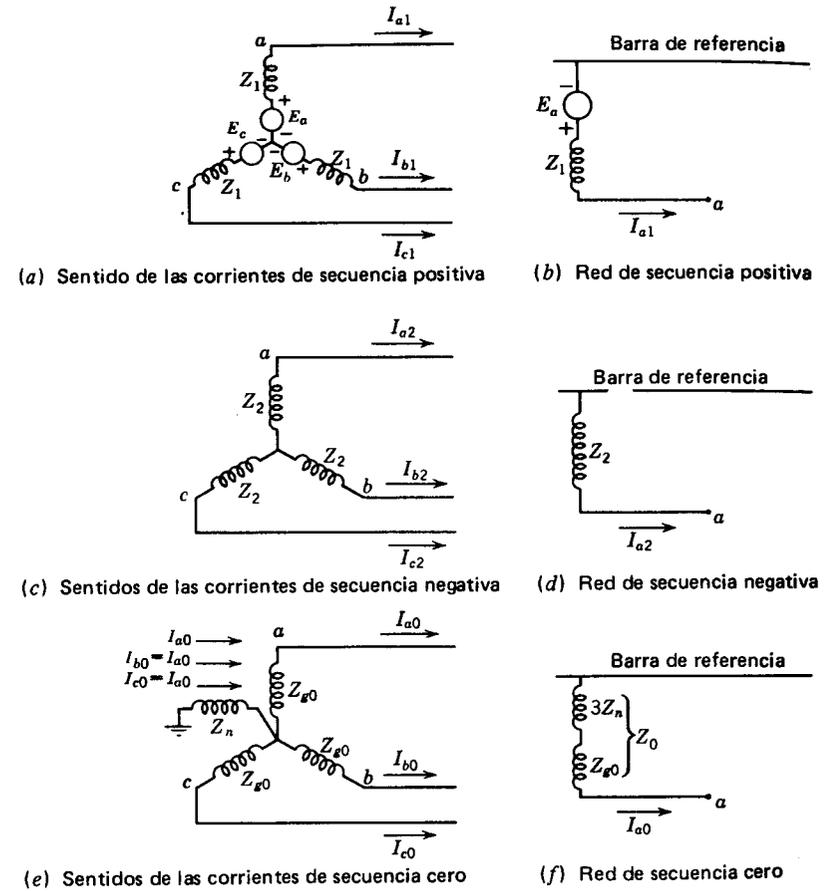


Fig. 12.15 Sentidos para la corriente de cada secuencia en un generador y las redes de secuencia correspondientes.

ponentes de la caída de tensión desde el punto a de la fase a hasta la barra de referencia (o tierra) son, como puede deducirse de la fig. 12.15,

$$V_{a1} = E_a - I_{a1}Z_1 \tag{12.41}$$

$$V_{a2} = -I_{a2}Z_2 \tag{12.42}$$

$$V_{a0} = -I_{a0}Z_0 \tag{12.43}$$

siendo E_a la tensión de secuencia positiva sin carga, respecto al neutro; Z_1 y Z_2 son las impedancias de secuencia positiva y negativa del generador y Z_0 está definido por la ec. (12.40). Las ecuaciones anteriores, que son aplicables a cualquier generador con corrientes desequilibradas, son el punto de partida para la deducción de las ecuaciones de los componentes de corriente para los diversos tipos de fallos. Se aplican al caso de un gene-

rador con carga si E_a viene dado por el valor calculado para la tensión detrás de la reactancia subtransitoria, transitoria o sincrónica, para la carga existente antes del fallo.

12.9 IMPEDANCIAS DE SECUENCIA DE ELEMENTOS DE CIRCUITO

Las impedancias de secuencia positiva y negativa de circuitos lineales, simétricos y estáticos son idénticas, porque la impedancia de tales circuitos es independiente del orden de fases, a condición de que las tensiones aplicadas estén equilibradas. La impedancia de una línea de transporte a las corrientes de secuencia cero es distinta que la impedancia a las corrientes de secuencia positiva y negativa.

Las impedancias de máquinas giratorias a las corrientes de las tres secuencias serán, en general, diferentes para cada secuencia. La f.m.m. producida por la corriente de secuencia negativa en el inducido gira en sentido contrario que el rotor en el que está el arrollamiento inductor de corriente continua. A diferencia del flujo producido por la corriente de secuencia positiva, que es estacionario respecto al rotor, el flujo producido por la corriente de secuencia negativa barre rápidamente la cara del rotor. Las corrientes inducidas en los arrollamientos inductor y amortiguador por el flujo giratorio del inducido impide que el flujo entre en el rotor. Esta condición es similar al rápido cambio de flujo inmediatamente de producirse un cortocircuito en los terminales de la máquina. El camino del flujo es el mismo que el que se encuentra al evaluar la reactancia subtransitoria. Al barrer todo el perímetro del rotor, la f.m.m. debida a la corriente de secuencia negativa varía constantemente de posición respecto a los ejes directo y en cuadratura o transversal del rotor. La reactancia de secuencia negativa se define frecuentemente como la media de las reactancias directa y subtransitoria en cuadratura. Este hecho se confirma por los valores dados en la tabla A.4.

Cuando sólo circulan corrientes de secuencia cero en el arrollamiento inducido de una máquina trifásica, la corriente y la f.m.m. de una fase son un máximo, al mismo tiempo que las corrientes y las f.m.m. de cada una de las otras fases. Los arrollamientos están distribuidos alrededor de la circunferencia del inducido, de tal forma, que el punto de f.m.m. máxima, producida por una fase, está desplazado 120° eléctricos del punto de f.m.m. máxima de cada una de las otras fases. Si la f.m.m. producida por la corriente de cada fase, tuviese una distribución perfectamente sinusoidal en el espacio, una representación de la f.m.m. alrededor del inducido se traduciría en tres curvas sinusoidales, cuya suma sería cero en todos los puntos. No se produciría flujo en el entrehierro y la única reactancia del arrollamiento de cualquier fase sería la debida a las pérdidas en las espiras extremas. En una máquina real, el arrollamiento no está distribuido para producir una f.m.m. perfectamente sinusoidal. El flujo resultante de la suma de las f.m.m. es muy pequeño, pero hace la reactancia de secuencia cero un tanto mayor que en el caso ideal en que no hay flujo en el entrehierro debido a la corriente de secuencia cero¹.

¹ El lector que desee estudiar las impedancias de máquinas puede consultar libros tales como Central Station Engineers of Westinghouse Electric Corporation, "Electrical Transmission and Distribution Reference Book", 4a. ed. cap. 6, pp. 145-194, East Pittsburgh, Pa., 1964; o A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, Jr., y A. Kusko, "Electric Machinery", 3a. ed., caps. 6 y 9, McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1971.

Al obtener las ecuaciones para la inductancia y la capacidad de líneas de transporte transpuestas, suponíamos corrientes trifásicas equilibradas y no especificábamos el orden de las fases. Por tanto, las ecuaciones resultantes son válidas igualmente para las impedancias de secuencia positiva y de secuencia negativa. Cuando circula solamente corriente de secuencia cero por una línea de transporte, la corriente es idéntica en todas las fases. La corriente retorna por tierra, por cables de puesta a tierra o por ambos. Por ser la corriente de secuencia cero idéntica en los conductores de cada fase (en realidad solamente es igual en valor absoluto y desplazada en 120° de las corrientes de las otras fases), el campo magnético debido a la corriente de secuencia cero es muy diferente del originado por la corriente de secuencia positiva o la de secuencia negativa. La diferencia de campo magnético da lugar a que la reactancia de secuencia cero de una línea de transporte sea de 2 a 3,5 veces mayor que la reactancia de secuencia positiva. La relación cae hacia la parte más alta del margen especificado para líneas de circuito-doble y líneas sin cables de toma de tierra.

Un transformador en un circuito trifásico puede estar formado por tres unidades monofásicas individuales o bien puede tener un núcleo para las tres fases o ser del tipo de coraza. Casi todas las unidades modernas son unidades trifásicas, por su menor costo inicial, menor necesidad de espacio y mayor rendimiento. Aunque las impedancias en serie de secuencia cero de las unidades trifásicas pueden diferir ligeramente de los valores de secuencia positiva y negativa, se acostumbra a suponer que las impedancias en serie de todas las secuencias son iguales, cualquiera que sea el tipo de transformador. En la tabla A.5 se relacionan las reactancias de transformadores. La reactancia y la impedancia son casi iguales para transformadores de 1 000 kVA ó superiores. Por simplicidad, en nuestros cálculos omitiremos la admitancia en paralelo, que corresponde a la corriente de excitación, independientemente del tipo de transformador trifásico, aunque la corriente de excitación de secuencia cero es mayor para el tipo de núcleo que para el tipo de coraza o para el banco de tres unidades monofásicas.

La impedancia de secuencia cero de cargas equilibradas, conectadas en Y o en Δ , iguala la impedancia de secuencia positiva y negativa. La red de secuencia cero para tales cargas se discute en la sec. 12.11.

12.10 REDES DE SECUENCIA POSITIVA Y NEGATIVA

El objeto de obtener los valores de las impedancias de secuencia de un sistema de energía es hacer posible la construcción de las redes de secuencia de todo el sistema. La red de una secuencia particular muestra todos los caminos para la circulación de la corriente, de tal secuencia, en el sistema.

Hemos estudiado en el cap. 6 la construcción de algunas redes de secuencia positiva más bien complejas. El paso de una red de secuencia positiva a otra de secuencia negativa es muy sencillo. Los generadores y motores síncronos trifásicos tienen tensiones internas solamente de secuencia positiva, ya que están proyectados para generar tensiones equilibradas. Como las impedancias de secuencia positiva y negativa son las mismas en un sistema simétrico estático, la conversión de una red de secuencia positiva a una red de secuencia negativa se lleva a cabo cambiando, si es necesario, solamente las impedancias que representan maquinarias giratorias, y omitiendo las f.e.m. Las fuerzas electromotrices se suprimen bajo la hipótesis de que las tensiones generadas son equilibradas y en

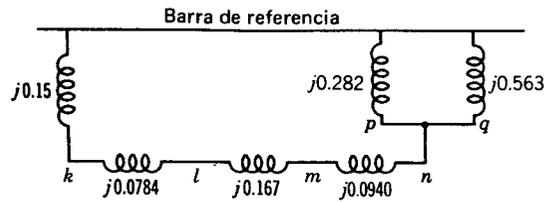


Fig. 12.16 Red de secuencia negativa del ej. 12.3.

ausencia de tensiones de secuencia negativa inducidas por fuentes exteriores. Dado que todos los puntos neutros de un sistema trifásico simétrico están al mismo potencial cuando circulan corrientes trifásicas equilibradas, todos los puntos neutros deben estar al mismo potencial para las corrientes de secuencia positiva o para los de secuencia negativa. Por tanto, el neutro de un sistema trifásico simétrico es el potencial de referencia lógico para especificar las caídas de tensión de secuencia positiva y negativa, y es la barra de referencia de las redes de secuencia positiva y negativa. La impedancia conectada entre el neutro de una máquina y tierra no es una parte de la red de secuencia positiva ni de la red de secuencia negativa, porque ni la corriente de secuencia positiva, ni la de secuencia negativa pueden circular por una impedancia así conectada.

Las redes de secuencia negativa, como las de secuencia positiva del cap. 6, pueden contener los circuitos equivalentes exactos de las partes del sistema o pueden simplificarse omitiendo la resistencia en serie y la admitancia en paralelo.

EJEMPLO 12.3 Dibujar la red de secuencia negativa para el sistema descrito en el ej. 6.4. Suponer que la reactancia de secuencia negativa de cada máquina es igual a la reactancia subtransitoria. Suprimir la resistencia.

Solución Como todas las reactancias de secuencia negativa del sistema son iguales a las reactancias de secuencia positiva, la red de secuencia negativa será idéntica a la red de secuencia positiva, de la fig. 6.10, excepto por lo que se refiere a la ausencia de las f.e.m. de la red de secuencia negativa. La red pedida es la dibujada en la fig. 12.16.

12.11 REDES DE SECUENCIA CERO

Un sistema trifásico funciona como monofásico por lo que a las corrientes de secuencia cero se refiere, ya que las corrientes de secuencia cero tienen el mismo valor absoluto e igual fase en cualquier punto en todas las fases del sistema. Por consiguiente, las corrientes de secuencia cero circularán solamente si existe un camino de retorno por el cual pueda completarse el circuito. La referencia para las tensiones de secuencia cero es el potencial de tierra en el punto del sistema en el cual se especifica. Como las corrientes de secuencia cero pueden estar pasando a tierra, dicha tierra no está necesariamente al mismo potencial en todos sus puntos y la barra de referencia de la red de secuencia cero no representa una tierra con potencial uniforme. La impedancia de tierra y los cables de toma de tierra está incluida en la impedancia de secuencia cero de la línea de transporte, y el circuito de retorno de la red de secuencia cero es un conductor de impedancia nula, que es la barra de referencia del sistema. La impedancia de tierra está incluida en la impedancia de secuencia cero, por lo que las tensiones, medidas respecto a la barra de referencia de la red de secuencia cero, dan la tensión correcta respecto de tierra.

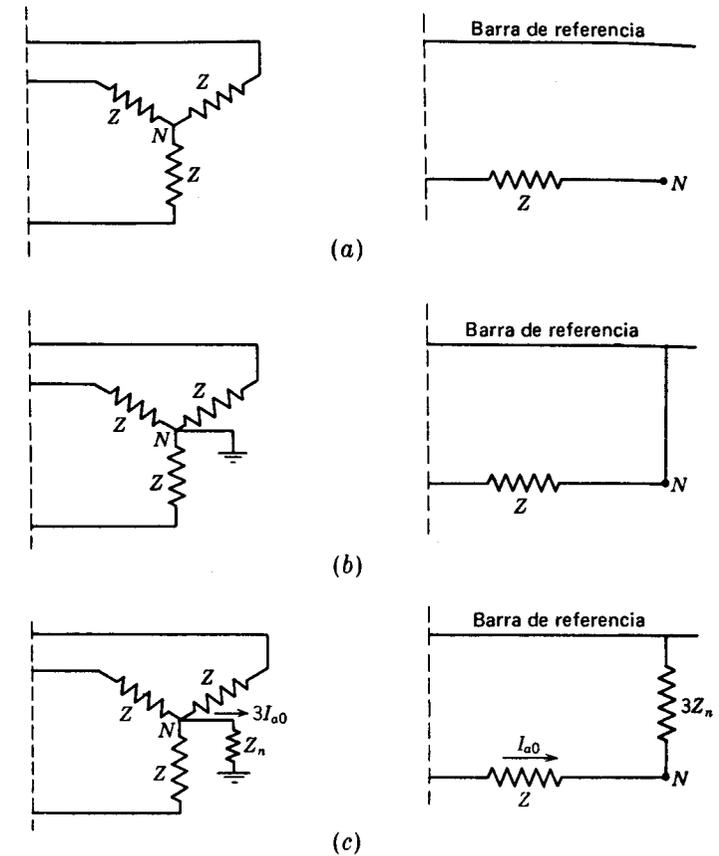


Fig. 12.17 Redes de secuencia cero para cargas conectadas en Y.

Si un circuito está conectado en Y, sin conexión del neutro a tierra o a otro punto neutro del circuito, la suma de las corrientes que van hacia el neutro en las tres fases, es igual a cero. Dado que las corrientes, cuya suma es nula, no tienen componentes de secuencia cero, la impedancia a la corriente de secuencia cero es infinita más allá del punto neutro, lo que se indica por un circuito abierto en la red de secuencia cero entre el neutro del circuito conectado en Y y la barra de referencia, como se ha representado en la fig. 12.17a.

Si el neutro de un circuito conectado en Y se une a tierra a través de una impedancia nula, se inserta una conexión de impedancia cero para unir el punto neutro y la barra de referencia de la red de secuencia cero como se ve en la fig. 12.17b.

Si la impedancia Z_n se intercala entre el neutro y tierra de un circuito conectado en Y, debe colocarse una impedancia $3Z_n$ entre el neutro y la barra de referencia de la red de secuencia cero, como se ve en la fig. 12.17c. Como se explicó en la sec. 12.8, la caída de tensión de secuencia cero, originada en la red de secuencia cero por el paso de I_{a0} por $3Z_n$, es la misma que en el sistema real en el que pasa $3I_{a0}$ por Z_n . La impedancia, for-

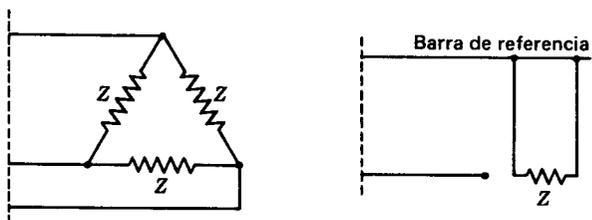


Fig. 12.18 Carga conectada en Δ y su red de secuencia cero.

mada por una resistencia o una reactancia, se conecta ordinariamente entre el neutro de un generador y tierra para limitar la corriente de secuencia cero durante un fallo. La impedancia de tal resistencia o reactancia limitadora de corriente se representa en la red de secuencia cero de la manera descrita.

Un circuito conectado en Δ , por no disponer de camino de retorno, presenta una impedancia infinita a las corrientes de línea de secuencia cero. La red de secuencia cero está abierta en el circuito con conexión en triángulo. Las corrientes de secuencia cero pueden circular dentro del circuito en Δ , puesto que el Δ es un circuito en serie cerrado para la circulación de corrientes monofásicas. Tales corrientes, sin embargo, tendrían que ser producidas en el Δ , por inducción de una fuente exterior o por las tensiones generadas de secuencia cero. En la fig. 12.18 se representa un circuito Δ y su red de secuencia cero. Aun cuando se generan tensiones de secuencia cero en las fases del Δ , no existe tensión de secuencia cero entre los terminales del Δ , porque la elevación de tensión en cada fase del generador es igual a la caída de tensión en la impedancia de secuencia cero de cada fase.

Merecen una atención especial los circuitos equivalentes de secuencia cero de los transformadores trifásicos. Las diversas combinaciones posibles de los devanados primario y secundario en Y y Δ varían la red de secuencia cero. La teoría de los transformadores hace posible la construcción del circuito equivalente de la red de secuencia cero. Recordemos que por el primario de un transformador no circula corriente, a menos que circule por el secundario, si despreciamos la relativamente pequeña corriente magnetizante. Sabemos también que la corriente primaria viene determinada por la corriente secundaria y la relación de transformación de los arrollamientos, despreciando la corriente magnetizante. Estos principios sirven de guía en el análisis de los casos particulares. Se estudiarán cinco posibles conexiones de transformadores con dos arrollamientos. Estas conexiones son las representadas en la fig. 12.19. Las flechas indican los caminos posibles para la circulación de la corriente de secuencia cero. La no existencia de flecha indica que la conexión del transformador es tal que no puede circular corriente de secuencia cero. En la fig. 12.19, y para cada conexión, se representa el circuito aproximadamente equivalente de secuencia cero, con resistencia y un camino para la corriente magnetizante omitida. Las letras P y Q identifican los puntos correspondientes en el diagrama de conexiones y el circuito equivalente. Seguidamente se da el razonamiento justificativo del circuito equivalente para cada conexión.

Caso 1. Conexión Y-Y. Un neutro a tierra. Si uno de los dos neutros de un banco Y-Y no está puesto a tierra, la corriente de secuencia cero no puede circular en ninguno

SÍMBOLOS	ESQUEMAS DE CONEXIONES	CIRCUITOS EQUIVALENTES DE SECUENCIA CERO

Fig. 12.19 Circuitos equivalentes de secuencia cero de transformadores trifásicos, junto con los esquemas de conexiones y los símbolos para los diagramas unifilares.

de los dos arrollamientos. La ausencia de camino por un arrollamiento impide la corriente en el otro. Para la corriente de secuencia cero existe un circuito abierto entre las dos partes del sistema conectado por el transformador.

Caso 2. Conexión Y-Y. Ambos neutros puestos a tierra. Cuando ambos neutros de un transformador Y-Y están puestos a tierra, existe camino en los dos arrollamientos para las corrientes de secuencia cero. Si la corriente de secuencia cero puede seguir un circuito completo fuera del transformador y en ambos lados de él, puede circular en ambos arrollamientos del transformador. En la red de secuencia cero, los puntos de ambos lados del transformador se unen por la impedancia de secuencia cero del transformador, de igual forma que se dedujo en las redes de secuencias positiva y negativa.

Caso 3. Conexión Y- Δ , puesta a tierra la Y. Si el neutro de un transformador Y- Δ se pone a tierra, las corrientes de secuencia cero tienen camino a tierra a través de la

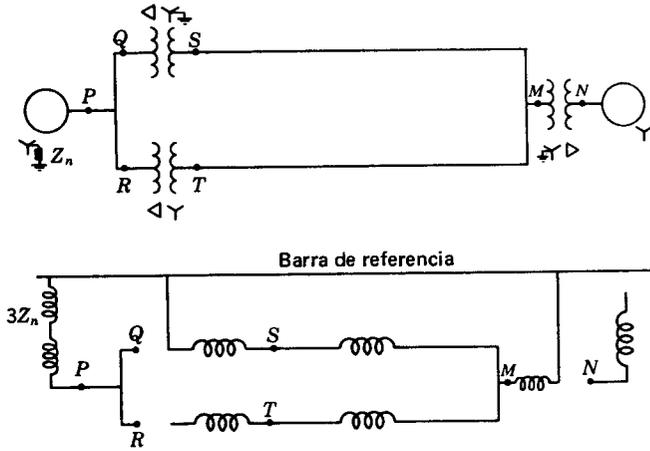


Fig. 12.20 Diagrama unifilar de un sistema de potencia pequeño y la red de secuencia cero correspondiente.

conexión en estrella, ya que las corrientes inducidas correspondientes pueden circular en la conexión en triángulo. La corriente de secuencia cero, que circula en el Δ para equilibrar la corriente de secuencia cero en la Y, no puede circular en las líneas conectadas al Δ . El circuito equivalente debe proporcionar un camino desde la línea en el lado en Y, a través de la resistencia equivalente y reactancia de pérdida del transformador, hasta la barra de referencia. Es preciso que haya un circuito abierto entre la línea y la barra de referencia en el lado en Δ . Si la conexión del neutro a tierra contiene una impedancia Z_n , el circuito equivalente de secuencia cero debe tener una impedancia $3Z_n$ en serie, con la resistencia equivalente y la reactancia de pérdida del transformador para conectar la línea en el lado en Y a tierra.

Caso 4. Conexión Y- Δ , no puesta a tierra. Si la Y no está a tierra, la impedancia Z_n entre el neutro y tierra es infinita. La impedancia $3Z_n$ en el circuito equivalente del caso 3 para la impedancia de secuencia cero, se hace infinita. La corriente de secuencia cero no puede circular en los arrollamientos del transformador.

Caso 5. Conexión Δ - Δ . Como un circuito Δ - Δ no proporciona camino de retorno a la corriente de secuencia cero, no puede haber corriente de secuencia cero en un transformador Δ - Δ , aunque puede circular dentro de los arrollamientos Δ .

Los circuitos equivalentes de secuencia cero, determinados para diversas partes del sistema separadamente, se combinan fácilmente para formar la red completa de secuencia cero. Las figs. 12.20 y 12.21 representan los diagramas unifilares de dos pequeños sistemas de energía y sus correspondientes redes de secuencia cero, simplificadas, suprimiendo las resistencias y las admitancias en paralelo.

EJEMPLO 12.4 Dibujar la red de secuencia cero del sistema descrito en el ej. 6.4. Suponer que las reactancias de secuencia cero para el generador y los motores es de 0.05 por unidad. Hay reactancias limitadoras de corriente de 2 ohmios, cada una, en el neutro del

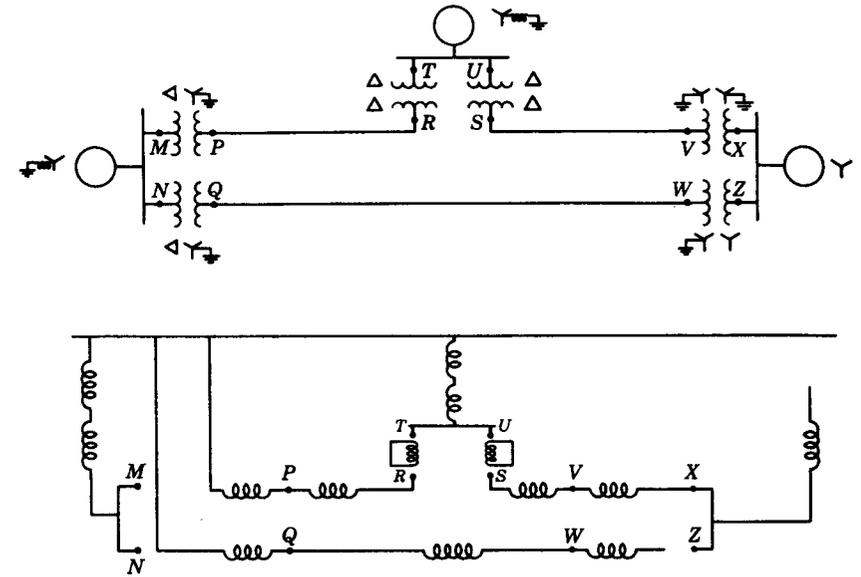


Fig. 12.21 Diagrama unifilar de un sistema de potencia pequeño y la red de secuencia cero correspondiente.

generador y del motor mayor. La reactancia de secuencia cero de la línea de transporte es de 250 ohmios.

Solución La reactancia de dispersión de secuencia cero de los transformadores es igual a la reactancia de secuencia positiva. Así, para los transformadores, $X_0 = 0.0784$ por unidad y 0.0940 como en el ej. 6.4.

Las reactancias de secuencia cero del generador y de los motores son

Generador: $X_0 = 0.05$ por unidad

Motor 1: $X_0 = 0.05 \frac{30\,000}{20\,000} \left(\frac{12.5}{12.9}\right)^2 = 0.070$ por unidad

Motor 2: $X_0 = 0.05 \frac{30\,000}{10\,000} \left(\frac{12.5}{12.9}\right)^2 = 0.141$ por unidad

Para las reactancias limitadoras de corriente,

$$Z \text{ base en el circuito generador} = \frac{13.8^2}{30} = 6.35 \, \Omega$$

$$\text{Reactancia} = \frac{2.0}{6.35} = 0.315 \text{ por unidad}$$

$$Z \text{ base en los circuitos de motor:} = \frac{12.9^2}{30} = 5.55 \, \Omega$$

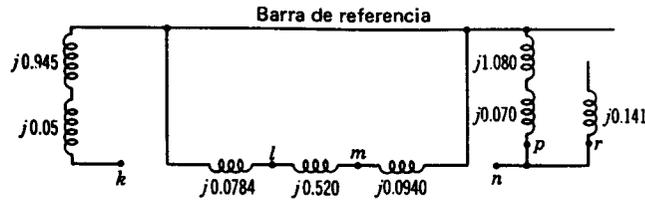


Fig. 12.22 Red de secuencia cero del ej. 12.4.

$$\text{Reactancia} = \frac{2.0}{5.55} = 0.360 \text{ por unidad}$$

En la red de impedancias

$$\text{Generador: } 3Z_n = 3 \times j0.315 = j0.945 \text{ por unidad}$$

$$\text{Motor: } 3Z_n = 3 \times j0.360 = j1.080 \text{ por unidad}$$

En la línea de transporte,

$$X_0 = \frac{250}{480} = 0.52 \text{ por unidad}$$

La red de secuencia cero es la representada en la fig. 12.22.

12.12 CONCLUSIONES

Las tensiones y corrientes desequilibradas pueden descomponerse en sus componentes simétricas. Los problemas pueden ser resueltos, considerando separadamente cada conjunto de componentes y por superposición de los resultados.

En redes equilibradas que no tengan acoplamiento entre fases, las corrientes de una secuencia de fases inducen caídas de tensión solamente de la misma secuencia. Las impedancias de los elementos del circuito, para las corrientes de las diferentes secuencias, no son necesariamente iguales.

Para los estudios de cargas en sistemas de energía, para los cálculos de fallos y estudios de estabilidad, es necesario conocer la red de secuencia positiva. Si los cálculos de fallos o los estudios de estabilidad implican fallos asimétricos en sistemas por lo demás simétricos, se necesitan también las redes de secuencia negativa y cero. La síntesis de la red de secuencia cero exige un cuidado especial, porque la red de secuencia cero puede diferir considerablemente de las otras.

PROBLEMAS

12.1 Calcular las expresiones siguientes en forma polar:

$$(a) a^2 - 1 \quad (b) 1 - a - a^2 \quad (c) 2a^2 + 3 + 2a \quad (d) ja$$

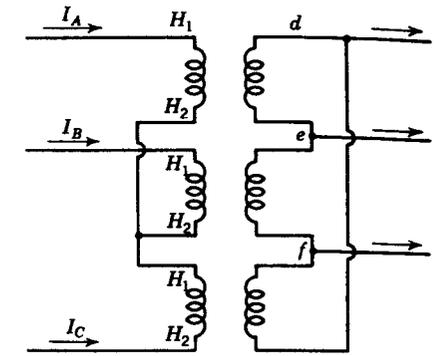


Fig. 12.23 Circuito del prob. 12.8

- 12.2 Determinar analíticamente las tensiones respecto al neutro, V_{an} , V_{bn} y V_{cn} en un circuito en el que $V_{an1} = 50/0^\circ$ V, $V_{an2} = 10/90^\circ$ V, y $V_{an0} = 10/180^\circ$ V.
- 12.3 Resolver el problema anterior gráficamente.
- 12.4 Determinar las componentes simétricas de las tres corrientes, $I_a = 10/0^\circ$ A, $I_b = 10/250^\circ$ A, e $I_c = 10/110^\circ$ A.
- 12.5 Las corrientes que circulan en las líneas que alimentan una carga equilibrada conectada en Δ , son: $I_a = 100/0^\circ$ A, $I_b = 141.4/225^\circ$ A, e $I_c = 100/90^\circ$ A. Determinar la relación entre las componentes simétricas de las corrientes de línea y de fase, esto es, entre I_{a1} e I_{ab1} y entre I_{a2} e I_{ab2} . Comience dibujando los diagramas vectoriales de la secuencia positiva y negativa de las corrientes de línea y fase. Determinar I_{ab} a partir de las componentes simétricas de las corrientes de línea.
- 12.6 Las tensiones en las terminales de una carga equilibrada, formada por tres resistencias de 10Ω conectadas en Y, son $V_{ab} = 100/0^\circ$ V, $V_{bc} = 90/240^\circ$ V y $V_{ca} = 95.5/125.2^\circ$ V. Determinar la relación entre las componentes simétricas de las tensiones de línea y fase, esto es, entre V_{ab1} y V_{an1} y entre V_{ab2} y V_{an2} . Suponer que no hay conexión al neutro de la carga. Determinar las corrientes de línea a partir de las componentes simétricas de las tensiones de línea.
- 12.7 Determinar la energía consumida en las resistencias de 10Ω del prob. 12.6 a partir de las componentes simétricas de las corrientes y las tensiones. Comprobar el resultado obtenido.
- 12.8 Tres transformadores monofásicos están conectados en la forma que se representa en la fig. 12.23, formando un transformador Y- Δ . Los arrollamientos de alta tensión están conectados en Y con las marcas de polaridad en la forma indicada. Los arrollamientos acoplados magnéticamente se han puesto paralelos. Determinar la colocación correcta de las marcas de polaridad en los arrollamientos de baja tensión. Identificar los terminales numerados en el lado de baja tensión: (a) con las letras a , b y c donde I_{a1} adelanta a I_{a1} en 30° y (b) con las letras a' , b' , y c' de manera que $I_{a'1}$ esté 90° fuera de fase con I_{a1} .
- 12.9 Suponer que las corrientes especificadas en el prob. 12.5 circulan hacia una carga desde líneas conectadas al lado en Y de un transformador Δ -Y de 10 000 kVA, 13.2 Δ -66Y kV. Determinar las corrientes que circulan en las líneas en el lado en Δ por conversión de las componentes simétricas de las corrientes a por unidad, sobre base de los valores nominales del transformador y por defasado de las componentes según la ec. (12.23). Comprobar los resultados calculando las corrientes en cada fase de los arrollamientos en Δ , en amperios, directamente a partir de las

corrientes en el lado en Y, por multiplicación por la relación de transformación de los arrollamientos. Completar la comprobación, calculando las corrientes de línea a partir de las corrientes de fase en el lado en Δ .

- 12.10 Se aplican tensiones trifásicas equilibradas de 100 V, línea-línea, a una carga conectada en Y y formada por tres resistencias. El neutro de la carga no está a tierra. La resistencia en la fase a es de 10Ω , en la b , 20Ω y en la c , 30Ω . Determinar la corriente en la fase a por componentes simétricas.
- 12.11 Dibujar las redes de impedancias de secuencia cero y negativa para el sistema del prob. 6.11. Poner los valores de todas las reactancias, en por unidad, sobre una base de 30 MVA, 6.9 kV, en el circuito del generador 1. Rotular las redes en correspondencia con el diagrama unifilar. Los neutros de los generadores 1 y 2 están unidos a tierra a través de reactancias limitadoras de corriente, con una reactancia de 5% , cada una sobre base de la maquinaria a la que está unida. Cada generador tiene reactancias de secuencia negativa y cero del 15% y 5% , respectivamente, con base en sus propios valores nominales. La reactancia de secuencia cero de la línea de transmisión es de 250Ω de B a C y 210Ω de C a E.
- 12.12 Dibujar las redes de impedancias de secuencias negativa y cero para el sistema del prob. 6.12. Elegir como base 50 MVA, 138 kV en la línea de transporte de 40Ω , y poner todas las reactancias por unidad. La reactancia de secuencia negativa de cada máquina sincrónica es igual a su reactancia subtransitoria. La reactancia de secuencia cero de cada máquina es del 8% en base a sus valores nominales. Los neutros de las máquinas están conectados a tierra a través de reactancias limitadoras de corriente, con una reactancia del 5% , cada una respecto a la base de la máquina a la que se une. Suponer que las reactancias de secuencia cero de las líneas de transmisión son el 300% de sus reactancias de secuencia positiva.

La mayor parte de los fallos en los sistemas de energía son asimétricos y pueden consistir en cortocircuitos asimétricos, fallos asimétricos a través de impedancias, o conductores abiertos. Los fallos asimétricos se presentan como fallos de línea-tierra, línea a línea o doble línea-tierra. El camino de la corriente de fallo de línea a línea o de línea a tierra puede o no tener impedancia. Uno o dos conductores abiertos dan lugar a fallos asimétricos, sea por rotura de uno o dos conductores o por la acción de fusibles u otros dispositivos que pueden no abrir simultáneamente las tres fases.

Dado que cualquier fallo asimétrico da lugar a que circulen por el sistema corrientes desequilibradas, es muy útil el método de las componentes simétricas para analizar y determinar las corrientes y tensiones en todas las partes del sistema después de que se presente uno de tales fallos. Estudiaremos primeramente los fallos en los terminales de un generador en vacío. Después, consideraremos los fallos en un sistema, aplicando el teorema de Thévenin, que nos permite determinar la corriente en el fallo reemplazando todo el sistema por un solo generador y una impedancia en serie.

Las ecs. (12.41) a (12.43), obtenidas en la sec. 12.8, son aplicables a un generador cualquiera que sea el fallo en sus terminales. La forma matricial de estas ecuaciones es

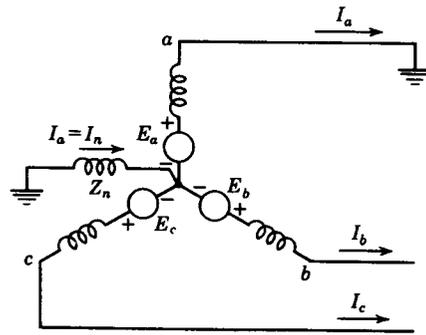


Fig. 13.1 Esquema de circuito para un fallo de línea simple a tierra en las terminales de un generador en vacío, cuyo neutro está puesto a tierra a través de una reactancia.

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \quad (13.1)$$

Para cada tipo de fallo utilizaremos la ec. (13.1), junto con las ecuaciones descriptivas de las condiciones del fallo, para obtener \$I_{a1}\$ en función de \$E_a\$, \$Z_1\$, \$Z_2\$ y \$Z_0\$.

13.1 FALLO SIMPLE LINEA-TIERRA EN UN GENERADOR EN VACÍO

El esquema del circuito para un fallo línea a tierra en un generador sin carga, conectado en Y, con su neutro puesto a tierra por una reactancia, es el dado en la fig. 13.1. La fase \$a\$ es la que sufre el fallo. Las relaciones a desarrollar para este tipo de fallo se aplicarán solamente si el fallo es en la fase \$a\$, pero esto no es inconveniente porque la designación de las fases es arbitraria y cualquiera de ellas puede ser llamada \$a\$. Las condiciones del fallo se pueden expresar en la forma siguiente:

$$I_b = 0 \quad I_c = 0 \quad V_a = 0$$

Con \$I_b\$ e \$I_c = 0\$ las componentes simétricas de la corriente vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Así pues, \$I_{a0}\$, \$I_{a1}\$ e \$I_{a2}\$ son iguales a \$I_a/3\$, y

$$I_{a1} = I_{a2} = I_{a0} \quad (13.2)$$

Sustituyendo \$I_{a1}\$ en lugar de \$I_{a2}\$ e \$I_{a0}\$ en la ec. (13.1), obtenemos

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{a1} \\ I_{a1} \end{bmatrix} \quad (13.3)$$

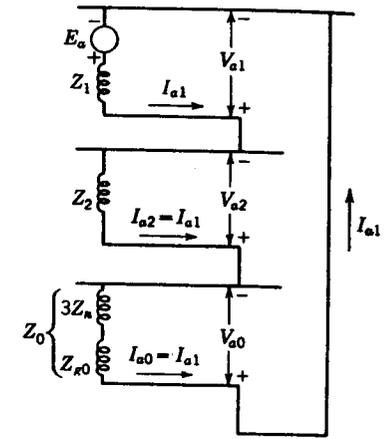


Fig. 13.2 Conexión de las redes de secuencia de un generador en vacío para un fallo de línea simple a tierra de la fase \$a\$ en los terminales del generador.

Realizando la multiplicación y sustracción de matrices indicadas se llega a la igualdad de dos matrices de columna. Premultiplicando ambas matrices de columna por la matriz de fila [1 1 1] se tiene

$$V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} = -I_{a1}Z_0 + E_a - I_{a1}Z_1 - I_{a1}Z_2 \quad (13.4)$$

Como \$V_a = V_{a0} + V_{a1} + V_{a2} = 0\$, tendremos despejando \$I_{a1}\$, de la ec. (13.4)

$$I_{a1} = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \quad (13.5)$$

Las ecs. (13.2) y (13.5), son las ecuaciones especiales para un fallo línea-tierra. Se utilizan, junto con la ec. (13.1) y las relaciones de los componentes simétricos, para determinar todas las tensiones y corrientes en el fallo. Si las tres redes de secuencia del generador se conectan en serie, como en la fig. 13.2, vemos que las corrientes y tensiones resultantes satisfacen las ecuaciones anteriores, puesto que las tres impedancias de secuencia están entonces en serie con la tensión \$E_a\$. Con las redes de secuencia así conectadas, la tensión en cada red de secuencia es la componente simétrica de \$V_a\$ de tal secuencia. La conexión de las redes de secuencia, tal como en la fig. 13.2, es un procedimiento conveniente de recordar las ecuaciones para la resolución del fallo simple línea-tierra, ya que todas las ecuaciones necesarias pueden ser determinadas a partir de la conexión de la red de secuencias.

Si el neutro del generador no está a tierra, la red de secuencia cero está abierta y \$Z_0\$ es infinita. Como la ec. (13.5), demuestra que \$I_{a1}\$ es cero, cuando \$Z_0\$ es infinita, \$I_{a2}\$ e \$I_{a0}\$ tienen que ser también cero. Por tanto, no circula corriente por la línea \$a\$, toda vez que \$I_a\$ es la suma de sus componentes y éstas son todas cero. El mismo resultado puede obtenerse sin utilizar las componentes simétricas, porque la inspección del circuito muestra que no existe camino para el paso de la corriente en el fallo a menos que esté a tierra el neutro del generador.

EJEMPLO 13.1 Un generador de 20 000 kVA, a 13.8 kV, tiene una reactancia subtransitoria directa de 0.25 por unidad. Las reactancias de secuencia negativa y cero son, respectivamente, 0.35 y 0.10 por unidad. El neutro del generador está puesto sólidamente a tierra. Determinar la corriente subtransitoria en el generador y las tensiones línea a línea para las condiciones subtransitorias cuando se presenta un fallo simple línea-tierra en los terminales del generador con el generador funcionando sin carga y a su tensión nominal. Despreciar la resistencia.

Solución Sobre base de 20 000 kVA, 13.8 kV, $E_a = 1.0$ por unidad, ya que la tensión interna es igual a la tensión en los terminales en vacío. Entonces, en por unidad,

$$I_{a1} = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2 + Z_0} = \frac{1.0 + j0}{j0.25 + j0.35 + j0.10} = -j1.43 \text{ por unidad}$$

$$I_a = 3I_{a1} = -j4.29 \text{ por unidad}$$

$$\text{Corriente base} = \frac{20\,000}{\sqrt{3} \times 13.8} = 836 \text{ A}$$

La corriente subtransitoria en la línea a , es

$$I_a = -j4.29 \times 836 = -j3\,585 \text{ A}$$

Las componentes simétricas de la tensión desde el punto a a tierra son

$$\begin{aligned} V_{a1} &= E_a - I_{a1}Z_1 = 1.0 - (-j1.43)(j0.25) \\ &= 1.0 - 0.357 = 0.643 \text{ por unidad} \end{aligned}$$

$$V_{a2} = -I_{a2}Z_2 = -(-j1.43)(j0.35) = -0.50 \text{ por unidad}$$

$$V_{a0} = -I_{a0}Z_0 = -(-j1.43)(j0.10) = -0.143 \text{ por unidad}$$

Las tensiones de línea a tierra son

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} = 0.643 - 0.50 - 0.143 = 0$$

$$V_b = a^2V_{a1} + aV_{a2} + V_{a0}$$

$$= 0.643(-0.5 - j0.866) - 0.50(-0.5 + j0.866) - 0.143$$

$$= -0.322 - j0.556 + 0.25 - j0.433 - 0.143$$

$$= -0.215 - j0.989 \text{ por unidad}$$

$$V_c = aV_{a1} + a^2V_{a2} + V_{a0}$$

$$= 0.643(-0.5 + j0.866) - 0.50(-0.5 - j0.866) - 0.143$$

$$= -0.322 + j0.556 + 0.25 + j0.433 - 0.143$$

$$= -0.215 + j0.989 \text{ por unidad}$$

Las tensiones de línea a línea son

$$V_{ab} = V_a - V_b = 0.215 + j0.989 = 1.01/77.7^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = 0 - j1.978 = 1.978/270^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_{ca} = V_c - V_a = -0.215 + j0.989 = 1.01/102.3^\circ \text{ por unidad}$$

Como la tensión generada, respecto al neutro, E_a se tomó como 1.0 por unidad, las tensiones anteriores se expresan en por unidad de la tensión básica, respecto al neutro. Expresadas en voltios las tensiones, después del fallo, son

$$V_{ab} = 1.01 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} /77.7^\circ = 8.05/77.7^\circ \text{ kV}$$

$$V_{bc} = 1.978 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} /270^\circ = 15.76/270^\circ \text{ kV}$$

$$V_{ca} = 1.01 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} /102.3^\circ = 8.05/102.3^\circ \text{ kV}$$

Antes del fallo, las tensiones de línea estaban equilibradas y eran iguales a 13.8 kV. Por comparación con las tensiones de línea después del fallo, las tensiones anteriores al fallo, con $V_{an} = E_a$ como referencia, vienen dadas por

$$V_{ab} = 13.8/30^\circ \text{ kV} \quad V_{bc} = 13.8/270^\circ \text{ kV} \quad V_{ca} = 13.8/150^\circ \text{ kV}$$

El diagrama vectorial de las tensiones de pre-fallo y post-fallo, es el representado en la fig. 13.3.

13.2 FALLO DE LÍNEA A LÍNEA EN UN GENERADOR EN VACÍO

El esquema de circuito para un fallo línea-línea en un generador sin carga, conectado en Y , es el que se da en la fig. 13.4, con fallo en las fases b y c . Las condiciones de fallo son las expresadas por las ecuaciones siguientes:

$$V_b = V_c \quad I_a = 0 \quad I_b = -I_c$$

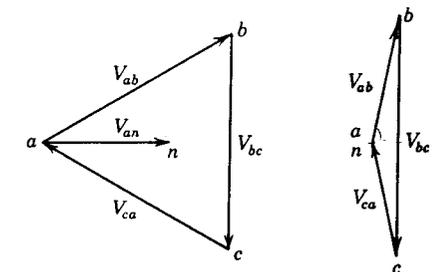


Fig. 13.3 Diagrama vectorial de las tensiones de línea del ej. 13.1 antes y después del fallo.

(a) Antes del fallo. (b) Después del fallo.

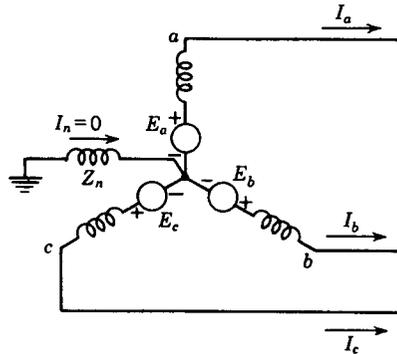


Fig. 14.4 Esquema de circuito para un fallo de línea a línea entre las fases *b* y *c* en los terminales de un generador sin carga, cuyo neutro está puesto a tierra a través de una reactancia.

Con $V_b = V_c$, las componentes simétricas de la tensión, vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

de donde

$$V_{a1} = V_{a2} \tag{13.6}$$

Como $I_b = -I_c$ e $I_a = 0$, las componentes simétricas de la corriente vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -I_c \\ I_c \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$I_{a0} = 0 \tag{13.7}$$

y $I_{a2} = -I_{a1} \tag{13.8}$

Con una conexión desde el neutro del generador a tierra, Z_0 tiene un valor finito. Por tanto,

$$V_{a0} = 0 \tag{13.9}$$

ya que I_{a0} es cero por la ec. (13.7).

La ec. (13.1), con las sustituciones que permiten las ecs. (13.6) a (13.9) se transforma en

$$\begin{bmatrix} 0 \\ V_{a1} \\ V_{a1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{a1} \\ -I_{a1} \end{bmatrix} \tag{13.10}$$

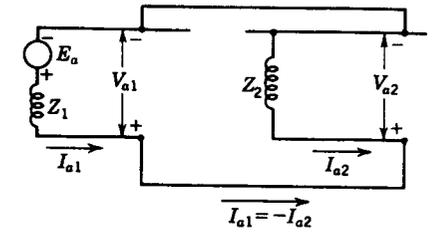


Fig. 13.5 Conexión de las redes de secuencia de un generador sin carga para un fallo de línea a línea entre las fases *b* y *c* en los terminales del generador.

Realizando las operaciones matriciales indicadas y premultiplicando la ecuación matricial resultante por la matriz de fila $[1 \quad 1 \quad -1]$, se obtiene

$$0 = E_a - I_{a1}Z_1 - I_{a1}Z_2 \tag{13.11}$$

y despejando I_{a1}

$$I_{a1} = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2} \tag{13.12}$$

Las ecs. (13.6) a (13.8) y (13.12), son las ecuaciones especiales para un fallo de línea a línea. Se utilizan, junto con la ec. (13.1) y las relaciones de las componentes simétricas, para determinar todas las tensiones y corrientes en el fallo. Las ecuaciones especiales indican la forma en que las redes de secuencia se conectan para representar el fallo. Dado que Z_0 no entra en las ecuaciones, no se utiliza la red de secuencia cero. Las redes de secuencia positiva y negativa tienen que estar en paralelo, puesto que $V_{a1} = V_{a2}$. La conexión en paralelo de las redes de secuencia positiva y negativa, sin la red de secuencia cero, hace $I_{a1} = -I_{a2}$ como se especifica en la ec. (13.8). La conexión de las redes de secuencia para un fallo de línea a línea se ha representado en la fig. 13.5. Las corrientes y tensiones en las redes de secuencia, así conectadas, satisfacen a todas las ecuaciones deducidas para el fallo de línea a línea.

Dado que no hay tierra en el fallo, existe solo una toma de tierra en el circuito (en el neutro del generador) y no puede circular corriente por tierra. Al deducir las relaciones para un fallo línea-línea hemos obtenido $I_{a0} = 0$. Esto está de acuerdo con el hecho de que no pueda circular corriente por tierra, ya que la corriente por tierra I_n es igual a $3I_{a0}$. La presencia o ausencia de un neutro a tierra en el generador no afecta, pues, a la corriente de fallo. Si el neutro del generador no está a tierra, Z_0 tiene un valor infinito y V_{a0} es indeterminado, pero las tensiones de línea a línea pueden determinarse, ya que no contienen componentes de secuencia cero.

EJEMPLO 13.2 Determinar las corrientes subtransitorias y las tensiones de línea a línea en un fallo en condiciones subtransitorias cuando éste se presenta en los terminales del generador descrito en el ej. 13.1. Suponer que el generador funciona sin carga y a la tensión nominal al ocurrir el fallo. Despreciar la resistencia.

Solución

$$I_{a1} = \frac{1.0 + j0}{j0.25 + j0.35} = -j1.667 \text{ por unidad}$$

$$I_{a2} = -I_{a1} = j1.667 \text{ por unidad}$$

$$I_{a0} = 0$$

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} + I_{a0} = -j1.667 + j1.667 = 0$$

$$I_b = a^2 I_{a1} + a I_{a2} + I_{a0}$$

$$= -j1.667(-0.5 - j0.866) + j1.667(-0.5 + j0.866)$$

$$= j0.834 - 1.446 - j0.834 - 1.446 = -2.892 + j0 \text{ por unidad}$$

$$I_c = -I_b = 2.892 + j0 \text{ por unidad}$$

Igual que en el ej. 13.1, la corriente base es 836 A. Por tanto,

$$I_a = 0$$

$$I_b = -2.892 \times 836 = 2420/180^\circ \text{ A}$$

$$I_c = 2.892 \times 836 = 2420/0^\circ \text{ A}$$

Las componentes simétricas de la tensión desde *a* a tierra son:

$$V_{a1} = V_{a2} = 1 - (-j1.667)(j0.25) = 1 - 0.416 = 0.584 \text{ por unidad}$$

$$V_{a0} = 0 \text{ (neutro del generador a tierra)}$$

Las tensiones de línea a tierra son:

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} = 0.584 + 0.584 = 1.168/0^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_b = a^2 V_{a1} + a V_{a2} + V_{a0}$$

$$V_c = V_b = 0.584(-0.5 - j0.866) + 0.584(-0.5 + j0.866)$$

$$= -0.584 \text{ por unidad}$$

Las tensiones de línea a línea son:

$$V_{ab} = V_a - V_b = 1.168 + 0.584 = 1.752/0^\circ \text{ por unidad}$$

$$V_{bc} = V_b - V_c = -0.584 + 0.584 = 0 \text{ por unidad}$$

$$V_{ca} = V_c - V_a = -0.584 - 1.168 = 1.752/180^\circ \text{ por unidad}$$

Las tensiones de línea a línea, expresadas en voltios, serán

$$V_{ab} = 1.752 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} = 13.95/0^\circ \text{ kV}$$

$$V_{bc} = 0 \text{ kV}$$

$$V_{ca} = -1.752 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} = 13.95/180^\circ \text{ kV}$$

13.3 FALLO DOBLE LÍNEA-TIERRA EN UN GENERADOR VACÍO

El diagrama de circuito para un fallo de doble línea a tierra es el representado en la

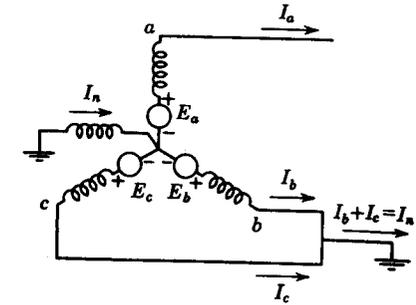


Fig. 13.6 Circuito para un fallo de línea doble a tierra de las fases *b* y *c* en los terminales de un generador sin carga cuyo neutro está puesto a tierra a través de una reactancia.

fig. 13.6. Las fases en fallo son las *b* y *c*. Las condiciones de fallo pueden expresarse por las ecuaciones siguientes:

$$V_b = 0 \quad V_c = 0 \quad I_a = 0$$

Con los valores $V_b = 0$ y $V_c = 0$, las componentes simétricas de la tensión, vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

V_{a0} , V_{a1} y V_{a2} , son pues iguales a $V_a/3$, y

$$V_{a1} = V_{a2} = V_{a0} \quad (13.13)$$

Sustituyendo V_{a1} , V_{a2} y V_{a0} en la ec. (13.1), por $E_a - I_{a1}Z_1$, y premultiplicando ambos miembros por Z^{-1} , siendo

$$Z^{-1} = \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a - I_{a1}Z_1 \\ E_a - I_{a1}Z_1 \\ E_a - I_{a1}Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Z_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_a \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \quad (13.14)$$

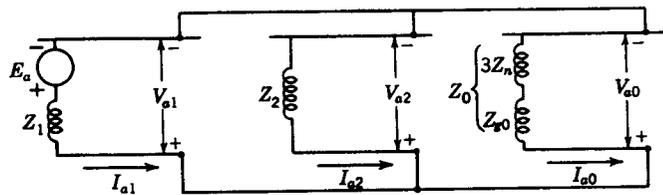


Fig. 13.7 Conexión de las redes de secuencia de un generador sin carga para un fallo de línea doble a tierra de las fases *b* y *c* en los terminales del generador.

Premultiplicando ambos miembros de la ec. (13.14) por la matriz de fila $[1 \ 1 \ 1]$ y observando que $I_{a1} + I_{a2} + I_{a0} = I_a = 0$, se tendrá

$$\frac{E_a}{Z_0} - I_{a1} \frac{Z_1}{Z_0} + \frac{E_a}{Z_1} - I_{a1} + \frac{E_a}{Z_2} - I_{a1} \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{E_a}{Z_1} \quad (13.15)$$

que puede transformarse en la

$$I_{a1} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_0} + \frac{Z_1}{Z_2} \right) = \frac{E_a (Z_2 + Z_0)}{Z_2 Z_0} \quad (13.16)$$

y

$$I_{a1} = \frac{E_a (Z_2 + Z_0)}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_0 + Z_2 Z_0} = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2 Z_0 / (Z_2 + Z_0)} \quad (13.17)$$

Las ecs. (13.13) y (13.17), son las ecuaciones especiales para un fallo de doble línea-tierra. Se utilizan, junto con la ec. (13.1) y las relaciones de las componentes simétricas, para determinar todas las tensiones y corrientes en el fallo. La ec. (13.13) indica que las redes de secuencia deben estar conectadas en paralelo, como se ha puesto en la fig. 13.7, ya que en el fallo, las tensiones de secuencia positiva, negativa y cero son iguales. El examen de la fig. 13.7 hace patente que todas las condiciones que se han deducido anteriormente para el fallo de doble línea-tierra, se satisfacen con esta conexión. El diagrama de conexiones de la red, demuestra que la corriente de secuencia positiva I_{a1} está determinada por la tensión E_a con Z_1 en serie y la combinación en paralelo de Z_2 y Z_0 . La misma relación viene expresada por la ec. (13.17).

Si no existe una conexión a tierra en el generador, no puede circular corriente en el fallo a tierra. En este caso, Z_0 se haría infinita e I_{a0} sería igual a cero. Por lo que se refiere a la corriente, el resultado sería el mismo que el fallo línea-línea. La ec. (13.17), para un fallo doble línea-tierra se aproxima a la ec. (13.12) para un fallo línea-línea, cuando Z_0 tiende a infinito, como puede verse dividiendo el numerador y el denominador del segundo término del denominador de la ec. (13.17) por Z_0 y haciendo que Z_0 tienda a infinito.

EJEMPLO 13.3 Determinar las corrientes subtransitorias y las tensiones línea-línea en un fallo en condiciones subtransitorias cuando en los terminales del generador, descrito

en el ej. 13.1, se produce un fallo de doble línea-tierra. Suponer que el generador funciona en vacío y a la tensión nominal al presentarse dicho fallo.

Solución

$$I_{a1} = \frac{E_a}{Z_1 + Z_2 Z_0 / (Z_2 + Z_0)} = \frac{1.0 + j0}{j0.25 + (j0.35 \times j0.10) / (j0.35 + j0.10)}$$

$$= \frac{1.0}{j0.25 + j0.0778} = \frac{1.0}{j0.3278} = -j3.05 \text{ por unidad}$$

$$V_{a1} = V_{a2} = V_{a0} = E_a - I_{a1} Z_1 = 1 - (-j3.05)(j0.25) \\ = 1.0 - 0.763 = 0.237 \text{ por unidad}$$

$$I_{a2} = -\frac{V_{a2}}{Z_2} = -\frac{0.237}{j0.35} = j0.68 \text{ por unidad}$$

$$I_{a0} = -\frac{V_{a0}}{Z_0} = -\frac{0.237}{j0.10} = j2.37 \text{ por unidad}$$

$$I_a = I_{a1} + I_{a2} + I_{a0} = -j3.05 + j0.68 + j2.37 = 0$$

$$I_b = a^2 I_{a1} + a I_{a2} + I_{a0} \\ = (-0.5 - j0.866)(-j3.05) + (-0.5 + j0.866)(j0.68) + j2.37 \\ = j1.525 - 2.64 - j0.34 - 0.589 + j2.37 \\ = -3.229 + j3.555 = 4.81/132.5^\circ \text{ por unidad}$$

$$I_c = a I_{a1} + a^2 I_{a2} + I_{a0} \\ = (-0.5 + j0.866)(-j3.05) + (-0.5 - j0.866)(j0.68) + j2.37 \\ = j1.525 + 2.64 - j0.34 + 0.589 + j2.37 = 3.229 + j3.555 \\ = 4.81/47.5^\circ \text{ por unidad}$$

$$I_n = 3I_{a0} = 3 \times j2.37 = j7.11 \text{ por unidad}$$

$$I_n = I_b + I_c = -3.229 + j3.555 + 3.229 + j3.555 = j7.11 \text{ por unidad}$$

$$V_a = V_{a1} + V_{a2} + V_{a0} = 3V_{a1} = 3 \times 0.237 = 0.711 \text{ por unidad}$$

$$V_b = V_c = 0$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = 0.711 \text{ por unidad}$$

$$V_{bc} = 0$$

$$V_{ca} = V_c - V_a = -0.711 \text{ por unidad}$$

Expresando los valores obtenidos en amperios y voltios,

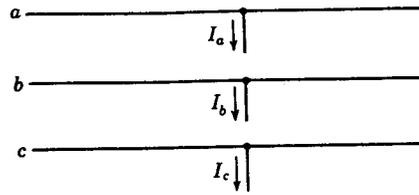
$$I_a = 0$$

$$I_b = 836 \times 4.81/132.5^\circ = 4,025/132.5^\circ \text{ A}$$

$$I_c = 836 \times 4.81/47.5^\circ = 4,025/47.5^\circ \text{ A}$$

$$I_n = 836 \times 7.11/90^\circ = 5,950/90^\circ \text{ A}$$

Fig. 13.8 Los tres conductores de un sistema trifásico. Las varillas portadoras de las corrientes I_a , I_b , I_c , pueden interconectarse para representar distintos tipos de fallos.



$$V_{ab} = 0.711 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} = 5.66/0^\circ \text{ kV}$$

$$V_{bc} = 0$$

$$V_{ca} = -0.711 \times \frac{13.8}{\sqrt{3}} = 5.66/180^\circ \text{ kV}$$

13.4 FALLOS ASIMÉTRICOS EN SISTEMAS DE POTENCIA

En la deducción de las ecuaciones para los componentes simétricos de corrientes y tensiones en una red general durante un fallo, designaremos I_a , I_b e I_c a las corrientes que salen del sistema equilibrado inicial, en el fallo de las fases a , b y c . Podemos imaginar las corrientes I_a , I_b , I_c , refiriéndonos a la figura 13.8, que muestra las tres líneas de un sistema trifásico en la parte de la red en que se presenta el fallo. La corriente que pasa desde cada línea en el fallo se indica por flechas, que se dibujan en el esquema junto a unas varillas de toma hipotéticas en cada línea en el sitio en que está localizado el fallo. Por conexiones adecuadas de las varillas pueden representarse diversos tipos de fallos. Y así, uniendo las varillas b y c se obtiene un fallo línea-línea a través de una impedancia nula. La corriente en la varilla a es entonces cero e I_b es igual a $-I_c$.

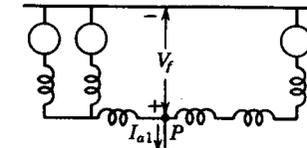
Las tensiones de línea a tierra en el fallo se designarán por V_a , V_b y V_c . Antes de ocurrir el fallo, la tensión de línea a neutro de la fase a en el punto de fallo es V_f , que es una tensión de secuencia positiva, ya que el sistema se supone equilibrado. La tensión anterior al fallo la vimos ya en el cap. 11 en los cálculos para determinar las corrientes en un sistema de potencia cuando tenía lugar un fallo trifásico simétrico.

En la fig. 13.9 se representa un diagrama unifilar de un sistema con tres máquinas sincrónicas. Este sistema es lo suficientemente general para que las ecuaciones de él deducidas puedan ser aplicables a un sistema equilibrado, cualquiera que sea su complejidad. La fig. 13.9 muestra también las redes de secuencia del sistema. El punto en que se supone que ocurre el fallo se señala con la letra P . En el diagrama unifilar de las redes de secuencia. Como ya vimos en el cap. 11, la corriente de carga que circula en la red de secuencia positiva, es la misma, y las tensiones, respecto a tierra, exteriores a las máquinas son las mismas, sin tener en cuenta si las máquinas están representadas por sus tensiones detrás de la reactancia subtransitoria y sus reactancias subtransitorias, o por sus tensiones detrás de la reactancia sincrónica y sus reactancias sincrónicas.

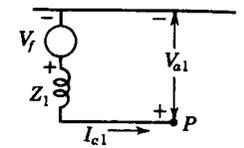
Dado que al dibujar las redes de secuencia se supone que hay linealidad, cada una de las redes puede remplazarse por su equivalente de Thévenin, entre los dos terminales for-



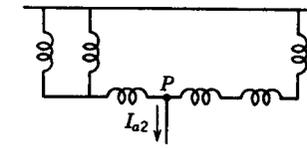
(a) Diagrama unifilar de un sistema trifásico equilibrado.



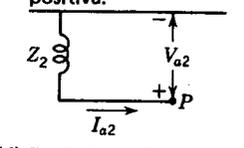
(b) Red de secuencia positiva.



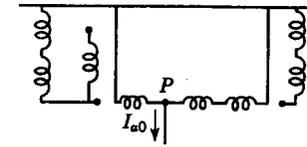
(c) Equivalente Thévenin de la red de secuencia positiva.



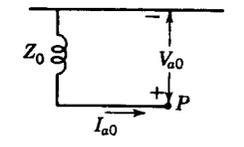
(d) Red de secuencia negativa.



(e) Equivalente Thévenin de la red de secuencia negativa.



(f) Red de secuencia cero.



(g) Equivalente Thévenin de la red de secuencia cero.

Fig. 13.9 Diagrama unifilar de un sistema trifásico, las tres redes de secuencia del sistema y el equivalente Thévenin de cada red para un fallo en el punto P .

mados por su barra de referencia y el punto de aplicación del fallo. El circuito equivalente de Thévenin de cada red de secuencia se ha dibujado al lado de la red correspondiente en la fig. 13.9. La tensión interna del generador único del circuito equivalente para la red de secuencia positiva es V_f , tensión de "pre-fallo" respecto al neutro en el punto de aplicación del fallo. La impedancia Z_1 del circuito equivalente es la impedancia medida entre el punto P y la barra de referencia de la red de secuencia positiva con todas las f.e.m. internas en cortocircuito. El valor de Z_1 depende de las reactancias usadas en la red. Recordamos, por ejemplo, que las reactancias subtransitorias de los generadores y 1,5 veces las reactancias subtransitorias de los motores sincrónicos o las reactancias transientes de los motores son los valores empleados para calcular la corriente simétrica que ha de interrumpirse.

Puesto que, antes de que el fallo tenga lugar, no circulan corrientes de secuencia negativa o cero, la tensión de "pre-fallo" entre el punto P y la barra de referencia es nula en

las redes de secuencia negativa y de secuencia cero. Por consiguiente, no aparecen f.e.m. en los circuitos equivalentes de las redes de secuencia negativa y cero. Las impedancias Z_2 y Z_0 se miden entre el punto P y la barra de referencia en sus redes respectivas y depende de la localización del fallo.

Siendo I_a la corriente que pasa del sistema al fallo, sus componentes I_{a1} , I_{a2} e I_{a0} salen de sus respectivas redes de secuencia y de los respectivos circuitos equivalentes por P , como se ve en la fig. 13.9. Los equivalentes de Thévenin de las redes de secuencia positiva, negativa y cero del sistema son los mismos que las redes de un solo generador. Las ecuaciones matriciales para los componentes simétricos de las tensiones en el fallo deben ser, por tanto, iguales que la ec. (13.1), remplazando E_a por V_f , esto es,

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ V_f \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{a0} \\ I_{a1} \\ I_{a2} \end{bmatrix} \quad (13.18)$$

Por supuesto, es preciso que las impedancias de secuencia cero se evalúen de acuerdo con el teorema de Thévenin y que se compruebe que las corrientes son las componentes de secuencia en las varillas de toma hipotéticas.

13.5 FALLO SIMPLE LINEA-TIERRA EN UN SISTEMA DE POTENCIA

En un fallo de esta clase, las varillas hipotéticas de las tres líneas están conectadas en la forma representada en la fig. 13.10. En el fallo existen las relaciones siguientes:

$$I_b = 0 \quad I_c = 0 \quad V_a = 0$$

Estas tres ecuaciones son las mismas que las que se aplicaban en el caso de un fallo línea-tierra en un generador. Junto con la ec. (13.18) y las relaciones de las componentes simétricas, deben tener las mismas soluciones que las encontradas para las ecuaciones similares en la sec. 13.1, remplazando E_a por V_f . Así, para un fallo línea-tierra,

$$I_{a1} = I_{a2} = I_{a0} \quad (13.19)$$

y

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2 + Z_0} \quad (13.20)$$

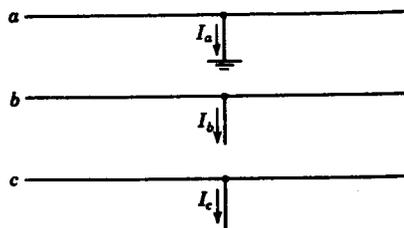


Fig. 13.10 Diagrama de conexiones de las varillas hipotéticas para un fallo de línea simple a tierra.

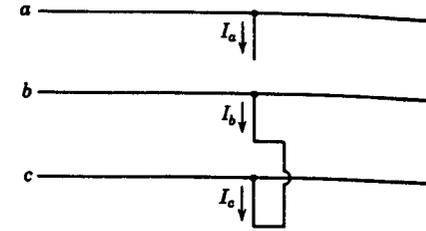


Fig. 13.11 Diagrama de conexiones de las varillas hipotéticas para un fallo de línea a línea.

Las ecs. (13.19) y (13.20) nos dicen que las tres redes de secuencia deben estar conectadas en serie por el punto de fallo para simular un fallo simple de línea a tierra.

13.6 FALLO LINEA-LINEA EN UN SISTEMA DE POTENCIA

En un fallo de línea a línea, las varillas hipotéticas de las tres líneas están conectadas en la forma indicada por la fig. 13.11. En el fallo se cumplen las condiciones:

$$V_b = V_c \quad I_a = 0 \quad I_b = -I_c$$

Las ecuaciones anteriores son de forma idéntica que las que se aplicaban al caso de un fallo línea-línea en un generador aislado. De igual forma que en la sec. 13.2, remplazando la ec. (13.18) por la ec. (13.1), se obtiene

$$V_{a1} = V_{a2} \quad (13.21)$$

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2} \quad (13.22)$$

Estas ecuaciones indican que las redes de secuencia positiva y negativa deben conectarse en paralelo, en el punto de fallo, para simular un fallo línea-línea.

13.7 FALLO DOBLE LINEA-TIERRA EN UN SISTEMA DE POTENCIA

La conexión de las varillas en un fallo de este tipo es la indicada en la fig. 13.12. En el fallo existen las relaciones:

$$V_b = V_c = 0$$

$$I_a = 0$$

Comparando con la sec. 13.3,

$$V_{a1} = V_{a2} = V_{a0} \quad (13.23)$$

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2 Z_0 / (Z_2 + Z_0)} \quad (13.24)$$

Las ecs. (13.23) y (13.24) indican que las tres redes de secuencia deben ser conectadas en paralelo en el punto de fallo para simular el fallo doble línea-tierra.

13.8 INTERPRETACION DE LAS REDES DE SECUENCIA INTERCONECTADAS

En las secciones precedentes hemos visto que las redes de secuencia de un sistema de energía puede interconectarse de forma que la resolución de las redes resultantes proporcione

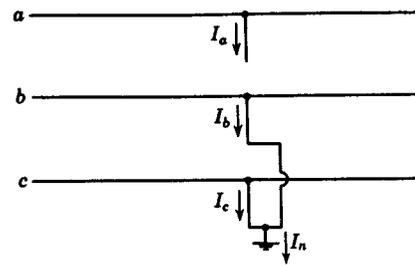


Fig. 13.12 Diagrama de conexiones de las varillas hipotéticas para un fallo doble línea a tierra.

las componentes simétricas de la corriente y la tensión en el fallo. En la fig. 13.13 se dan las conexiones de las redes de secuencia para simular varios tipos de fallos, incluso un fallo trifásico simétrico. Las redes de secuencia se representan esquemáticamente por medio de rectángulos con una línea gruesa en su interior, que representa la barra de referencia de la red, y un punto P que representa el punto de la red en que se presenta el fallo. La red de secuencia positiva contiene f.e.m. que representan las tensiones internas de las máquinas.

Si las f.e.m. en una red de secuencia positiva, tal como la mostrada en la fig. 13.14a se sustituyen por cortocircuitos, la impedancia entre el punto de fallo P y la barra de referencia es la impedancia de secuencia positiva Z_1 en las ecuaciones deducidas para fallos en un sistema de energía y es la impedancia serie del equivalente de Thévenin del circuito entre P y la barra de referencia. Si la tensión V_f se conecta en serie con esta red de se-

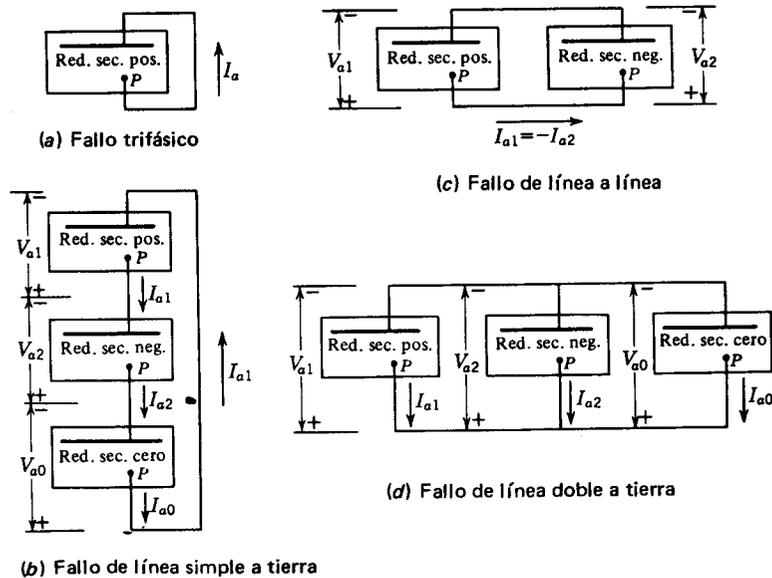


Fig. 13.13 Conexiones de las redes de secuencia para la simulación de varios tipos de fallos. Las redes de secuencia se indican por rectángulos. El punto de fallo es P .

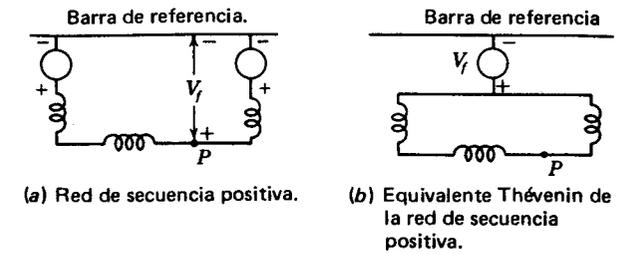


Fig. 13.14 Red de secuencia positiva y su equivalente Thévenin.

cuencia positiva modificada, el circuito resultante, representado en la fig. 13.14b, es el equivalente de Thévenin de la red de secuencia positiva original. Los circuitos representados en la fig. 13.14 son equivalentes solamente en sus efectos sobre cualquier conexión exterior que se haga entre P y la barra de referencia de la red original. Se puede ver fácilmente que no circulan corrientes en las ramas del circuito equivalente en ausencia de una conexión exterior, pero sí circulará corriente en las ramas de la red de secuencia positiva original, si existe una diferencia cualquiera, en fase o amplitud, entre las dos f.e.m. de la red. En la fig. 13.14a, la corriente que circula en las ramas en ausencia de conexión exterior es la corriente de carga anterior al fallo.

Si otras redes de secuencia se interconectan con la red de secuencia positiva de la fig. 13.14a, o su equivalente representado en la fig. 13.14b, la corriente que sale de la red o su equivalente es I_{a1} , y la tensión entre P y la barra de referencia es V_{a1} . Con tal conexión exterior, la corriente en cualquier rama de la red de secuencia positiva original es la corriente de secuencia positiva en la fase a de dicha rama durante el fallo. Está incluida la componente de pre-fallo de esta corriente. La corriente en cualquier rama del equivalente de Thévenin en la fig. 13.14b es, sin embargo, solo la porción de la corriente de secuencia positiva real determinada, repartiendo I_{a1} entre las ramas, según sus impedancias, y no incluye la componente de pre-fallo.

Otro método para estudiar los fallos asimétricos es por medio de la matriz de impedancias de barra. Estudiaremos este método después de examinar el ejemplo siguiente y familiarizarnos más con las redes de secuencia.

EJEMPLO 13.4 Un generador de 7 500 kVA a 4.16 kV alimenta a un grupo de motores síncronos, a través de un banco de transformadores formado por tres unidades monofásicas, cada una de las cuales tiene los valores nominales 2 400/600 V y 2 500 kVA. La reactancia de pérdida de cada transformador es del 10%. Los arrollamientos de 600 V se conectan en triángulo a los motores, y los de 2 400 V, en estrella al generador. El neutro del transformador está puesto a tierra. Las reactancias del generador son $X'' = 10\%$, $X_2 = 10\%$ y $X_0 = 5\%$. La reactancia de neutro a tierra es 5%. Los motores con tensión nominal de 600 V, funcionan con un rendimiento de 89.5% a plena carga, a la tensión de régimen y con factor de potencia unidad. La suma de sus potencias de salida es 6 000 CV. Las reactancias de cada motor, sobre base de sus valores nominales, son $X'' = 20\%$, $X_2 = 20\%$, $X_0 = 4\%$, y cada una de ellas está a tierra a través de una

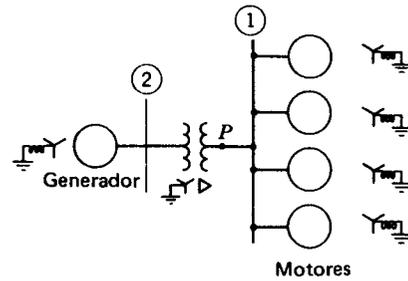


Fig. 13.15 Diagrama unifilar del sistema del Ej. 13.4.

reactancia del 2%. Cada uno de los motores participa, a partes iguales, en una carga total de 5 000 CV y funcionan a la tensión de régimen, factor de potencia inductivo de 85% y rendimiento de 88%, en el momento de producirse un fallo, de línea simple a tierra, en el lado de baja tensión de los transformadores. Considerar el grupo de motores como un solo equivalente. Especificar las redes de secuencia indicando los valores de las impedancias. Determinar las corrientes subtransitorias de línea en todas las partes del sistema, despreciando la corriente de pre-fallo.

Solución El diagrama unifilar del sistema es el de la fig. 13.15. Tomemos los valores nominales del generador como base: 7 500 kVA, 4.16 kV. El valor de régimen trifásico del transformador es igual al base elegido, en efecto:

$$\sqrt{3} \times 2\,400 = 4\,160 \text{ V} = 4.16 \text{ kV}$$

$$3 \times 2\,500 = 7\,500 \text{ kVA}$$

La base para el circuito motor es 7 500 kVA, 600 V. Los motores son iguales y funcionan en idénticas condiciones. Por tanto, son equivalentes a uno solo de 6 000 CV y 600 V. La entrada del motor simple equivalente es

$$\frac{6\,000 \times 0.746}{0.895} = 5\,000 \text{ kVA}$$

y las reactancias del motor equivalente, en por ciento, son las mismas sobre base de los valores nominales combinados que las reactancias de los motores por separado sobre base del valor nominal de cada motor. Las reactancias del motor equivalente sobre la base elegida son

$$X'' = 0.2 \frac{7\,500}{5\,000} = 0.3 \text{ por unidad}$$

$$X_2 = 0.2 \frac{7\,500}{5\,000} = 0.3 \text{ por unidad}$$

$$X_0 = 0.04 \frac{7\,500}{5\,000} = 0.06 \text{ por unidad}$$

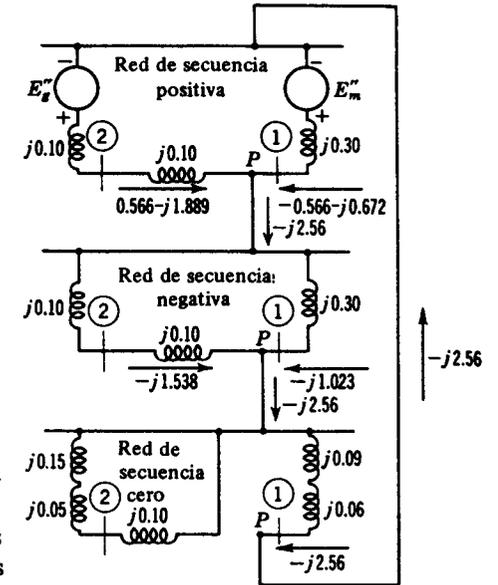


Fig. 13.16 Conexión de las redes de secuencia del ej. 13.4. Las corrientes subtransitorias son por unidad. El fallo en P es de línea simple a tierra.

Obsérvese que si se desea la corriente de simétrica de corto circuito, la reactancia de secuencia positiva para el equivalente del motor, sería

$$1.5 \times 0.3 = 0.45 \text{ por unidad}$$

La reactancia en la red de secuencia cero para tener en cuenta la reactancia entre neutro y tierra del equivalente del motor es.

$$3X_n = 3 \times 0.02 \frac{7\,500}{5\,000} = 0.09 \text{ por unidad}$$

Para el generador la reactancia de neutro a tierra en la red de secuencia cero es

$$3X_n = 3 \times 0.05 = 0.15 \text{ por unidad}$$

La fig. 13.16 representa la conexión de las redes de secuencia en un analizador de redes. Las reactancias son por unidad.

Como los motores funcionan a la tensión de régimen igual a la tensión base del circuito motor, la tensión de pre-fallo de la fase a en el fallo vale

$$V_f = 1.0 \text{ por unidad}$$

La corriente base para el circuito motor es

$$\frac{7\,500,000}{\sqrt{3} \times 600} = 7\,220 \text{ A}$$

y la corriente real en el motor vale

$$\frac{746 \times 5\,000}{0.88 \times \sqrt{3} \times 600 \times 0.85} = 4\,810 \text{ A}$$

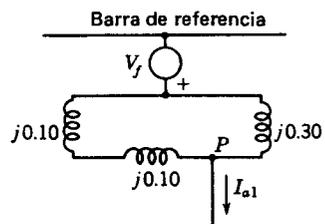


Fig. 13.17 Equivalente Thévenin de la red de secuencia positiva del Ej. 13.4.

La corriente, por unidad, tomada por el motor, a través de la línea a , antes del fallo, es

$$\frac{4.810}{7.220} / -\cos^{-1} 0.85 = 0.667 / -31.8^\circ = 0.566 - j0.351 \text{ por unidad}$$

Las tensiones detrás de la reactancia subtransitoria se calculan en la forma siguiente: Para el motor,

$$\begin{aligned} E''_m &= 1.0 - j0.3(0.566 - j0.351) \\ &= 0.895 - j0.17 \\ &= 0.912 / -10.8^\circ \text{ por unidad} \end{aligned}$$

y para el generador,

$$\begin{aligned} E''_g &= 1.0 + (j0.1 + j0.1)(0.566 - j0.351) \\ &= 1.07 + j0.1132 \\ &= 1.075 / 6.03^\circ \text{ por unidad} \end{aligned}$$

Si la corriente de pre-fallo se desprecia, E''_g y E''_m se hacen iguales a $1.0/0^\circ$ ó la red de secuencia positiva se reemplaza por su circuito equivalente de Thévenin, que se ha dibujado en la fig. 13.17. Siguiendo con los cálculos tenemos

$$Z_1 = \frac{(j0.1 + j0.1)(j0.3)}{j(0.1 + 0.1 + 0.3)} = j0.12 \text{ por unidad}$$

$$Z_2 = \frac{(j0.1 + j0.1)(j0.3)}{j(0.1 + 0.1 + 0.3)} = j0.12 \text{ por unidad}$$

$$Z_0 = j0.15 \text{ por unidad}$$

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2 + Z_0} = \frac{1.0}{j0.12 + j0.12 + j0.15} = \frac{1.0}{j0.39} = -j2.56$$

$$I_{a2} = I_{a1} = -j2.56$$

$$I_{a0} = I_{a1} = -j2.56$$

La corriente en el fallo es igual a $3I_{a0} = 3(-j2.56) = -j7.68$ por unidad. La componente de I_{a1} , que va hacia P desde el transformador, es

$$-j2.56 \frac{j0.3}{j0.2 + j0.3} = -j2.56 \times \frac{3}{5} = -j1.536$$

y la de I_{a1} que va hacia P desde el motor, es

$$-j2.56 \frac{j0.2}{j0.2 + j0.3} = -j2.56 \times \frac{2}{5} = -j1.024$$

De igual forma la componente de I_{a2} desde el transformador es $-j1.536$, y la componente de I_{a2} desde el motor es $-j1.024$. Todas las de I_{a0} circulan del motor a P .

Las corrientes en las líneas en el fallo son:

Hacia P desde el transformador, por unidad,

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -j1.536 \\ -j1.536 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j3.072 \\ j1.536 \\ j1.536 \end{bmatrix}$$

Hacia P desde los motores, por unidad,

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -j2.560 \\ -j1.024 \\ -j1.024 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j4.608 \\ -j1.536 \\ -j1.536 \end{bmatrix}$$

Nuestro método de designación de las líneas significa que las corrientes I_{A1} e I_{A2} en el lado de alta tensión del transformador están relacionadas con las corrientes I_{a1} e I_{a2} en el lado de baja tensión por

$$I_{a1} = jI_{A1} \quad I_{a2} = -jI_{A2} \quad (13.25)$$

Después de multiplicar ambos lados de estas ecuaciones por j , encontramos

$$I_{A1} = -j(-j1.536) = -1.536$$

$$I_{A2} = j(-j1.536) = 1.536$$

y $I_{A0} = 0$

Puesto que no hay corrientes de secuencia cero en el lado del generador en el transformador, luego

$$I_A = I_{A1} + I_{A2} = 0$$

$$I_{B1} = a^2 I_{A1} = (-0.5 - j0.866)(-1.536) = 0.768 + j1.330$$

$$I_{B2} = a I_{A2} = (-0.5 + j0.866)(1.536) = -0.768 + j1.330$$

$$I_B = I_{B1} + I_{B2} = 0 + j2.660 \text{ por unidad}$$

$$I_{C1} = a I_{A1} = (-0.5 + j0.866)(-1.536) = 0.768 - j1.330$$

$$I_{C2} = a^2 I_{A2} = (-0.5 - j0.866)(1.536) = -0.768 - j1.330$$

$$I_C = I_{C1} + I_{C2} = 0 - j2.660 \text{ por unidad}$$

Si hay que determinar las tensiones a lo largo del sistema, sus componentes en cualquier punto pueden ser calculados a partir de las corrientes y reactancias de las redes de secuencia. Las componentes de las tensiones en el lado del generador en el transformador se determinan primero sin considerar el defase. Después es preciso determinar el efecto del defase.

Al evaluar las corrientes de base en los dos lados del transformador, podemos transformar las corrientes por unidad anteriores en amperios. La corriente de base para el circuito motor se determinó ya previamente y es igual a 7 220 A. La corriente de base para el circuito general es

$$\frac{7\,500\,000}{\sqrt{3} \times 4\,160} = 1\,040 \text{ A}$$

La corriente en el fallo es

$$7.68 \times 7\,220 = 55\,500 \text{ A}$$

Las corrientes en las líneas entre el transformador y el fallo son

En la línea *a* $3.072 \times 7\,220 = 22\,200 \text{ A}$

En la línea *b* $1.536 \times 7\,220 = 11\,100 \text{ A}$

En la línea *c* $1.536 \times 7\,220 = 11\,100 \text{ A}$

Las corrientes en las líneas entre el motor y el fallo son

En la línea *a* $4.608 \times 7\,220 = 33\,300 \text{ A}$

En la línea *b* $1.536 \times 7\,220 = 11\,100 \text{ A}$

En la línea *c* $1.536 \times 7\,220 = 11\,100 \text{ A}$

Las corrientes en las líneas entre el generador y el transformador son

En la *A* 0

En la *B* $2.66 \times 1\,040 = 2\,765 \text{ A}$

En la *C* $2.66 \times 1\,040 = 2\,765 \text{ A}$

Las corrientes que hemos calculado son las que circularían al presentarse un fallo, cuando los motores no trabajan en carga. Estas corrientes son correctas únicamente si los motores no toman ninguna corriente. Sin embargo, el planteamiento del problema especifica las condiciones de carga en el momento del fallo y la carga puede, por tanto, ser considerada.

Para tener en cuenta la carga, se añade la corriente por unidad tomada por el motor de la línea *a* antes de ocurrir el fallo, a la componente de I_{a1} que circula hacia *P* desde el transformador y se resta, la misma corriente, de la componente de I_{a1} que circula desde el motor hacia *P*. El nuevo valor de la corriente de secuencia positiva desde el transformador al fallo vale

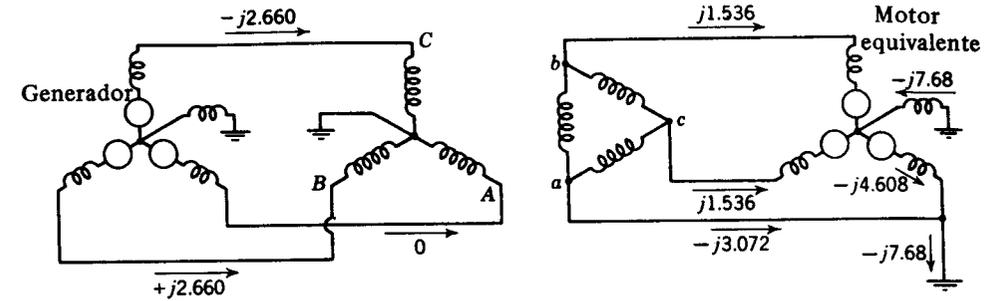


Fig. 13.18 Valores, por unidad, de las corrientes subtransitorias de línea en todas las partes del sistema del ej. 13.4, despreciando la corriente previa al fallo.

$$0.566 - j0.351 - j1.536 = 0.566 - j1.887$$

y el nuevo valor de la corriente de secuencia positiva desde el motor al fallo es

$$-0.566 + j0.351 - j1.024 = -0.566 - j0.673$$

El resto del cálculo, utilizando estos nuevos valores, se realiza como en el ejemplo.

La fig. 13.18 da los valores por unidad de las corrientes de línea subtransitorias en todas las partes del sistema, cuando al ocurrir el fallo está sin carga. La fig. 13.19 muestra los valores al ocurrir el fallo en el sistema, cuando se considera la carga especificada en el ejemplo. En un sistema más grande, en el que la corriente de fallo es mucho mayor que la corriente de carga, el efecto de despreciar la corriente de carga es menor que el indicado por comparación de las figs. 13.18 y 13.19.

13.9 ANALISIS DE FALLOS ASIMETRICOS EMPLEANDO LA MATRIZ DE IMPEDANCIAS DE BARRA

En el cap. 11 utilizamos la matriz de impedancias de barra compuesta de impedancias de secuencia positiva para determinar las corrientes y los voltajes al ocurrir un fallo trifásico.

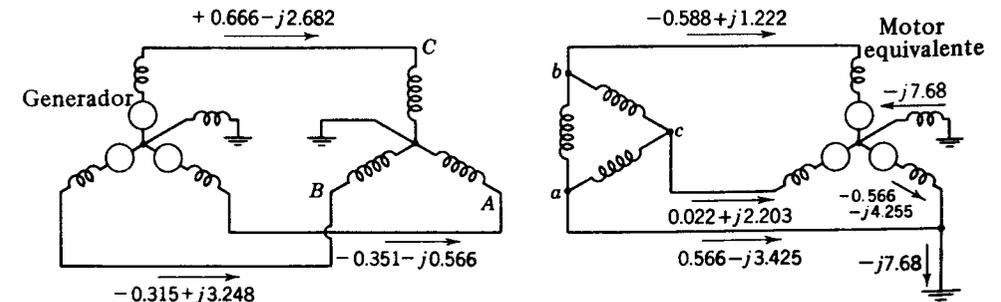


Fig. 13.19 Valores, por unidad, de las corrientes subtransitorias de línea en todas las partes del sistema del ej. 13.4. Teniendo en cuenta la corriente previa al fallo.

El método puede ampliarse fácilmente a fallos asimétricos teniendo en cuenta que las redes de secuencia negativa y cero pueden representarse por redes equivalentes a las impedancias de barra de igual manera como se hizo con las redes de secuencia positiva. La fig. 13.20 corresponde a la fig. 13.13 y muestra la interconexión de las redes de las impedancias de barra para un sistema de tres barras con el fallo en la barra 3. Las redes reales sencillamente se reemplazan por la red equivalente de las impedancias de barra. Los subíndices adicionales 1, 2 y 0 se agregan a las impedancias para identificar sus redes de secuencia.

Un examen de la fig. 13.20 indica que para un fallo simple línea a tierra en la barra 3

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_{33-1} + Z_{33-2} + Z_{33-0}} \quad (13.26)$$

Lo cual debe compararse con la ec. (13.20). Obviamente Z_{33-1} , Z_{33-2} , Z_{33-0} son iguales a Z_1 , Z_2 , Z_0 de la ec. (13.20) si el fallo es en la barra 3. Las matrices de las impedancias de barra nos permiten observar inmediatamente los valores que deben usarse para Z_1 , Z_2 , Z_0 en las ecs. (13.20), (13.22), (13.24). Las admitancias mutuas (sin indicar en la fig. 13.20) nos permiten calcular los voltajes en las barras sin fallos, a partir de los cuales se encuentran las corrientes en las líneas.

EJEMPLO 13.5 Encuentre la corriente subtransiente de un fallo simple línea a tierra primero en la barra 1 y luego en la barra 2 de la red del ej. 13.4. Use las matrices de las impedancias de barra.

Solución Nos referimos a la fig. 13.16 para hallar los elementos de las matrices de admitancia nodal de las tres redes de secuencia, como sigue:

$$Y_{11-1} = Y_{11-2} = \frac{1}{j0.1} + \frac{1}{j0.3} = -j13.3$$

$$Y_{12-1} = Y_{12-2} = \frac{-1}{j0.1} = j10$$

$$Y_{22-1} = \frac{1}{j0.1} + \frac{1}{j0.1} = -j20$$

$$Y_{11-0} = \frac{1}{j0.15} = -j6.67 \quad Y_{12-0} = 0$$

$$Y_{22-0} = \frac{1}{j0.2} + \frac{1}{j0.1} = -j15.0$$

$$Z_{\text{barra } -1} = Z_{\text{barra } -2} = j \begin{bmatrix} -13.3 & 10.0 \\ 10.0 & -20.0 \end{bmatrix}$$

$$Z_{\text{barra } -0} = j \begin{bmatrix} -6.67 & 0.0 \\ 0.0 & -15.0 \end{bmatrix}$$

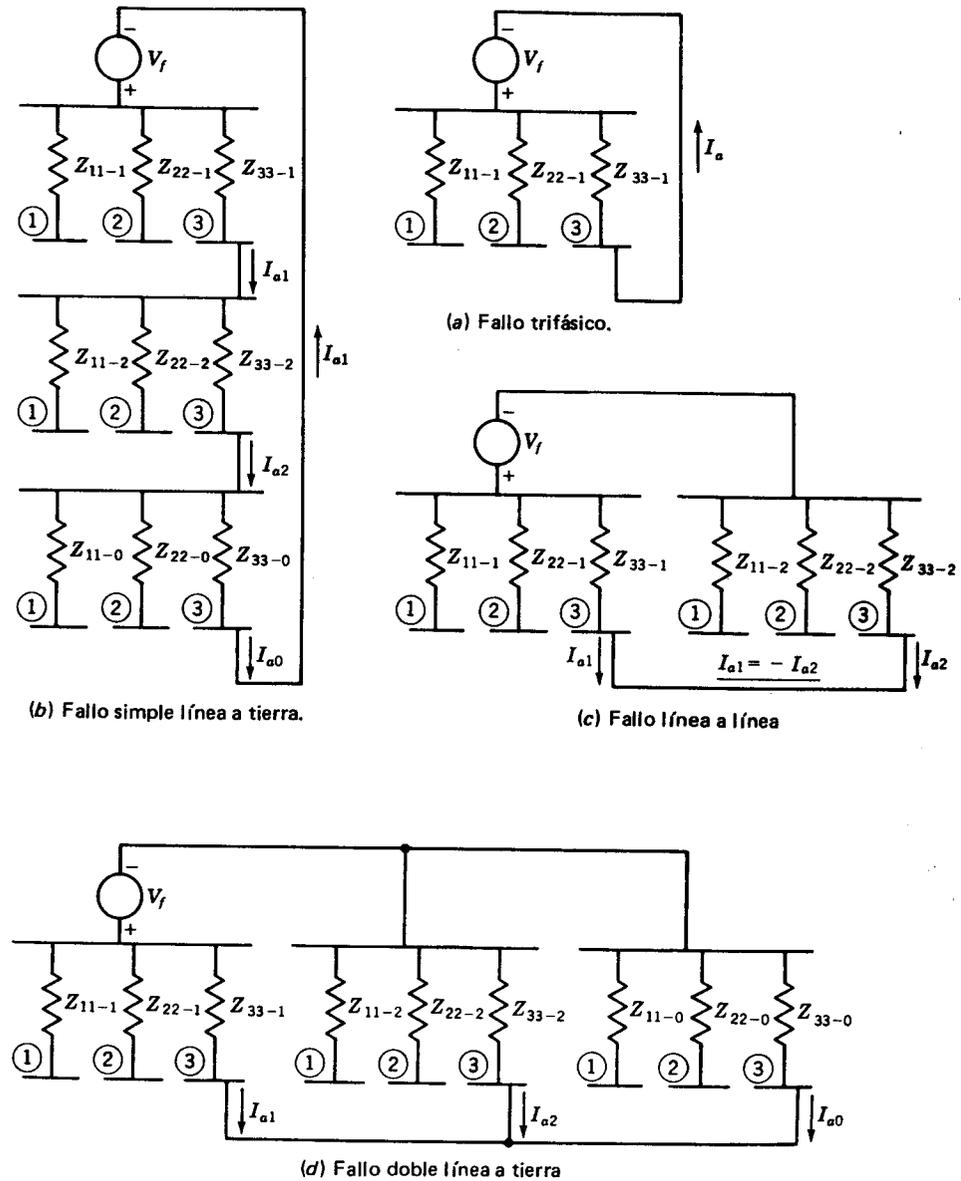


Fig. 13.20 Conexiones de las redes de secuencia equivalentes a las impedancias de barra de un sistema de tres barras para simular distintos tipos de fallos. No se muestran las impedancias mutuas.

Al invertir las tres matrices anteriores obtenemos las tres matrices de las impedancias de barra

$$Y_{\text{barra} - 1} = Y_{\text{barra} - 2} = j \begin{bmatrix} 0.12 & 0.06 \\ 0.06 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\text{barra} - 0} = j \begin{bmatrix} 0.150 & 0.0 \\ 0.0 & 0.067 \end{bmatrix}$$

La corriente en la falla en la barra 1 es.

$$I_f'' = \frac{3 \times 1.0}{j0.12 + j0.12 + j0.15} = -j7.68 \text{ por unidad}$$

lo que concuerda con el valor hallado en el ej. 13.4. Si el fallo es en la barra 2,

$$I_f'' = \frac{3 \times 1.0}{j0.08 + j0.08 + j0.067} = -j13.22 \text{ por unidad}$$

Aunque el método de solución empleando la matriz de impedancias de barra no parece tener grandes ventajas sobre el método del ej. 13.4 en esta red sencilla, nos da la corriente de fallo en cada una de las barras. Para una red grande el método es muy apropiado para computador digital, que puede formar la matriz de impedancias de barra directamente y agregar o quitar líneas específicas fácilmente. Así, con la matriz de impedancias de barra para cada red de secuencia todas las características de las soluciones de un computador digital para fallos simétricos trifásicos pueden extenderse a fallos asimétricos.

13.10 FALLAS A TRAVÉS DE IMPEDANCIAS

Todos los fallos estudiados en las secciones precedentes consistían en cortocircuitos directos entre las líneas y desde una o dos líneas a tierra. Aunque tales cortocircuitos dan lugar al valor más alto de la corriente de fallo y son, por tanto, los valores más prudentes a utilizar en la determinación de los efectos de los fallos previsibles, la impedancia de fallo es nula muy rara vez. La mayor parte de los fallos son el resultado de arcos en los aisladores; la impedancia entre la línea y tierra depende de la resistencia del arco, de la misma torre y de su basamento, si no se utilizan cables de puesta a tierra. Las resistencias del basamento de la torre constituyen la mayor parte de la resistencia entre la línea y tierra, y depende de las condiciones del suelo. La resistencia de la tierra seca es de 10 a 100 veces la del terreno enfangado. El efecto de la impedancia en el fallo se determina deduciendo ecuaciones parecidas a las encontradas para los fallos con impedancia cero. Las conexiones de las varillas hipotéticas para el fallo a través de una impedancia son las dibujadas en la fig. 13.21.

Un sistema que incluye el fallo, permanece simétrico después de presentarse un fallo trifásico que tenga la misma impedancia entre cada línea y un punto común. Sólo circulan corrientes de secuencia positiva. Con la impedancia Z_f de fallo, igual para todas las fases, como se ve en la fig. 13.21a, la tensión en el fallo es

$$V_a = I_a Z_f$$

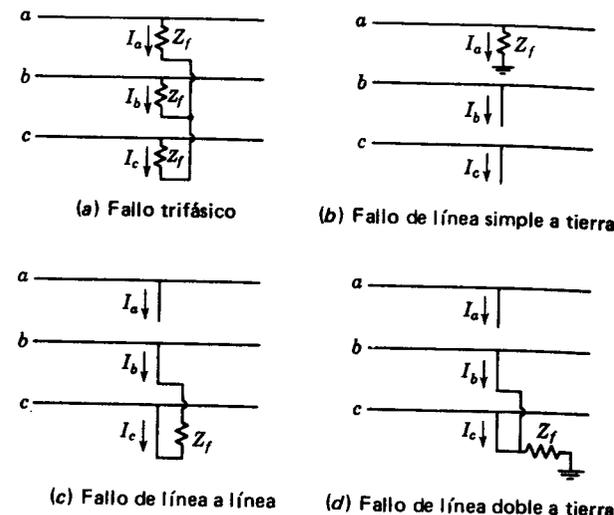


Fig. 13.21 Diagrama de conexiones de las varillas hipotéticas para varios tipos de fallos a través de una impedancia.

y como sólo circulan corrientes de secuencia positiva,

$$V_{a1} = I_{a1} Z_f = V_f - I_{a1} Z_1$$

y

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_f} \tag{13.27}$$

La conexión de la red de secuencia e- la representada en la fig. 13.22a.

Se podría hacer una deducción formal para los fallos de línea simple a tierra y línea doble a tierra a través de una impedancia, como en las figs. 13.21b y d, pero, mejor, llegaremos a las conexiones correctas de la red de secuencia por comparación con los fallos sin impedancia. Consideremos un generador con todos los terminales abiertos y su neutro puesto a tierra. En tal generador, un fallo de línea simple, o doble, a tierra a través de Z_f no es diferente respecto al valor de la corriente de fallo que el mismo tipo de fallo sin impedancia, pero con Z_f colocada en la conexión entre el neutro del generador y tierra. Para tener en cuenta una impedancia Z_f en el neutro del generador, añadimos $3Z_f$ a la red de secuencia cero. Mediante el teorema de Thévenin podemos aplicar el mismo razonamiento a estos tipos de fallos en un sistema de energía. De esta forma, las conexiones de la red de secuencia para un fallo de línea simple a tierra y para un fallo de línea doble a tierra se han dibujado en la fig. 13.22b y d. De estas figuras, para un fallo de línea simple a tierra, a través de Z_f

$$I_{a1} = I_{a2} = I_{a0}$$

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2 + Z_0 + 3Z_f} \tag{13.28}$$

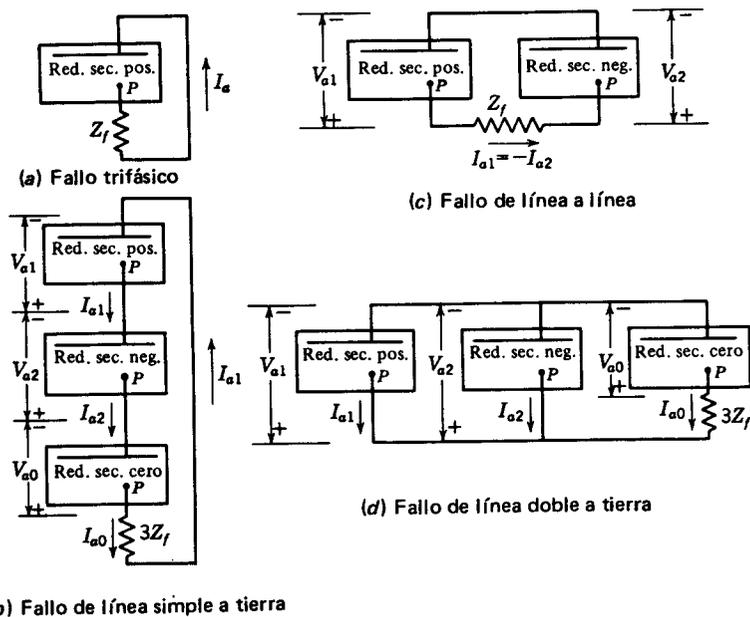


Fig. 13.22 Conexiones de las redes de secuencia para la simulación de varios tipos de fallos, a través de una impedancia, en el punto P.

y para un fallo de doble línea a tierra, por Z_f ,

$$V_{a1} = V_{a2}$$

$$I_{a1} = \frac{V_f}{Z_1 + Z_2(Z_0 + 3Z_f)/(Z_2 + Z_0 + 3Z_f)} \quad (13.29)$$

En la fig. 13.21c se representa un fallo de línea a línea a través de una impedancia. Las condiciones en el fallo son

$$I_a = 0 \quad I_b = -I_c \quad V_c = V_b - I_b Z_f$$

I_a , I_b e I_c guardan entre sí las mismas relaciones que en el fallo de línea a línea sin impedancia. Por tanto,

$$I_{a1} = -I_{a2}$$

Las componentes de secuencia de la tensión vienen dadas por

$$\begin{bmatrix} V_{a0} \\ V_{a1} \\ V_{a2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_b - I_b Z_f \end{bmatrix} \quad (13.30)$$

o

$$3V_{a1} = V_a + (a + a^2)V_b - a^2 I_b Z_f \quad (13.31)$$

$$3V_{a2} = V_a + (a + a^2)V_b - a I_b Z_f \quad (13.32)$$

Por tanto,

$$3(V_{a1} - V_{a2}) = (a - a^2)I_b Z_f = j\sqrt{3} I_b Z_f \quad (13.33)$$

Y puesto que $I_{a1} = -I_{a2}$,

$$I_b = a^2 I_{a1} + a I_{a2} = (a^2 - a)I_{a1} = -j\sqrt{3} I_{a1} \quad (13.34)$$

y, sustituyendo I_b de la ec. (13.34) en la ec. (13.33), obtenemos

$$V_{a1} - V_{a2} = I_{a1} Z_f \quad (13.35)$$

La ec. (13.35) exige la inserción de Z_f entre los puntos de fallo en las redes de secuencia negativa y positiva para cumplir las condiciones exigidas para el fallo. Las conexiones de las redes de secuencia para un fallo de línea a línea por impedancia son las representadas en la fig. 13.22c. Lógicamente, la matriz de las impedancias de barra puede usarse ventajosamente para encontrar Z_1 , Z_2 , y Z_0 de las ecs. (13.27), (13.28), (13.29) y (13.35).

Los fallos a través de impedancia son similares a cargas monofásicas. La impedancia Z_f del fallo de línea simple a tierra es equivalente a la conexión de una carga monofásica Z_f de la línea a al neutro. La impedancia Z_f del fallo de línea a línea es equivalente a la conexión de una carga monofásica Z_f desde la línea b a la c .

13.11 CÁLCULOS DIGITALES DE LAS CORRIENTES DE FALLA

Los programas modernos de los computadores digitales para calcular la corriente de falla comúnmente se basan en la matriz de las impedancias de barra. Ordinariamente los tipos de fallos estudiados son trifásicos y simples línea a tierra. Puesto que las aplicaciones de los interruptores se hacen de acuerdo con la corriente simétrica de corto circuito que debe interrumpirse, como se describe en la sec. 11.6, esta corriente se calcula para los dos tipos de fallas. La impresión contiene la corriente de falla total y las contribuciones de cada línea. Los resultados también contienen esas cantidades cuando cada línea conectada a la barra del fallo se abre al tiempo que las otras están en funcionamiento.

El programa usa los datos de las líneas y de sus impedancias suministrados por el programa de estudio de cargas e incluye la reactancia para cada máquina que forman las matrices de impedancias de barra de secuencia cero y positiva. La red de secuencia negativa es la misma que la red de secuencia positiva y para un fallo simple línea a tierra en la barra 1, I_{a1} se calcula en por unidad como 1.0 dividido entre la suma de $2Z_{11-1}$ y Z_{11-0} .

En la hoja de impresión del computador se incluyen, si se desea, los voltajes de barra como también las corrientes en las líneas distintas a esas conectadas a la barra con el fallo pues esta información puede fácilmente hallarse en la matriz de impedancias de barra.

PROBLEMAS

- 13.1 Un turbogenerador de 60 Hz tiene como valores nominales 10 MVA y 13,8 kV. Está conectado en Y y puesto sólidamente a tierra. Funciona a la tensión de régimen y sin carga. Se desconecta del resto del sistema. Sus reactancias son $X'' = X_2 = 0.15$ y $X_0 = 0.05$ por unidad. Determinar la relación de la corriente de línea subtransitoria, para un fallo línea-tierra, a la corriente de línea subtransitoria para un fallo trifásico simétrico.
- 13.2 Determinar la relación de la corriente de línea subtransitoria, para un fallo de línea a línea, a la corriente subtransitoria, para un fallo trifásico simétrico, en el generador del prob. 13.1.
- 13.3 Determinar los ohmios de reactancia inductiva que es preciso intercalar en la conexión al neutro del generador del prob. 13.1 para limitar la corriente subtransitoria de línea en un fallo simple de línea a tierra a la de un fallo trifásico.
- 13.4 Con la reactancia inductiva determinada en el prob. 13.3 para el neutro del generador del prob. 13.1, hallar las relaciones de las corrientes subtransitorias de línea a la corriente subtransitoria de línea en un fallo trifásico, para los casos siguientes: (a) fallo de línea simple a tierra, (b) fallo de línea a línea, (c) fallo de línea doble a tierra.
- 13.5 ¿Cuántos ohmios de resistencia, en la conexión al neutro del generador del prob. 13.1 limitarían la corriente subtransitoria de línea en un fallo de línea a tierra, a la de un fallo trifásico?
- 13.6 Un generador de 10 MVA, 6,9 kV, tiene $X'' = X_2 = 15\%$ y $X_0 = 5\%$. Su neutro está puesto a tierra por una reactancia de 0.381Ω . El generador funciona a 6,9 kV en vacío, y está desconectado del sistema en el momento de presentarse un fallo de línea a tierra en sus terminales. Determinar la corriente subtransitoria en la fase en fallo.
- 13.7 Un turbogenerador de 10 MVA a 13,8 kV, con $X'' = X_2 = 15\%$ y $X_0 = 5\%$ va a ser conectado a un sistema de energía. El generador tiene una reactancia limitadora de corriente de 0.7Ω en el neutro. Antes de conectarse al sistema el generador, se ajusta su tensión a 13,2 kV, desarrollándose en los terminales *b* y *c* un fallo de línea doble a tierra. Determinar la corriente eficaz simétrica inicial a tierra y en la línea *b*.
- 13.8 Un generador de 15 MVA, 6,9 kV, conectado en estrella, tiene reactancias de secuencia positiva, negativa y cero, de 25, 25 y 8%, respectivamente. Con objeto de reducir la corriente de cortocircuito en el caso de un fallo a tierra, se coloca en la línea del neutro a tierra una reactancia inductiva del 6% sobre base del valor nominal del generador. En los terminales del generador, funcionando a la tensión nominal y desconectado del sistema, se presenta un fallo de línea a línea. Determinar las corrientes eficaces simétricas iniciales en la línea y en el neutro y las tensiones de línea a línea y línea a neutro: (a) si el fallo no incluye tierra, (b) si está a tierra en el momento de ocurrir.
- 13.9 Las reactancias de un generador de 10 MVA, 6,9 kV, son $X'' = X_2 = 15\%$ y $X_0 = 5\%$. El neutro del generador está puesto a tierra por una reactancia de 0.381Ω . El generador se conecta a un transformador Δ -Y, cuyos valores nominales son 10 MVA, 6,9 Δ -44Y kV, con una reactancia del 7,5%. El neutro del transformador está puesto a tierra. La tensión terminal del generador es 6,9 kV, cuando se presenta un fallo de línea a tierra en el lado, con circuito abierto, de alta tensión del transformador. Determinar la corriente eficaz simétrica inicial en todas las fases del generador.



Fig. 13.23 Diagrama unifilar en el prob. 13.13.

- 13.10 Un generador alimenta un motor a través de un transformador Y- Δ . El generador se conecta al lado Y del transformador. Un fallo ocurre entre los terminales del motor y del transformador. Las componentes simétricas de la corriente subtransiente del motor hacia el fallo son $I_{a1} = -0.8 - j2.6$ por unidad, $I_{a2} = -j2.0$ por unidad, $I_{a0} = -j3.0$ por unidad. Del transformador al fallo $I_{a1} = 0.8 - j0.4$ por unidad, $I_{a2} = -j1.0$ por unidad, $I_{a0} = 0$. Suponga $X''_1 = X_2$ para el motor y el generador. Describa el tipo de fallo. Encontrar (a) la corriente de pre-fallo, si la hay, en la línea *a*, (b) la corriente subtransiente de fallo en por unidad, (c) la corriente subtransiente en cada fase del generador en por unidad.
- 13.11 Calcular las corrientes subtransitorias en todas las partes del sistema del ej. 13.4, despreciando la corriente previa al fallo si éste, en el lado de baja tensión del transformador, es un fallo de línea a línea.
- 13.12 Repetir el prob. 13.11 para un fallo de doble línea a tierra.
- 13.13 Dos barras de alta tensión se muestran en el diagrama unifilar de la fig. 13.23. Ambas máquinas son de 1 250 kVA, 600 V, con reactancias de $X'' = X_2 = 10\%$ y $X_0 = 4\%$. Cada transformador trifásico tiene valores nominales 1 250 KVA, 600 Δ -4 160YV, con una reactancia de pérdida del 5%. Las reactancias de la línea de transmisión son $X_1 = X_2 = 15\%$ y $X_0 = 50\%$ sobre una base de 1 250 KVA, 4.16 KV. Hallar la matriz de impedancias de barra de 2×2 para cada una de las tres redes de secuencia. Si no entra ninguna corriente a la red, hallar la corriente subtransiente a tierra para una falla doble línea a tierra en las líneas B y C en la barra 1. Repetir para una falla en la barra 2. Cuando haya fallo en la barra 1, determine la corriente en la base b de la máquina 1 si las líneas se designan de tal manera que I_{A1} e I_{a1} estén desfasados 90° .
- 13.14 Para la red indicada en la fig. 11.18, hallar la corriente subtransiente en por unidad (a) en un fallo simple línea a tierra en la barra 2, (b) en la fase del fallo de la línea 1-2. Suponga que no circula corriente con anterioridad al fallo y que el voltaje de pre-fallo en todas las barras sea 1,0 por unidad. Los generadores están conectados en estrella. Los transformadores están en los extremos de cada línea de transmisión en el sistema y están Y-Y con neutros a tierra excepto que los transformadores que conectan las líneas a la barra 3 son Y- Δ con el neutro de la Y sólidamente a tierra. El lado Δ de los transformadores Y- Δ están conectados a la barra 3. Todas las reactancias indicadas en la fig. 11.18 entre las barras incluyen las reactancias de los transformadores. Los valores de la reactancia secuencia cero para esas líneas incluyendo los transformadores son 2.0 veces los indicados en la fig. 11.18. Las reactancias de secuencia cero de los generadores conectados a las barras 1 y 3 son 0.04 y 0.08 por unidad, respectivamente. El neutro del generador en la barra 1 se conecta a tierra a través de una reactancia de 0.02 por unidad, y el neutro del generador en la barra 3 no se conecta a tierra.
- 13.15 Hallar la corriente subtransiente en por unidad en un fallo línea a línea en la barra 4 de la red del ej. 8.1. Ignore la resistencia y la corriente de pre-fallo, suponga que los voltajes de barra son 1.0 antes de ocurrir el fallo, utilice los cálculos del ej. 11.4. Encuentre la corriente en las líneas 1-4 y 2-4. Suponga que las líneas 1-4 y 2-4 se conectan directamente a la barra 4 y que las reactancias de secuencia positiva y negativa son idénticas.

14

ESTABILIDAD DE SISTEMA

Cuando los generadores de corriente alterna eran accionados por máquinas de vapor alternativas, uno de los problemas fundamentales de servicio era el de las oscilaciones. Las variaciones periódicas en el par aplicado a los generadores, originaba variaciones periódicas de velocidad. Las variaciones periódicas resultantes en la tensión y la frecuencia se transmitían a los motores conectados al sistema. Las oscilaciones de los motores, originadas por las variaciones de tensión y frecuencia, hacía que, a veces, perdieran completamente el sincronismo, si su frecuencia natural de oscilación coincidía con la frecuencia de oscilación originada por las máquinas de accionamiento de los generadores. Se utilizaron primeramente arrollamientos amortiguadores con el fin de reducir al mínimo la oscilación, aprovechando la acción amortiguadora de las pérdidas originadas por las corrientes inducidas en dichos arrollamientos, por cualquier movimiento relativo entre el rotor y el campo giratorio establecido por la corriente en el inducido. El empleo de las turbinas ha reducido el problema de la oscilación, aunque todavía subsiste cuando el accionamiento se realiza con un motor diesel. Sin embargo, el mantenimiento del sincronismo entre las diversas partes de un sistema de energía se hace cada vez más difícil a medida que crecen los sistemas y sus interconexiones. [La tendencia de un sistema, o de sus partes componentes, a desarrollar fuerzas para mantener el sincronismo y el equilibrio, se conoce como *estabilidad*.]

14.1 EL PROBLEMA DE LA ESTABILIDAD

Consideremos un motor síncrono conectado por un transformador a una fuente de energía. Como vimos en el cap. 9 la potencia entregada al motor viene determinada por la tensión de la fuente, la tensión interna del motor y el ángulo de fase entre estas dos tensiones. El ángulo de fase depende de la posición del rotor del motor. La potencia aplicada al motor cuando marcha con velocidad constante es, desde luego, igual a la proporcionada por el motor más sus pérdidas. Si aumenta la carga mecánica del motor, éste no puede suministrar toda la carga hasta que aumenta la potencia tomada. Por tanto, el motor marchará más despacio. El defase entre la tensión interna del motor y la tensión del sistema aumenta hasta que la potencia aplicada al motor sea igual a la suministrada más las pérdidas. Mientras el ángulo aumenta, el exceso de potencia exigida por el motor sobre la tomada de la red se compensa con la energía almacenada por el sistema giratorio. Al disminuir la velocidad del motor, la energía almacenada suministra parte de la carga. Si el motor oscila alrededor del nuevo punto de equilibrio y, eventualmente, llega al reposo, la aplicación de la carga no ha sido causa de la pérdida de estabilidad del motor. Si el aumento de carga es excesivamente grande o se aplica muy bruscamente, el motor puede perder el sincronismo, en cuyo caso se dice que se ha sobrepasado el límite de estabilidad. Si aumenta la reactancia del transformador o la de una línea de transporte entre el motor y la fuente de energía, la probabilidad de mantener la estabilidad disminuye, como veremos posteriormente.

El invento de los reguladores de tensión hizo posible y práctica la utilización de líneas con mayor impedancia y costo más bajo; pero el aumento de reactancia presentó a los ingenieros electricistas un problema agudizado de estabilización. El rápido desarrollo de los sistemas de producción y distribución de energía después de la primera Guerra Mundial fue interrumpido solo temporalmente durante el período de depresión de los años treinta, y, a medida que los sistemas particulares crecían, lo hacían también las interconexiones entre ellos. El intercambio de energía entre diferentes compañías eléctricas y el transporte de energía a grandes distancias constituyen un tributo a la capacidad de los ingenieros para resolver el problema, a pesar de las elevadas reactancias inherentes a las grandes distancias en las líneas entre las fuentes y las cargas.

Una definición de estabilidad es considerarla como la condición entre máquinas sincrónicas en las cuales las posiciones angulares de los rotores de las máquinas relativas entre sí permanecen constantes cuando no hay perturbaciones o se hacen constantes cuando se presenta una perturbación aperiódica.

El límite de estabilidad es el máximo flujo posible de energía que puede pasar por un punto particular determinado del sistema, sin causar pérdidas de estabilidad¹.

Los términos estabilidad y límite de estabilidad se aplican tanto al régimen permanente como el transitorio. El *límite de estabilidad de régimen permanente* se refiere al máximo flujo posible de energía que puede pasar por un punto determinado sin que haya pérdida de estabilidad cuando se aumenta la energía muy gradualmente. El *límite de esta-*

¹ Para definiciones precisas de estos y otros términos referentes a estabilidad de sistemas de potencia véase "IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronics Terms", Institute of Electrical and Electronics Engineers, Nueva York, 1972.

bilidad en régimen transitorio se refiere al máximo flujo posible por un punto determinado, sin pérdida de estabilidad al presentarse una brusca perturbación. La perturbación transitoria puede ser, por ejemplo, un brusco aumento de la carga que podría llevarse a cabo con estabilidad si se verifica gradualmente, pero que origina la pérdida de estabilidad a causa de la velocidad de aplicación. Más frecuentemente la perturbación para la que se desea conocer el límite de estabilidad transitoria, se debe a un fallo, o por la desconexión del circuito de una de las diversas líneas en paralelo, o por la combinación de un fallo y de su subsiguiente aislamiento por desconexión de parte del sistema. Todo sistema está sometido a perturbaciones en régimen transitorio, siendo el límite de estabilidad en régimen transitorio, casi siempre, más bajo que el límite de estabilidad en el régimen permanente; por todo ello dedicaremos la mayor parte de nuestra atención, en los estudios siguientes a la estabilidad en el régimen transitorio. En algunos casos será más bien la estabilidad del estado permanente el factor limitativo en sistemas sobrecargados después de terminar el período transitorio. Se puede ampliar el programa de calculadora digital al que determina las oscilaciones en el período transitorio para determinar también la estabilidad en el régimen transitorio en ese momento.

Un sistema de energía muy sencillo está formado por un generador o motor conectados a una barra infinita. Casi tan sencillo como éste, es un sistema que contenga solamente dos máquinas síncronas. Dado que las máquinas situadas en un punto cualquiera de un sistema actúan juntas, se acostumbra en los estudios de estabilidad a considerar todas las máquinas que están en un punto como una sola más grande. Frecuentemente se considera a máquinas que realmente no están conectadas a una misma barra, pero que no están separadas por líneas de reactancia grande, como concentradas en una sola máquina. Al estudiar el comportamiento de una máquina conectada a un sistema grande, puede considerarse que el sistema tiene tensión y frecuencia constantes, o sea, se asume que el sistema es una barra infinita en el sitio de conexión de la máquina. Así, un sistema de varias máquinas puede reducirse, algunas veces, a un sistema equivalente de dos máquinas. Los factores que afectan a la estabilidad de un sistema de dos máquinas o a la estabilidad de una máquina unida a una barra infinita, son los mismos que influyen en un sistema de varias máquinas. El estudio detallado de los problemas de estabilidad en un sistema de muchas máquinas está fuera del alcance de este libro. Estudiaremos brevemente la determinación de la estabilidad en régimen transitorio en un sistema de varias máquinas con una calculadora digital. La comprensión del programa de computador se entiende mejor estudiando en más detalle el problema de una máquina conectada a una barra infinita.

14.2 ESTABILIDAD EN REGIMEN PERMANENTE

El circuito equivalente de un sistema de dos máquinas se considera que es una red simple de dos pares de terminales. La tensión del extremo transmisor para las condiciones de régimen permanente, es la tensión detrás de la reactancia síncrona del generador, y la tensión del extremo receptor es la tensión detrás de la reactancia síncrona del motor. La ec. (5.62) se desarrolla para la potencia en los extremos transmisor y receptor de la red. Las mismas ecuaciones se aplican al sistema de dos máquinas y dan la potencia desarrollada por el generador y el motor si las tensiones detrás de las reactancias síncronas de las máquinas sustituyen a V_S y V_R y si las constantes ABCD del circuito incluyen la red for-

mada por las impedancias síncronas de las máquinas y el circuito que las conecta. La ec. (5.62) viene a ser entonces la potencia recibida por el motor, esto es,

$$P_m = \frac{|E_g| \cdot |E_m|}{|B|} \cos(\beta - \delta) - \frac{|A| \cdot |E_m|^2}{|B|} \cos(\beta - \alpha) \quad (14.1)$$

Si $|E_g|$ y $|E_m|$ son constantes, solamente el ángulo de fase entre ellas puede cambiar así como la potencia transferida cambia y esto se logra por un cambio correspondiente en las posiciones angulares relativas de los rotores. Si δ es la única variable en la ec. (14.1) vemos que la máxima potencia se entrega al motor cuando $\delta = \beta$, y así

$$P_{m,\text{máx}} = \frac{|E_g| \cdot |E_m|}{|B|} - \frac{|A| \cdot |E_m|^2}{|B|} \cos(\beta - \alpha) \quad (14.2)$$

La potencia dada por las ecuaciones anteriores es potencia por fase si las tensiones son de línea a neutro. Si las tensiones de las ecuaciones son tensiones trifásicas entre líneas, la potencia es la potencia total trifásica.

Ecuaciones similares a las ecs. (14.1) y (14.2) pueden desarrollarse para la potencia de salida de los generadores (ver prob. 14.1). Si se comparan las ecuaciones para la salida del generador y la entrada del motor, se observa que la máxima potencia que puede recibir el motor es menor que la máxima potencia que puede entregar el generador a la red, si ésta contiene alguna resistencia o alguna admitancia. O sea, la ec. (14.2) determina el límite de estabilidad en régimen permanente de tal sistema.

Si el ángulo de par δ entre el generador y el motor de un sistema de dos máquinas es menor que β , cualquier carga adicional colocada en el árbol del motor hace que δ se incremente. Si la carga en el árbol exige una potencia mayor que la desarrollada para $\delta = \beta$, δ continuará creciendo, ya que el motor no puede mantener la velocidad si la potencia por él desarrollada es menor que la potencia de salida al árbol. El exceso de potencia necesaria sobre la potencia desarrollada, debe ser suministrada a expensas de la energía almacenada en el sistema giratorio por la disminución de su velocidad. El incremento resultante para δ sobre el valor de β da lugar a una potencia desarrollada más baja y el motor disminuye aún más su velocidad, dando lugar a valores mayores de δ y mayor disminución de potencia. El motor acabará por perder el sincronismo con el generador.

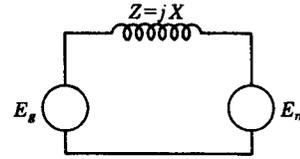
Si se desprecia la resistencia, el diagrama de impedancia de secuencia positiva, para un sistema de dos máquinas, es el representado en la fig. 14.1 en la que X incluye las reactancias síncronas por unidad del generador y el motor, y las reactancias del circuito de conexión. Dado que se desprecian la resistencia y la admitancia en paralelo las constantes generalizadas de circuito de la red son

$$\begin{aligned} A &= 1/0^\circ & B &= |X|/90^\circ \\ C &= 0 & D &= 1/0^\circ \end{aligned}$$

Al sustituir las constantes anteriores en la ec. (14.1), la potencia transferida entre las dos máquinas viene dada por

$$P = \frac{|E_g| \cdot |E_m|}{|X|} \sin \delta \quad (14.3)$$

Fig. 14.1 Diagrama de impedancias de secuencia positiva de un sistema de dos máquinas.



De igual forma, de la ec. (14.2) la potencia máxima transferida vale

$$P_{\text{máx}} = \frac{|E_g| \cdot |E_m|}{|X|} \quad (14.4)$$

Como se desprecia la resistencia, no hay pérdidas del tipo I^2R y toda la potencia eléctrica dada por el generador la toma el motor.

Despreciando la resistencia y la capacidad en paralelo se obtiene para el motor un valor calculado más alto, para el límite de estabilidad en el régimen permanente, que el realmente existente, como puede verse comparando las ecs. (14.2) y (14.4). La constante $|B|$ en la ec. (14.2) es la impedida en serie del circuito y, si la resistencia se incluye, $|B|$ es ligeramente mayor que el término $|X|$ en la ec. (14.4). El ángulo β , que es el ángulo de impedancia, es menor que 90° , si se considera la resistencia. Estos dos factores hacen que la potencia calculada, incluyendo la resistencia, sea más pequeña que la calculada si ésta se desprecia; esto es, la omisión de R da un resultado más optimista. Si se incluye la capacidad en paralelo, la línea de transporte entre los extremos transmisor y receptor se puede representar por el π , nominal o equivalente. Para un π simétrico, las ecs. (5.10) dan, para las constantes generalizadas de circuito,

$$A = 1 + \frac{ZY}{2} \quad \text{y} \quad B = Z$$

Si $Y = 0$, la constante A es $1,0/0^\circ$, pero si se incluye tanto la resistencia como la capacidad en paralelo, $|A|$ es menor que 1,0 y α es un ángulo positivo pequeño. La disminución de $|A|$ y el aumento de α tiene efectos opuestos sobre la potencia máxima. Ordinariamente, despreciar la capacidad en paralelo proporciona un resultado pesimista del límite de estabilidad. En los cálculos de estabilidad es preciso usar el mismo criterio respecto a la inclusión en el análisis de la resistencia y la admitancia en paralelo que en cualquier otro tipo de cálculo. Es frecuente que el grado de exactitud que se obtiene, haciendo un cálculo más preciso, no compense las complicaciones que trae consigo. En el caso de la estabilidad en el régimen transitorio, la resistencia es importante en las oscilaciones amortiguadas y despreciarla lleva a un resultado pesimista.

La ec. (14.4), sugiere los métodos a utilizar para aumentar los límites de estabilidad en el régimen permanente de un sistema. Un aumento en la excitación del generador, del motor o de ambos, aumenta la potencia máxima que puede ser transferida entre las máquinas. Si las tensiones internas se aumentan, sin aumentar la potencia transferida, el ángulo de par δ disminuye, como puede deducirse de la ec. (14.3). Cualquier reducción en la reactancia de la red, da lugar a un aumento del límite de estabilidad. Si las líneas de transporte contribuyen con una cantidad considerable a la reactancia total del sistema, se puede obtener un aumento del límite de estabilidad utilizando dos líneas paralelas. La

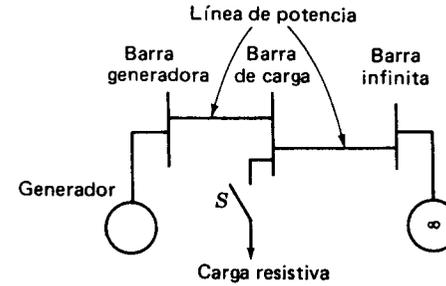


Fig. 14.2 Diagrama unifilar del Ej. 14.1.

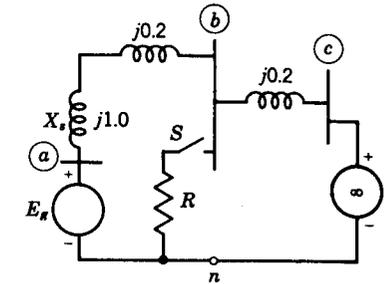


Fig. 14.3 Diagrama de impedancia para el Ej. 14.1.

instalación de líneas paralelas aumentará también la seguridad del sistema, ya que una línea podrá atender el servicio si la otra falla. Se han utilizado, en las líneas, condensadores en serie para mejorar la regulación de la tensión. Por disminución de la reactancia de la línea aumenta el límite de estabilidad.

EJEMPLO 14.1 La fig. 14.2 muestra el diagrama unifilar de un generador conectado por medio de una línea de potencia a un gran sistema, que se puede suponer como una barra infinita en el punto de conexión de la línea de potencia al sistema. En el punto medio de línea de potencia hay una barra a la cual una carga variable puramente resistiva puede conectarse a través de un interruptor S . La fig. 14.3 es el diagrama de impedancias del sistema con los valores marcados en por unidad. El voltaje de la barra infinita es 1,0 por unidad. Con el interruptor S abierto, la potencia compleja suministrada a la barra infinita es $0.8 + j0.6$ por unidad. Entonces se cierra el interruptor S , y la resistencia de la carga se reduce gradualmente desde un valor muy grande hasta 0.8 por unidad. Al mismo tiempo, mientras se mantiene constante el estímulo al generador, la potencia mecánica que ha entrado al generador se incrementa en un intento de mantener la potencia en la barra infinita en 0.8 por unidad. Determine si la entrega de esta potencia a la barra infinita es posible o si el límite de estabilidad en estado estacionario para mantener la potencia especificada en la barra infinita se logra antes que la resistencia pueda reducirse a 0.8 por unidad.

Solución Debemos encontrar E_g , ya que su magnitud es constante para el estímulo constante al generador. Con S abierto para las condiciones dadas, la corriente en la barra infinita es I , y

$$1.0 \times I^* = 0.8 + j0.6$$

$$I = 0.8 - j0.6$$

por tanto

$$E_g = 1.0 + j1.4(0.8 - j0.6)$$

$$= 1.84 + j1.12 = 2.154/31.3^\circ$$

Con S cerrado, las constantes A y B de la red entre la barra infinita y el punto de conexión de E_g a su reactancia sincrónica son, de la tabla A.6 y para la T asimétrica,

$$A = 1 + \frac{j1.2}{0.8} = 1 + j1.5 = 1.803/56.31^\circ$$

$$B = j1.2 + j0.2 + \frac{j1.2 \times j0.2}{0.8}$$

$$= -0.3 + j1.4 = 1.432/102.1^\circ$$

De la ec. (14.2) la máxima potencia que puede transmitirse a la barra infinita es

$$P_{R,max} = \frac{2.15 \times 1.0}{1.432} - \frac{1.803}{1.432} \cos(102.1^\circ - 56.31^\circ)$$

$$= 1.501 - 0.878 = 0.623 \text{ por unidad}$$

Por tanto, la entrega de potencia deseada de 0.8 por unidad no puede lograrse. Un análisis posterior muestra que una resistencia de 1.0 por unidad es aproximadamente la resistencia mínima que permite entregar la potencia especificada a la barra infinita. Sin embargo, funcionando sobre tales condiciones probablemente se haría que el generador perdiera sincronismo si una pequeña perturbación transitoria disminuyese la potencia transmitida a la barra infinita tan solo en una pequeña fracción de segundo. De hecho los ángulos de torque entre cualquier par motor-generador generalmente difieren en menos de 45° para un buen funcionamiento. Este tema de la estabilidad transitoria se estudia en el resto del capítulo.

14.3 ESTABILIDAD EN RÉGIMEN TRANSITORIO: REPASO DE MECÁNICA

El análisis de cualquier sistema de potencia para determinar su estabilidad en régimen transitorio, lleva consigo la consideración de algunas de las propiedades mecánicas de las máquinas del sistema, ya que, después de una perturbación cualquiera, las máquinas han de ajustar los ángulos relativos de sus rotores para cumplir las condiciones impuestas de transferencia de potencia. El problema es tan mecánico como eléctrico y, es preciso tener bien presentes ciertos principios mecánicos al considerarlo. En la tabla 14.1 se dan las magnitudes que aparecen en los problemas relativos a la mecánica del movimiento rectilíneo o de translación, así, como las magnitudes correspondientes en la mecánica de la rotación. Las relaciones para los sistemas en rotación se aplican a la solución de los problemas de estabilidad en régimen transitorio, obteniéndose una imagen más clara por comparación con las relaciones más familiares de la translación.

La energía cinética de un cuerpo con movimiento de rotación es

$$KE = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad J \quad (14.5)$$

que es análoga a la energía cinética de translación $\frac{1}{2}mv^2$. Como ω viene dado en radianes por segundo, la ec. (14.5), demuestra que el momento de inercia puede expresarse en julios-segundo al cuadrado por radianes al cuadrado, de lo cual se deriva para unidad de momento angular M . Es más conveniente expresar la energía almacenada por una máqui-

Tabla 14.1 Comparación de las magnitudes utilizadas en la mecánica de la translación y de la rotación.

Translación				Rotación			
Magnitud	Símbolo	Ecuación	Unidad S. I.	Magnitud	Símbolo	Ecuación	Unidad S. I.
Longitud	s	m	Desplazamiento angular	θ	$\theta = \frac{s}{r}$	rad
Masa	m	kg	Momento de inercia	I	$I = \int r^2 dm$	kg·m ²
Tiempo	t	s	Tiempo	t	s
Velocidad	v	$v = \frac{ds}{dt}$	m/s	Velocidad angular	ω	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	rad/s
Aceleración	a	$a = \frac{dv}{dt}$	m/s ²	Aceleración angular	α	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	rad/s ²
Fuerza	F	$F = ma$	N	Par	T	$T = Fr = I\alpha$	N·m o J/rad
Cantidad de movimiento	M'	$M' = mv$	N·s	Momento angular o cinético	M	$M = I\omega$	J·s/rad
Trabajo	W	$W = \int F ds$	J	Trabajo	W	$W = \int T d\theta$	J
Potencia	P	$P = \frac{dW}{dt}$	W	Potencia	P	$P = \frac{dW}{dt} = T\omega$	W

na eléctrica en megajulios y, en ingeniería, los ángulos se miden frecuentemente en grados. De acuerdo con esto, M se mide normalmente en megajulios-segundo por grado eléctrico. Cuando M se calcula a partir de $I\omega$, con el valor de ω de la velocidad sincrónica de la máquina, se llama constante de inercia. Esta práctica lleva a una confusión, puesto que hay otro término, designado por la letra H , al que también se le llama constante de inercia. La constante de inercia H se define como los megajulios de energía almacenada por una máquina a la velocidad sincrónica por megavoltios-amperios de régimen de la máquina. Así, definida la relación que existe entre M y H , se deduce en la forma siguiente:

Tenemos

$$H = \frac{\text{energía almacenada en megajulios}}{\text{régimen de la máquina en megavoltios-amperios}}$$

y

$$G = \text{régimen de la máquina en megavoltios-amperios}$$

Entonces

$$GH = \text{energía almacenada en megajulios}$$

De la ec. (14.5) y la tabla 14.1

$$\text{Energía almacenada} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}M\omega \quad (14.6)$$

Si M está dado en megajulios-segundo por grado eléctrico y ω , en grados eléctricos por segundo, la energía almacenada vendrá dada por la ec. (14.6) en megajulios. En grados eléctricos por segundo, $\omega = 360f$, siendo f la frecuencia en ciclos por segundo. Con esto, la ec. (14.6), se convierte en la

$$GH = \frac{1}{2}M(360f)$$

y

$$M = \frac{GH}{180f} \quad \text{MJ} \cdot \text{s} / \text{grado eléctrico} \quad (14.7)$$

Como veremos, posteriormente, M debe determinarse para estudiar la estabilidad en régimen transitorio, pero M depende del tamaño y tipo de la máquina, mientras que H no varía mucho con el tamaño.

La magnitud H tiene un campo de valores, relativamente estrecho para cada clase de máquinas, independientemente de sus kVA y velocidad de régimen. En la tabla 14.2 se indican algunas constantes típicas de inercia.

Si se conoce el valor de WR^2 de la máquina¹, H puede determinarse en la forma siguiente: A partir de la ec. (14.5) y utilizando unidades inglesas, tenemos

$$KE = \frac{1}{2} \frac{WR^2}{32.2} \left[\frac{2\pi(\text{rpm})}{60} \right]^2 \quad \text{ft-lb} \quad (14.8)$$

Pasando de pies-libras a megajulios y dividiendo por el régimen de la máquina en megavoltio-amperios, obtenemos

$$H = \frac{\left(\frac{746}{550} \times 10^{-6} \right) \frac{1}{2} \frac{WR^2}{32.2} \left[\frac{2\pi(\text{rpm})}{60} \right]^2}{\text{MVA régimen}} \quad (14.9)$$

$$H = \frac{2.31 \times 10^{-10} WR^2 (\text{rpm})^2}{\text{MVA régimen}} \quad (14.10)$$

¹ La expresión WR^2 es igual al peso de las partes giratorias de la máquina (incluyendo el accionamiento o la carga), multiplicado por el cuadrado del radio de giro en pies $WR^2/32.2$, es el momento de inercia en slug-pie. En unidades métricas $WR^2/9.9 \text{ kg, m}^2$.

Tabla 14.2 Constantes de inercia de las máquinas sincrónicas †

Tipo de máquina	Constante de inercia H ‡ MJ/MVA
Turbogenerador	
Condensado 1,800 rpm	9-6
3,600 rpm	7-4
No condensado, 3,600 rpm	4-3
Generador hidráulico:	
Velocidad baja <200 rpm	2-3
Velocidad alta >200 rpm	2-4
Condensador sincrónico: §	
Grande	1.25
Pequeño	1.00
Motor sincrónico con carga que varía de 1,0 a 5,0 y mayor para volantes pesados.	2.00

† Reproducido con permiso de Westinhouse Electric Corporation de "Electrical Transmission and Distribuion Reference Book".

‡ La primera figura se aplica a máquinas de pequeñas especificaciones de MVA, cuando se da el intervalo.

§ Refrigerado con hidrógeno.

Cuando varias máquinas situadas en cierto punto se consideran como una sola, la máquina simple equivalente tiene un régimen igual a la suma del de las diversas máquinas que se considera funcionan juntas durante el período transitorio. La constante de inercia M de la máquina equivalente es la suma de las constantes de inercia M de cada una de las máquinas.

14.4 ECUACION DE OSCILACION

Si no se considera el par originado por rozamiento mecánico, por rozamiento del aire y por pérdidas en el núcleo, cualquier diferencia entre el par mecánico y el par electromagnético debe dar lugar a una aceleración o deceleración de la máquina. Si T_s representa el par mecánico (en el árbol) y T_e , el par electromagnético, y si estos valores se consideran positivos para un generador (esto es, entrada mecánica en el árbol y par eléctrico de salida producido), el par que originará la aceleración es

$$T_a = T_s - T_e \quad (14.11)$$

y T_a será positivo, denotando aceleración cuando T_s es mayor que T_e . Al utilizar la misma ecuación para un motor, T_s y T_e son ambos negativos para indicar entrada eléctrica y salida mecánica; entonces, T_a es positivo e indica aceleración cuando T_e es mayor que T_s . Para la potencia de aceleración se cumple una ecuación similar, es decir,

$$P_a = P_s - P_e \quad (14.12)$$

en la que P_s es la potencia mecánica en el árbol y P_e la potencia eléctrica desarrollada por el generador. Para un motor, P_e es la diferencia, con signo menos, entre la potencia eléctrica de entrada y las pérdidas eléctricas en el motor; esto es, P_e es el valor, con signo menos, de la potencia eléctrica desarrollada. Si se consideran las pérdidas por rotación (rozamiento, aire y pérdidas en el núcleo, incluidas las pérdidas por corrientes de Foucault en el arrollamiento amortiguador), P_s es el valor, con signo menos, de la potencia mecánica de salida, más las pérdidas por rotación del motor y P_s es la entrada de potencia al árbol, menos las pérdidas por rotación del generador.

Dado que la potencia es igual al par por la velocidad angular, tendremos

$$P_a = T_a \omega = I \alpha \omega = M \alpha \quad (14.13)$$

La potencia de aceleración, P_a , viene expresada en megavatios, si M se da en megajulios-segundo por grado eléctrico y α , aceleración angular, en grados eléctricos por segundo al cuadrado. La aceleración α , en función de la posición angular, θ , del rotor, vale

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (14.14)$$

Como θ varía continuamente con el tiempo, es más conveniente medir la posición angular, respecto a un eje de referencia que gire a la velocidad sincrónica. Si δ es el desplazamiento angular, en grados eléctricos, a partir del eje de referencia que gira sincrónicamente, y ω es la velocidad sincrónica en grados eléctricos por segundo

$$\theta = \omega_s t + \delta \quad (14.15)$$

Derivando, respecto de t , obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_s + \frac{d\delta}{dt} \quad (14.16)$$

y derivando nuevamente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad (14.17)$$

De las ecs. (14.15) (14.16) y (14.19), obtenemos

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_a = P_s - P_e \quad (14.18)$$

La ec. (14.18) se denomina *ecuación de oscilación*. El ángulo δ , para una máquina conectada a una barra infinita, es el ángulo de par utilizado en las ecs. (14.1) y (14.3), puesto que este ángulo es la diferencia entre el ángulo interior de la máquina y el ángulo del sistema giratorio sincrónico de referencia que, en este caso, es la barra infinita. Para un sistema de dos máquinas, son necesarias dos ecuaciones de oscilación, una para cada máquina. El ángulo de par entre las dos máquinas, depende de los ángulos entre cada máquina y el sistema giratorio sincrónico de referencia. Cuando $d\delta/dt$ de una máquina es constante la

máquina se está moviendo a velocidad constante. La velocidad angular es diferente de la velocidad angular sincrónica por $d\delta/dt$.

El momento angular M de una máquina, no es constante, puesto que varía la velocidad angular; sin embargo, puede considerarse como tal, ya que la velocidad de la máquina no difiere mucho de la velocidad de sincronismo a menos que se sobrepase el límite de estabilidad. La constante de inercia (también designada por M), es realmente constante por definición, ya que es el momento angular a la velocidad de sincronismo. La potencia en el árbol P_s se considera constante para la resolución de la ecuación. Para un generador, esta hipótesis está justificada, aunque la entrada desde el accionamiento esté controlada por la acción de un regulador, porque estos reguladores no actúan hasta que detecten un cambio de velocidad y, en todo caso, su respuesta no es instantánea. Los programas para calculadoras digitales pueden tener en cuenta la acción de los reguladores.

En un motor, la carga permanece constante, ya que la velocidad no varía, apreciablemente, a menos que se pierda la estabilidad. La potencia eléctrica P_e , viene dada por las ecs. (14.1) o (14.3). La reactancia transitoria se utiliza para determinar las constantes generalizadas del circuito en la ec. (14.1) y X para la ec. (14.3), cuando se desprecia la resistencia. La reactancia transitoria es el valor óptimo que se puede usar, porque el rotor de la máquina cambia constantemente de posición, respecto a la f.m.m. de la corriente del inducido, de forma que el flujo varía sobre la cara del rotor, de manera similar al flujo variable cuando se evalúa la reactancia en el régimen transitorio. E_g y E_m son las tensiones detrás de la reactancia transitoria del generador y del motor. De la ec. (14.3), la ecuación de oscilación se transforma en

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_s - \frac{|E_g| \cdot |E_m|}{|X|} \sin \delta \quad (14.19)$$

o de la ec. (14.4)

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_s - P_{\max} \sin \delta \quad (14.20)$$

En un sistema de varias máquinas y, por tanto, de varias ecuaciones de oscilación, no intentaremos hallar la solución formal de la ecuación. Si el estudio se hace con una calculadora digital, es preciso hallar la solución punto por punto. Incluso para el caso sencillo de una sola máquina y una barra infinita, despreciando la resistencia, solo es posible la solución formal de la ec. (14.20), si $P_s = 0$ y exige el empleo de integrales elípticas. La solución da los valores de δ para distintos tiempos y, gráficamente, que suele representarse δ en función de t . La curva obtenida se llama *curva de oscilación*. Si la curva de oscilación indica que el ángulo δ empieza a disminuir después de pasar por un máximo, se supone, normalmente, que el sistema no perderá la estabilidad y que las oscilaciones de δ alrededor del equilibrio se harán cada vez más pequeñas, hasta desaparecer.

14.5 CRITERIO DE LA IGUALDAD DE LAS ÁREAS PARA LA ESTABILIDAD

En un sistema en el que una máquina oscila, respecto a una barra infinita, no es necesario representar y estudiar las curvas de oscilación para determinar si el ángulo de par de la

máquina aumenta indefinidamente u oscila alrededor de una posición de equilibrio. La resolución de la ecuación de oscilación, con las hipótesis usuales de P_s constante, red puramente reactiva y tensión constante detrás de la reactancia transitoria, demuestra que δ oscila alrededor del punto de equilibrio con amplitud constante, si no se sobrepasa el límite de estabilidad del régimen transitorio. El principio por el que se determina la estabilidad en condiciones de régimen transitorio, sin resolver la ecuación de oscilación, es el llamado *criterio de igualdad de áreas*. Aunque no es aplicable a sistemas de varias máquinas, este método ayuda a comprender en qué forma influyen ciertos factores en la estabilidad, en régimen transitorio, de un sistema cualquiera.

Aunque la deducción del criterio de igualdad de las áreas se hace para una máquina y una barra infinita, puede también adaptarse a un sistema de dos máquinas. La ecuación de oscilación para la máquina conectada a la barra, es

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} = P_s - P_e \quad (14.21)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $d\delta/dt$, tenemos

$$M \frac{d^2\delta}{dt^2} \frac{d\delta}{dt} = (P_s - P_e) \frac{d\delta}{dt} \quad (14.22)$$

El primer miembro de la ec. (14.22), puede escribirse en la forma siguiente¹:

$$\frac{1}{2} M \frac{d(d\delta/dt)^2}{dt} = (P_s - P_e) \frac{d\delta}{dt} \quad (14.23)$$

Reagrupando, multiplicando por dt e integrando, tenemos

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 = \int_{\delta_0}^{\delta} \frac{2(P_s - P_e)}{M} d\delta \quad (14.24)$$

o bien,

$$\frac{d\delta}{dt} = \sqrt{\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{2(P_s - P_e)}{M} d\delta} \quad (14.25)$$

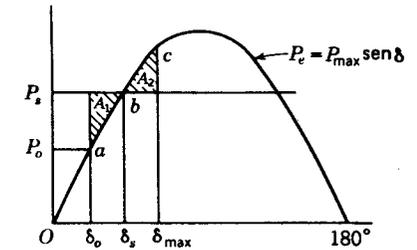
en la que δ_0 es el ángulo de par cuando la máquina funciona sincrónicamente antes de que se produzca la perturbación, entonces $d\delta/dt = 0$. El ángulo δ dejará de variar y la máquina volverá a funcionar sincrónicamente después de la perturbación, cuando $d\delta/dt = 0$ o cuando

$$\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{2(P_s - P_e)}{M} d\delta = 0 \quad (14.26)$$

¹ La nueva forma dada al primer miembro de la ec. (14.22), para obtener la ec. (14.23), puede comprobarse sustituyendo x por dx/dt en la fórmula

$$\frac{dx^2}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

Fig. 14.4 Potencia eléctrica de entrada a un motor en función del ángulo del par δ . Se aumenta bruscamente la carga desde P_0 hasta P_s , oscilando el motor, alrededor de δ_s , entre δ_0 y δ_m . Las áreas A_1 y A_2 son iguales.



Como veremos más tarde, la máquina no permanecerá en reposo, respecto a la barra infinita, la primera vez que $d\delta/dt$ se hace igual a cero, pero el hecho de que δ , momentáneamente, deje de variar, puede tomarse como una indicación de estabilidad, lo que corresponde a la interpretación de que la curva de oscilación indica estabilidad cuando el ángulo δ alcanza el máximo y empieza a disminuir.

Algunas de las condiciones originadas por el aumento brusco de la carga mecánica sobre un motor síncrono, conectado a una barra infinita, pueden predecirse por análisis de la fig. 14.4. La curva sinusoidal P_e es una representación de la potencia de entrada al motor, despreciando la resistencia. La curva P_e se deduce de las ecs. (14.3) y (14.4), siendo $|E_g|$ la tensión de la barra infinita, $|E_m|$ la tensión detrás de la reactancia transitoria del motor y X viene determinada a partir de la reactancia transitoria del motor más la reactancia del transformador y de la línea, si la hay, entre el motor y la barra infinita.

Al principio, el motor funciona a la velocidad de sincronismo con un ángulo de par de δ_0 y la potencia mecánica de salida P_0 es igual a la potencia eléctrica de entrada P_e , correspondiente a δ_0 . Si se aumenta bruscamente la carga mecánica, de forma que la potencia de salida es P_s , que es mayor que la potencia eléctrica de entrada para δ_0 , la diferencia de potencia debe ser suministrada por la energía cinética almacenada en el sistema giratorio. Este puede realizarse solamente a expensas de la disminución de velocidad, lo que da lugar a un aumento del ángulo de par δ . Al aumentar δ , la potencia eléctrica recibida de la barra aumenta hasta que $P_e = P_s$ en el punto b de la curva. En este punto hay equilibrio de los pares de entrada y salida, de forma que la aceleración es cero, pero el motor está marchando a velocidad menor que la de sincronismo con lo que δ aumenta. El ángulo δ continúa aumentando, pero, después de pasar por el punto b , la potencia eléctrica de entrada P_e es mayor que P_s y la diferencia tiene que ser almacenada en el sistema por aumento de la energía cinética y, por tanto, por aumento de la velocidad. Así, pues, entre los puntos b y c , al aumentar δ , la velocidad aumenta hasta que se alcanza nuevamente la velocidad sincrónica en el punto c en el que el ángulo de par es δ_{max} . En el punto c , P_e es todavía mayor que P_s y la velocidad continúa aumentando, pero δ comienza a disminuir tan pronto como la velocidad del motor sobrepasa la de sincronismo. El valor máximo de δ es δ_{max} en el punto c . Al disminuir δ , se alcanza nuevamente el punto b con velocidad superior a la sincrónica, de manera que δ continúa disminuyendo hasta llegar el punto a . El motor funciona de nuevo sincrónicamente y el ciclo se repite.

El motor oscila alrededor del ángulo δ_s de equilibrio, entre los ángulos δ_0 y δ_{max} . Si hay amortiguamiento, la oscilación disminuye y se obtiene un funcionamiento estable en δ_s . La tabla 14.3 recoge los cambios de velocidad, ángulo, potencia eléctrica de entrada, potencia mecánica de salida, energía almacenada y aceleración o deceleración al oscilar la

Tabla 14.3 Condiciones variables en un motor síncrono oscilando respecto a una barra infinita por un aumento brusco de carga.

Posición en el ciclo (Ver fig. 14.5)	Velocidad del motor ω	Angulo de par δ	Potencia eléctrica P_e	Energía almacenada $\frac{1}{2}I\omega^2 = W$	El sistema giratorio sufre una
En el punto <i>a</i>	$\omega = \omega_s$, decreciente	$\delta = \delta_0$, mínimo	$P_e < P_s$, mínimo	$W = W_s$, \dagger decreciente	Desaceleración
Desde <i>a</i> hacia <i>b</i>	$\omega < \omega_s$, decreciente	Creciente	$P_e < P_s$, creciente	$W < W_s$, decreciente	Desaceleración
En el punto <i>b</i>	$\omega < \omega_s$, mínimo	$\delta = \delta_s$, creciente	$P_e = P_s$, creciente	$W < W_s$, mínimo	
Desde <i>b</i> hacia <i>c</i>	$\omega < \omega_s$, creciente	Creciente	$P_e > P_s$, creciente	$W < W_s$, creciente	Aceleración
En el punto <i>c</i>	$\omega = \omega_s$, creciente	$\delta = \delta_{max}$, máximo	$P_e > P_s$, máximo	$W = W_s$, creciente	Aceleración
Desde <i>c</i> hacia <i>b</i>	$\omega > \omega_s$, creciente	Decreciente	$P_e > P_s$, decreciente	$W > W_s$, creciente	Aceleración
En el punto <i>b</i>	$\omega > \omega_s$, máximo	$\delta = \delta_s$, decreciente	$P_e = P_s$, decreciente	$W > W_s$, máximo	
Desde <i>b</i> hacia <i>a</i>	$\omega > \omega_s$, decreciente	Decreciente	$P_e < P_s$, mínimo	$W > W_s$, decreciente	Deceleración
En el punto <i>a</i>	Se repite el ciclo anterior				

$\dagger W_s$ es la energía almacenada a velocidad sincrónica; esto es $W_s = \frac{1}{2}I\omega_s^2$.

máquina. El estudio completo de esta tabla llevará a una mejor comprensión de las perturbaciones transitorias.

La posición variable del motor síncrono, oscilando respecto a una barra infinita, puede imaginarse por medio de una analogía. Consideremos un péndulo oscilando alrededor de un punto de suspensión, situado en una estructura fija, como se representa en la fig. 14.5a. Los puntos *a* y *c* son los puntos de separación máxima, respecto al punto *b* de equilibrio. El amortiguamiento llevará finalmente al péndulo al reposo en *b*. Imaginemos ahora un disco que gira a derechas alrededor del eje del péndulo, como se representa en la fig. 14.5b y superpongamos el movimiento del péndulo al movimiento del disco. Cuando el péndulo se mueve desde *a* hacia *c*, la velocidad angular combinada es más lenta que la del disco. Cuando el péndulo se mueve desde *c* hacia *a*, la velocidad angular combinada es más rápida que la del disco. En los puntos *a* y *c*, la velocidad angular del péndulo solo es nula y la combinada es igual a la del disco. Si la velocidad angular del disco corresponde a la velocidad sincrónica del motor y si el movimiento, por separado, el péndulo representa la oscilación del motor, respecto a una barra infinita, el movimiento superpuesto del péndulo sobre el del disco, representa el movimiento angular.

La oscilación máxima del motor hasta un ángulo de par δ_{max} se determina por una interpretación gráfica de la ec. (14.26). Cuando se satisface esta ecuación, se alcanza el

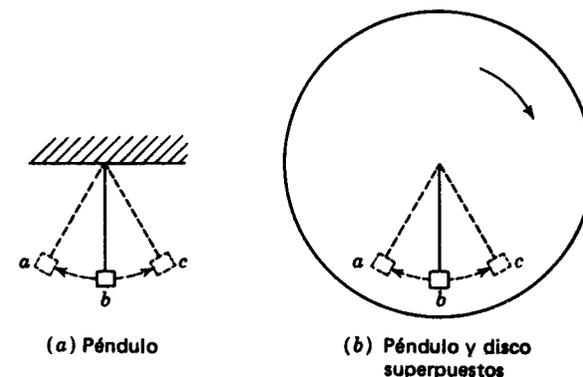


Fig. 14.5 Péndulo y disco giratorio que ilustran la oscilación de un motor respecto a una barra infinita.

valor de δ máximo y $d\delta/dt = 0$. El área sombreada A_1 de la fig. 14.4 es

$$A_1 = \int_{\delta_0}^{\delta_s} (P_s - P_e) d\delta \tag{14.27}$$

De igual forma, el área sombreada A_2 , es

$$A_2 = \int_{\delta_s}^{\delta_{max}} (P_e - P_s) d\delta \tag{14.28}$$

y

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_s} (P_s - P_e) d\delta - \int_{\delta_s}^{\delta_{max}} (P_e - P_s) d\delta \tag{14.29}$$

$$A_1 - A_2 = \int_{\delta_0}^{\delta_{max}} (P_s - P_e) d\delta \tag{14.30}$$

La ec. (14.26) se satisface y $d\delta/dt = 0$, cuando $A_1 = A_2$. El ángulo de par máximo, δ_m , está situado gráficamente, de forma, que A_2 es igual a A_1 . El estudio de la tabla 14.3 demuestra que la energía perdida cuando el motor decelera y δ crece hasta δ_s , se recupera cuando se alcanza el valor δ_{max} .

La fig. 14.6 representa una carga bruscamente aplicada que es mayor que la de la fig. 14.4. El área A_2 por encima de P_s y limitada por la curva de P_e , es menor que A_1 y $d\delta/dt$ no es cero para $\delta = \delta_x$. Por tanto, δ continúa aumentando después de $\delta = \delta_x$. P_e se hace otra vez menor que P_s . El ángulo del par δ continúa aumentando después de δ_x y no hay fuerzas restauradoras. El sistema es estable, únicamente, si por encima de P_s puede situarse un área $A_2 = A_1$. El ensayo de las áreas iguales es el llamado criterio de la igualdad de las áreas. En la fig. 14.7 se representa el incremento máximo permisible de la potencia tomada bruscamente de un motor que, inicialmente, suministra la potencia P_0 . Una carga, aplicada bruscamente, mayor que la representada en la figura, no permi-



Fig. 14.7 Potencia eléctrica de entrada a un motor, en función del ángulo de par, para el aumento brusco máximo de carga sin pérdida de estabilidad. Las áreas A_1 y A_2 son iguales.

Fig. 14.6 Potencia eléctrica de entrada a un motor, en función del ángulo de par, para un aumento brusco de carga tal que $A_2 < A_1$.

tiría que el ángulo de par del motor dejase de aumentar antes de que la potencia de entrada se hiciese menor que la potencia necesaria, ya que el área, por encima de P_s se haría menor que A_1 .

14.6 OTRAS APLICACIONES DEL CRITERIO DE LA IGUALDAD DE LAS AREAS

Aunque el criterio de las áreas iguales puede aplicarse solamente en el caso de una máquina y una barra infinita o en el caso de dos máquinas, es muy útil para comenzar a ver qué sucede cuando una falla ocurre. El computador digital es la única vía práctica para determinar la estabilidad de un gran sistema pero, debido a que el criterio de igualdad de áreas es también de gran ayuda en el entendimiento de la estabilidad transitoria, continuaremos examinándola brevemente antes de estudiar la determinación de las curvas de oscilación y la relación con el computador digital.

Cuando un generador suministra potencia a una barra infinita a través de dos líneas de transporte paralelas, la apertura de una de las líneas puede hacer que el generador pierda el sincronismo, incluso, aunque la carga pueda ser suministrada por la línea restante en condiciones de régimen permanente. Si un corto circuito trifásico ocurre en la barra a la cual están conectadas dos líneas paralelas, ninguna potencia puede transmitirse sobre cualquiera de las dos líneas. Sin embargo, si la falla está al final de una de las líneas, abriendo los disyuntores en ambos extremos de la línea aislaremos la falla del sistema y permitiremos que fluya energía en la otra línea paralela.

Cuando se produce un fallo trifásico en un punto de línea de circuito doble, que no esté en las barras en paralelo o en los extremos de las líneas, existe una cierta impedancia entre las barras y el fallo. Por tanto, se transmitirá cierta potencia mientras dure el fallo en el sistema. Cualquiera que sea su situación, los fallos de cortocircuito, que no afecten a las tres fases, permiten la transmisión de cierta potencia, puesto que pueden estar representados por conexión de una impedancia entre el punto de fallo y la barra de referencia en el diagrama de impedancias de secuencia positiva, mejor que por un cortocircuito. Cuanto mayor sea la impedancia puesta en paralelo con la red de secuencia positiva para representar el fallo, mayor será la potencia que podrá transmitirse durante dicho fallo.

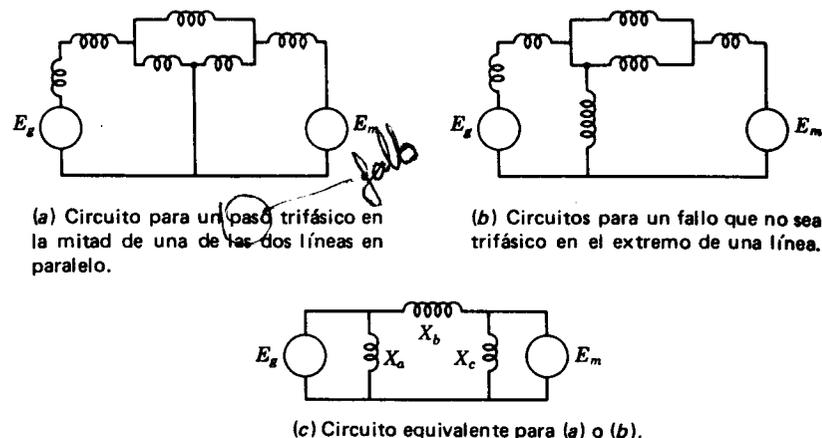


Fig. 14.8 Reducción de la red para la determinación de la estabilidad.

La potencia transmitida durante un fallo puede calcularse después de reducir la red que representa la condición de fallo a un circuito conectado en triángulo entre la tensión interna y la barra infinita. En la fig. 14.8, *a* y *b* se representan dos circuitos antes de su reducción. Cualquiera de ellos puede reducirse a la red en triángulo de la fig. 14.8c. La corriente en la reactancia X_a está defasada 90° , respecto a la tensión del generador, y la potencia en esta rama es reactiva. La potencia real transmitida es $(|E_g| \cdot |E_m| / |X_b|) \text{ sen } \delta$, siendo E_g la tensión detrás de la reactancia transitoria del generador y E_m la tensión de la barra infinita.

Si hay transmisión de potencia durante el fallo, el criterio de igualdad de áreas se aplica en la forma mostrada en la fig. 14.9, en la que $P_{\text{máx}} \text{ sen } \delta$ es la potencia transmitida antes del fallo, $r_1 P_{\text{máx}} \text{ sen } \delta$, la potencia transmitida durante el fallo, y $r_2 P_{\text{máx}} \text{ sen } \delta$, la transmitida después de haber sido aislado el fallo por desconexión en el instante en que $\delta = \delta_c$. El ángulo δ_c , se llama *ángulo de corte crítico* porque es el máximo valor posible de δ para que ocurra el corte sin que exceda el límite de estabilidad transitoria. Un examen de la fig. 14.9 muestra que si el corte ocurre a un valor de δ más grande que δ_c , el área de A_2 arriba de la línea horizontal es menor que A_1 debajo de la línea y δ continúa creciendo más allá de $\delta_{\text{máx}}$. La potencia mecánica que entra al generador es de nuevo más grande que la potencia desarrollada. La velocidad se incrementa aun más, y el generador no puede entrar de nuevo en sincronismo. La cantidad de potencia transmitida

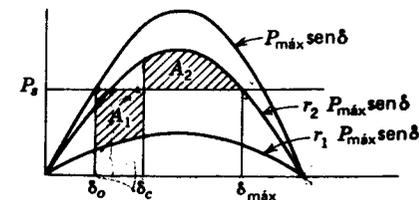


Fig. 14.9 Criterio de la igualdad de las áreas aplicado al aislamiento de un fallo con transmisión de potencia durante el fallo. Las áreas A_1 y A_2 son iguales.

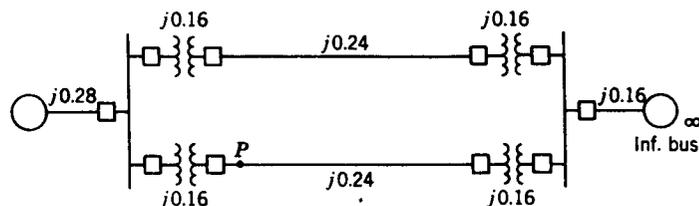


Fig. 14.10 Diagrama unifilar para el ej. 14.2.

durante la falla afecta el valor de A_1 para cualquier ángulo de corte dado. Esto es, pequeños valores de r_1 implican mayores perturbaciones en el sistema, así como bajos valores de r_1 significan baja potencia transmitida durante el fallo y A_1 mayor.

Ordenando los fallos por orden de gravedad creciente ($r_1 P_{\text{máx}}$ decreciente) tenemos:

- 1 De línea simple a tierra.
- 2 De línea a línea.
- 3 De línea doble a tierra.
- 4 Fallo trifásico.

El fallo de línea simple a tierra es el que se presenta con mayor frecuencia, en tanto que el fallo trifásico es el menos frecuente. Para una seguridad o confiabilidad completas, los sistemas deben ser proyectados para la estabilidad en régimen transitorio con fallos trifásicos localizados en los puntos peores. Si esto no es practicable desde el punto de vista económico, debe sacrificarse la seguridad un grado, proyectando para la estabilidad en régimen transitorio con fallo de línea doble a tierra.

EJEMPLO 14.2 En el diagrama unifilar de la fig. 14.10 se representa un generador unido, mediante unas líneas de transporte de alta tensión, paralelas, a un gran sistema metropolitano, que se considera aquí como una barra infinita. Los números del diagrama son las reactancias por unidad. Adyacentes al fallo se colocan sendos interruptores dispuestos para actuar simultáneamente. Especificar en grados eléctricos el ángulo crítico de corte para el generador en un fallo trifásico en el punto P , si dicho generador suministra una potencia de 1,0 por unidad. Suponer que la tensión detrás de la reactancia transitoria es de 1,25 por unidad para el generador y que la tensión en la barra infinita es de 1,0 por unidad.

Solución El diagrama de impedancias de secuencia positiva es el representado en la fig. 14.11. Antes del fallo, la impedancia entre el generador y la barra infinita vale

$$X = 0.28 + 0.16 + \frac{0.16 + 0.24 + 0.16}{2} = 0.72$$

Después de ser aislado dicho fallo mediante la apertura de los interruptores de los extremos de la línea averiada, la impedancia entre el generador y la barra infinita será

$$X = 0.28 + 0.16 + 0.16 + 0.24 + 0.16 = 1.00$$

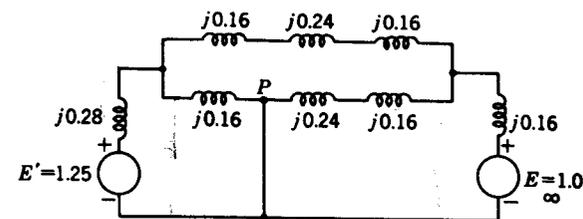


Fig. 14.11 Diagrama de impedancias de secuencia positiva para el sistema de la fig. 14.10.

Durante el fallo, el circuito se representa por la red de la fig. 14.12a. La reducción de este circuito a triángulo se lleva a cabo, sea por medio de las operaciones matriciales para eliminación de nudos que se estudiaron en la sec. 7.10, ó por medio de dos transformaciones $Y-\Delta$. Como el circuito es sencillo y además sólo se necesita la impedancia de una de las ramas del triángulo, las transformaciones $Y-\Delta$, representadas en la fig. 14.12b y c, son más sencillas, para el cálculo manual, que la eliminación matricial de nudos. Los cálculos se efectúan en la forma siguiente:

$$X_{bo} = \frac{0.56 \times 0.16}{0.56 + 0.16 + 0.40} = \frac{0.0895}{1.12} = 0.080$$

$$X_{co} = \frac{0.40 \times 0.56}{1.12} = \frac{0.224}{1.12} = 0.200$$

$$X_{no} = \frac{0.16 \times 0.40}{1.12} = \frac{0.064}{1.12} = 0.057$$

$$X_{ao} = 0.28 + 0.08 = 0.36$$

$$X_{do} = 0.20 + 0.16 = 0.36$$

$$X_{ad} = \frac{0.36 \times 0.057 + 0.36 \times 0.36 + 0.36 \times 0.057}{0.057} = 2.98$$

No es necesario calcular X_{an} y X_{dn} , puesto que éstas, puramente reactivas y en paralelo con las tensiones del generador y la barra infinita, no pueden almacenar potencia real.

Las ecuaciones para la potencia de salida del generador son

Antes del fallo: $P_{\text{máx}} \text{ sen } \delta = \frac{1.0 \times 1.25}{0.72} \text{ sen } \delta = 1.735 \text{ sen } \delta$

Durante el fallo: $r_1 P_{\text{máx}} \text{ sen } \delta = \frac{1.0 \times 1.25}{2.98} \text{ sen } \delta = 0.42 \text{ sen } \delta$

Después del fallo: $r_2 P_{\text{máx}} \text{ sen } \delta = \frac{1.0 \times 1.25}{1.00} \text{ sen } \delta = 1.25 \text{ sen } \delta$

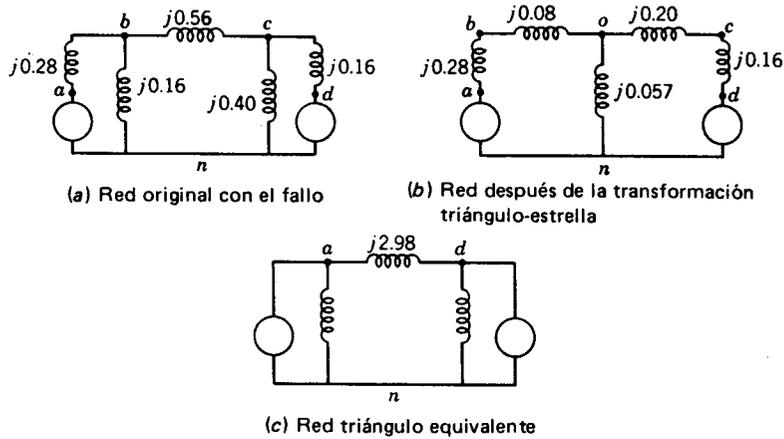


Fig. 14.12 Pasos seguidos de la reducción del circuito del Ej. 14.2.

Por tanto,

$$r_1 = \frac{0.42}{1.735} = 0.242 \quad r_2 = \frac{1.25}{1.735} = 0.72$$

y de la fig. 14.9 vemos que

$$P_s = P_{\text{máx}} \text{sen } \delta_0 \quad P_s = r_2 P_{\text{máx}} \text{sen } \delta_{\text{máx}}$$

y así

$$\delta_0 = \text{sen}^{-1} \frac{1.0}{1.735} = 35.2^\circ = 0.615 \text{ rad}$$

$$\delta_{\text{máx}} = \text{sen}^{-1} \frac{1.0}{1.25} = 126.9^\circ = 2.22 \text{ rad}$$

Para encontrar el ángulo de corte crítico debemos igualar las expresiones para A_1 y A_2 con referencia a la fig. 14.9 y los valores calculados antes

$$A_1 = 1.0(\delta_c - 0.615) - \int_{0.615}^{\delta_c} 0.42 \text{sen } \delta \, d\delta$$

$$A_2 = \int_{\delta_c}^{2.22} 1.25 \text{sen } \delta \, d\delta - 1.0(2.22 - \delta_c)$$

Realizando la integración e igualando A_1 y A_2 da:

$$\begin{aligned} \delta_c - 0.615 - 0.42(-\cos \delta_c + \cos 35.2^\circ) \\ = 1.25(-\cos 126.9^\circ + \cos \delta_c) - 1.0(2.22 - \delta_c) \end{aligned}$$

y resolviendo para δ_c encontramos

$$\delta_c = \cos^{-1} 0.62 = 51.6^\circ$$

En la próxima sección estudiaremos cómo δ puede calcularse como función del tiempo. Podemos obtener una curva de δ contra t en este caso y de ella extraer el ángulo de corte crítico, que es el tiempo para que la máquina oscile desde su posición original hasta su ángulo de corte crítico.

14.7 CONSTRUCCION PASO A PASO DE LA CURVA DE OSCILACION

El criterio de igualdad de áreas es muy utilizado para entender un sistema de dos máquinas, pero para hallar el tiempo de corte crítico debemos encontrar δ como función de t . Para grandes sistemas dependemos del computador digital, que determina δ contra t para todas las máquinas en las cuales estamos interesados; y δ puede dibujarse contra t para una máquina a fin de obtener la curva de oscilación de esa máquina. El ángulo δ se calcula como función del tiempo sobre un período lo suficientemente largo para determinar si δ se incrementa sin límite o logra un máximo y comienza a disminuir. Aunque el último resultado generalmente indica estabilidad, en un sistema real donde un cierto número de variables se tienen en cuenta puede ser necesario dibujar δ contra t sobre un intervalo suficientemente largo para asegurar que no se incremente otra vez sin regresar a un valor bajo.

Con la determinación de las curvas de oscilación para varios tiempos de corte, la longitud de los tiempos permitidos pueden calcularse antes de que se produzca el fallo. Los tiempos de interrupción normales y sus relevos asociados son comúnmente ciclos 8, 5, 3 ó 2 antes de que la falla ocurra y de este modo la velocidad de los interruptores puede ser especificada. Los cálculos para un fallo deben hacerse de tal manera que se permita la menor transferencia de potencia desde la máquina y para el tipo de falla más severa para la cual se justifique la protección contra las pérdidas de estabilidad.

Existe un cierto número de métodos para la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales de segundo orden por medio de cálculos paso a paso, para incrementos pequeños de la variable independiente. Los métodos más perfeccionados son solamente practicables cuando se dispone de calculadoras digitales. El método utilizado para cálculo manual es necesariamente más sencillo que los recomendados para calculadora digital. En el método manual, el cambio en la posición angular del rotor durante un intervalo de tiempo pequeño se calcula haciendo las siguientes hipótesis previas:

- 1 La potencia acelerante P_a , calculada al comienzo de un intervalo, es constante desde la mitad del intervalo precedente hasta la mitad del intervalo considerado.
- 2 La velocidad angular es constante durante un intervalo cualquiera e igual al valor calculado para la mitad del intervalo. Por supuesto ninguna de las hipótesis es cierta, puesto que δ varía continuamente y tanto P_a como ω son funciones de δ . Al disminuir el intervalo de tiempo considerado, la curva de oscilación calculada se aproxima a la verdadera.

La fig. 14.13 nos ayudará a comprender estas hipótesis. La potencia acelerante se calcula para los puntos encerrados en círculos al final de los intervalos $n-2$, $n-1$ y n , que son el principio de los intervalos $n-1$, n , y $n+1$. La curva de escalones de P_a en la

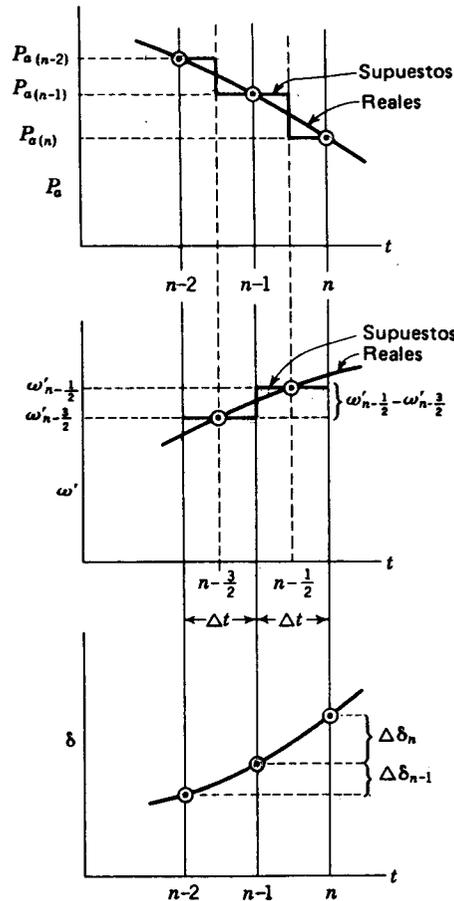


Fig. 14.13 Valores supuestos y reales de P_a , ω' y δ en función del tiempo.

fig. 14.13 resulta de la hipótesis de que P_a es constante entre los puntos medios de los intervalos. De igual forma, ω' , exceso de la velocidad angular ω sobre la velocidad angular de sincronismo ω_s , se ha dibujado como una curva de escalones que es constante en todo el intervalo con el valor calculado en el punto medio. Entre las coordenadas $n - \frac{3}{2}$ y $n - \frac{1}{2}$ hay un cambio de velocidad originado por la potencia acelerante constante. El cambio de velocidad es igual al producto de la aceleración por el intervalo de tiempo, de forma que

$$\omega'_{n-1/2} - \omega'_{n-3/2} = \frac{d^2\delta}{dt^2} \Delta t = \frac{P_{a(n-1)}}{M} \Delta t \quad (14.31)$$

La variación de δ , en un intervalo cualquiera, es igual al producto de ω' , en el intervalo, por el tiempo. Y así, la variación de δ en el intervalo $n - 1$, es

$$\Delta\delta_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_{n-2} = \Delta t \omega'_{n-3/2} \quad (14.32)$$

y durante el intervalo n ,

$$\Delta\delta_n = \delta_n - \delta_{n-1} = \Delta t \omega'_{n-1/2} \quad (14.33)$$

Restando la ec. (14.32) de la (14.33) y sustituyendo la ec. (14.31) en la ecuación resultante para eliminar ω' , tendremos

$$\Delta\delta_n = \Delta\delta_{n-1} + \frac{P_{a(n-1)}}{M} (\Delta t)^2 \quad (14.35)$$

La ec. (14.35) es la más importante para la resolución "paso a paso" de la ecuación de oscilación, con las hipótesis necesarias enunciadas, por cuanto que enseña cómo calcular la variación de δ durante un intervalo si se conocen la variación de δ para el intervalo precedente y la potencia acelerante para el intervalo en cuestión. La ec. (14.35) demuestra que, bajo las hipótesis enunciadas, la variación del ángulo de par durante un intervalo dado es igual a la variación del ángulo de par durante el intervalo precedente más la potencia acelerante al comienzo del intervalo, multiplicada por $(\Delta t)^2/M$. La potencia de aceleración se calcula al comienzo de cada nuevo intervalo. Se va así progresando hasta tener el número suficiente de intervalos para obtener los puntos necesarios para la construcción de la curva de oscilación. Si la duración de los intervalos es pequeña, se obtiene una mayor exactitud. Normalmente se consideran satisfactorios intervalos de 0.05 segundos.

La presencia de un fallo origina una discontinuidad en la potencia acelerante P_a que es nula antes del fallo y tiene un valor definido después de él. La discontinuidad se presenta al principio del intervalo, cuando $t = 0$. La fig. 15.18 muestra que nuestro método de cálculo supone que la potencia acelerante calculada al comienzo de un intervalo es constante desde la mitad del intervalo anterior a la mitad del intervalo considerado. Al ocurrir el fallo tenemos dos valores de P_a al comienzo del intervalo y tenemos que tomar la media de los dos valores como valor constante de la potencia acelerante. El procedimiento estudiado se aplica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 14.3 Dibuje las curvas de oscilación para el fallo descrito en el sistema del ej. 14.2 eliminando el fallo por medio de la apertura de los interruptores en forma simultánea en los extremos de la línea averiada 3 y 4.5 ciclos después de que la falla ocurra. También dibuje la curva de oscilación sobre un período de 0.25 S si el fallo no se ha eliminado. Suponga $H = 3,0$ para el generador y haga los cálculos en por unidad.

Solución Puesto que nuestros cálculos expresan la potencia en por unidad, el término G en la ecuación para M debe estar en por unidad en lugar de MVA del generador a los MVA de base. Por tanto, para este ejemplo G es 1.0 por unidad, y

$$M = \frac{GH}{180f} = \frac{1.0 \times 3.0}{180 \times 60} = 2.78 \times 10^{-4} \text{ s}^2/\text{grados eléctricos}$$

Para un intervalo de tiempo $\Delta t = 0,05$ s,

$$\frac{(\Delta t)^2}{M} = \frac{25 \times 10^{-4}}{2.78 \times 10^{-4}} = 9.0 \text{ grados eléctricos}$$

Del ej. 14.2, cuando el fallo ocurre

$$\delta = 35.2^\circ$$

y durante el fallo:

$$P_a = 0.42 \text{ sen } \delta$$

Por tanto,

$$P_a = P_s - P_e = 1.0 - 0.42 \text{ sen } \delta$$

Al comienzo del primer intervalo hay una discontinuidad en la potencia acelerante. Justamente antes del fallo, $P_a = 0$, y justamente después,

$$P_a = 1.0 - 0.42 \text{ sen } 35.2^\circ = 1.0 - 0.242 = 0.758 \text{ por unidad}$$

El valor medio de P_a es $\frac{1}{2} \times 0.758 = 0.379$ por unidad.

$$\frac{(\Delta t)^2}{M} P_a = 9 \times 0.379 = 3.41$$

$$\Delta \delta_n = 0 + 3.41 = 3.41^\circ$$

Para $t = 0,05$ s,

$$\delta_n = 35.2^\circ + 3.41^\circ = 38.61^\circ$$

$$P_a = 1.0 - 0.42 \text{ sen } 38.61^\circ = 1.0 - 0.262 = 0.738 \text{ por unidad}$$

$$\frac{(\Delta t)^2}{M} P_a = 9 \times 0.738 = 6.64$$

$$\Delta \delta_n = 3.41^\circ + 6.64^\circ = 10.05^\circ, \text{ o } 10.1^\circ$$

Para $t = 0,10$ s,

$$\delta_n = 38.6^\circ + 10.1^\circ = 48.7^\circ$$

Los pasos del cálculo se han recogido en la tabla 14.4.

En la tabla P_e , P_a y δ_n son los valores calculados en el tiempo t de la primera columna, pero $\Delta \delta_n$ es la *variación* del ángulo de par *durante* el intervalo que comienza en el tiempo indicado. Por ejemplo, en la fila de números que figuran en la tabla para

Tabla 14.4 Cálculo de la curva de oscilación en un fallo mantenido

t , seg	P_e , por unidad	P_a , por unidad	$\frac{(\Delta t)^2}{M} P_a$, grados	$\Delta \delta_n$, grados	δ_n , grados
0-	1.0	0.00	35.2
0+	0.242	0.758	35.2
0 av	0.379	3.41	3.41	35.2
0.05	0.262	0.738	6.64	10.05	38.6
0.10	0.315	0.685	6.17	16.22	48.7 *
0.15	0.380	0.620	5.58	21.80	64.9
0.20	0.419	0.581	5.23	27.03	86.7
0.25	113.7

Tabla 14.5 Cálculo de la curva de oscilación para un fallo aislado en $t = 0,05$ s

t , s	P_e , por unidad	P_a , por unidad	$\frac{(\Delta t)^2}{M} P_a$, grados	$\Delta \delta_n$, grados	δ_n , grados
0-	1.0	0.00	35.2
0+	0.242	0.758	35.2
0 av	0.379	3.41	3.41	35.2
0.05-	0.262	0.738	38.6
0.05+	0.780	0.220	38.6
0.05 av	0.479	4.31	7.72	38.6
0.10	0.905	0.095	0.86	8.58	46.3
0.15	1.02	-0.02	-0.20	8.38	54.9
0.20	1.12	-0.12	-1.08	7.30	63.3
0.25	1.18	-0.18	-1.62	5.68	70.6
0.30	1.22	-0.22	-1.98	3.70	76.3
0.35	1.23	-0.23	-2.07	1.63	80.0
0.40	1.24	-0.24	-2.16	-0.53	81.6
0.45	1.24	-0.24	-2.16	-2.69	81.1
0.50	1.23	-0.23	-2.07	-4.76	78.4
0.55	1.20	-0.20	-1.80	-6.56	73.6
0.60	1.15	-0.15	-1.35	-7.91	67.0
0.65	1.07	-0.07	-0.63	-8.54	59.1
0.70	50.6

NOTA: Durante la falla $P_e = 0.42 \text{ sen } \delta$. Después de la falla, $P_e = 1.25 \text{ sen } \delta$.

$t = 0.10$ s, el ángulo 48.7° es el primer valor calculado, y se halla sumando la variación del ángulo durante el intervalo precedente, al ángulo del comienzo del intervalo anterior. Seguidamente se calcula P_e para $t = 48.7^\circ$. Después, P_a y el producto de P_a por $(\Delta t)^2/M$. El valor del producto es 6.17° , que se añade a la variación angular de 10.05° , durante el intervalo que comienza en $t = 0.10$ s. Este valor, añadido a 48.7° da el valor $\delta = 64.9^\circ$ para $t = 0.15$ s.

Las tablas 14.5 y 14.6 muestran los cálculos si se aísla el fallo en 3 y 4.5 ciclos. En el instante en que el fallo es aislado se presenta una discontinuidad, en la potencia acelerante P_a . Si el aislamiento se verifica en 3 ciclos la discontinuidad es a los 0.05 s, que es al comienzo del intervalo. Para la potencia acelerante se obtienen dos valores que resultan de las dos expresiones (durante el fallo y después del aislamiento) de la potencia de salida al comienzo del intervalo. Como la discontinuidad se presenta al comienzo de un intervalo, el promedio de los dos valores de toma como el valor constante de P_a , desde 0.025 hasta 0.075 s. El procedimiento es el mismo que se sigue al producirse el fallo.

Si el aislamiento se hace en 4.5 ciclos, la discontinuidad se presenta a los 0.075 s, que está a mitad de un intervalo. No hace falta procedimiento especial, porque suponemos

Tabla 14.6 Cálculo de la curva de oscilación para un fallo aislado en $t = 0,075$ s

t , seg	P_a , por unidad	P_e , por unidad	$\frac{(\Delta t)^2}{M} P_a$, grados	$\Delta \delta_a$, grados	δ_a , grados
0-	1.0	0.00	35.2
0+	0.242	0.758	35.2
0 av	0.379	3.41	3.41	35.2
0.05	0.262	0.738	6.64	10.05	38.6
0.10	0.94	0.06	0.54	10.59	48.7
0.15	1.08	-0.08	-0.72	9.87	59.3
0.20	1.17	-0.17	-1.53	8.34	69.2
0.25	1.22	-0.22	-1.98	6.36	77.5
0.30	1.24	-0.24	-2.16	4.20	83.9
0.35	1.25	-0.25	-2.25	1.95	88.1
0.40	1.25	-0.25	-2.25	-0.30	90.1
0.45	1.25	-0.25	-2.25	-2.55	89.8
0.50	1.25	-0.25	-2.25	-4.80	87.2
0.55	1.24	-0.24	-2.16	-6.96	82.4
0.60	1.21	-0.21	-1.89	-8.85	75.4
0.65	1.15	-0.15	-1.35	-10.20	66.5
0.70	56.3

NOTA: Durante la falla $P_e = 0.42 \text{ sen } \delta$. Después de la falla, $P_e = 1.25 \text{ sen } \delta$.

una discontinuidad en la potencia acelerante a mitad de un intervalo. El valor constante supuesto para P_a al comienzo del intervalo durante el cual se aísla el fallo, se determina por la potencia eléctrica de entrada durante el fallo para el valor de δ al comienzo del intervalo. Al comienzo del intervalo que sigue al aislamiento, el valor constante de P_a es el calculado a partir de la potencia eléctrica de entrada después del aislamiento, para el valor de δ al comienzo del intervalo que sigue al aislamiento. El procedimiento queda aclarado por un estudio a fondo de la tabla 14.6.

Las curvas de oscilación se dibujan en la fig. 14.14 para todos los 3 casos. Evidentemente, el sistema es estable para un aislamiento en 4.5 ciclos menos.

Si deseamos encontrar el tiempo de corte crítico, podemos obtener otras curvas de oscilación para mayores tiempos de corte hasta que δ parezca incrementarse sin límite.

Sin embargo, puesto que tenemos del Ej. 14.2 el ángulo de corte crítico podemos estimar a partir de la curva, para la falla sostenida, el tiempo correspondiente al ángulo de 51.6° encontrado en el ej. 14.2. El tiempo de corte crítico leído de la curva es 0.11 s, ó 6.6 ciclos. Un interruptor de cinco ciclos funciona satisfactoriamente. Un interruptor de 8 ciclos no aísla la falla rápidamente, y la máquina pierde sincronismo.

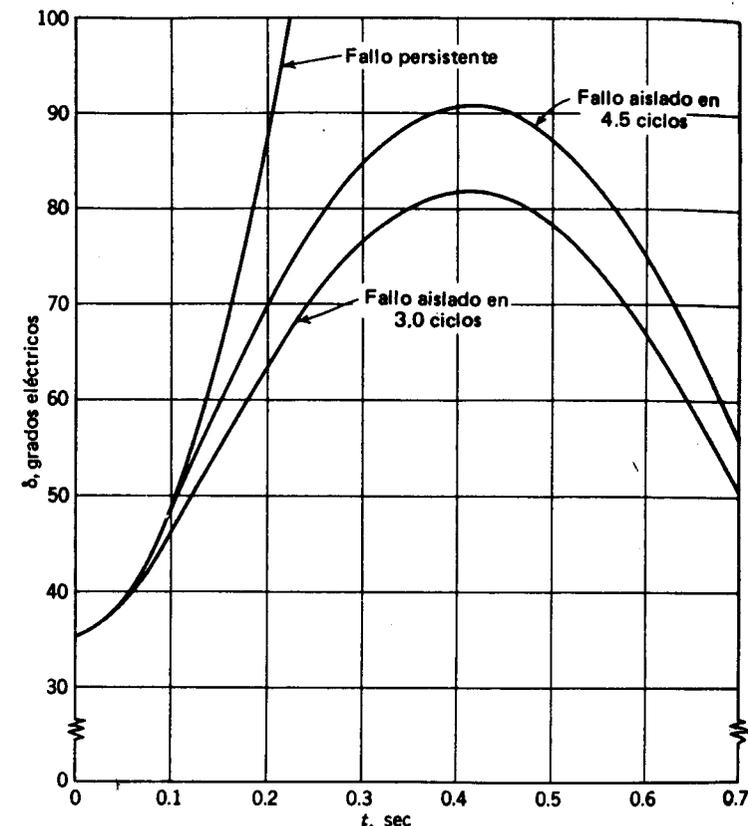


Fig. 14.14 Curvas de oscilación para el ej. 15.2 para un fallo persistente y para aislamiento en 3.0 y 4.5 ciclos.

14.8 PROGRAMAS DEL COMPUTADOR DIGITAL PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD TRANSIENTE

Existen programas extremadamente sofisticados para determinar la estabilidad transiente de sistemas grandes de potencia. Un programa de estabilidad típico se relaciona con un programa de carga a fin de obtener los datos para el circuito.

El computador utiliza un procedimiento paso a paso para calcular el cambio en la posición angular de cada máquina sobre intervalos cuya duración se especifica cuando se hacen entrar los datos. El programa de carga suministra los valores iniciales para los cálculos, los que comienzan con una perturbación debido a una falla o interrupción. El computador determina el voltaje interno de cada máquina y, así, el cambio en δ para cada máquina durante intervalos sucesivos por métodos numéricos complejos y más exactos. Cuando los nuevos ángulos de todas las máquinas se determinan al final de un intervalo, el computador emplea el dato del programa de carga para resolver la red y encontrar la

potencia eléctrica P_e para cada máquina. El valor P_e sustraído de P_s es la nueva potencia acelerante de la máquina para calcular el nuevo cambio de δ .

Una de las grandes ventajas del computador digital sobre los métodos anteriores de cálculo es la posibilidad de considerar las variables que entran en la operación de las máquinas y sus controladores. Entre las características de un programa moderno de estabilidad están la simulación del regulador de voltaje y la respuesta del campo de estímulo, la acción de gobierno, la saturación de los pasos de flujo en la máquina a medida que el estímulo se cambia mientras el análisis transiente está en progreso y, finalmente, el suministro del análisis de máquinas de polos salientes y doble reacción. Un gran número de constantes de tiempo y otra información deben hacerse entrar con los datos si se quiere sacar provecho de esas características. Tales constantes de tiempo comprenden la variación en los enlaces de flujo del campo y la operación de los componentes de los reguladores, mandos y sistemas de estímulos.

La salida impresa del computador muestra los resultados detallados para cada intervalo de tiempo incluyendo el ángulo de par δ de cada máquina y la potencia de salida P_e , la velocidad y la potencia de entrada P_s . Los flujos de potencia para cualquier número de líneas y voltajes de barra con sus ángulos de fase pueden también ser impresos. La velocidad puede expresarse en términos de fracción que es la frecuencia del generador en ciclos menos la frecuencia del sistema durante las condiciones estables antes de la falla; esto es, para un sistema de 60 ciclos la fracción es la frecuencia del generador menos 60 ciclos.

Además, puede imprimirse un gráfico de las curvas de oscilación para una máquina específica o para todas las máquinas del sistema. Se asignan letras o números a cada máquina, y se dibujan como se muestra en la fig. 14.15 con el ángulo de par δ en grados en el eje horizontal y el tiempo en segundos en el eje vertical. Las curvas de oscilación son para las dos máquinas del ej. 8.1. El número 1 en la fig. 14.15 identifica la máquina conectada a la barra 1, y el número 2 identifica la máquina conectada a la barra 3. La falla trifásica está cerca de la barra 3 en la línea desde la barra 5. La falla ocurre en $T = 0.05$ s y es eliminada después de 3.0 ciclos ($T = 0.10$ s) abriendo los disyuntores en ambos extremos de la línea simultáneamente. Los disyuntores se cierran nuevamente en $T = 0.4325$ s sin que haya recurrencia de la falla. El intervalo de tiempo Δt es 0.0166 s. El programa de estabilidad que produce la fig. 14.15 es capaz de considerar todas las características descritas anteriormente, pero solamente se incluyen aquí las condiciones más simples; los controladores, reguladores y sistemas de excitación se han omitido.

El examen de este caso es interesante porque no hay una barra infinita que mantenga la frecuencia del sistema constante y suministre la frecuencia de referencia para la velocidad de los generadores del sistema. La falla trifásica cerca de la barra 3 limita a 15 MW la salida desde el generador conectado a la barra 3. Puesto que la acción de los controladores, aun si se la toma en cuenta, no reduce la potencia de entrada P_s a los generadores en el corto tiempo de 3 ciclos antes de que la falla sea retirada, incrementan la velocidad de los generadores. Aun si la potencia de salida de cada generador fuera igual a la potencia de entrada inmediatamente después de que se remediase la falla, el ángulo de cada uno continuaría incrementándose porque los generadores están rotando a una velocidad constante más grande que la velocidad determinada por una frecuencia de 60 Hz. El sistema se considera estable si la diferencia en los ángulos de par de las dos máquinas están dentro de los límites razonables y sus velocidades vienen a ser iguales y constantes. La velocidad prome-

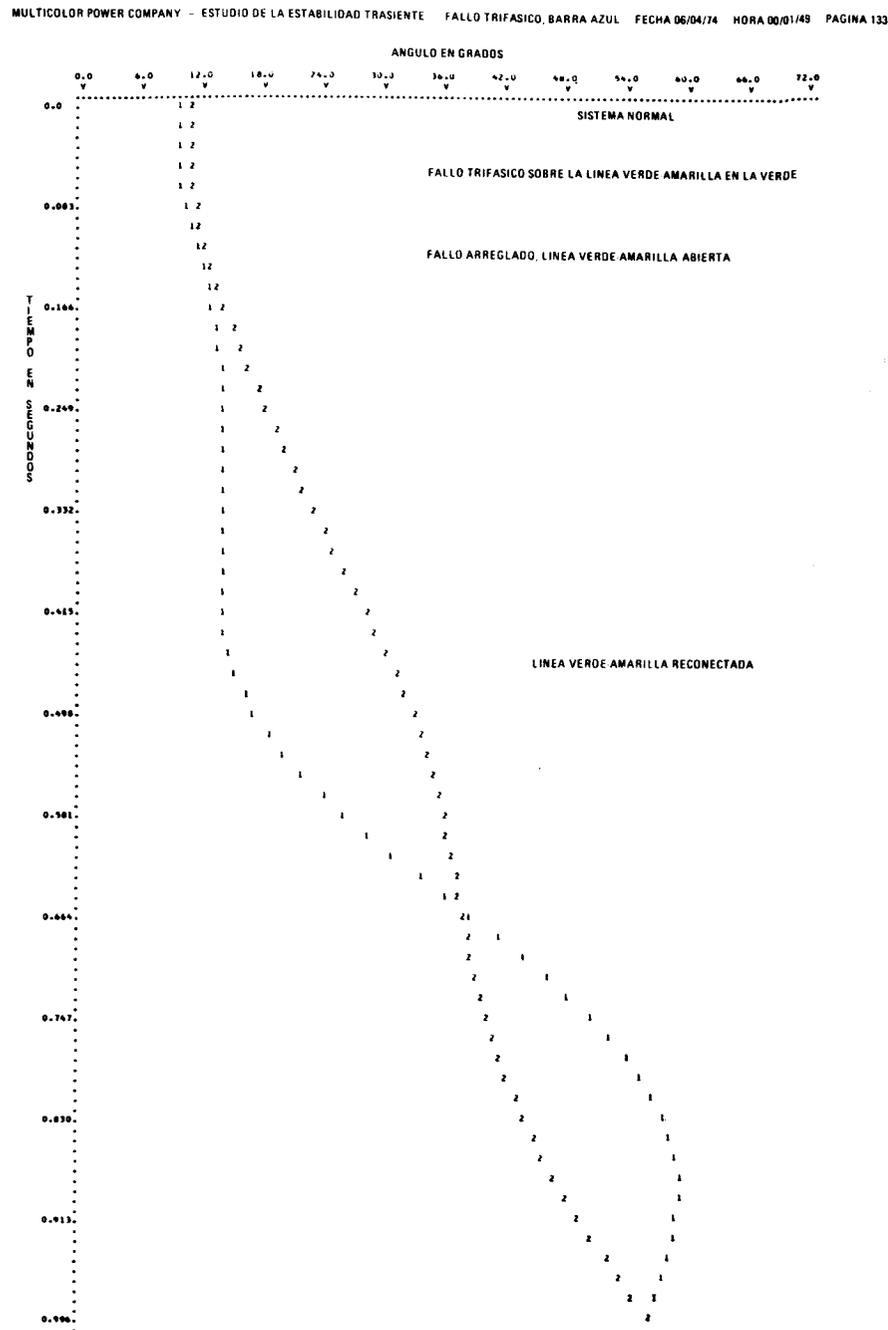


Fig. 14.15 Curvas de oscilación dibujadas por un computador para los dos generadores del ej. 8.1 con un fallo trifásico cerca de la barra 3. Los números 1 indican el generador en la barra 1, y los números 2 indican el generador en la barra 3.

HORA	MAQUINA BARRA No. 1		MAQUINA BARRA No. 3	
	POTENCIA	ANGULO	POTENCIA	ANGULO
0.0	65.	10.5	100.	11.7
0.017	65.	10.5	100.	11.7
0.033	65.	10.5	100.	11.7
0.050	65.	10.5	100.	11.7
0.057	31.	10.5	15.	11.7
0.066	30.	10.7	15.	11.8
0.083	30.	11.0	15.	12.0
0.100	30.	11.6	15.	12.4
0.100	77.	11.6	78.	12.4
0.116	77.	12.2	77.	13.0
0.133	77.	12.8	77.	13.5
0.149	77.	13.2	78.	14.2
0.166	77.	13.6	78.	14.8
0.183	76.	13.9	79.	15.5
0.199	75.	14.2	80.	16.3
0.216	74.	14.4	81.	17.1
0.232	73.	14.5	82.	17.9
0.249	71.	14.5	83.	18.8
0.266	70.	14.5	85.	19.6
0.282	68.	14.5	86.	20.6
0.299	66.	14.5	88.	21.5
0.315	64.	14.4	90.	22.5
0.332	63.	14.4	92.	23.5
0.349	61.	14.4	93.	24.5
0.365	59.	14.3	95.	25.5
0.382	57.	14.4	97.	26.6
0.398	55.	14.5	98.	27.6
0.415	54.	14.6	100.	28.6
0.432	52.	14.8	101.	29.7
0.432	29.	14.8	133.	29.7
0.448	28.	15.2	135.	30.7
0.465	27.	15.8	136.	31.7
0.481	27.	16.7	136.	32.5
0.498	28.	17.8	135.	33.3
0.515	29.	19.2	134.	34.1
0.531	32.	20.8	131.	34.7
0.548	35.	22.6	129.	35.3
0.564	39.	24.6	125.	35.9
0.581	43.	26.8	121.	36.4
0.598	48.	29.1	116.	36.8
0.614	53.	31.5	111.	37.2
0.631	58.	34.0	106.	37.6
0.647	64.	36.6	101.	38.0
0.664	70.	39.2	95.	38.4
0.681	75.	41.7	90.	38.8
0.697	80.	44.1	85.	39.2
0.714	85.	46.5	80.	39.7
0.730	89.	48.7	75.	40.2
0.747	93.	50.8	71.	40.7
0.764	96.	52.7	68.	41.3
0.780	98.	54.4	65.	41.9
0.797	100.	55.8	63.	42.7
0.813	101.	57.0	62.	43.5
0.830	101.	58.0	62.	44.3
0.847	101.	58.8	63.	45.3
0.863	100.	59.3	64.	46.3
0.880	98.	59.6	66.	47.4
0.896	95.	59.6	69.	48.6
0.913	92.	59.5	72.	49.8
0.930	88.	59.1	77.	51.1
0.946	83.	58.7	81.	52.4
0.963	79.	58.1	86.	53.8
0.979	73.	57.4	91.	55.1
0.996	68.	56.6	97.	56.6

Fig. 14.16 Resultado del computador mostrando la salida de potencia y el ángulo de par δ para los dos generadores del ej. 8.1 con un fallo trifásico cerca de la barra 3.

dio de las máquinas permanece más grande que la velocidad sincrónica antes de la falla porque se proporciona más energía a las máquinas que la que fue entregada a la carga. Esta entrada en exceso se almacena como un incremento en la energía cinética de las máquinas rotatorias. El ángulo δ de cada máquina se incrementa siempre que la velocidad real de la máquina sea más grande que la velocidad sincrónica antes de la falla.

La fig. 14.16 es la impresión del computador mostrando la potencia de salida y el ángulo de par δ de cada máquina durante el período total para el cual se hicieron los

cálculos. Es interesante examinar esta información para el tiempo durante el cual la línea averiada se remueve del sistema. Notamos primero que la salida o potencia desarrollada P_e del generador en la barra 1 es un poco más grande que su entrada P_s , la cual es 65.1 MW. Este valor de P_s permanece constante puesto que ignoramos la acción del controlador. La velocidad del generador disminuye al principio puesto que P_e es más grande que P_s .

Por otra parte, el generador en la barra 3 tiene una P_s de 100 MW, lo que constituye su salida antes de la falla, como se especificó en el ej. 8.1. Su salida precisamente después de remover la línea 3-5 es considerablemente menor que su P_s . Por tanto, la velocidad del generador en la barra 3 aumenta. El incremento es más grande de lo que sería si hubiéramos tomado ventaja de la provisión del programa del computador para la acción del regulador. Después de que el servicio se restaure en la línea 3-5, el sistema tiene la misma reactancia entre las barras, tal como antes de la falla, pero ahora ambos generadores están desplazándose más rápido que antes. Lo que es más importante aún, no están rotando a velocidades idénticas. Con la línea 3-5 restaurada, el generador 3 toma más carga que la normal y la carga en el generador 1 cae. Las fuerzas restauradas tratan entonces de lograr igualdad entre P_s y P_e para cada máquina. El criterio de estabilidad se establece si los generadores se apartan en velocidad o permanecen relativamente iguales y, de hecho, retoman a la misma velocidad para un funcionamiento estable, si se considera el amortiguamiento de las oscilaciones aun en el supuesto de que esta velocidad sea más grande que antes de la falla.

Vimos, al examinar la fig. 14.15, que las fuerzas tendientes a restaurar los generadores a su funcionamiento estable harán que oscilen en ángulo entre sí con la referencia angular dentro de los límites razonables, precisamente como se analiza para una máquina y una barra infinita en nuestro estudio del criterio de igualdad de áreas. Concluimos que el sistema es estable. No incorporamos la capacidad para el control de la excitación o para reducir la entrada a los controladores a fin de disminuir la velocidad cuando estaba presente una fuerza acelerante, y también dejamos de lado los diversos factores de amortiguamiento simplemente porque no incluían esos comportamientos en la simple aproximación paso a paso que desarrollamos para calcular las curvas de oscilación. Si hubiéramos sacado provecho de esas características, habríamos visto el amortiguamiento de las oscilaciones de los generadores unos con respecto a otros y que los ángulos se hacen constantes, pues, la acción de los controladores restaura la velocidad correspondiente a 60 Hz.

14.9 ALGUNOS FACTORES QUE AFECTAN LA ESTABILIDAD EN REGIMEN TRANSITORIO¹

Junto con el tipo de fallo y su localización, que están más allá del control del proyectista

¹ Para varios métodos de mejoramiento de la estabilidad explicados en términos del criterio de igualdad de áreas, véase E. W. Kimbark, *Improvement of Power System Stability*, *Trans. IEEE Power Appar Syst.*, vol. 88, págs. 773-781, 1969. Véase también E. W. Coshing, jr., G. E. Dreschler, W. P. Kilgoar, H. G. Marshall y H. R. Stewart, *Fost Valving an Aid to power System Transient Stability and Prompt Resynchronization and Rapid Reload After Full Load Rejection*, *Trans. IEEE Power Appar Syst.*, vol. 91, págs. 1624-1634, 1972.

del sistema, existen ciertos factores que afectan a la estabilidad transitoria y que son aparentes en las ecuaciones que desarrollamos para una máquina conectada a través de una reactancia a una barra infinita. Un examen de la ec. (14.35) muestra que un aumento de la constante M de inercia de una máquina, reduce su ángulo de oscilación durante cualquier intervalo de tiempo, lo que permite disponer de más tiempo para el funcionamiento de los interruptores para aislar el fallo antes de que la máquina pase por su ángulo crítico de corte. Un aumento de M ofrece pues un medio para incrementar la estabilidad, pero no se usa en gran escala por razones económicas.

Los métodos usados más frecuentemente para aumentar la estabilidad y que se entienden fácilmente refiriéndonos a nuestro estudio anterior son:

- 1 Aumento de la tensión del sistema.
- 2 Reducción de las reactancias en serie por medio de líneas en paralelos.
- 3 Utilización de interruptores de circuito de alta velocidad incluyendo interruptores de reenganche.

Como se ve por la ec. (14.4), $P_{m\acute{a}x}$ aumenta por incremento de la tensión interna de la máquina o de la tensión de una barra infinita a la cual esté conectada la máquina, por medio de una reactancia. Para una potencia dada en el árbol, el ángulo inicial de par, δ_0 , decrece por aumento de $P_{m\acute{a}x}$. El examen de la fig. 14.9 muestra que las tres curvas se desplazan hacia arriba al aumentar $P_{m\acute{a}x}$, siendo los resultados un δ_0 menor, un δ_m mayor y un incremento de la diferencia entre δ_0 y δ_c . En consecuencia, el aumento de $P_{m\acute{a}x}$ permite una mayor oscilación de una máquina desde su posición original antes de que alcance el ángulo crítico. Así pues, la elevación de $P_{m\acute{a}x}$ incrementa el tiempo crítico de corte y, por consiguiente, la probabilidad de mantener la estabilidad.

La reducción de la reactancia de una línea de transporte tiene el mismo efecto que la elevación de $P_{m\acute{a}x}$. La compensación de la reactancia de la línea por medio de condensadores en serie es económica para aumentar la estabilidad. Un procedimiento corriente de reducir la reactancia es el aumento del número de líneas en paralelo entre dos puntos. Si se utilizan líneas de transporte en paralelo, en lugar de una línea única, una parte de la potencia se transporta por la línea restante, incluso durante un fallo trifásico en una de las líneas, a menos que el fallo se produzca en una de las barras. En otros tipos de fallos en una línea se transmite más potencia durante el fallo si hay dos líneas en paralelo que a través de la línea simple fallada. Si hay más de dos líneas en paralelo, la potencia transmitida durante el fallo es todavía mayor. Si se resta la potencia transmitida de la potencia de entrada se obtiene la potencia acelerante. Por tanto, a mayor potencia transmitida durante el fallo, menor es la potencia acelerante, y por consiguiente, mayor es la posibilidad de mantener la estabilidad.

Es evidente que cuanto más rápidamente se aisle un fallo del sistema, menor será la perturbación que origine. Ya se ha señalado que existe un tiempo crítico de corte, antes del cual deben funcionar los interruptores para aislar el fallo si se quiere mantener la estabilidad. La utilización de interruptores de circuito de alta velocidad, en los sistemas de potencia, ha mejorado en gran manera su estabilidad, reduciendo al mismo tiempo la necesidad de efectuar otros cambios en el proyecto para tener funcionamientos estables. Otro método para mejorar la estabilidad donde el corte es retardado o donde súbitamente se pierde una carga es conectar en o cerca de la barra generadora una carga resistiva, llamada *resistencia de seguridad*. Esta carga compensa en algo la reducción de carga en los

generadores y así reduce la aceleración. La *válvula de seguridad* es el desarrollo más reciente, donde sensando la diferencia entre la entrada mecánica y la salida efectiva de un generador debido a una falla inicia el cierre de la válvula de una turbina para reducir la potencia de entrada.

Sin embargo, es aún importante para el diseñador del sistema y para el operador entender las razones de la pérdida de estabilidad y los medios para prevenirla.

PROBLEMAS

- 14.1 Derive ecuaciones análogas a las ecs. (14.1) y (14.2) para expresar la potencia de salida P_g de un generador y la máxima potencia que el generador puede suministrar cuando está conectado a un circuito de cuatro terminales alimentando un motor. La potencia debe darse en términos de las fem internas del generador y motor y las constantes D y B de la red incluyendo las impedancias sincrónicas de las máquinas. ¿Cuál es la relación entre β y δ para máxima P_g y máxima P_s ? ¿Qué indica esto acerca de cuál de esos valores máximos se logra primero a medida que δ se incrementa?
- 14.2 Las constantes generalizadas de un circuito nominal π , que representa a una línea de transporte trifásica son:
- $$A = D = 0.980/0.3^\circ$$
- $$B = 82.5/76.0^\circ \Omega$$
- $$C = 0.0005/90^\circ \text{ U}$$
- Determinar el límite de estabilidad en régimen permanente de la línea, si $|V_S|$ y $|V_R|$ se mantienen constantes a 110 kV. ¿Cuál es el límite de estabilidad en régimen permanente si se supone que la admitancia en paralelo es nula? ¿Cuál, si se supone que la admitancia en paralelo es nula y se desprecia la resistencia en serie?
- 14.3 Determine si la potencia entregada de 0.8 por unidad a la barra infinita del circuito del ej. 14.1 es posible teniendo en cuenta que la resistencia de la carga en el punto medio de la línea es (a) 1.25 por unidad y (b) 1.0 por unidad.
- 14.4 Un turbogenerador de 60 Hz, tetrapolar y con valores nominales de 20 MVA y 13.2 kV, tiene una constante de inercia de $H = 9.0$ kWs/kVA. Determinar la energía cinética almacenada en el rotor a la velocidad sincrónica. Hallar la aceleración si la entrada, menos las pérdidas por rotación, es de 26 800 CV y la potencia eléctrica producida, es de 16 MW.
- 14.5 Si la aceleración calculada para el generador del problema anterior es constante durante un período de 15 ciclos, determinar la variación del ángulo del par en tal período y las r.p.m. al final de los 15 ciclos. Suponer que el generador está sincronizado con un sistema grande y no tiene par acelerante antes de que comience el período de los 15 ciclos.
- 14.6 El generador del prob. 14.4, está suministrando la potencia de régimen con un factor de potencia en retraso de 0.8, en el momento de producirse un fallo que reduce la salida de potencia eléctrica en un 50%. Determinar el par acelerante en el instante en que se produce el fallo. Despreciar las pérdidas y suponer constante la entrada de potencia al árbol.
- 14.7 Un motor recibe el 25% de la $P_{m\acute{a}x}$ de una barra infinita. Si se duplica la carga del motor, calcular el valor máximo de δ , durante la oscilación del motor alrededor de su nueva posición de equilibrio.
- 14.8 Un generador de 60 Hz suministra el 50% de la $P_{m\acute{a}x}$ por una línea de transporte a una barra infinita. Se produce un fallo que aumenta la reactancia entre el genera-

dor y la barra infinita a un 400% del valor anterior al fallo. Una vez aislado el fallo, la potencia máxima que puede suministrarse es el 75% del valor original máximo. Determinar el ángulo crítico de corte para la condición descrita, aplicando el criterio de igualdad de áreas como en el ej. 14.2.

- 14.9 Si el generador del prob. 14.8, tiene una constante de inercia $H = 5.0$ megajulios/MVA, determinar el tiempo crítico de corte para la condición descrita. Utilizar un $t = 0.05$ s. Suponer que $P_{\text{máx}}$ es igual a 1.5 veces los MVA de régimen.
- 14.10 Un generador está suministrando una potencia de régimen de 1.0 por unidad a una barra infinita a través de una red completamente reactiva cuando se produce un fallo que reduce la máxima potencia a 0.4 por unidad. La potencia máxima que puede transmitir antes de producirse el fallo, es de 2.0 por unidad y, es 1.5 por unidad después del aislamiento del fallo. Si el aislamiento se produce en 4.5 ciclos, dibujar la curva de oscilación para intervalos de 0.05 desde $t = 0$, hasta $t = 0.80$. Suponer que $H = 7.0$ megajulios/MVA.
- 14.11 Repetir el prob. 14.10 si el aislamiento se efectúa en 3.0 ciclos y en 6.0 ciclos.
- 14.12 Un generador de 60 Hz con una constante de inercia de $H = 5.0$ megajulios/MVA está conectado a través de un transformador elevador a una línea de transporte. En el otro extremo de la línea, hay un transformador reductor que une la línea a un sistema grande que puede considerarse como una barra infinita. Reduciendo a una base común las reactancias por unidad del generador son $X' = 0.3$, $X_2 = 0.15$ y $X_0 = 0.05$; las de los transformadores son $X_1 = X_2 = X_0 = 0.10$; y las de la línea de transporte son $X_1 = X_2 = 0.25$ y $X_0 = 0.70$. Los transformadores están conectados en triángulo en el lado de baja tensión y en estrella, con el neutro a tierra, en el lado de alta tensión. En el lado de alta tensión del transformador conectado al generador se produce un fallo de línea simple a tierra en el momento en que el generador está suministrando una potencia de 1.0 por unidad. La tensión detrás de la reactancia transitoria del generador es de 1.30 por unidad y la tensión de la barra infinita de 1.0 por unidad. El fallo es aislado por la acción simultánea de interruptores monopolares a ambos lados del fallo. Los interruptores, actuando solamente en la fase en fallo, se abren 0.15 s después de presentarse éste y se cierra 30 ciclos después de la apertura. Puede demostrarse por las componentes simétricas que, con estos interruptores abiertos, la potencia máxima que puede transmitirse por la línea de transporte es de 0.675 veces la potencia máxima que puede ser transmitida antes de producirse el fallo. El fallo no se reproduce después del nuevo cierre. Dibujar la curva de oscilación del generador.
- 14.13 La salida impresa de un computador para el estudio de estabilidad del sistema del ej. 8.1 descrito en la sec. 14.8 muestra que en $t = 0.830$ s ambas máquinas están funcionando con la misma porción positiva de 0.150 Hz. ¿Cuál es la velocidad de las máquinas en revoluciones por minuto en este momento si cada una tiene cuatro polos?
- 14.14 Puesto que la fig. 8.2 muestra que la potencia de salida de los generadores conectados a las barras 1 y 3 de la red del ej. 8.1 son 65.1 y 100 MW respectivamente, antes de que la falla ocurra, suponemos esos valores como constantes e iguales a P_s durante el período total del cálculo de estabilidad descrito en la sec. 4.8, el cual ignora la acción de los controladores. El examen de la fig. 14.16 muestra que dichos generadores están produciendo estos valores de potencia muy cerca de $t = 0.647$ s, y $t = 0.996$ s y, por consiguiente, no están sufriendo casi ninguna aceleración en estos instantes. Determine la velocidad de cada máquina en revoluciones por minuto suponiendo que cada uno tiene cuatro polos y funciona a velocidad constante durante el intervalo entre los valores de t registrados anteriormente.

APENDICE

Tabla A.1 Características eléctricas de los conductores de aluminio reforzados de acero (ACSR)†

Tipo	Area de aluminio, c mil	Trensado Al/St	Capas de aluminio	Diámetro exterior, pul	Resistencia			GMR D_s , ft	Reactancia por conductor 1 pie de separación, 60 Hz	
					Dc, 20°C, $\Omega/1,000$ pie	Ac, 60 Hz			Inductiva X_d , Ω/mi	Capacitiva X'_d , $M\Omega-mi$
						20°C, Ω/mi	50°C, Ω/mi			
Waxwing	266,800	18/1	2	0.609	0.0646	0.3488	0.3831	0.0198	0.476	0.1090
Partridge	266,800	26/7	2	0.642	0.0640	0.3452	0.3792	0.0217	0.465	0.1074
Ostrich	300,000	26/7	2	0.680	0.0569	0.3070	0.3372	0.0229	0.458	0.1057
Merlin	336,400	18/1	2	0.684	0.0512	0.2767	0.3037	0.0222	0.462	0.1055
Linnet	336,400	26/7	2	0.721	0.0507	0.2737	0.3006	0.0243	0.451	0.1040
Oriole	336,400	30/7	2	0.741	0.0504	0.2719	0.2987	0.0255	0.445	0.1032
Chickadee	397,500	18/1	2	0.743	0.0433	0.2342	0.2572	0.0241	0.452	0.1031
Ibis	397,500	26/7	2	0.783	0.0430	0.2323	0.2551	0.0264	0.441	0.1015
Pelican	477,000	18/1	2	0.814	0.0361	0.1957	0.2148	0.0264	0.441	0.1004
Flicker	477,000	24/7	2	0.846	0.0359	0.1943	0.2134	0.0284	0.432	0.0992
Hawk	477,000	26/7	2	0.858	0.0357	0.1931	0.2120	0.0289	0.430	0.0988
Hen	477,000	30/7	2	0.883	0.0355	0.1919	0.2107	0.0304	0.424	0.0980
Osprey	556,500	18/1	2	0.879	0.0309	0.1679	0.1843	0.0284	0.432	0.0981
Parakeet	556,500	24/7	2	0.914	0.0308	0.1669	0.1832	0.0306	0.423	0.0969
Dove	556,500	26/7	2	0.927	0.0307	0.1663	0.1826	0.0314	0.420	0.0965
Rook	636,000	24/7	2	0.977	0.0269	0.1461	0.1603	0.0327	0.415	0.0950
Grosbeak	636,000	26/7	2	0.990	0.0268	0.1454	0.1596	0.0335	0.412	0.0946
Drake	795,000	26/7	2	1.108	0.0215	0.1172	0.1284	0.0373	0.399	0.0912
Tern	795,000	45/7	3	1.063	0.0217	0.1188	0.1302	0.0352	0.406	0.0925
Rail	954,000	45/7	3	1.165	0.0181	0.0997	0.1092	0.0386	0.395	0.0897
Cardinal	954,000	54/7	3	1.196	0.0180	0.0988	0.1082	0.0402	0.390	0.0890
Ortolan	1,033,500	45/7	3	1.213	0.0167	0.0924	0.1011	0.0402	0.390	0.0885
Bluejay	1,113,000	45/7	3	1.259	0.0155	0.0861	0.0941	0.0415	0.386	0.0874
Finch	1,113,000	54/19	3	1.293	0.0155	0.0856	0.0937	0.0436	0.380	0.0866
Bittern	1,272,000	45/7	3	1.345	0.0136	0.0762	0.0832	0.0444	0.378	0.0855
Pheasant	1,272,000	54/19	3	1.382	0.0135	0.0751	0.0821	0.0466	0.372	0.0847
Bobolink	1,431,000	45/7	3	1.427	0.0121	0.0684	0.0746	0.0470	0.371	0.0837
Plover	1,431,000	54/19	3	1.465	0.0120	0.0673	0.0735	0.0494	0.365	0.0829
Lapwing	1,590,000	45/7	3	1.502	0.0109	0.0623	0.0678	0.0498	0.364	0.0822
Falcon	1,590,000	54/19	3	1.545	0.0108	0.0612	0.0667	0.0523	0.358	0.0814
Bluebird	2,156,000	84/19	4	1.762	0.0080	0.0476	0.0515	0.0586	0.344	0.0776

† La mayoría usa tamaños de multicapas.

‡ Reproducidas de "Aluminum Electrical Conductor Handbook", con autorización de Aluminum Association, New York, Septiembre 1971.

Tabla A.2 Factor de separación de la reactancia inductiva X_d a 60 Hz† (ohmios por milla por conductor)

Pies	Separación											
	Pulgadas											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	-0.3015	-0.2174	-0.1682	-0.1333	-0.1062	-0.0841	-0.0654	-0.0492	-0.0349	-0.0221	-0.0106
1	0	0.0097	0.0187	0.0271	0.0349	0.0423	0.0492	0.0558	0.0620	0.0679	0.0735	0.0789
2	0.0841	0.0891	0.0938	0.0984	0.1028	0.1071	0.1112	0.1152	0.1190	0.1227	0.1264	0.1299
3	0.1333	0.1366	0.1399	0.1430	0.1461	0.1491	0.1520	0.1549	0.1577	0.1604	0.1631	0.1657
4	0.1682	0.1707	0.1732	0.1756	0.1779	0.1802	0.1825	0.1847	0.1869	0.1891	0.1912	0.1933
5	0.1953	0.1973	0.1993	0.2012	0.2031	0.2050	0.2069	0.2087	0.2105	0.2123	0.2140	0.2157
6	0.2174	0.2191	0.2207	0.2224	0.2240	0.2256	0.2271	0.2287	0.2302	0.2317	0.2332	0.2347
7	0.2361	0.2376	0.2390	0.2404	0.2418	0.2431	0.2445	0.2458	0.2472	0.2485	0.2498	0.2511
8	0.2523											
9	0.2666											
10	0.2794											
11	0.2910											
12	0.3015											
13	0.3112											
14	0.3202											
15	0.3286											
16	0.3364											
17	0.3438											
18	0.3507											
19	0.3573											
20	0.3635											
21	0.3694											
22	0.3751											
23	0.3805											
24	0.3856											
25	0.3906											
26	0.3953											
27	0.3999											
28	0.4043											
29	0.4086											
30	0.4127											
31	0.4167											
32	0.4205											
33	0.4243											
34	0.4279											
35	0.4314											
36	0.4348											
37	0.4382											
38	0.4414											
39	0.4445											
40	0.4476											
41	0.4506											
42	0.4535											
43	0.4564											
44	0.4592											
45	0.4619											
46	0.4646											
47	0.4672											
48	0.4697											
49	0.4722											

A 60 Hz, en Ω/mi por conductor

$$X_d = 0.2794 \log d$$

d = separación, pies

Para líneas trifásicas

$$d = D_{eq}$$

† De "Electrical Transmission and Distribution Referenced Book", con la autorización de Westinghouse Electric Corporation.

Tabla A.3 Factor de separación de la reactancia capacitiva X_G a 60 Hz† (megaohmios-milla por conductor)

Pies	Separación											
	Pulgadas											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.0206	0.0218	0.0230	0.0241	0.0251	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299
1	0.0206	0.0218	0.0230	0.0241	0.0251	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306
2	0.0218	0.0230	0.0241	0.0251	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313
3	0.0230	0.0241	0.0251	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320
4	0.0241	0.0251	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327
5	0.0251	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334
6	0.0260	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334	0.0341
7	0.0269	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334	0.0341	0.0348
8	0.0277	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334	0.0341	0.0348	0.0355
9	0.0285	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334	0.0341	0.0348	0.0355	0.0362
10	0.0292	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334	0.0341	0.0348	0.0355	0.0362	0.0369
11	0.0299	0.0306	0.0313	0.0320	0.0327	0.0334	0.0341	0.0348	0.0355	0.0362	0.0369	0.0376

A 60 Hz, en MΩ-mi por conductor
 $X_G = 0.06831 \log d$
 d = separación, pies
 Para líneas trifásicas
 $d = D_{eq}$

De "Electrical Transmission and Distribution Reference Book", con la autorización de Westinghouse Electric Corporation.

Tabla A.4 Constantes típicas de máquinas sincrónicas trifásicas†
 (Las reactancias se dan por unidad. Los valores por debajo de las líneas horizontales de las casillas son el campo normal de valores; por encima, son los valores medios).

	X_d (sin sat.) (1)	X_q corriente nominal (2)	X'_d tensión nominal (3)	X''_d tensión nominal (4)	X_2 corriente nominal (5)	X_0 † corriente nominal (6)
Turbogeneradores bipolares	$\frac{1.20}{0.95-1.45}$	$\frac{1.16}{0.92-1.42}$	$\frac{0.15}{0.12-0.21}$	$\frac{0.09}{0.07-0.14}$	= X''_d	$\frac{0.03}{0.01-0.08}$
Turbogeneradores tetrapolares	$\frac{1.20}{1.00-1.45}$	$\frac{1.16}{0.92-1.42}$	$\frac{0.23}{0.20-0.28}$	$\frac{0.14}{0.12-0.17}$	= X''_d	$\frac{0.08}{0.015-0.14}$
Generadores y motores con polos salientes (con amortiguadores)	$\frac{1.25}{0.60-1.50}$	$\frac{0.70}{0.40-0.80}$	$\frac{0.30}{0.20-0.50}$ §	$\frac{0.20}{0.13-0.32}$ §	$\frac{0.20}{0.13-0.32}$ §	$\frac{0.18}{0.03-0.23}$
Generadores con polos salientes (sin amortiguadores)	$\frac{1.25}{0.60-1.50}$	$\frac{0.70}{0.40-0.80}$	$\frac{0.30}{0.20-0.50}$ §	$\frac{0.30}{0.20-0.50}$ §	$\frac{0.48}{0.35-0.65}$	$\frac{0.19}{0.03-0.24}$
Condensadores refrigerados por aire	$\frac{1.85}{1.25-2.20}$	$\frac{1.15}{0.95-1.30}$	$\frac{0.40}{0.30-0.50}$	$\frac{0.27}{0.19-0.30}$	$\frac{0.26}{0.18-0.40}$	$\frac{0.12}{0.025-0.15}$
Condensadores refrigerados por hidrógeno a 1/2 psi KVA nominales	$\frac{2.20}{1.50-2.65}$	$\frac{1.35}{1.10-1.55}$	$\frac{0.48}{0.36-0.60}$	$\frac{0.32}{0.23-0.36}$	$\frac{0.31}{0.22-0.48}$	$\frac{0.14}{0.030-0.18}$

† Reproducido con autorización de la "Westinghouse Electric Corporation", del "Electrical Transmission and Distribution Reference Book".

‡ X_0 varía tan críticamente con el paso del devanado del inducido, que, difícilmente, puede darse un valor medio. La variación es desde 0.1 a 0.7 de X''_d . El límite inferior es para devanados de paso 2/3.

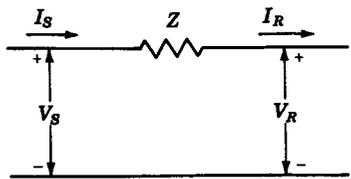
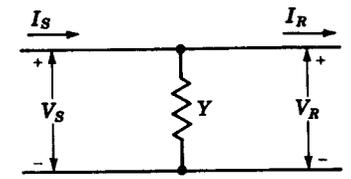
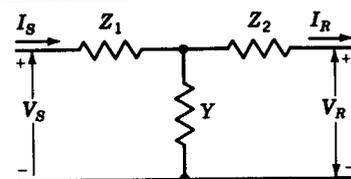
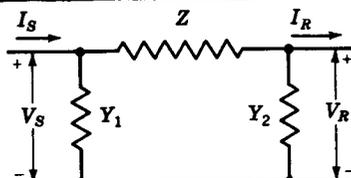
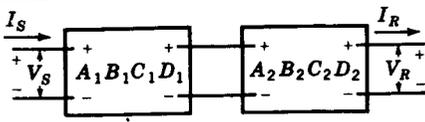
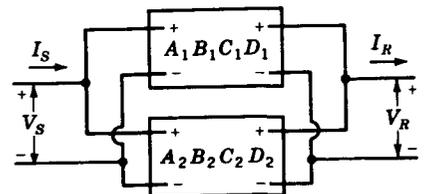
§ Las unidades de alta velocidad tienden a tener reactancias bajas y las de baja velocidad, reactancias altas.

Tabla A.5 Intervalos típicos de las reactancias de transformadores†
Transformadores de potencia de 25.000 KVA y superiores

Tensión nominal, KV	Enfriamiento por aire a presión	Enfriamiento por aire a presión
34.5	5-8	9-14
69	6-10	10-16
115	6-11	10-20
138	6-13	10-22
161	6-14	11-25
230	7-16	12-27
345	8-17	13-28
500	10-20	16-34
700	11-21	19-35

† Porcentaje sobre KVA base nominal. Ahora se diseñan los transformadores para el valor mínimo de la reactancia indicada. Los transformadores de distribución tienen reactancias considerablemente inferiores. Las resistencias de los transformadores ordinariamente son inferiores al 1%.

Tabla A.6 Constantes ABCD para distintas redes

 <p style="text-align: center;">Impedancia en serie</p>	$A = 1$ $B = Z$ $C = 0$ $D = 1$
 <p style="text-align: center;">Admitancia en paralelo</p>	$A = 1$ $B = 0$ $C = Y$ $D = 1$
 <p style="text-align: center;">T asimétrico</p>	$A = 1 + YZ_1$ $B = Z_1 + Z_2 + YZ_1Z_2$ $C = Y$ $D = 1 + YZ_2$
 <p style="text-align: center;">π asimétrico</p>	$A = 1 + Y_2Z$ $B = Z$ $C = Y_1 + Y_2 + ZY_1Y_2$ $D = 1 + Y_1Z$
 <p style="text-align: center;">Redes en serie</p>	$A = A_1A_2 + B_1C_2$ $B = A_1B_2 + B_1D_2$ $C = A_2C_1 + C_2D_1$ $D = B_2C_1 + D_1D_2$
 <p style="text-align: center;">Redes en paralelo</p>	$A = (A_1B_2 + A_2B_1)/(B_1 + B_2)$ $B = B_1B_2/(B_1 + B_2)$ $C = C_1 + C_2 + (A_1 - A_2)(D_2 - D_1)/(B_1 + B_2)$ $D = (B_2D_1 + B_1D_2)/(B_1 + B_2)$

INDICE

INDICE

- ABCD*, constantes, ventajas de las, 142
interpretación de las, 126
de líneas de transporte cortas, 128
de líneas de transporte largas, 129
de líneas de transporte en por unidad de Z_c , 134-135
medida de, 140-142
de redes T-asimétricas, 125
de redes π -asimétricas, 128
de redes de dos partes de terminales, 125, 126
de redes en paralelo, 139
en serie, 139
de redes π -simétricas, 129
diagramas de Povejsil-Johnson, 133-
relaciones entre las, 126, 128
Aceleración, factores de, 180
ACSR (*ver* Aluminio, cables de, con
refuerzo de acero)
Admitancia, mutua, de nudos, 141
como datos en los estudios de
cargas, 176
en paralelo de líneas de transporte,
86-92, 106
propia de nudos, 141
Alternadores, corriente transitoria en
los, 108-109
en vacío, corriente de cortocircuito,
243-244
(*ver* también Síncronas, máquinas)
Aluminio, cables con refuerzo de acero
(ACSR), 39, 40
dilatado, 40
distancia geométrica media aplicada
a, 45
tabla de características, 380-383
American National Standards Institute,
109
Amortiguación, constante de, 92
Analizador de redes. 5-6
comparado con la calculadora
digital, 186-189
(c. c.), o cuadro de cálculo,
129-132
estudios de cargas en un, 175-176
resultados de los, 19-23
en los estudios de estabilidad, 372
Arbol, definición de, 144
Asimétricas, impedancias en serie,
285, 286
Asimétricos, fallos (*ver* Fallos)
Automático, suministro de la carga,
237-239
B, cálculo de las, 227-232
Barra infinita, definición de, 130
Base, magnitudes, cambio de, 117
relación entre las, 114, 115, 116
selección de valores para las,
114-125
Ber y Bei, funciones, 95
Bessel, funciones de, 93-95
Calculadora para la distribución auto-
mática de carga, 237-238
digital (*ver* Digital)
Capacidad, cálculo por el método de
la distancia geométrica media
modificada, 79-80
circuito paralelo
definición de la, 64
de líneas bifilares, 67-69
de línea a línea, 68
de línea a neutro, 68, 69
de líneas trifásicas con disposición
equilátera, 71-74
efecto del suelo sobre, 76-78
de conductores trenzados, 70
de una distribución de carga

circuito paralelo, 80-81
 con distribución asimétrica, 74-76
 transposición para equilibrar la, 74-76, 78

Capacidad de carga momentánea de los interruptores, 242, 261-267

Capacitancia, factor de separación de la, 71
 tabla de la, 385
 reactancia, 70-71

Carga, corriente de, 65

Cargas, distribución automática, 237-239
 en calculadoras digitales, resultados de, (ver también Económica, distribución de carga)

Cargas monofásicas, 329

Central, demanda de la, 237-239

Cinética, energía, 338-340

Circuito nominal- π para representar líneas de longitud media, 87-88

Circuito nominal-T para representar líneas de longitud media, 87-88

Circuitos π , asimétricos, ecuaciones para, 128
 nominales para representar líneas de longitud media, 87-88

Círculo, diagrama de, ejemplos, 159-162
 potencia en el extremo receptor, 145-150
 potencia en el extremo transmisor, 150-153
 universal, 154-157
 utilización del, 158-162

Combustible, costo (ver Económica, distribución de carga)

Computador digital, programas de, 185

Computador:
 para distribución automática de carga, 263-265
 digital (véase Computador digital)

Condensadores, bancos de, 200-202

Conductores agrupados:
 reactancia capacitiva, 89, 90
 reactancia inductiva, 65, 66

Conductores compuestos, inductancia de, 47, 48, 51-53
 tablas de características, 378-383
 tipos de, 33-34

Conductores múltiples, 58-59

Control por transformadores, 203-212

Corriente, factores de distribución, 228

Corriente de carga, 64, 73

Cálculos digitales de, 329
 ecuaciones de, para líneas de transporte cortas, 86
 para líneas de transporte largas, 92, 93, 95, 96
 para líneas de transporte de longitud media, 87

instantánea, en interruptores de circuito, 242, 261-263

onda incidente de, 93

onda reflejada de, 93

subtransitoria, 246

transitoria en alternadores, 245-249
 en circuitos RL , 243

Corriente continua, transporte, 15

Corte, ángulo crítico de, 349
 tiempo crítico de, 353, 355, 356

Cortocircuito, MVA de, definición de, 130
 relación con el circuito equivalente de Thévenin, 130

Defase en transformadores trifásicos, 276-284

Desequilibrio de potencia en estudios de cargas, 188

Digital, calculadora, 6
 comparada con el analizador de redes (c. a.), 132
 para estudios de cargas, 185
 para estudios de estabilidad, 362, 363
 comparada con el cuadro de cálculo (c. c.), para estudios de fallos trifásicos, 274

estudios de cargas en, 175-188
 resultados de los, 362

en los estudios de estabilidad, 362

estudios de fallos trifásicos en, 275-277
 resultados de los, 276
 en la reducción de redes, 192
 velocidad operatoria de la, 17

Económica, distribución de carga, determinación de la, entre centrales, 232-236
 intuitivamente, 218
 matemáticamente, 218-220
 entre las unidades de una central, 217-224
 ejemplos de, entre centrales, 234-236
 entre las unidades de una central, 222-223
 significado de, 6

Económico, funcionamiento, de un sistema eléctrico de potencia (ver Económica, distribución)

Energía, 236-237

Energía generada deseada, 236-237

Entrada-salida, curva, 217

Equivalencia de fuentes, 148-149

Equivalente, circuito, de líneas de transporte cortas, 86, 87
 de líneas de transporte largas, 98-100
 de líneas de transporte de longitud media, 87-88
 de transformadores, 111-114

Equivalente, circuito, 99-100

Equivalente, disposición equilátera, en cálculos de capacidad, 74-76
 en cálculos de inductancia, 54

Eslabón, definición de, 144
 en la formación de las ecuaciones de lazo, 145-147

Estabilidad, definición de, 332
 en régimen permanente, 334-335
 en régimen transitorio (ver Estabilidad límite, transitoria)

Estabilidad, definición de, 333
 en régimen permanente, 334-338
 métodos para aumentarla, 338
 límite de, 9
 transitoria, 9
 criterio de igualdad de las áreas para su determinación, 343, 344

Estabilidad, estudios de, 9

Estirado, cable de aluminio con refuerzo de acero, 49
 tabla de características, 383

Factor de potencia, 17, 18, 20

Fallos, definición de los, 6, 8
 a través de impedancias, 326-329
 en sistemas con carga, 312-314
 de línea doble a tierra, 315
 de línea a línea, 315
 de línea simple a tierra, 314-315
 trifásicos a través de impedancias, 326
 en generadores en vacío, de doble línea a tierra, 308-312
 de línea a línea, 305-308
 de línea simple a tierra, 302-305
 en máquinas sincrónicas, 249-255
 en sistemas con cargas, 328
 varios tipos de, presentación de, 8

influencia sobre la estabilidad, 350

Fallos dobles de línea a tierra, en generadores en vacío, 305-312
 a través de una impedancia, 326-327
 en sistemas de carga, 315

Fallos asimétricos, análisis de, empleando la matriz de impedancia de barras, 323

Fase constante, 92

Flujo, en un conductor de un grupo, 37, 38
 en conductores aislados, 33, 34
 enlaces, 28-30
 en solenoide, 28
 parcial, 30
 variación, caída de tensión debida a, 29, 30

Forma normalizada, de las ecuaciones de lazo, 146
 de las ecuaciones de nudo, 150

Fórmulas de pérdida, cálculo de los, 227-232
 coeficiente, 225

Fortescue, C.L., 270

Fuentes, equivalencia de, 148, 149

Generación de energía, nuevos métodos de,

Generalizadas, constantes, de un circuito (ver $ABCD$, constantes)

Geométrica, distancia media, (GMD), aplicada a $ACSR$; 45, 46
 de varias formas geométricas, 45
 de un punto a un área, 44
 entre superficies, 44
 métodos de cálculo de inductancias, por la, 42-48, 54-58
 modificados para el cálculo de, mutua, 42
 propia, 42
 de un área, 44
 tablas, 378-383

Geométrico, radio medio (ver Geométrica, distancia media, propia)

Grafo, árbol de un, 144
 definición de, 144
 eslabón de un, 144

Hiperbólicas, funciones, 96-99

Igualdad de las áreas-criterio de la, 343-348
 aplicación del, 348-353

Imagen, cargas, 76, 77
 Impedancias, diagramas de, 110-169
 de secuencia cero (*ver* Secuencia cero, impedancia)
 de secuencia negativa (*ver* Secuencia negativa, impedancia)
 de secuencia positiva, 287
 de elementos de circuito, 290-291
 de sobretensión, 93
 de transformadores, 291
 tabla,
 por unidad, tabla,
 transformadores de dos devanados, 121-122
 de transformadores de tres devanados, 125-128
 en fallos, 326-329
 interna de conductores cilíndricos, 95-96
 mutua, de lazos, 146
 propia, de lazos, 146
 Impedancia característica, 92
 terminación de línea por, 93
 (*ver* Característica, Impedancia)
 Incidente, tensión y corriente, 92
 Inducción, motores de, 111
 KVA nominales de los, 118
 Inductancia de ACSR, 53
 cálculo por el método de la distancia media geométrica, 49-53
 debida al flujo interno, 40-42
 definición de, 38-40
 de líneas trifásicas con disposición equilátera, 55
 con disposición asimétrica, 56
 de líneas con conductores compuestos, 47-49
 de secuencia cero, en líneas de transporte, 291
 en la transposición, 56, 57
 mutua, 38-39
 Inductancia, factor de separación de la, 54
 tabla de la, 384
 reactancia, a 1 pie de separación, 54
 tablas, 378-383
 Inercia, constantes de,
 Intensidad del campo, 40
 Interconexión de sistemas de energía eléctrica, 5
 efecto en el suministro automático de energía, 237, 238
 Interrupción, valor de régimen en interruptores de circuito, 243, 261-264.

capacidad de carga momentánea, 243, 261-264
 selección de, 261-267
 símbolos de, 110
 tiempo de funcionamiento de,
 valor nominal de interrupción, 246-248
 Interruptores de circuito, 108-109
 Inversión, regla de, en álgebra matricial, 284
 Iteración, método de, para problemas de cargas, 176-186
 Lagrange, multiplicadores de, 220-222
 Lazo, corriente de, 143-144
 Lazo, definición de, 143-144
 Lazo, determinados por eslabones, 144
 ecuaciones de, 143-148
 forma normalizada de las, 146
 independencia de las, 144
 Línea a línea, fallos de, a través de impedancias, 328-329
 en generadores en vacío, 305-308
 en sistemas con carga, 315
 Línea de longitud media, 87-89
 Línea simple a tierra, fallos, a través de impedancias, 326-329
 en generadores en vacío, 302-305
 en sistemas con carga, 314-315
 Líneas largas, circuito equivalente, 99-101
 Líneas largas, ecuaciones,
 forma hiperbólica de las, 96-97
 interpretación de, 92-96
 resolución de las, 90-92
 Líneas trifásicas, de circuitos paralelos, 59
 Magnetomotriz, fuerza, en líneas cerradas, 31
 Malla, definición de, 145
 Matrices, 153-155
 compatibilidad de, 157
 igualdad de, 154
 multiplicación de, 156-158
 orden de, 154
 partición de, 162-164
 regla de inversión, 162-164
 suma de, 156
 (*ver también* Matriz)
 Matriz, cuadrada, definición de, 154
 definición de, 154
 de impedancias para estudio de un fallo trifásico, 258
 elemento de, 153-154

traspuesta de una, 155
 (*ver también* Matrices)
 Matriz, inversión de una, 158
 partición de una, 162-164
 Método para estudio de cargas:
 Gauss-Seidel, 176
 Newton-Raphson, 182
 Método de Gauss-Seidel para el estudio de cargas, 263-265
 Método de Newton-Raphson para el estudio de cargas, 197-204
 Monofásicas, cargas, 329
 Neutralizador de fallo a tierra, 110
 Nudo, definición de, 138
 principal, 138
 Nudo, ecuaciones de, 149-153
 forma normalizada de las, 150
 independencia de las, 150
 en problemas de cargas, 177
 Nudo, eliminación de, por métodos matriciales, 164-166
 por transformaciones estrella-malla, 138-143
 Onda, longitud de, 94
 Ondas, incidente y reflejada, 93
 Operadores, 272-274
 Oscilación, ecuación de,
 solución paso a paso, 353-359
 en analizador de ondas, 370, 371
 en calculadoras digitales, 371, 372
 Oscilante, barra, 176-178
 Par, 341
 Par, ángulo de, 334-336, 342-359
 Penalización, factor de, 233, 237-239
 Pérdida, reactancias de, en transformadores, 111, 112
 Pérdidas en las líneas de transporte por derivación, 87
 en función de la potencia generada en la central, 224-232
 ecuación para las,
 ejemplos de, 226, 234-235, 2488
 hipótesis de cálculos, 230
 Piel, descripción cualitativa de la, 36-37
 efecto, 36
 Planar, red, 145
 Polaridad, designación en transformadores, 289, 291
 Por unidad, impedancia, de transformadores de tres devanados, 125-128
 de transformadores de dos devanados, 126
 (*ver también* Por unidad, magnitudes)
 Por unidad, definición de, 114
 valores, base para los, cambio de, 117
 selección de, 114-125
 Potencia:
 compleja, 19
 dirección del flujo de, 20
 en circuitos monofásicos de c. a., 15
 en circuitos trifásicos balanceados, 28
 Potencia acelerante, 342
 compleja, 19
 por componentes simétricas, 283-284
 Potencia compleja, 21
 Potencia instantánea reactiva, 17
 Propagación, constante de, 93
 velocidad de, 94
 Puesta a tierra, prácticas de, 109-110
 Rama, definición de, 143
 Reactancia, capacitativa a 1 pie de separación, 71
 tablas, 378-383
 para el circuito equivalente de Thévenin en sistemas de potencia, 130, 131
 factor de separación, 50, 71
 tabla, 384, 385
 inductiva, a 1 pie de separación, 49, 50
 tablas, 368-383
 de máquinas sincrónicas, tabla, 386
 de secuencia cero, 287
 de elementos de circuito, 290-291
 de líneas de transporte, 290-291
 de máquinas sincrónicas, 290
 tabla, 386
 de transformadores, 291
 de secuencia negativa, 286
 de elementos de circuito, 290-292
 de líneas de transporte, 291
 de máquinas sincrónicas, 290
 tablas, 386
 de transformadores, 291
 sincrónica, 246-247
 subtransitoria, 110
 tensión detrás de la, 250
 de transformadores, tabla, 387
 transitoria, 246

tensión detrás de la, 250
 utilización de tablas, 49-51
 Reactancias, diagramas de, 111-113
 Reactiva, potencia, signo de la, 146, 147
 Red, de dos pares de terminales, 124
 de secuencia cero (*ver* Secuencia cero, redes de)
 secuencia, 287-290, 291-298
 positiva (*ver* Secuencia positiva, redes de)
 Red, ecuaciones de (*ver* Lazo, ecuaciones de; Nudo, ecuaciones de)
 Red planar, 145
 Red de secuencias, conexiones de la, para fallos a través de impedancias, 326-329
 para fallos asimétricos, 312-323
 Redes, reducción de, por métodos matriciales, 164-166
 por transformaciones estrella-malla, 138-143
 Redes de secuencia, 291-297
 interconexión para cálculos de fallos, 312-323, 326-329
 Reducción de redes (*ver* Redes, reducción)
 Reflejadas, tensión y corriente, 93
 Resistencia (c.c.), 34
 de conductores trenzados, 35
 efectiva, 35
 razón de la en (c.c.), 36-37
 valores tabulados de, 37
 tablas, 378-383
 variación con la temperatura, 35
 Resistividad, 34-35
 Resultados numéricos, 188
 Secuencia cero, componentes de, 271, 275
 de elementos de circuito, 290-291
 de líneas de transporte, 291
 de máquinas sincrónicas, 290
 tabla, 387
 de transformadores, 291
 impedancia de, 287
 Secuencia cero, de cargas conectadas en Δ , 294
 de cargas conectadas en Y, 292-294
 de generadores sin carga, 287, 290
 de transformadores trifásicos, 294-298
 en estudios de fallos, 312-323, 326-329
 redes de, 287, 290

Secuencia negativa, componentes de, 270, 271, 275
 de elementos de circuito, 290-291
 de líneas de transporte, 291
 de máquinas sincrónicas, 289
 tabla, 386
 de transformadores, 290
 impedancia de, 287
 Secuencia negativa, redes de, 287, 291, 292
 de generadores sin carga, 287-290
 en estudios de fallos, 312-323, 326-329
 Secuencia positiva, componentes de, 270, 271, 274-276
 impedancias de, 287
 de elementos de circuito, 290-291
 Secuencia positiva, redes de, 287-290, 292
 de generadores sin carga, 287-290
 en estudios de fallos, 312-323, 326-329
 Símbolos para diagramas unifilares, 110
 Simétricas, componentes, definición de, 270-272
 de vectores asimétricos, 274-276
 potencia en función de, 284-285
 Sincrónicos, constantes de inercia de, 330-340
 criterio de la igualdad de las áreas para la estabilidad de las, 343-348
 fallos trifásicos en, 249-255
 impedancia de secuencia cero de, 290
 tabla, 386
 impedancia de secuencia negativa de, 290
 tabla, 386
 reactancias de, secuencia positiva, 290
 Síncronos, motores, KVA de régimen de, 118
 Sistema, demanda de un, 236, 237
 Sobretensión, impedancia de, 93
 (*ver también* Características, impedancia)
 Subtransitoria, corriente, 246-248
 Suelo, efecto de, sobre la capacidad, 78-80
 T, circuito nominal, para representar líneas de longitud media, 87, 88
 asimétrico, ecuaciones para,

T- Δ , transformaciones, 138
 Tensión, elección de, 4-5
 ecuaciones para la, en líneas de transporte cortas, 86-87
 en líneas de transporte largas, 92-96
 en líneas de transporte medias, 87
 onda incidente de, 93
 Tensión, regulación de, definición de la, 86-87
 de líneas de transporte cortas, 86-87
 Thévenin, equivalente en sistemas eléctricos de potencia, 130-131
 Thévenin, teorema de, aplicación al cálculo de las corrientes de fallo trifásico, 249-251
 aplicación a la solución de redes interconectadas, 312-314, 315-317
 enunciado de, 130
 Transformadores, circuito equivalente de, 111-114
 desfase, en Y- Δ , 276-284
 polaridad, designaciones de la, 276-278
 de tres devanados, 125-128
 para corriente de secuencia cero, 294-298
 símbolo para, en diagramas unifilares, 110
 tablas de reactancias e impedancias, 387
 trifásicos, impedancia por unidad, 122-128
 de Y- Δ , 122-125
 Transformadores, impedancia por unidad de, 122-125
 desfase en los, 276-284
 Transformadores con conexión en Y- Δ , 113

Transformadores conectados en, Y- Δ , impedancia por unidad de, 122-128
 desfase en 276-284
 Transitoria en circuitos RL, 262, 263
 corriente, en alternadores, 108-111
 Transitorio, límite de estabilidad en régimen (*ver* Estabilidad)
 Transmisión, pérdidas por, ecuaciones de, 224-227
 ejemplos, 226
 función de la potencia generadora en la central, 224-237
 hipótesis de cálculo, 230
 Transmisión, líneas de, admitancia en paralelo de, 86, 87-92
 clasificación por su longitud, 86
 impedancia de secuencia cero de, 290
 Transposición de matrices, 155
 de líneas de transporte, 52
 para equilibrar la capacidad, 69, 75-77, 79, 82
 para equilibrar la inductancia, 52, 53, 55
 regla de inversión en la, 284
 Trensados, conductores, capacidad de, 70
 Triángulo de potencia, 21, 22
 Triángulo-Estrella (Δ -Y), transformación, 138
 Trifásicos, fallos, a través de impedancia, 326
 en sistemas con carga, 315
 Unifilares, diagramas, 108-111
 Valor efectivo, 12
 Variación del costo de un combustible, 219
 Velocidad de propagación, 94
 Voltaje de barra, 197-200

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA

No. de identificación: 6432

Fecha: 20/10/86

230793

2-8-93

170594

281194

260997

101095

281198

101095

220598

160599

220598

021098

191198

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL RESISTENCIA
BIBLIOTECA

INVENTARIO	SIS. FOTOGRAFICA
No	021.31
2373	5847a
	815