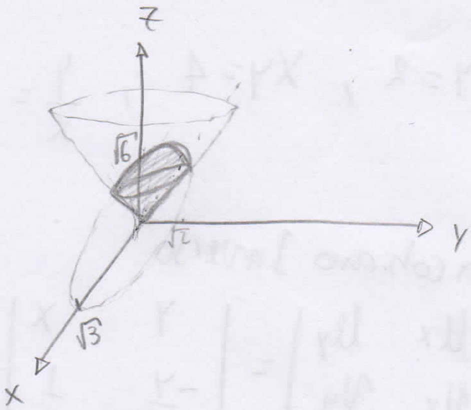
Exámen de Varias Variables 2013-2014 II término

Tema #1. (14 pts) Calcular el volúmen del sólido limitado por $2x^2+3y^2+z^2=6$; $z^2=2x^2+3y^2$; $z\geq 0$.



$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{6}=1$ Cono

elipsoide

$\left(\sqrt{6-2x^2-3y^2}\right)^2=\left(\sqrt{2x^2+3y^2}\right)^2$

$6-2x^2-3y^2=2x^2+3y^2$

$\frac{1}{6}\left(6=4x^2+6y^2\right)$

$1=\frac{2x^2}{3}+y^2$

elipse

$$V=\iint_R \sqrt{6-(2x^2+3y^2)}-\sqrt{2x^2+3y^2}\,dA$$

a Coord. Esférica

$$V=\iiint_0 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$2(r^2c^2\theta)+3r^2s^2\theta$

$2r^2(1-s^2\theta)+3r^2s^2\theta$

$2r^2-2r^2s^2\theta+3r^2s^2\theta$

$(2r^2-r^2s^2\theta)$

$1=\frac{2}{3}r^2c^2\theta+r^2s^2\theta$

$1=\frac{2}{3}r^2(1-s^2\theta)+r^2s^2\theta$

$=\frac{2}{3}r^2-\frac{2}{3}r^2s^2\theta+r^2s^2\theta$

$1=\frac{2}{3}r^2+\frac{1}{3}r^2s^2\theta$

$\cancel{1=r^2}$

$r^2=\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}s^2\theta}$

$$V=\iiint_D dV$$

$$=\iint\int_{\sqrt{2x^2+3y^2}}^{\sqrt{6-2x^2-3y^2}} dz\,dy\,dx$$

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{r_1}}\int_{\sqrt{2r^2c^2\theta+3r^2s^2\theta}}^{\sqrt{6-(r_1)}} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$2r^2(1-s^2\theta)+3r^2-$

$2r^2-2r^2s^2\theta+3r^2$

$2r^2-$

Tema #2. (14 PTS) Calcular $\iint_D x^2y^2\,dA$ dónde $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado por $xy=2$; $xy=4$; $y=x$; $x=\frac{y}{3}$.

Sol

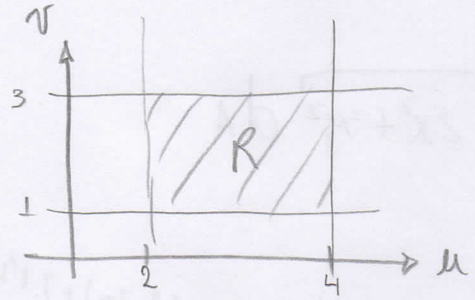
$xy=2 \quad , \quad xy=4 \quad , \quad \frac{y}{x}=1 \quad , \quad \frac{y}{x}=3$

Cambio de Variable

$u=xy \qquad v=\frac{y}{x}$

Jacobiano Inverso

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{x}\right)(y) + (x)\left(\frac{y}{x^2}\right) = \frac{y}{x}+\frac{y}{x} = \boxed{2\frac{y}{x}}$$



$$\to \iint_R (xy)^2 \frac{x}{2y}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^3\int_2^4 u^2 \frac{1}{v}\,du\,dv$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_1^3 \frac{dv}{v}\int_2^4 u^2\,du\right] = \frac{1}{2}\left[\ln(v)\Big|_1^3 \cdot \frac{u^3}{3}\Big|_2^4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\ln(3) - \cancel{\ln(1)}^{\,0}\right)\left(\frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(3)\left(\frac{64}{3}-\frac{8}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\ln(3)\,\frac{56}{3} = \frac{28}{3}\ln(3)$$

Tema #3. (14 PTS) Dado el Campo de fuerza:

$F(x,y,z) = (\underbrace{ye^{xy} - z\,sen(xz)}_{M}, \underbrace{xe^{xy}}_{N}, \underbrace{-x\,sen(xz)}_{P})$ calcule el trabajo realizado por el Campo, al transportar una partícula de masa a través de la curva: $r(t): (\cos t, sen\,t, t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

→ $N_x = M_y \qquad P_x = M_z \qquad P_y = N_z$

$(x)'(e^{xy}) + (x)(e^{xy})' = (y)'(e^{xy}) + (y)(e^{xy})'$

$\boxed{e^{xy} + xe^{xy}(y) = e^{xy} + ye^{xy}x}$ ✓✓

→ $P_x = M_z$

$(x)'(sen(xz)) + (x)(sen(xz))' = (z)'(sen(xz)) + (z)(sen(xz)')$

$\boxed{sen(xz) + x\cos(xz)(z) = sen(xz) + z\cos(xz)x}$ ✓✓

→ $P_y = N_z$

$\boxed{0 = 0}$ ✓✓

∴ Campo Conservativo//

→ Aplico función Potencial

$f = \int ye^{xy} - z\,sen(xz)\,dx = \frac{ye^{xy}}{y} - \frac{z(-\cos(xz))}{z} = \boxed{e^{xy} + \cos(xz)}$

$f = \int xe^{xy}\,dy = \frac{xe^{xy}}{x} = \boxed{e^{xy}}$

$f = \int -x\,sen(xz)\,dz = \frac{-x(-\cos(xz))}{x} = \boxed{\cos(xz)}$

$\boxed{f: e^{xy} + \cos(xz) + C}$

Pto final $r(2\pi) = (\cos(2\pi), sen(2\pi), 2\pi)$

$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ r(2\pi) = (& 1, & 0, & 2\pi) \end{array}$

Pto Inicial $r(0) = (\cos(0), sen(0), 0)$

$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ r(0) = (& 1, & 0, & 0) \end{array}$

$W = f_{\text{Pto final}} - f_{\text{Inicial}}$

$W = [e^{(1)(0)} + \cos((1)(2\pi))] - [e^{(1)(0)} + \cos((1)(0))]$

$W = [1 + 1] - [1 + 1] = 0$ //

Tema #4 (14 pts) Calcular el trabajo realizado por el Campo: $F(x,y,z) = -y^3 i + x^3 j - z^3 k$ al transportar una partícula del origen a través de C es la intersección del Cilindro $x^2+y^2=1$ con el plano $x+y+z=1$.

Tema #5 (14 Pts). Calcular el flujo del Campo F através de la Superficie S en dirección de abajo hacia arriba dónde $F(x,y,z)=(x+y,\ y+z,\ z+x)$ y S es: $x^2+y^2+z^2-2z=0$ con $z\geq 1$.