Exámen Cálculo de Varias Variables I Parcial

3 de Julio del 2014.

$\boxed{1.-}$ Una mosca está posada sobre una superficie que aproximadamente tiene la forma del elipsoide $x^2+y^2+2z^2=7$ en el punto $(1,2,1)$. En el instante $t=0$ la mosca levanta el vuelo, a una velocidad constante de $\frac{3m}{s}$, siguiendo la dirección normal a la superficie hasta posarse en el techo de la habitación (plano $2x+3y+z=49$) Se pregunta:

a) ¿En qué punto del techo se posa la mosca?

b) ¿En qué instante toca el techo?

$\boxed{2.-}$ Una función $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice homogénea de grado $K \in \mathbb{Q}$ si se cumple que:

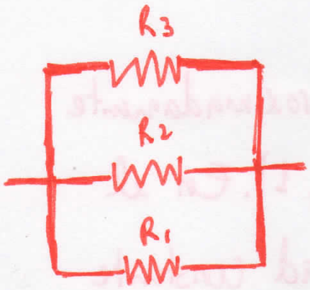
$$\forall t>0: f(tx,ty)=t^K f(x,y)$$

a) Si f es homogénea de grado K ¿Son las derivadas parciales de primer orden de f funciones homogéneas?

b) En caso de que las derivadas parciales sean homogéneas ¿de qué grado son?

$\boxed{3.-}$ El lado de un triángulo crece a una tasa de $4\frac{cm}{s}$, mientras que el segundo lado decrece a una tasa de $2\frac{cm}{s}$. Si el área del triángulo permanece constante, determine la tasa a la que varía el ángulo entre los lados mencionados, en el instante en que el primer lado mida 20cm, el segundo lado mida 30cm y el ángulo entre ellos sea de $\pi/6$ rad.

4.- Tres Resistores se encuentran conectadas en paralelo, como se muestra en la figura.



La resistencia total está dada por $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}$. Se han medido las resistencias y sus valores (en ohmios) son $R_1 = 5$, $R_2 = 10$, $R_3 = 30$ con un posible error de $\pm 0.5\%$ en cada medida. Estime el máximo error relativo en el cálculo de R.

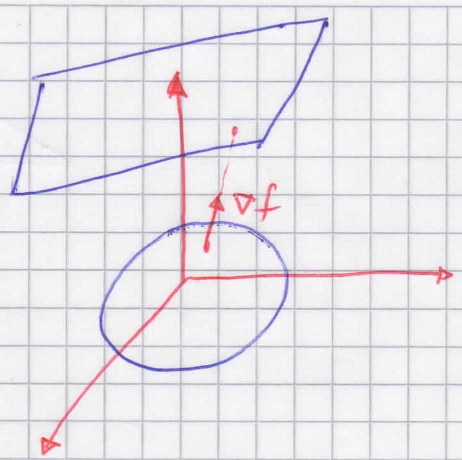
5.- Sea la función $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Mediante el desarrollo de Taylor de segundo orden aproxime $f(0.1, -0.1)$

Solucion Varios Examen

$x^2+y^2+2z^2=7$

$P(1,2,1)$

$v=3\,m/s$



$\pi: 2x+3y+z=49$

$\nabla f = D$

$\nabla f = (2x, 2y, 2z)\overbrace{(1,2,1)}^{\text{evaluo}} = (2, 4, 4)$

$l: t(D) + P_0$

$= t(2,4,4) + 1,2,1$

$$l: \begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 4t+2 \\ z = 4t+1 \end{cases}$$

$(2t+1)^2 + (4t+2)^2 + 2(4t+1)^2 = 49$

$t = 2$

$P = (5, 10, 9)$ // Punto donde la mosca se posa

$d = \| P_0P \|$

$= \sqrt{(5-1)^2 + (10-2)^2 + (9-1)^2}$

$= 12$

$\Delta x = vt$

$\frac{12}{3} = \boxed{4 = t}$ //

#2) Para una función escalar se dice que es homogénea

$$\forall t \quad \frac{\partial f}{\partial x} f(tx, ty) = t^{k} f(x,y)$$

Si f es homogénea son sus derivadas parciales homogéneas.

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial x}\, t = t^{k} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial x} = t^{k-1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

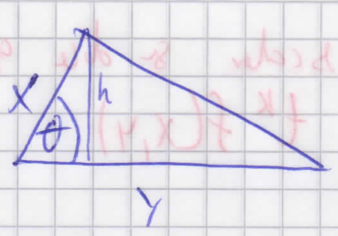
$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(tx,ty) = t^{k} f(x,y) \right]$$

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial y}\, t = t^{k} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial y} = t^{k-1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad \checkmark\checkmark$$

Si son homogéneas de grado $k-1$.

#3



$$\frac{\partial x}{\partial t} = 4$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -2$$

$$A = K$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = ? \quad \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 30 \\ \theta = \pi/6 \end{array}$$

$$A = \frac{y\,x\,\operatorname{sen}\theta}{2} = K$$

$$\frac{1}{2} y \operatorname{sen}\theta \frac{dx}{dt} + \frac{1}{2} x \operatorname{sen}\theta \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} xy\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$y \operatorname{sen}\theta \frac{dx}{dt} + x \operatorname{sen}\theta \frac{dy}{dt} + xy\cos\theta \frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-y \operatorname{sen}\theta \frac{dx}{dt} - x \operatorname{sen}\theta \frac{dy}{dt}}{xy\cos\theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(-30)(\frac{1}{2})(4) - (20)(\frac{1}{2})(-2)}{(20)(30)(\frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{4\sqrt{3}}{90} \ \frac{rad}{s}$$

#4) $R_1 = 5\Omega$ $R_2 = 10\Omega$ $R_3 = 30\Omega$ error $\pm 0.5\%$

$\frac{dR}{R} = ?$ $\frac{\Delta R_1}{R_1}, \frac{\Delta R_2}{R_2}, \frac{\Delta R_3}{R_3}$

$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} + R_3^{-1}$$

$$R\left[-R^{-2}\Delta R = -R_1^{-2}\Delta R_1 - R_2^{-2}\Delta R_2 - R_3^{-2}\Delta R_3\right] R$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \left[\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2} + \frac{\Delta R_3}{R_3^2}\right] R$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \left[\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2} + \frac{\Delta R_3}{R_3^2}\right]\left[\frac{R_1R_2R_3}{R_2R_1 + R_1R_3 + R_1R_2}\right]$$

$$= \left[\frac{\Delta R_1}{R_1}\frac{1}{R_1} + \frac{\Delta R_2}{R_2}\frac{1}{R_2} + \frac{\Delta R^3}{R_3}\frac{1}{R_3}\right]\left[\quad\right]$$

$$= \left[0.5\frac{1}{5} + 0.5\frac{1}{10} + 0.5\frac{1}{30}\right]\left[\frac{(5)(10)(30)}{200+150+50}\right]$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \pm 0.5$$

#5 Aproxime: $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$

$f(0.1, -0.1)$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (0.1, -0.1) + \frac{1}{2} h[f(0,0)] \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \cdot (0.1, -0.1)$$

$$\nabla f(x,y) = [x(1+x^2+y^2)^{-1/2}, y(1+x^2+y^2)^{-1/2}]$$

$$h[f(x,y)] = \begin{bmatrix} (1+x^2+y^2)^{-1/2} - x^2(1+x^2+y^2)^{-3/2} & -xy(1+x^2+y^2)^{-3/2} \\ -xy(1+x^2+y^2)^{-1/2} & (1+x^2+y^2)^{-1/2} - y^2(1+x^2+y^2)^{-3/2} \end{bmatrix}$$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

$$h[f(0,0)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$f(0,0) = 1$

0.74 + 0.64 + 0.27