Primera Evaluación de Algebra Lineal
I Termino 2014
Resolución

<u>Tema 1</u>

Considere el espacio vectorial Real V=P_1 con las operaciones:

$$(a_1 + b_1x) \oplus (a_2 + b_2x) = (a_1 + a_2 + 4) + (b_1 + b_2 - 9)x$$

$$\forall \alpha \in lR\alpha \odot (a + bx) = (\alpha a - 4 + 4\alpha) + (\alpha b + 9 - 9\alpha)$$

a) **Encuentre el vector nulo n_v de V y el vector inverso aditivo del vector u=2+3x**
b) **¿Los vectores u=2+3x y v=4+6x constituyen una base para V=P_1?Justifique su respuesta**

a) El problema nos dice que ya es un espacio vectorial por ende podemos aplicar propiedades que pertenecen al espacio como es: $0 \odot v = n_v$
Entonces $0\odot(a + bx) = [(0 * a) - 4 + (4 * 0)] + [(0 * b) + 9 - (9 * 0)]x$
$$= -4 + 9x$$
$$\therefore \boldsymbol{N_v = -4 + 9x}$$
El inverso aditivo del vector $u = 2 + 3x$
$(2 + 3x) \oplus (a + bx) = -4 + 9x$
$$(2 + a + 4) + (3 + b - 9) = (-4 + 9x)$$
Despejamos la variable buscada de las ecuaciones para cada valor correspondiente
$$2 + a + 4 = -4 \ \rightarrow a = -10$$
$$3 + b - 9 = 9 \quad \rightarrow b = 15$$
$$\therefore \boldsymbol{\hat{u} = -10 + 15x}$$
b) Tenemos que determinar las 2 condiciones necesarias para que sea base:
- Sea linealmente independiente.
- Sea conjunto generador de todo el espacio vectorial.

Verificamos independencia lineal:
$$[\alpha_1\odot(2 + 3x)]\oplus[\alpha_2\odot(4 + 6x)] = -4 + 9x$$
$$[(2\alpha_1 - 4 + 4\alpha_1) + (3\alpha_1 + 9 - 9\alpha_1)x]\oplus[(4\alpha_2 - 4 + 4\alpha_2) + (6\alpha_2 + 9 - 9\alpha_2)x]$$
$$= -4 + 9x$$
$$[(6\alpha_1 - 4) + (-6\alpha_1 + 9)x]\oplus[(8\alpha_2 - 4) + (-3\alpha_2 + 9)x] = -4 + 9x$$
$$(6\alpha_1 - 4 + 8\alpha_2 - 4 + 4) + (-6\alpha_1 + 9 + 3\alpha_2 + 9 - 9)x = -4 + 9x$$
Tenemos un sistema de ecuaciones
$$6\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4 = -4 \qquad \wedge \qquad -6\alpha_1 + 9 - 3\alpha_2 = 9$$
Por método de reducción de Gauss
$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \boldsymbol{\alpha_1 = \alpha_2 = 0}$$
∴ Es Linealmente Independiente.

Determinamos si los vectores **u,v** generan al espacio vectorial igualando un vector típico :

$$[\alpha_1 \odot (2+3x)] \oplus [\alpha_2 \odot (4+6x)] = a+bx$$

$$[(2\alpha_1 - 4 + 4\alpha_1) + (3\alpha_1 + 9 - 9\alpha_1)x] \oplus [(4\alpha_2 - 4 + 4\alpha_2) + (6\alpha_2 + 9 - 9\alpha_2)x] = a+bx$$

$$[(6\alpha_1 - 4) + (-6\alpha_1 + 9)x] \oplus [(8\alpha_2 - 4) + (-3\alpha_2 + 9)x] = a+bx$$

$$(6\alpha_1 - 4 + 8\alpha_2 - 4 + 4) + (-6\alpha_1 + 9 + 3\alpha_2 + 9 - 9)x = a+bx$$

Tenemos un sistema de ecuaciones

$$6\alpha_1 + 8\alpha_2 - 4 = a \qquad \wedge \qquad -6\alpha_1 + 9 - 3\alpha_2 = b$$

Por método de reducción de Gauss

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & a+4 \\ -6 & -3 & b-9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 8 & a+4 \\ 0 & 5 & a+4+b-9 \end{array}\right) \to \boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2} \in \mathbb{R}$$

∴ Los vectores <u>u,v</u> generan al espacio vectorial

Por ende el conjunto de los vectores (u,v) forma una base una base de P_1.

<u>Tema 2</u>

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

a) Encuentre una base y determine la dimensión de la imagen de A.

b) Usando la base del literal anterior, complete una base para el espacio de $\mathbb{R}^3$

c) Encuentre una base y determine la dimensión del Núcleo de A

a) Determinamos que por teorema **Espacio Columna= Imagen (A)** y **Dim (Espacio Columna)=$\rho(A)$** entonces escogemos las columnas linealmente independientes de la matriz A.

$$\left(\begin{array}{ccc|} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 14 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 44 & -11 \\ 0 & 12 & -3 \end{array}\right)$$ **Observamos que la fila 3 y 4 son combinación lineal de la fila 2.**

Por ende:

Esp.Columna= $\boldsymbol{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ **y esto es La Im(A).**

$$\therefore \boldsymbol{Base\ de\ la\ Im}(\boldsymbol{A}) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}\right\} \text{y} \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{A}) = 2$$

b) **Tenemos que la base de la Im(A) comprende 2 vectores y para que genere a $\mathbb{R}^3$ se necesita agregar un vector que no sea combinación lineal de los vectores que pertenecen a la base.**
Entonces:

Base para $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c) Por teorema:

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

Tenemos que $\rho(A) = 2.$ ***Por lo tanto***: $\nu(A) = 2$.**Aplicamos definición de Núcleo para determinar los vectores que se encuentren en su base.**

$$Nu(A) = \{X \in \mathbb{R}^n \ / \ A_{mxn}X = 0_v \in \mathbb{R}^m\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 & 6 & \vdots 0 \\ 1 & -3 & 14 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 3 & \vdots 0 \\ 0 & -1 & 11 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 11 & 3 & \vdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces tenemos que**:**

$$-x_2 + 11x_3 + 3x_3 = 0 \ \wedge \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0$$

Pasando a sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x_2 + 11x_3 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$Nu(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} / \ x_1 = 19x_3 + 7x_4 \ \wedge \ x_2 = 11x_3 + 3x_4 \right\}$$

$$\textit{entonces}: B_{Nu(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Tema 3

Sean $B_1 = \{-5 + 9x, 6 - 6x + 5x^2, 2 - 7x - 4x^2\}$ ***y*** $B_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$**Bases del espacio vectorial** $V = P_2$.**Sea la matriz de transición de la base** B_1**a la base** B_2**:**

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **Encuentre los vectores de la Base** B_2
b) **Encuentre la matriz de cambio de base de** B_2**a** B_1
c) **Sea** $v \in P_2$ ***tal que*** $[v]_{B_2} = (3, -1, 2)$. **Encuentre** v **y** $[v]_{B_1}$

OBSERVAMOS que tenemos **las coordenadas de los vectores de la base B_1con respectoB_2** entonces podemos determinar**la inversa de la matriz C** y obtener de esta manera los vectores pertenecientes a la base B_2, es decir:

$$\boldsymbol{C_{B2\to B1} = (C_{B1\to B2})^{-1}}$$

$$\boldsymbol{C^{-1} = ([u_1]_{B1} \quad [u_2]_{B1} \quad [u_3]_{B1})}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\boldsymbol{b)} \therefore \boldsymbol{C^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida la matriz hacemos combinación lineal con las coordenadas obtenidas a los vectores de la base B_1.

$$\boldsymbol{a)}\ [\boldsymbol{u_1}]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{u_1 = -5 + 9x + 6 - 6x + 5x^2 = 1 + 3x + 5x^2}$$

$$[\boldsymbol{u_2}]_{B1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{u_2 = 2(-5 + 9x) + 6 - 6x + 5x^2 + 2 - 7x - 4x^2 = -2 + 5x + x^2}$$

$$[\boldsymbol{u_3}]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \to \boldsymbol{u_3 = 3(-5 + 9x) + 2(6 - 6x + 5x^2) + 2(2 - 7x - 4x^2) = 1 + x + 2x^2}$$

c)

$$\boldsymbol{v = 3(1 + 3x + 5x^2) - (-2 + 5x + x^2) + 2(1 + x + 2x^2) = 7 + 6x + 18x^2}$$

Para obtener $[v]_{B_1}$

$$\boldsymbol{C^{-1}}([\boldsymbol{v}]_{B_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

TEMA 4 (15 puntos)

Sea el espacio vectorial $\boldsymbol{V = M_{2x2}}$**. Sean los subespacios de** $\boldsymbol{V}$**:**

$$\mathbf{H} = \left\{\begin{bmatrix} \boldsymbol{ab} \\ \boldsymbol{cd} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M_{2x2}} \quad / \boldsymbol{c = b - a, d = a + 2b - c}\right\}$$

$$\mathbf{W} = \ \mathbf{gen} \left\{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}\right\}$$

a) Encuentre una base y determine la dimensión del subespacio $\boldsymbol{H + W}$

b) ¿ Es directa la suma $\boldsymbol{H + W}$**? Justifique su respuesta**

c) ¿ Es $\boldsymbol{H \cup W}$**un subespacio de** $\boldsymbol{V}$**? Justifique su respuesta.**

$$B_H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b-a & 2a+b \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

a) Se define la Suma De Subespacios
$H + W = \{GenH \cup GenW\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}\right\}$

*Verificamos independencia lineal

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\alpha_4} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$Entonces: H + W = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix}\right\}$$

b) La suma **no** es directa debido a que por el teorema :
Sea V un espacio vectorial y sean H y W subespacios de V .

$$\boldsymbol{V = H + W \ \ y \ H \cap W = \{0\}}.$$

$$\mathbf{dim}(\boldsymbol{H + W}) = \boldsymbol{dimH + dimW} - \mathbf{dim}(\boldsymbol{H \cap W})$$

$$3 = 2 + 2 - dim(H \cap W)$$

Pero $dim(H \cap W)$=1. Por lo tanto no cumple.

c) La definicion que requiere para que $\boldsymbol{H \cup W}$ $\boldsymbol{sea\ subespacio\ vectorial}$ es que cumpla lo siguiente: $\boldsymbol{H \subseteq W} \ \vee \boldsymbol{W \subseteq H}$**.**Verificamos si los vectores pertencientes a el subespacio vectorial W cumplen con las condiciones de H.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \ cumpla\ las\ condiciones\ de\ H$$

$$c = b - a \ \rightarrow \ -1 = 1 - 1$$

$$-1 \neq 0$$

$$\therefore \boldsymbol{W \nsubseteq H}$$

Sacamos las condiciones del subespacio vectorial W para poder evaluar el vector perteniciente a H

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix} + \boldsymbol{\alpha_2} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \in \boldsymbol{M_{2x2}} \quad / \boldsymbol{a} + \mathbf{b} + \mathbf{2c} = \mathbf{0} \wedge \mathbf{2}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d} = \mathbf{0} \right\}$$

Evaluamos el vector perteneciente al subespacio vectorial H en la las condiciones de W

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \textit{cumpla las condiciones de } H$$

$$a + b + 2c = 0$$

$$-1 \neq 0$$

$$\therefore \boldsymbol{H} \nsubseteq \boldsymbol{W}$$

$$\therefore \boldsymbol{H} \cup \boldsymbol{W} \ \boldsymbol{NO\ es\ subespacio\ vectorial}$$

<u>TEMA 5 (10 puntos)</u>

Sea $\boldsymbol{V} = \mathbf{C^1}(\boldsymbol{I})$el espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo $\boldsymbol{I}$tal que tienen derivadas que son tambien continuas en dicho intervalo. Sean $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \in \boldsymbol{V}$.. Se define el Wronskiano de$\boldsymbol{fyg}$ para toda $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$como :

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}$$

a) Demuestre que si $\boldsymbol{fyg}$son linealmente dependientes en $\boldsymbol{I}$entonces el Wronskiano de $\boldsymbol{fyg}$se anula en todo punto del intervalo$\boldsymbol{I}$.

b) Suponga que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{x^2}$y que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \mid$. Calcule el Wronskiano de estas funciones.

c)¿Son $\boldsymbol{fyg}$linealmente dependientes α linealmente independientes en $\boldsymbol{I} = (\mathbf{-1}, \mathbf{1})$? ¿Que ocurre si $\boldsymbol{I} = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$?Justifique sus respuestas.

a) Demostramos:

$$f(x) y\ g(x) \textit{son multiplos escalares, entonces } g(x) = \alpha f(x)$$

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{\alpha f}'(\boldsymbol{x}) \end{vmatrix} = \boldsymbol{\alpha f}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\alpha f}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

$$\therefore \textit{El } \boldsymbol{Wronskiano\ se\ anula} \textit{ para todo punto de un intervalo } I$$

b) Para poder calcular el wrosnkiano observamos que la derivada g(x) tiene regla de correspondencia:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 ; x \geq 0 \\ -x^2 ; x < 0 \end{cases}$$

Entonces **obligatoriamente** tenemos que determinar **si la derivada Existe**;
Aplicamos **definición formal de Derivabilidad**:

$$x_0 = 0\,;\ \lim_{h\to 0^+} \frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

$$;\ \lim_{h\to 0^-} \frac{g(x_0+h)+g(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2}{h} = 0$$

$$\therefore \lim_{h\to 0^-} g(x) = \lim_{h\to 0^+} g(x) = 0 \to La\ derivada\ existe.$$

$$\boldsymbol{x \geq 0; W(f,g)(x)} = \begin{vmatrix} \mathbf{x^2} & \mathbf{x^2} \\ \mathbf{2x} & \mathbf{2x} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x} < 0; \boldsymbol{W(f,g)(x)} = \begin{vmatrix} \mathbf{x^2} & \mathbf{-x^2} \\ \mathbf{2x} & \mathbf{-2x} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\therefore \boldsymbol{W(f,g)(x)} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{f(x)} & \boldsymbol{g(x)} \\ \boldsymbol{f'(x)} & \boldsymbol{g'(x)} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

c) Determinamos dependencia o independencia lineal en el $I \in (-1{,}1)$
Por teorema,
$f(x) y\ g(x) son\ funciones\ diferenciales\ sobre\ un\ intervalo\ I\ y\ si\ W(f,g) \neq 0\ para\ algun\ punto\ x_0\ en\ I, entonces\ f\ y\ g\ son\ linealmente\ independientes\ sobre\ I.$

Pero esto no nos garantiza que si Wronskiano es 0 quiera decir que sea linealmente dependiente. Por lo tanto:
Aplicamos definición de Independencia lineal:

$$\alpha(x^2) + \beta(x|x|) = 0_f\ ;\ \forall x \in (-1{,}1)$$

$$\begin{cases} \alpha/4 + \beta/4 = 0 \\ \alpha/4 - \beta/4 = 0 \end{cases}$$

$$\to \boldsymbol{\alpha = \beta = 0\ es\ la\ soluci}\text{ó}\boldsymbol{n}\ \text{ú}\boldsymbol{nica}$$

$$\therefore \boldsymbol{Son\ f(x) y\ g(x) linealmente\ independientes\ en\ (-1,1)}$$

**$\boldsymbol{I} \in (\mathbf{0}, \mathbf{1})$*

$$\alpha(x^2) + \beta(x^2) = 0_f$$

$$\alpha = 1\ y\ \beta = -1, los\ escalares\ no\ estan\ obligados\ a\ ser\ cero$$

$$\therefore Son\ linealmente\ dependientes.$$

TEMA 6 (10 puntos)

Defina "Transformacion Lineal" y demuestre que la función $\boldsymbol{T: P_1 \to R^3}$con regla de correspondencia $\boldsymbol{T(a+bx)} = \begin{bmatrix} \mathbf{5a} + \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} - \mathbf{3a} \\ \mathbf{2b} \end{bmatrix}$es una transformación lineal de $\boldsymbol{P_1}$en $\boldsymbol{R^3}$

**Definicion de transformación lineal:*

Sean V y W espacios vectoriales
Sea T una función cuyo dominio (conjunto de salida) es V y cuyo codominio (conjunto de llegada) es W entonces (T: V---->W)
es decir
Función T aplicada al vector V da lugar a W y cumple con los 2 axiomas a continuación:

$$* \, t(v+u) = t(u) + t(v)$$

$$* \, t(\alpha v) = \alpha t(v)$$

****Demostramos transformación lineal***

$$* \, T[(a_1 + b_1 x) + (a_2 + b_2 x)] = T(a_1 + b_1 x) + T(a_2 + b_2 x)$$

$$\begin{pmatrix} 5(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 - 3(a_1 + a_2) \\ 2(b_1 + b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a_1 + b_1 \\ b_1 - 3a_1 \\ 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5a_2 + b_2 \\ b_2 - 3a_2 \\ 2b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ b_1 + b_2 - 3(a_1 + a_2) \\ 2(b_1 + b_2) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \, cumple$$

$$* \, T[\alpha(a_1 + b_1 x)] = \alpha T(a_1 + b_1 x)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha 5a_1 + \alpha b_1 \\ \alpha b_1 - 3\alpha a_1 \\ 2\alpha b_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5a_1 + b_1 \\ b_1 - 3a_1 \\ 2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha 5a_1 + \alpha b_1 \\ \alpha b_1 - 3\alpha a_1 \\ 2\alpha b_1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \, Por \; lo \; tanto \; cumple.$$

$$\rightarrow SI \; ES \; UNA \; TRANSFORMACION \; LINEAL.$$