SOLUCIÓN CAP #9 ROTACIÓN CUERPOS RIGIDOS.

9.4. Una aspa de ventilador gira con velocidad angular dada por $\omega_z(t) = \gamma - \beta t^2$, donde $\gamma = 5.00$ rad/s y $\beta = 0.800$ rad/s^3. *a)* Calcule la aceleración angular en función del tiempo. *b)* Calcule la aceleración angular instantánea α_z en $t = 3.00$ s y la aceleración angular media $\alpha_{med\text{-}z}$ para el intervalo de $t = 0$ a $t = 3.00$ s. ¿Qué diferencia hay entre ambas cantidades? Si son diferentes, ¿por qué lo son?

$$\omega_z(t) = 5 - 0.800t^2$$

a) $$a_z(t) = \frac{d\omega_z}{dt} = +2(-0.800)t = -1.60t \; [rad/s^3]$$

b) $$a_z(3) = -1.60(3) = -4.80 rad/s^2$$

$$a_{med} = \frac{\omega_z(3) - \omega_z(0)}{t_f - t_0} = \frac{-2.2 - 5}{3 - 0} = -2.40 [rad/s^2]$$

$$\omega_z(3) = 5 - 0.800(3)^2 = -2.2 [rad/s]$$

$$\omega_z(0) = 5 - 0.800(0)^2 = 5 [rad/s]$$

→ La aceleración media considera al inicio y al final que aceleración poseía y no que aceleración hubo en cada instante.

9.13. Una tornamesa gira con aceleración angular constante de 2.25 rad/s^2. Después de 4.00 s gira con un ángulo de 60.00 rad. ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al empezar el intervalo de 4.00 s?

Datos

$\alpha = 2.25 [rad/s^2]$

$t = 4 [s] \rightarrow \theta = 60 rad$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\Delta\theta - \frac{1}{2}\alpha t^2 = \omega_0 t$$

$$\frac{\Delta\theta}{t} - \frac{1}{2}\alpha t = \omega_0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{60}{4} - \frac{1}{2}(2.25)(4) = 10.5 [rad/s]$$

J. Casañas C.

9.5. Un niño está empujando un carrusel (tiovivo). El ángulo que describe el carrusel al girar varía con el tiempo según $\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$, donde $\gamma = 0.400$ rad/s y $\beta = 0.0120$ rad/s^3. *a*) Calcule la velocidad angular del carrusel en función del tiempo. *b*) ¿Qué valor inicial tiene la velocidad angular? *c*) Calcule el valor instantáneo de la velocidad angular ω_z en $t = 5.00$ s y la velocidad angular media $\omega_{\text{med-}z}$ en el intervalo de $t = 0.00$ a $t = 5.00$ s. Demuestre que $\omega_{\text{med-}z}$ *no* es igual al promedio de las velocidades angulares instantáneas en $t = 0$ y $t = 5.00$ s, y explique por qué.

$\theta(t) = \gamma t + \beta t^3$

a) $W = \frac{d\theta}{dt} = \boxed{\gamma + 3\beta t^2}$

b) $t=0 \rightarrow \gamma + 3\beta(0)^2 = \gamma = \boxed{0.400 [rad/s]}$

c) $W(5) = \gamma + 3\beta(5)^2 = \gamma + 3\beta(25) = 0.400 + 75(0.0120) = \boxed{1.3 [rad/s]}$

$W_{med} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\theta(5) - \theta(0)}{5 - 0} = \frac{3.5 - 0}{5} = \boxed{0.7 [rad/s]}$

$\theta(5) = \gamma(5) + \beta(5)^3 = 3.5$ rad

Demostración:

$W_{med} = 0.7 \ (t=0 \rightarrow t=5)$

$W(5) = 1.3 [rad/s]$

$W(0) = 0.400$

$\frac{1.3 + 0.400}{2} = \boxed{0.85 [rad/s] \neq 0.7}$

⇒ El promedio de las Velocidades angulares instantáneas al principio y al final es mas grande que W_{med} porque $W(t)$ está incrementando más rápido que la Vel. Angular lineal.

9.6. En $t = 0$, se invierte la corriente de un motor eléctrico de corriente continua, causando un desplazamiento angular del eje del motor dado por $\theta(t) = (250 \text{ rad/s})t - (20.0 \text{ rad/s}^2)t^2 - (1.50 \text{ rad/s}^3)t^3$. *a*) ¿En qué instante la velocidad angular del eje del motor es cero? *b*) Calcule la aceleración angular en ese instante. *c*) ¿Cuántas revoluciones gira el eje del motor entre el momento en que se invierte la corriente y el instante en el que la Vel. Angular es cero? d) ¿Con qué rapidez estaba girando el eje en t=0, cuando se invirtió la corriente? e) Calcule la Velocidad Angular media para el periodo entre t=0 y el instante calculado en a).

a)

$W = \frac{d\theta}{dt} = 250 - 40t - 4.5t^2$

$W = 0$

$4.5t^2 + 40t - 250 = 0$

$t \rightarrow \boxed{4.23 [s]}$

$t \rightarrow -13.12 [s]$

b) $a = \frac{d\omega}{dt} = -40 - 2(4.5)t = -40 - 9.0t$

$a(4.23) = -40 - 9(4.23) = -78.07\,[rad/s^2]$

c) $\theta(4.23) = 250(4.23) - 20(4.23)^2 - 1.5(4.23)^3 = 586\,rad$

$1rev = 2\pi rad$

$586 rad \times \frac{1rev}{2\pi rad} = 93.26 rev$

d) $\omega(0) = 250 - 40(0) - 4.5(0)^2 = 250\,[rad/s]$

e) $\omega_{med} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{586}{4.23} = 138.53\,[rad/s]$

$\theta(4.23) = 586\,[rad]$

$\theta(0) = 0\,[rad]$

9.17. Un dispositivo de seguridad detiene la hoja de una podadora eléctrica, que tenía una rapidez angular inicial ω_1, en 1.00 revolución. Con la misma aceleración constante, ¿cuántas revoluciones tardaría la hoja en parar, si la rapidez angular inicial ω_3 fuera el triple: $\omega_3 = 3\omega_1$?

$\omega_0 = \omega_1 \rightarrow 1rev$

$\omega_0 = \omega_3 = 3\omega_1 \rightarrow x\,rev$

$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$

$0 = (3\omega_1)^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$

$0 = 9\omega_1^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$

$\frac{-9\omega_1^2}{2\alpha} = \Delta\theta$

$\frac{+9\cancel{\omega_1^2}}{\cancel{2}\left(\frac{+\cancel{\omega_1^2}}{\cancel{2}}\right)} = \Delta\theta$

$\Delta\theta = 9rev$ //

$\omega_f^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\Delta\theta)$

$0 = \omega_1^2 + 2\alpha\Delta\theta$

$\frac{-\omega_1^2}{2\alpha} = \cancel{\Delta\theta}$ 1rev

$\boxed{\frac{-\omega_1^2}{2} = \alpha}$

9.19. En $t = 0$, la velocidad angular de una rueda de afilar era de 24.0 rad/s, y tuvo una aceleración angular constante de 30.0 rad/s^2, hasta que un interruptor de circuito se abrió en $t = 2.00$ s. A partir de ese momento, la rueda giró 432 rad con aceleración angular constante hasta parar. *a*) ¿Qué ángulo total giró la rueda entre $t = 0$ y el instante en que se detuvo? *b*) ¿En qué tiempo se detuvo? *c*) ¿Qué aceleración tenía al irse frenando?

Datos.

$t=0 \rightarrow \omega = 24 [rad/s] \quad \alpha = 30 [rad/s^2]$

$t=2 \rightarrow \Delta\theta = 432 rad$

a) OJO: Dice apartir de los 2 segundos giró 432 hasta detenerse entonces debemos calcular el $\Delta\theta$ de 0 hasta 2 segundos y sumarlos con 432, lo que nos dará el $\Delta\theta$ total.

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= 24(2) + \frac{1}{2}(30)(2)^2$$

$$= 108 \text{ rad}$$

$$\Delta\theta = 108 + 432 = 540 \text{ rad}$$

b) Considerando apartir de los 2 segundos tendriamos los sgts datos:

$\Delta\theta = 432$ rad

$\omega_f = 0$ (Se detiene)

$t_0 = 2$ segundos

$t_f = ?$

$\omega_0 = 84$ rad

$$\omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_f = 24 + 30(2)$$

$$\boxed{\omega_f = 84 \text{ rad}}$$

$$\Delta\theta = \frac{(\omega_0 + \omega)}{2} t$$

$$2(432) = 84t$$

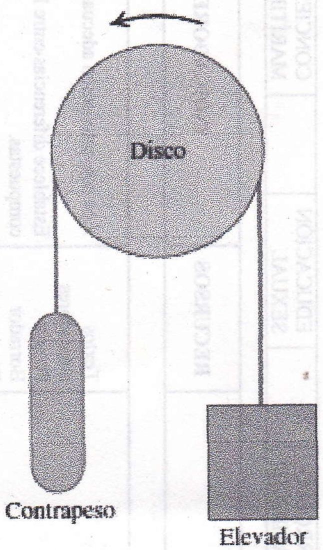
$$t = 10.28 [s]$$

c) $\omega = \omega_0 + \alpha t$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 84}{10.28} = -8.16 [rad/s^2]$$

9.20. En un encantador hotel del siglo XIX, un elevador antiguo está conectado a un contrapeso mediante un cable que pasa por un disco giratorio con 2.50 m de diámetro (figura 9.28). El elevador sube y baja al girar el disco, y el cable no se desliza en el borde del disco, más bien gira con él. *a)* ¿Con cuantas rpm debe girar el disco para subir 25.0 cm/s el elevador? *b)* Para empezar a mover el elevador, éste debe acelerarse a $\frac{1}{8}g$. ¿Cuál debe ser la aceleración angular del disco en rad/s^2? *c)* ¿Con qué ángulo (en radianes y grados) el disco gira cuando éste sube el elevador 3.25 m entre pisos?

Figura 9.28 Ejercicio 9.20.



Datos

$D = 2.5 m$

$\Delta\theta \rightarrow V = 25 cm/s = 0.25 m/s$

$V = WR \Rightarrow W = \frac{V}{R}$

$W = \frac{0.25}{1.25} = 0.2 [rad/s]$

Recordar:

$\frac{1 rev}{s} = \frac{2\pi rad}{s}$ $\quad 0.2 \frac{\cancel{rad}}{\cancel{s}} \times \frac{1 rev/\cancel{s}}{2\pi \cancel{rad}/\cancel{s}}$

$0.0318 \frac{rev}{\cancel{s}} \times \frac{60 \cancel{s}}{1 min} = 1.90 rpm$

b) $a = \frac{1}{8}g = 1.225 m/s^2$

$a_{tangencial} = \alpha . R$

$\frac{1.225}{1.25} = 0.980 [rad/s^2]$

c) $\theta = \frac{S}{R}$ $\quad S = 3.25 m$, $R = 1.25 m$

$\theta = \frac{3.25}{1.25} = 2.60 rad \times \frac{180°}{\pi rad} = 148.9°$

9.28. *a)* Deduzca una ecuación para la aceleración radial que incluya v y ω pero no r. *b)* Imagine que está diseñando un carrusel, donde un punto en el borde tendrá una aceleración radial de 0.500 m/s^2 cuando la velocidad tangencial en ese punto sea de 2.00 m/s. ¿Qué velocidad angular se necesita para lograr estos valores?

a) $a_{rad} = W^2 R$ y $V = WR$

$a_{rad} = W^2 \left(\frac{V}{W}\right) = WV.$

b) Datos

$a_r = 0.500 m/s^2$

$V_T = 2 m/s$

$W = ?$

$a_{rad} = WV \Rightarrow \frac{a_{rad}}{V} = W \Rightarrow \frac{0.500}{2} = 0.250 [rad/s]$

Casañas. C

9.30. En $t = 3.00$ s, un punto en el borde de una rueda con radio de 0.200 m tiene una rapidez tangencial de 50.0 m/s, mientras la rueda se frena con aceleración tangencial de magnitud constante de 10.0 m/s^2. *a)* Calcule la aceleración angular constante de la rueda. *b)* Calcule las velocidades angulares en $t = 3.00$ s y $t = 0$. *c)* ¿Qué ángulo giró la rueda entre $t = 0$ y $t = 3.00$ s? *d)* ¿En qué instante la aceleración radial es igual a g?

Datos

$t = 3[s] \rightarrow V_{Tan} = 50 m/s$

$R = 0.200 m$

$a_{Tan} = -10[m/s^2]$ (frena)

a) $\alpha = ?$ $\quad a_{tan} = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_{tan}}{R} = \frac{-10}{0.200} = -50[rad/s^2]$

b) $\omega(3) = ?$ y $\omega(0) = ?$

$V = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{V}{R} = \frac{50}{0.200} = 250[rad/s]$

$V = V_0 + \alpha t \Rightarrow 50 + (-10)(0-3) = 80[m/s]$ $\quad \omega = \frac{V}{R} = \frac{80}{0.200} = 400[rad/s]$

c) $\Delta\theta = \left(\frac{\omega + \omega_0}{2}\right) t = \left(\frac{250 + 400}{2}\right)(3) = 975 \cancel{rad} \times \frac{1 rev}{2\pi \cancel{rad}} = 155.17 rev$

d) $a_{rad} = \frac{V^2}{R} \Rightarrow \sqrt{a_{rad} R} = V \rightarrow V = \sqrt{(9.8)(0.200)} = 1.4[m/s]$

$V = V_0 + at$

$\frac{V - V_0}{a} = t$ $\quad \frac{50. - 1.4}{10} = 4.86[s]$

9.31. Los ciclos de centrifugado de una lavadora tienen dos rapideces angulares, 423 rev/min y 640 rev/min. El diámetro interno del tambor es de 0.470 m. *a)* ¿Qué relación hay entre la fuerza radial máxima sobre la ropa para las dos rapideces angulares? *b)* ¿Y entre las rapideces tangenciales máximas de la ropa? *c)* Calcule la rapidez tangencial máxima de la ropa y la aceleración radial máxima en términos de g.

Datos.

$\omega = 423 rev/min$ $\quad \omega = 640 rev/min$

$D = 0.470 m$

a) $a_{rad} = \omega^2 R$ $\quad F_{rad} = m a_{rad} \rightarrow F_{rad} = m \omega^2 R$

$\frac{F_{rad2}}{F_{rad1}} = \frac{\cancel{m} \omega_2^2 \cancel{R}}{\cancel{m} \omega_1^2 \cancel{R}} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \left(\frac{640}{423}\right)^2 = 2.29$

b) $V = \omega R$ $\quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{\omega_2 \cancel{R}}{\omega_1 \cancel{R}} = \frac{640}{423} = 1.51$

c) Cómo dice rapidez tangencial máxima tómamos $\omega_{máx}$.
Procedemos a convertir 640rpm a rad/s.

$$640 \frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \times \frac{2\pi rad}{1 \cancel{rev}} \times \frac{1 \cancel{min}}{60 [s]} = 67.02 \, rad/s$$

$$V = \omega R = (67.02)\left(\frac{0.470}{2}\right) = 15.74 [m/s]$$

$$a_{rad} = \omega^2 R = (67.02)^2 (0.235) = 1060 [m/s^2]$$

$$\frac{a_{rad}}{g} = \frac{1060}{9.8} = 108 \Rightarrow a = 108g$$

9.32. Imagine que usted debe diseñar un eje cilíndrico giratorio para *levantar cubetas de cemento con un peso de 800 N, desde el suelo* hasta una azotea a 78.0 m sobre el suelo. Las cubetas se colgarán de un gancho en el extremo libre de un cable que se enrolla en el eje; al girar este eje, las cubetas ascienden. *a*) ¿Qué diámetro debe tener el eje para levantar las cubetas con rapidez constante de 2 cm/s mientras gira a 7.5 rpm? b) Si el eje debe impartir a las cubetas una aceleración hacia arriba de 0.400 m/s² ¿Qué aceleración angular debe tener el eje?

a) Datos

$D = ?$

$$V = 2 \frac{\cancel{cm}}{s} \times \frac{1m}{100 \cancel{cm}} = 0.02 [m/s]$$

$$\omega = 7.5 \frac{\cancel{rev}}{\cancel{min}} \times \frac{2\pi rad}{1 \cancel{rev}} \times \frac{1 \cancel{min}}{60 s} = 0.7853 [rad/s]$$

$$V = \omega R \Rightarrow \frac{V}{\omega} = R$$

$$\frac{0.02}{0.7853} = R \Rightarrow R = 0.0254 m$$

$$D = 2R$$

$$D = 2(0.0254)$$

$$D = 0.05093 m$$

b) $a\uparrow = 0.400 [m/s^2] \rightarrow \alpha = ?$

$$a_{tan} = \alpha R$$

$$\frac{a_{tan}}{R} = \alpha$$

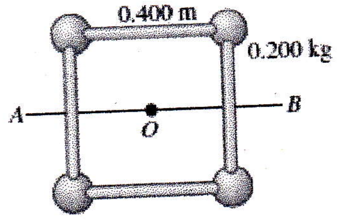
$$\frac{0.400}{0.0254} = \alpha$$

$$\alpha = 15.74 [rad/s^2]$$

Casañas C.

9.34. Cuatro esferas pequeñas, que pueden considerarse como puntos con masa de 0.200 kg cada una, están dispuestas en un cuadrado de 0.400 m de lado, conectadas por varillas muy ligeras (figura 9.29). Calcule el momento de inercia del sistema alrededor de un eje *a*) que pasa por el centro del cuadrado, perpendicular a su plano (que pasa por *O* en la figura); *b*) que biseca el cuadrado (pasa por la línea *AB* en la figura); *c*) que pasa por los centros de las esferas superior izquierda e inferior derecha y por el punto *O*.

Figura 9.29 Ejercicio 9.34.

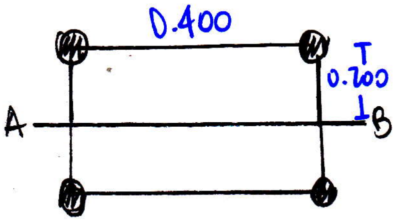


a) $r = \sqrt{(0.200)^2 + (0.200)^2} = 0.2828\,m$

$I = \sum m R^2 = 4(0.200)(0.2828)^2$

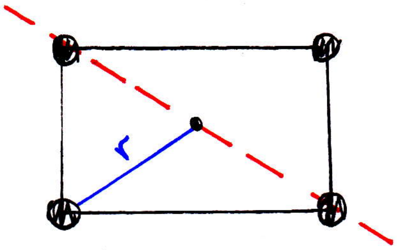
$I = 0.0639\ Kg\,m^2$

b)



$I = \sum m r^2 = 4(0.200)(0.200)^2 = 0.0320\ Kg\,m^2$

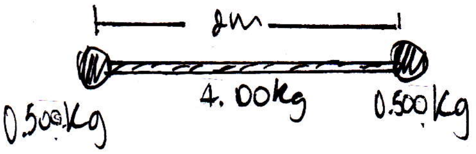
c)



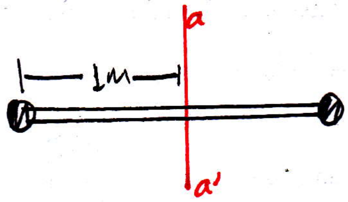
$r = 0.2828$

$I = \sum m r^2 = 2(0.200)(0.2828)^2 = 0.0320\,Kg\,m^2$

9.37. Dos esferas pequeñas están pegadas a los extremos de una barra uniforme de 2.00 m de longitud y masa de 4.00 kg. Las esferas tienen *masa de 0.500 kg cada una y se pueden tratar como masas puntuales.* Calcule el momento de inercia de esta combinación en torno a cada uno de los ejes siguientes: *a*) un eje perpendicular a la barra que pasa por su centro; *b*) un eje perpendicular a la barra que pasa por una de las esferas; *c*) un eje paralelo a la barra que pasa por ambas esferas; *d*) un eje paralelo a la barra que está a 0.500 m de ella.



a)



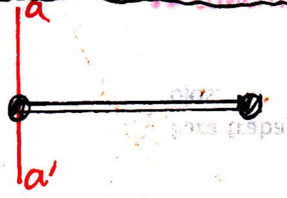
$I = I_{barra} + I_{esferas}$

$I = 2.33\ Kg\,m^2$

$I_{barra} = \frac{1}{12} ML^2 = \frac{1}{12}(4)(2)^2 = 1.33$

$I_{esferas} = mR^2 = (0.500)(1)^2 = \underbrace{2}_{\text{2esferas}}(0.500) = 1$

b)



$I = I_{barra} + I_{esfera} \rightarrow I = 7.33\ Kg\,m^2$

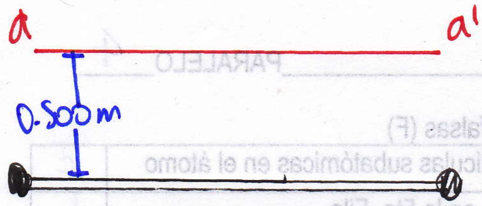
$I_{barra} = \frac{1}{3} ML^2 = \frac{1}{3}(4)(2)^2 = 5.33$

$I_{esfera} = mR^2 = \underline{1}\,0.500(2)^2 = 2$

↳ Ahora es 1 esfera (ya q' pasa por el centro de la otra)

c) 

$I = 0.$ $\quad I = M\underline{R}^2$ → no hay distancia

d) 

$I = I_{barra} + I_{esfera}$

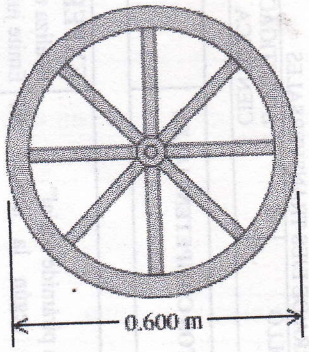
OJO: No es aplicable el teorema de los ejes paralelos para la barra.

$$I = M_{barra}\, d^2 + 2 M_{esfera}\, d^2$$

$$I = d^2 (m_{barra} + 2 m_{esfera})$$

$$I = (0.500)^2 [4 + 2(0.500)] = 1.25\ kg\, m^2$$

Figura 9.30 Ejercicio 9.39.



9.39. Una rueda de carreta (figura 9.30) tiene un radio de 0.300 m y la masa de su borde es de 1.40 kg. Cada rayo, que está sobre un diámetro y tiene 0.300 m de longitud, tiene una masa de 0.280 kg. ¿Qué momento de inercia tiene la rueda alrededor de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano? (Use las fórmulas de la tabla 9.2.)

Datos.

$R = 0.300\ m$

$m = 1.40\ kg$ (borde)

$L = 0.300m \rightarrow m_{Rayo} = 0.280\ kg$

$I = I_{borde} + I_{Rayos}.$

$$I_{borde} = MR^2 = (1.40)(0.300)^2 = 0.126\ kg\, m^2$$

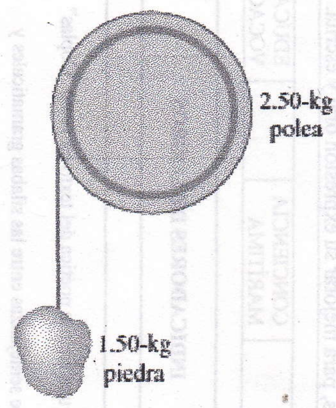
$$I_{Rayos} = 8\left(\frac{1}{3} mL^2\right) = \frac{8}{3}(0.280)(0.300)^2 = 0.0672\ kg\, m^2$$

$$I = 0.1932\ kg\, m^2$$

J. Casañas.

9.49. Una polea sin fricción tiene la forma de un disco sólido uniforme de masa 2.50 kg y radio 20.0 cm. Una piedra de 1.50 kg se une a un alambre muy delgado que se enrolla alrededor del borde de la polea (figura 9.32), y el sistema se libera del reposo. *a*) ¿Qué tan lejos debe caer la piedra para que la polea tenga 4.50 J de energía cinética? *b*) ¿Qué porcentaje de la energía cinética total tiene la polea?

Figura 9.32 Ejercicio 9.49.



Datos.

Masa polea = 2.5 Kg

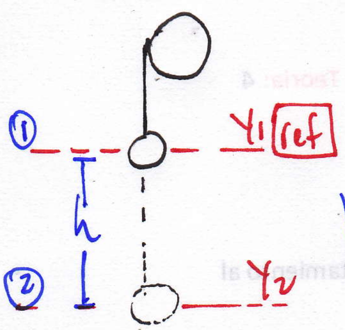
R polea = 20 cm

Masa piedra = 1.5 Kg

a) Y → 4.50 J

Energía Rotacional

$K = \frac{1}{2} I \omega^2$; $I = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2}(2.5)(0.2)^2 = 0.05 \, Kg\text{-}m^2$



$\sqrt{\frac{2(4.5)}{0.05}} = \omega$

$\omega = 13.41 \, rad/s$

$\rightarrow V = \omega R = (13.41)(0.2) = 2.68 \, m/s$

$E_1 = E_2$

$0 = U_2 + K_2$

$0 = mgh_2 + \frac{1}{2} m V^2 + 4.5$

$-4.5 - \frac{1}{2} m V^2 = mgh_2$

$-4.5 - \frac{1}{2}(1.5)(2.68)^2 = (1.5)(9.8)(-h)$

$9.8868 = 14.7 h$

$h = 0.672 \, m$

b) $K_{Total} = K_{polea} + K_{piedra}$

$\frac{K_{polea}}{K_{total}} = \frac{4.5}{9.89} = 45.5\%$; $K_{Total} = 4.5 + 5.38 = 9.89$

EduCa