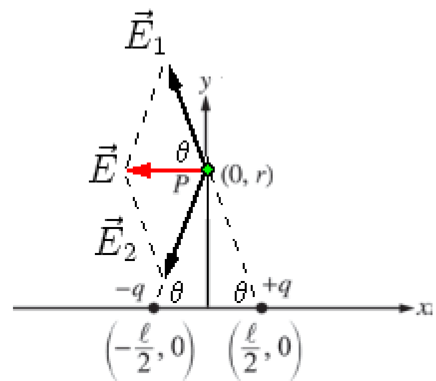
ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
INSTITUTO DE CIENCIAS FÍSICAS
II TÉRMINO 2012-2013
FÍSICA C
Primera evaluación

SOLUCIÓN

Ejercicio 1 (4 puntos)

Un par de cargas eléctricas de igual magnitud q y signos opuestos están separados por una distancia *l*, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la magnitud aproximada y dirección del campo eléctrico creado por las dos cargas en un punto P sobre el eje y, el cual está situado a una distancia r >> *l* desde el eje x?



Según el principio de superposición, el campo eléctrico en el punto P es la suma vectorial de los dos campos creados por ambas cargas: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

Considerando que $a = l/2$, por el teorema de Pitágoras se cumple que la distancia entre cualquiera de las cargas y el punto P es: $\sqrt{a^2 + r^2}$

Y como ambas cargas son de igual magnitud se cumple: $E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{a^2 + r^2}$

Las componentes en el eje *y* poseen la misma magnitud pero apuntan en direcciones opuestas, por lo tanto: $E_{1_y} + E_{2_y} = 0$.

En consecuencia, para efectuar la suma vectorial, sólo se deberán tener en cuenta a las componentes E_x, es decir, la suma vectorial de $\vec{E}_1$ y $\vec{E}_2$ apunta horizontalmente hacia la izquierda, y siendo ambas componentes idénticas, se cumplirá que: $E = 2E_1 \cos\theta$

Teniendo en cuenta que: $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$

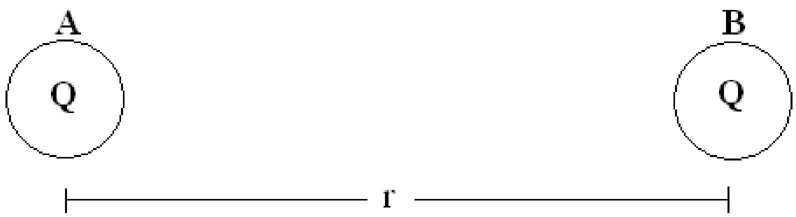
Y sustituyendo esta expresión y la de E_1 en la expresión de E se obtiene:

$$E = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{a^2 + r^2}\,\frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2aq}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si r >> a se puede omitir a a en el denominador y la ecuación se reduce a:

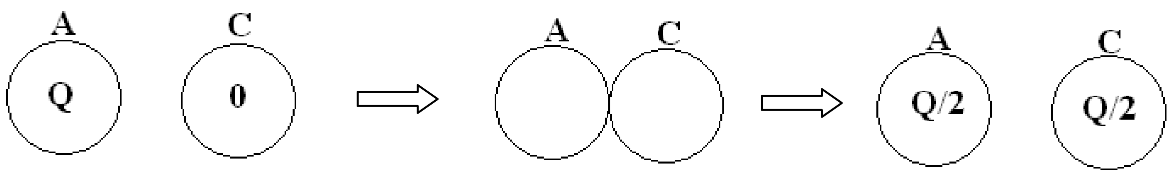
$$\boxed{E \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2aq}{r^3}}$$

Ejercicio 2 (4 puntos)
Dos conductores esféricos idénticos, A y B, poseen igual carga. Ellos están inicialmente separados por una distancia mucho mayor que sus diámetros, y la magnitud de la fuerza entre ellos es F.

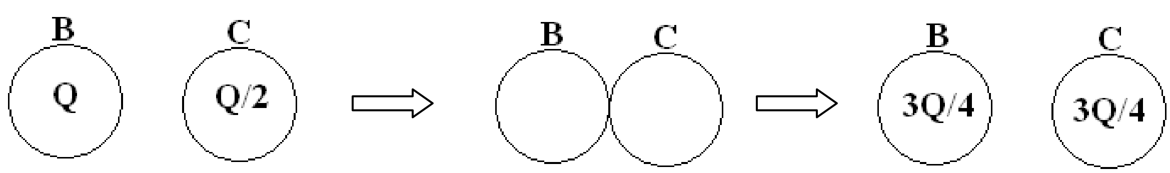


$$F = k_e \frac{Q \cdot Q}{r^2} = k_e \frac{Q^2}{r^2}$$

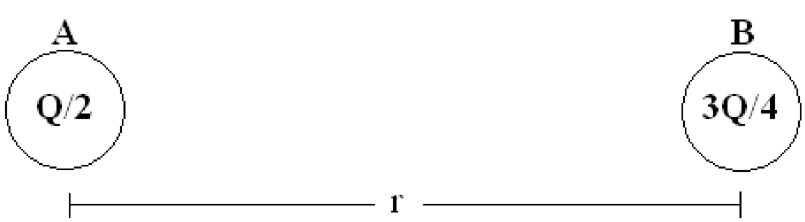
Un tercer conductor esférico idéntico, C, está descargado. La esfera C toca primero a la esfera A,



luego a la esfera B, y entonces es removido.



Como resultado de este proceso, ¿cuál es la nueva magnitud de la fuerza entre A y B, en términos de F?



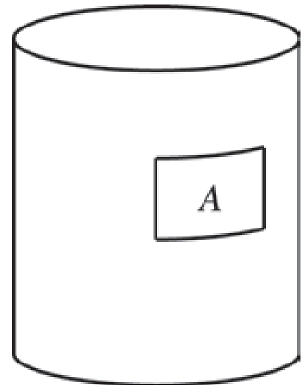
$$F' = k_e \frac{\frac{1}{2}Q \cdot \frac{3}{4}Q}{r^2} = \frac{3}{8} k_e \frac{Q^2}{r^2}$$

$$\boxed{F' = 3F/8}$$

Al entrar las esferas en contacto se producirá una transferencia de carga hasta que sus potenciales se igualen. Como son esferas idénticas, esto ocurrirá cuando tengan la misma cantidad de carga eléctrica.

Ejercicio 3 (4 puntos)

Considere la superficie gaussiana cilíndrica cerrada adjunta. Suponga que la carga neta encerrada dentro de esta superficie es de $+0.885 \times 10^{-9}$ C y el flujo eléctrico a través de la porción de la superficie marcada como A es -100 N·m^2/C. ¿Cuál es aproximadamente el flujo eléctrico a través del resto de la superficie (sin considerar el área A)?



De acuerdo a la ley de Gauss, el flujo eléctrico que atraviesa toda la superficie cilíndrica está dada por:

$$\Phi_E = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} = 100 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$$

Este flujo eléctrico es igual al flujo eléctrico que atraviesa la superficie A más el flujo eléctrico a través del resto de la superficie. Por tanto:

$$\Phi_E = \Phi_A + \Phi_{resto}$$

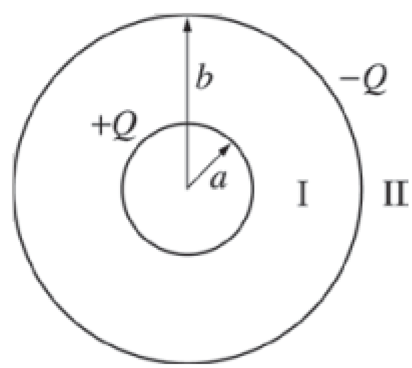
$$\Phi_{resto} = \Phi_E - \Phi_A$$

$$\Phi_{resto} = 100 - (-100)$$

$$\boxed{\Phi_{resto} = 200 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}}$$

Ejercicio 4 (12 puntos)

Dos capas conductoras delgadas esféricas y concéntricas están dispuestas como se muestra en la figura. La carcasa interior tiene un radio *a*, carga + Q y potencial eléctrico igual a cero. La carcasa externa tiene radio b y carga –Q. Si r es la distancia radial desde el centro de las esferas, encuentre una expresión para el potencial eléctrico



De acuerdo a la ley de Gauss, el campo eléctrico es cero para $r < a$ y $r > b$ y $E = k_e Q/r^2$ para $a < r < b$.

Por definición, el potencial eléctrico de un punto es el trabajo que se requiere para trasladar una carga unitaria desde el lugar donde el potencial eléctrico se define como cero hasta ese punto

a) en la región I ($a < r < b$) [6 puntos]

$$V_I = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_a^r E dr = -k_e Q \int_a^r \frac{dr}{r^2}$$

$$\boxed{V_I = k_e Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

b) en la región II (r > b) [6 puntos]

$$V_{II} = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_a^b E dr - \int_b^r E dr = -k_e Q \int_a^b \frac{dr}{r^2}$$

$$\boxed{V_{II} = k_e Q\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$

Ejercicio 5 (6 puntos)

Una esfera de radio R tiene una densidad de carga proporcional al cuadrado de la distancia desde el centro: $\rho = Ar^2$, donde A es una constante positiva. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico a una distancia R/2 medida desde el centro de la esfera?

Tomando una superficie gaussiana esférica y aplicando la ley de Gauss:

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \rho dV$$

El vector campo eléctrico es paralelo al vector área. El diferencial de volumen esférico es $4\pi r^2 dr$.

$$\oint E dA = \frac{1}{\epsilon_0}\int (\mathrm{Ar}^2)(4\pi \mathrm{r}^2 \mathrm{dr})$$

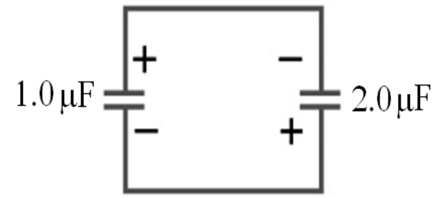
$$E\oint dA = \frac{4\pi \mathrm{A}}{\epsilon_0}\int_0^{R/2} \mathrm{r}^4 \mathrm{dr}$$

$$E\left[4\pi\left(\frac{\mathrm{R}}{2}\right)^2\right] = \frac{4\pi \mathrm{A}}{5\epsilon_0}(r^5)|_0^{R/2}$$

$$\boxed{E = \frac{\mathrm{AR}^3}{40\epsilon_0}}$$

Ejercicio 6 (8 puntos)

Dos capacitores de capacitancias 1.0 μF y 2.0 μF se cargan <u>completa e independientemente</u> con una batería de 5.0 V. Se desconectan de la batería y luego se conectan a través de alambres sin resistencia de tal forma que las placas de <u>cargas opuestas</u> se conectan entre sí, como se muestra en la figura. ¿Cuál será el valor del voltaje final a través del capacitor de 2.0 μF?



Al poner en contacto las placas de los capacitores se producirá una transferencia de carga hasta que se igualen sus potenciales. Denominando q_1 y q_2 a las cargas finales en los capacitores de 1.0 μF y 2.0 μF respectivamente, tenemos:

$$\frac{q_1}{1} = \frac{q_2}{2} \Longrightarrow q_2 = 2q_1$$

Al ser un sistema aislado, la carga neta debe ser la misma al inicio y al final del proceso:

$$(2.0)(5.0) - (1.0)(5.0) = q_1 + q_2$$

$$5.0 = q_1 + 2q_1$$

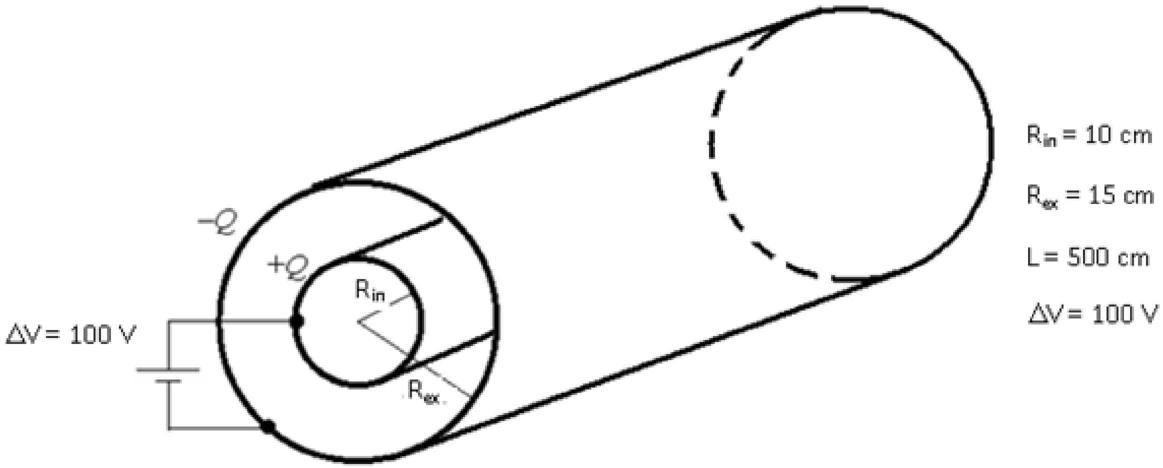
De donde

$$\boxed{q_1 = \frac{5}{3}\mu C \ y \ q_2 = \frac{10}{3}\mu C}$$

ó

$$\boxed{q_1 = -\frac{5}{3}\mu C \ y \ q_2 = -\frac{10}{3}\mu C}$$

Ejercicio 7 (22 puntos)
Un capacitor cilíndrico es construido de placas metálicas cilíndricas y concéntricas, de radios R_{in} y R_{ex} respectivamente, y de longitud L. El espacio entre las placas esta inicialmente lleno de aire. Una batería es conectada a las dos placas como se muestra, estableciéndose una diferencia de potencial ΔV entre ellas. Como resultado, cargas iguales y de signos opuestos $+Q$ y $-Q$ aparecen sobre las placas.



a) Encuentre una expresión para el campo eléctrico en la región, $R_{in} < r < R_{ex}$ [4 puntos]

Tomando una superficie gaussiana cilíndrica y aplicando la ley de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{neta}}{\epsilon_0}$$

El vector campo eléctrico es paralelo al vector área en las paredes laterales del cilindro gaussiano y perpendicular a las tapas del mismo. La carga neta es igual a la carga del cilindro interno (considerando que la longitud del cilindro gaussiano es igual al del cilindro interno).

$$\int EdA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E \int dA = E(2\pi rL) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 Lr}}$$

b) Encuentre una expresión para el campo eléctrico en la región, $r < R_{in}$ [2 puntos]

Ya que no existe carga para $r < R_{in}$, de acuerdo a la ley de Gauss

el campo eléctrico es cero

c) Encuentre una expresión para el campo eléctrico en la región, $r > R_{ex}$ [2 puntos]

Ya que la carga neta es cero para $r > R_{ex}$, de acuerdo a la ley de Gauss

el campo eléctrico es cero

d) El espacio entre las placas cilíndricas se llena con un material dieléctrico de constante dieléctrica $\kappa = 5$, mientras que el capacitor se mantiene conectado a la batería. Determine la magnitud de la carga *Q* sobre las placas [6 puntos]

La capacitancia de un capacitor cilíndrico que contiene un material dieléctrico viene dada por

$$C = \kappa \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\,(R_{ex}/R_{in})}$$

$$C = 5\,\frac{2\pi(8.85 \times 10^{-12})(5)}{\ln\,(1.5)}$$

C = 3.43 pF

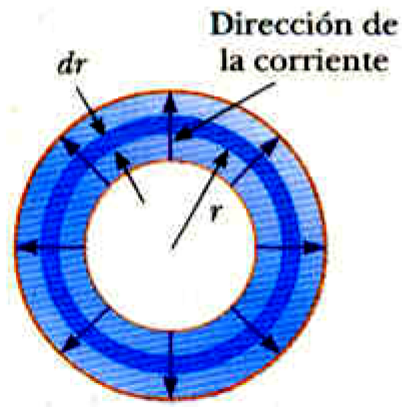
La carga sobre las placas será:

$$\boxed{Q = C\Delta V = 0.343\ \mu C}$$

e) Suponga que ahora se retira el material dieléctrico y es reemplazado por un material de resistividad $\rho = 2.0 \times 10^{-8}$ Ω·m. Determine el valor de la corriente que circula por la batería [8 puntos]

La resistencia del cilindro la podemos determinar a partir de la definición de la misma

$$dR = \rho \frac{dr}{A} = \rho \frac{dr}{2\pi r L}$$



$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{R_{in}}^{R_{ex}} \frac{dr}{r}$$

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \left({}^{R_{ex}}/{}_{R_{in}} \right)$$

$$R = \frac{2.0 \times 10^{-8}}{2\pi(5)} \ln(1.5) = 2.58 \times 10^{-10} \Omega$$

La corriente que circula por la batería viene dada por la ley de Ohm:

$$I = \frac{\Delta V}{R} = \frac{100}{2.58 \times 10^{-10}}$$

$$\boxed{I = 3.87 \times 10^{11} \text{ A}}$$