$$x^2 + x^2 + x^2 = R^2$$

$$3x^2 = R^2$$

$$x^2 = \frac{R^2}{3} \qquad x = \frac{R}{\sqrt{3}}, \; y = \frac{R}{\sqrt{3}}, \; z = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$V_{máx} = 8\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)$$

→ Empleando el método de Lagrange determine 3 números positivos cuyo producto sea el máximo posible si se conoce que su suma es 150.

$$xyz = f.o \quad (\text{Función Optimizar})$$

• $x + y + z = 150$ FR (Función restricción)

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x + y + z - 150)$$

$$\nabla F = \langle yz - \lambda, \; xz - \lambda, \; xy - \lambda, \; -(x + y + z - 150) \rangle = \vec{0}$$

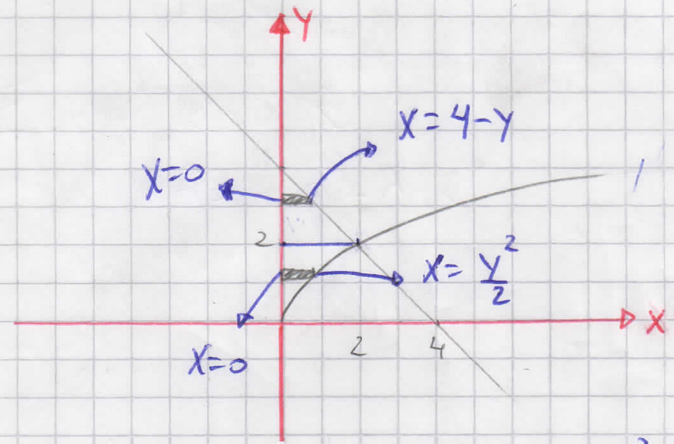
$$\begin{cases} yz = \lambda & \Rightarrow \quad yz = xz \rightarrow \boxed{y = x} \\ xz = \lambda & \Rightarrow \quad yz = xy \Rightarrow \boxed{x = z} \\ xy = \lambda \\ x + y + z = 150 \end{cases}$$

$$x + x + x = 150$$

$$3x = 150$$

$$\boxed{x = 50} \quad \boxed{y = 50} \quad \boxed{z = 50}$$

$$\rightarrow \int_{x=0}^{x=2} \int_{\sqrt{2x}=y}^{4-x=y} (x^2-y^2)\,dy\,dx$$ Cambie su orden de integración y evalúe el nuevo orden.

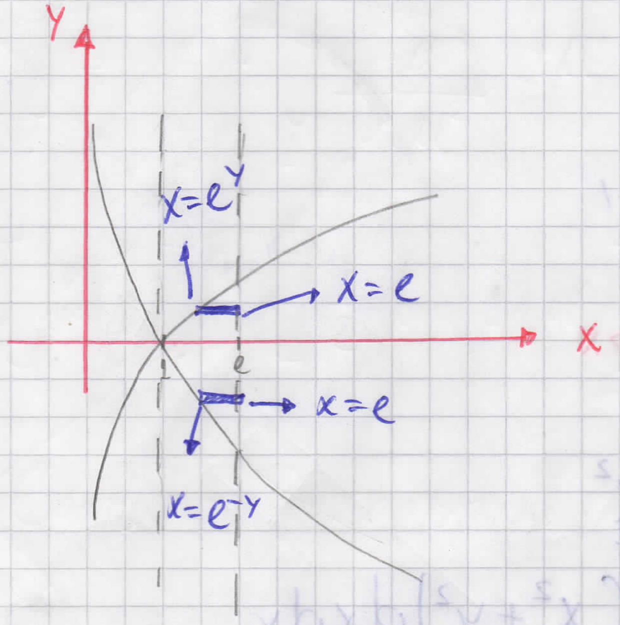


$$\int_2^4 \int_0^{4-y} (x^2-y^2)\,dx\,dy + \int_0^2 \int_0^{\frac{y^2}{2}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\rightarrow \int_2^4 \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 \right)_0^{4-y} dy + \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 \right)_0^{\frac{y^2}{2}} dy$$

$$\rightarrow \int_2^4 \left[\frac{(4-y)^3}{3} - (4-y)y^2 \right] dy + \int_0^2 \left[\frac{y^6}{24} - \frac{y^4}{2} \right] dy$$

$$\int_{x=1}^{x=e}\int_{-\ln(x)=y}^{\ln(x)=y} f(x,y)\,dy\,dx$$ Cambie el orden de integración.



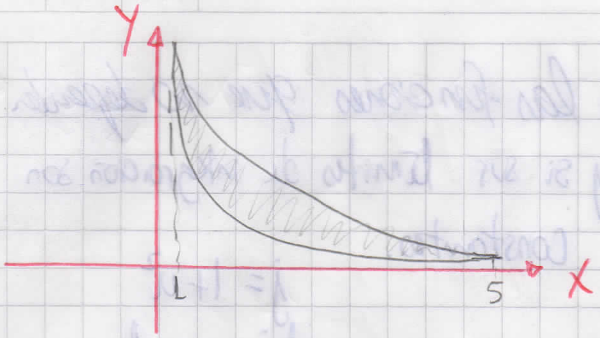
$$\int_{0}^{1}\int_{e^{y}}^{e} f(x,y)\,dx\,dy + \int_{-1}^{0}\int_{e^{-y}}^{e} f(x,y)\,dx\,dy$$

→ Una lámina se encuentra acotada por las curvas $xy=1$; $xy=5$, $x=1$, $x=5$ determine la masa si la función de densidad $f(x,y)=\frac{xy}{1+x^2y^2}$

$$dm=\rho\,dA$$

$$m=\iint \frac{xy}{1+x^2y^2}\,dy\,dx$$

③

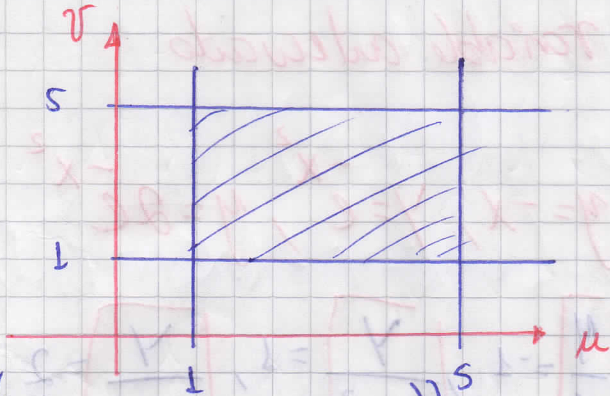


C. Variable

$u = xy \quad (1,5)$

$v = x \quad (1,5)$

$u=1,\ u=5\ ;\ v=1,\ v=5$



$$\iint \left(\frac{xy}{1+x^2y^2}\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

"Jacobiano inverso."

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - x = -x = x$$

$$\int_1^5\int_1^5 \frac{u}{1+u^2}\cdot\frac{1}{v}\,du\,dv$$

OJO: Cuando están separadas las funciones que no dependen de otra variable las separo · y si sus límites de integración son constantes.

$$\int_1^5 \frac{1}{v}\,dv \cdot \int_1^5 \frac{u}{1+u^2}\,du$$

$j = 1+u^2$

$dj = 2u\,du$

$$\int_1^5 \frac{u}{j}\frac{dj}{2u} = \frac{1}{2}\int_1^5 \frac{dj}{j}$$

$$\left[\ln(v)\right]_1^5 \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^5 = \frac{1}{2}\ln^2(5)$$

→ Empleando un cambio de variable adecuado

$$\iint_D \frac{2x^3+x}{y^3}\,dA \quad y=x,\ y=-x,\ y=e^{-x^2},\ y=2e^{-x^2}$$

$$\boxed{\frac{y}{x}}=1,\ \boxed{\frac{y}{x}}=-1,\ \boxed{\frac{y}{e^{-x^2}}}=1,\ \boxed{\frac{y}{e^{-x^2}}}=2$$

Se deja igualado a números constantes.

$u = \frac{y}{x}$; $u=1$, $u=-1$

$v = \frac{y}{e^{-x^2}}$; $v=1$, $v=2$

$$\iint \frac{2x^3+x}{y^3} \cdot \frac{d(x,y)}{d(u,v)}\,dv\,du$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y2xe^{x^2} & 1/e^{-x^2} \end{bmatrix} = -\frac{ye^{x^2}}{x^2} - 2ye^{x^2}$$

$$= \frac{ye^{x^2}}{x^2} + 2ye^{x^2} = \frac{ye^{x^2} + 2x^2ye^{x^2}}{x^2}$$

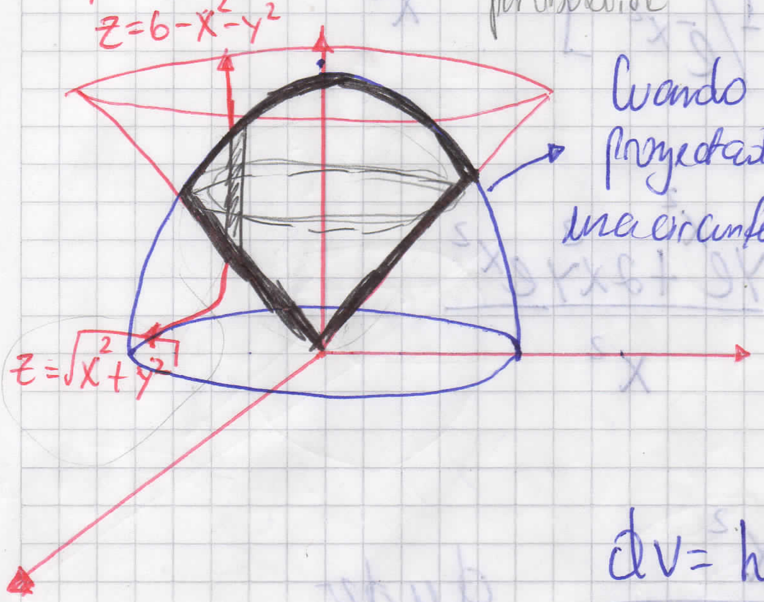
$$\iint \frac{x\,(2x^2+1)}{y^3} \cdot \frac{x^2}{ye^{x^2}(1+2x^2)}\,du\,dv$$

$$\iint \frac{x^3}{y^3} \cdot \frac{e^{-x^2}}{y}\,du\,dv$$

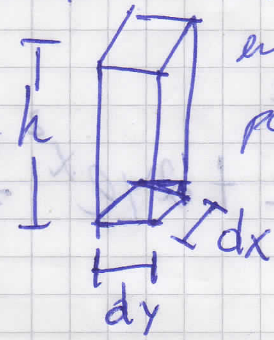
$$\iint \left(\frac{x}{y}\right)^3 \left(\frac{1}{v}\right) du\,dv = \int_1^2 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{u^3}\right)\left(\frac{1}{v}\right) du\,dv = 0$$

→ Hallar el volumen del Sólido limitado por las superficies. $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2+y^2}$. doble cono.

paraboloide



Cuando veo q' la integral max proyectada una circunferencia



en XY es paso a polares.

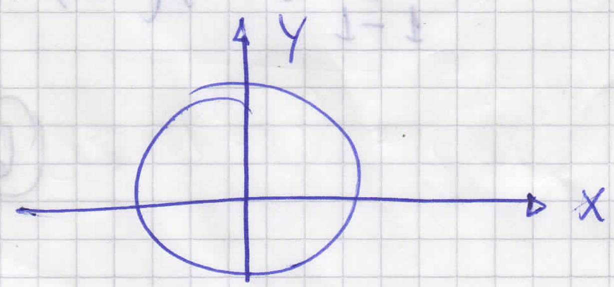
$$dV = h\,(dA)$$

$$dV = h\,(dx\,dy)$$

$$dV = \left(6 - x^2 - y^2 - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dx\,dy$$

$$V = \iint \left[6 - (x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2}\right]dx\,dy$$

$$V = \iint (6 - r^2 - r)\,r\,dr\,d\theta$$



$$\begin{cases} z = 6 - (x^2+y^2) \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

- $x^2+y^2 = x^2+y^2$

$6-z = z^2$

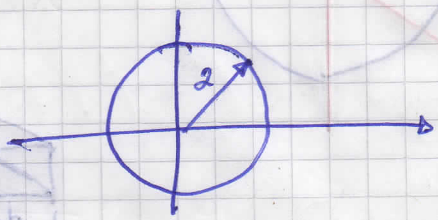
$z^2+z-6=0$

$(z+3)(z-2)=0$

$\boxed{z=-3}$ $\boxed{z=2}$ ✓

$z^2 = x^2+y^2$

$x^2+y^2 = 2^2$



$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(6-r^2-r)\,r\,dr\,d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\cdot\int_0^{2}(6r-r^3-r^2)\,dr$$

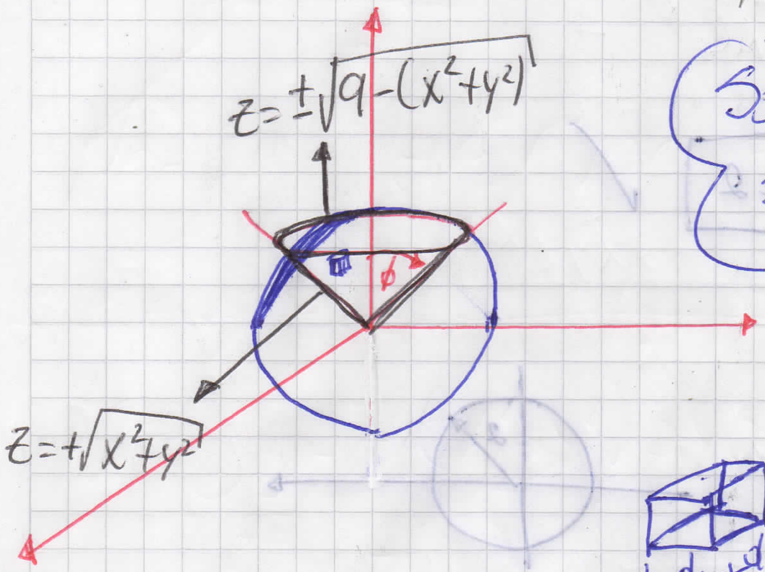
$$V=2\pi\int_0^{2}(6r-r^3-r^2)\,dr$$

(8)

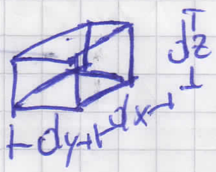
→ Determine el Volúmen del Sólido limitado por

$x^2+y^2+z^2=9$; $x^2+y^2=z^2$. $z \geq 0$

esfera — Cono parte superior



Sólo esfera y cono se usa coord. esférica.



$$dV = dx\,dy\,dz$$

$$V=\iiint dz\,dy\,dx$$

$$V=\iiint_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{9-(x^2+y^2)}} 1\,dz\,dy\,dx$$

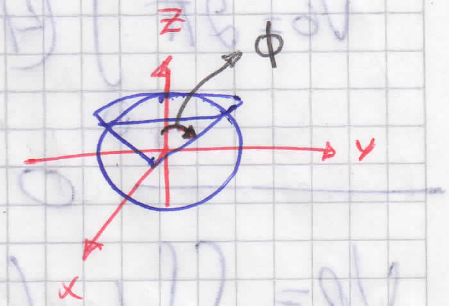
$$V=\iint\left[\sqrt{9-(x^2+y^2)}-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy\,dx$$

a Coord. esférica:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{3} (1)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Func

ϕ es el ángulo del eje z a la función



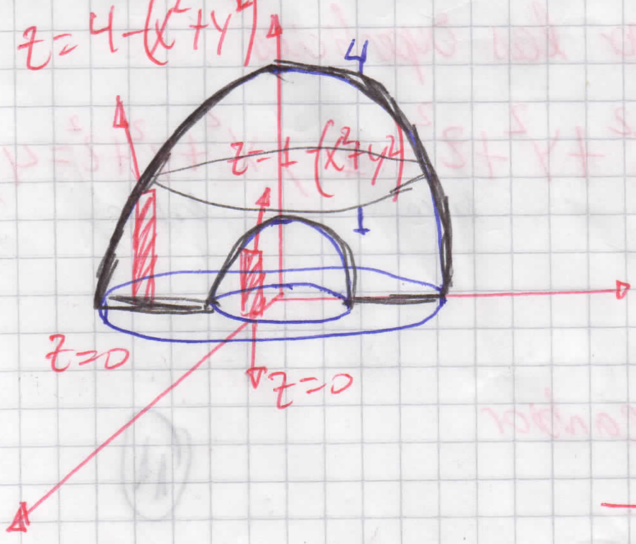
θ

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \cdot \int_0^{3} \rho^2 \, d\rho$$

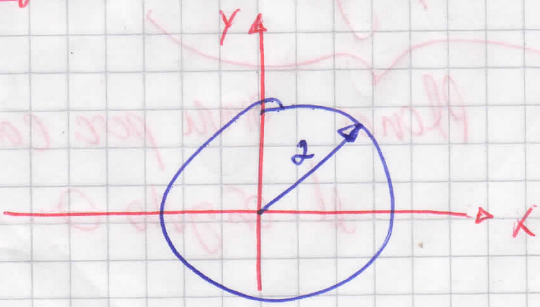
→ Calcular el Volumen del Sólido limitado por:

paraboloide; paraboloide

$x^2+y^2+z=1$; $x^2+y^2+z^2=4$; $z \geq 0$



$$V_6 = \iint 4-(x^2+y^2)\, dy\, dx$$



a Polares. –

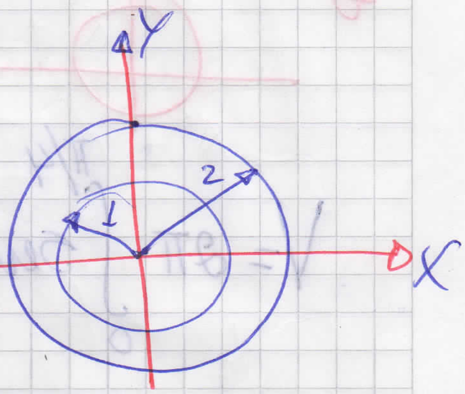
$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{2}(4-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$$V_G=2\pi\int_0^{2}(4r-r^3)\,dr=\boxed{8\pi}$$

O

$$V_P=\iint 1-(x^2+y^2)\,dy\,dx$$

$$V_P=\int_0^{2\pi}\int_0^{1}(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta=\boxed{\frac{\pi}{2}}$$



$$\boxed{V_T=V_{Grande}-V_{Pequeña}}$$

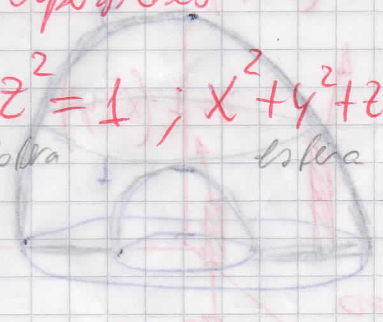
$\frac{15\pi}{2}$

→ Calcular el Volúmen del sólido ubicado en el 1er octante limitado por las superficies (doble cono)

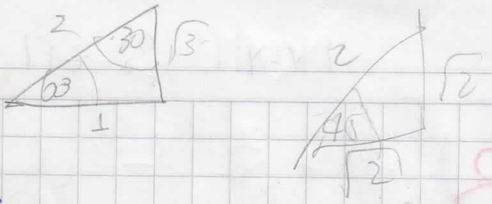
$x^2+y^2-z^2=0$; $x^2+y^2+z^2=1$ (esfera) ; $x^2+y^2+z^2=4$ (esfera),

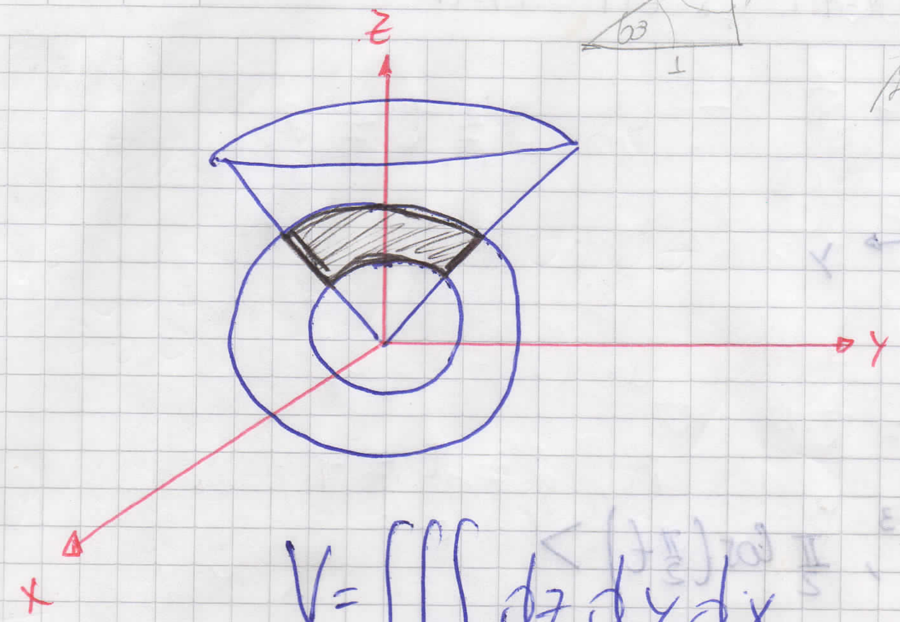
$y=x$, $y=\sqrt{3}\,x$

Planos sirven para cambiar el ángulo θ

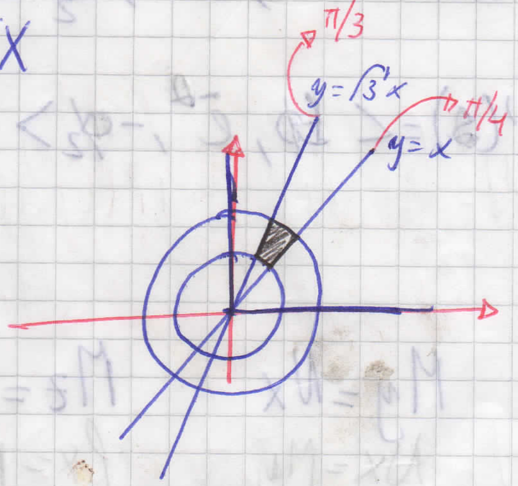


11





$$V=\iiint dz\,dy\,dx$$



$$V=\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_{0}^{\pi/4}\int_{1}^{2}\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$\frac{y}{x}=\tan\theta \Rightarrow \boxed{\theta=\pi/4}$$

$$\frac{y}{x}=\tan\theta=\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\theta=\pi/3}$$

→ Una partícula inicia su movimiento en la curva dada por $r(t)=\langle t^2-4, e^{t-3}, \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}t)\rangle$; $t\geq 0$ en el instante $t=3[s]$ sale en dirección tangente y se desplaza en línea recta hasta $t=5[s]$. Determine:

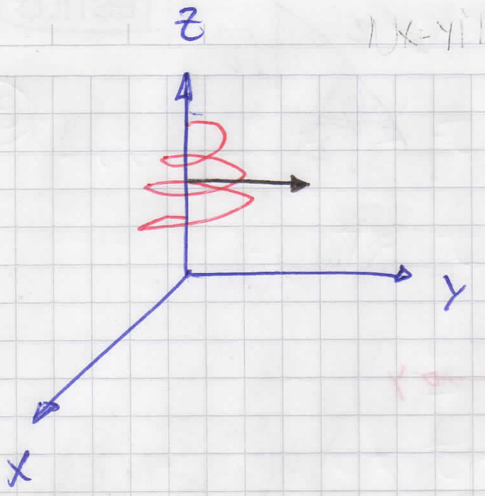
a) Posición final de la partícula

b) Trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$F(x,y,z)=(2xe^{yz}+2z)i+(x^2ze^{yz}-2y)j+(x^2ye^{yz}+2x)k$$

(M, N, P)

que actúa durante todo el mov.



$r'(t) = < 2t , e^{t-3}, \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}t) >$

$r'(2) = < 4 , e^{-1} , -\pi/2 >$

a partir de los 3 segundos hasta los 5 segundos.

$M_y = N_x$ $\quad M_z = P_x$ $\quad N_z = P_y$

$N_x = M_y$ $\quad P_x = M_z$ $\quad P_y = N_z$

$2xze^{yz} = 2xze^{yz}$ | $2xye^{yz} + 2 = 2xye^{yz} + 2$ | $x^2e^{yz} + x^2zye^{yz} = x^2e^{yz} + x^2yze^{yz}$

∴ Campo Conservativo

$P(x,y,z) = \int 2xe^{yz} + 2z \; dx = x^2e^{yz} + 2xz$

$P(x,y,z) = \int x^2ze^{yz} - 2y \; dy = x^2e^{yz} - y^2$

$P(x,y,z) = \int x^2ye^{yz} + 2x \; dz = x^2e^{yz} + 2xz$

13

$N_x = y M \qquad P_x = z M \qquad P_y = z N$

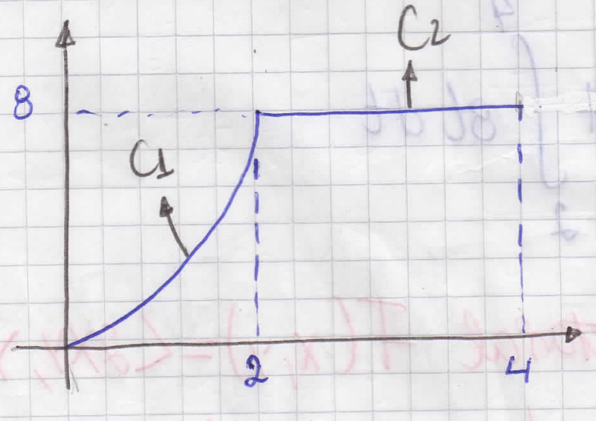
$P(x,y,z) = x^2 e^{yz} + 2xz - y^2$

$W = P(x_f, y_f, z_f) - P(x_0, y_0, z_0)$

$r(0) = \langle \underset{x_0}{-4}, \underset{y_0}{e^{-3}}, \underset{z_0}{0} \rangle$

$W = \underbrace{\left[16 e^{(e^{-1})(-\pi/2)} + 2(+4)(-\frac{\pi}{2}) - (e^{-1})^2\right]}_{P_f} - \underbrace{\left[16(1) + 2(-4)(0) - (e^{-3})^2\right]}_{P_0}$

→ Sea C el camino formado por un arco cúbico y un segmento de recta desde $(0,0) \rightarrow (4,8)$. Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (xy)\,i + (x+2y)\,j$



Probar que se cumpla para 2 variables.

$M_y = N_x$

$x \neq 1$

descarto función potencial

$\oint F \cdot dr = \int F[r(t)] \cdot r'(t)\, dt$

(14)

Parametrizando: . . . .

$$r_1(t) = \begin{cases} x = t \\ y = t^3 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2$$

$$r_2(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 8 \end{cases} \quad ; 2 \le t \le 4$$

$$W = \int_{C_1} F[r_1(t)] \cdot r_1'(t)\,dt + \int_{C_2} F[r_2(t)] \cdot r_2'(t)\,dt$$

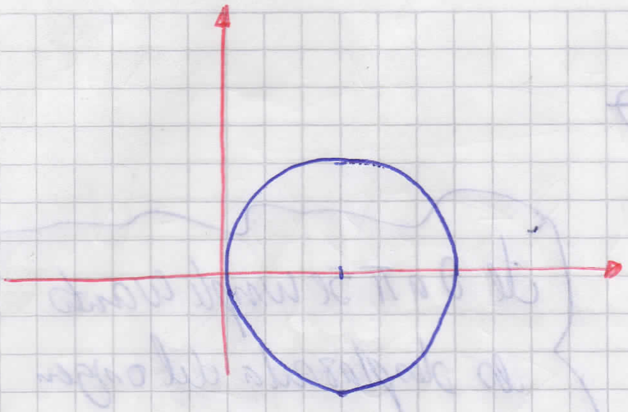
$$W = \int \langle t \cdot t^3, t + 2t^3 \rangle \cdot \langle 1, 3t^2 \rangle\,dt + \int \langle 8t, t + 16 \rangle \cdot \langle 1, 0 \rangle\,dt$$

$$W = \int_0^2 t^4 + 3t^2(t + 2t^3)\,dt + \int_2^4 8t\,dt$$

→ Considere el Campo Vectorial $F(x,y) = \langle 2xy, y^2 \rangle$ determine el trabajo realizado por F al mover una particula a lo largo de la circunferencia centrada en (1,0) con radio 1.

Teorema de Green:

- $F \rightarrow \mathbb{R}^2$
- Curva cerrada y suave



$$\oint \vec{F} \cdot \vec{dr} = \iint \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} \, dx\,dy$$

No es conservativo entonces no aplico función potencial.

$$= \iint (0 - 2x) \, dx\,dy$$

Cómo la región es circular entonces paso a polares.

$$= \iint -2r\cos\theta \; r\,dr\,d\theta$$

$r = 2\cos\theta$

2 = diametro

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\cos\theta} -2r\cos\theta \; r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\cos\theta} -2r^2\cos\theta \, dr\,d\theta$$

Aquí no puedo separar por que el límite de integración $2\cos\theta$ no es constante.

16

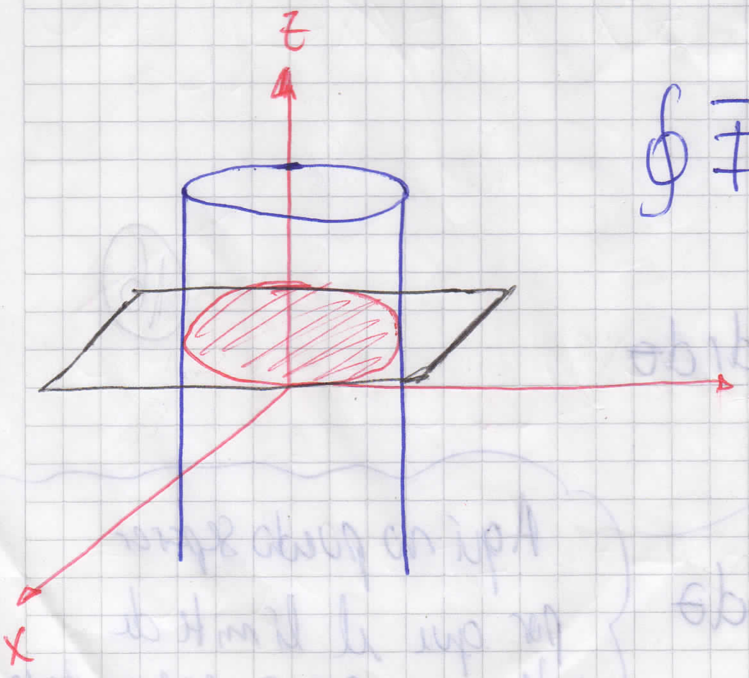
$$\int_0^{\pi}\left[-\frac{2}{3}r^3\cos\theta\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$\int_0^{\pi} -\frac{16}{3}\cos^3\theta\,\cos\theta\, d\theta$$

de 0 a π se cumple cuando desplazada del origen cubrirá toda la circunferencia

→ Calcular el trabajo realizado por el campo vectorial $F(x,y,z)=\langle x, xy^2, z\rangle$ al mover una partícula a lo largo de la traza del plano $\pi: 2x+3y+4z=12$ con el cilindro $x^2+y^2=4$

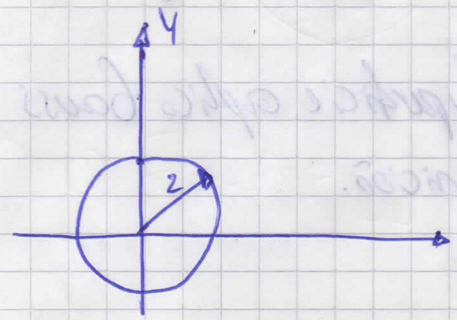
Teorema de Stokes
- $F \rightarrow R^3$
- Curva cerrada y suave



$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint rot\,\vec{F}\cdot\vec{N}\,dA$$

$$\text{rot } F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ x & xy^2 & z \end{vmatrix} = (0-0)i - j(0-0) + k(y^2-0)$$

$$\langle 0, 0, y^2 \rangle$$



$$\iint \langle 0, 0, y^2 \rangle \cdot \langle 2, 3, 4 \rangle \, dy\,dx$$

$$\iint 4y^2 \, dy\,dx$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2} (4r^2 \sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

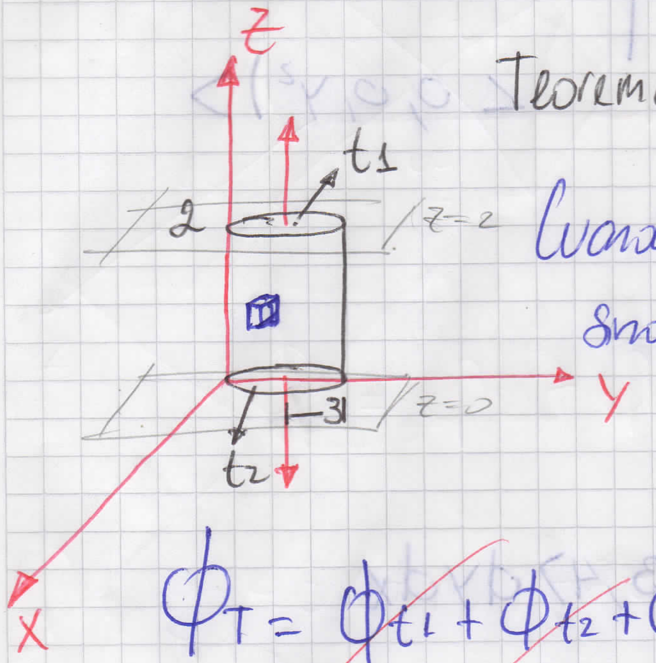
Impar: $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Par: $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

→ FLUJO

* Determine el flujo de campo $F(x,y,z) = (2xyz + x)i + (x^2 z)j + (x^2 y)k$ através de la superficie comprendida entre $x^2 + (y-1)^2 = 1$; $z = 0$, $z = 2$.

$$\Phi = \iint \vec{F} \cdot \vec{N}\, dr$$



Teorema de Gauss $\iiint$ divergencia $F\,dv$

Cuando tenga superficie aplico Gauss sino la definición.

$$\phi_T = \phi_{t1} + \phi_{t2} + \phi_{superficie}$$

$$\phi_{T1} = \iint \langle 2xyz + x, x^2 z, x^2 y\rangle \langle 0,0,1\rangle\, dA$$

$$\phi_{T2} = \iint \langle 2xyz + x, x^2 z, x^2 y\rangle \langle 0,0,-1\rangle\, dA$$

Si sumamos $\phi_1 + \phi_2$ se cancela.

divergencia

$$\boxed{\operatorname{div} F = \nabla \cdot F}$$

$$\phi_T = \phi_S = \iiint (2yz + 1 + 0 + 0)\, dv$$

$$= \iiint_0^2 (2yz + 1)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \iint \left(yz^2+z\right)\Big|_0^2 \, dy\,dx$$

$$= \iint (4y+2)\, dy\,dx$$ pasando a polares.

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} (4r\operatorname{sen}\theta + 2)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{4}{3} r^3 \operatorname{sen}\theta + r^2\right]_0^{2\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{4}{3}\, 8 \operatorname{Sen}^4\theta + 4\operatorname{Sen}^2\theta\right) d\theta$$

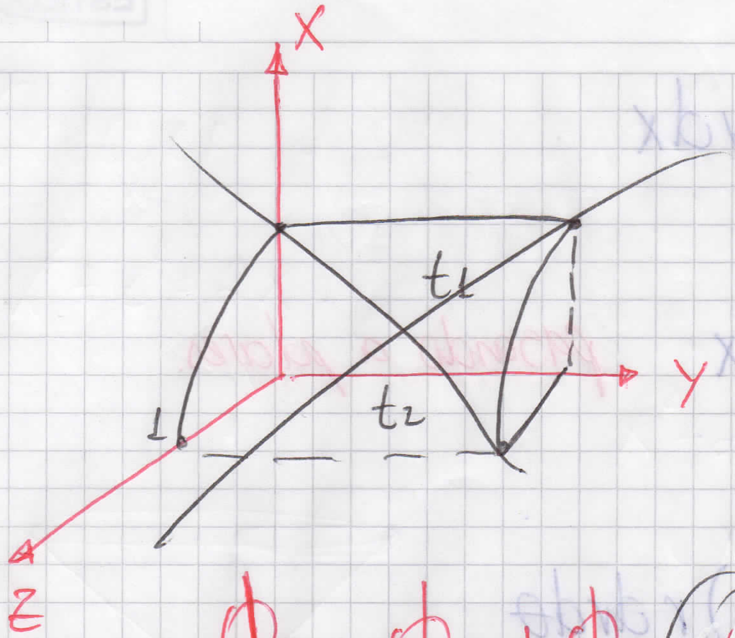
→ Calcular el Flujo del Campo Vectorial através de la Superficie del Sólido limitada por: $x = 1 - z^2$, $z=0$, $y=0$, $y=z$.

Planos

(a cualquier figura con 2 variables se le llama cilindro)

(20)

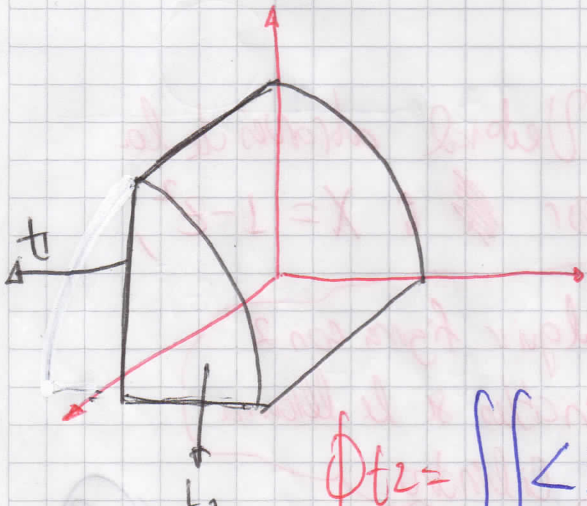
$$F(x,y,z) = \langle 3x+y,\ y^2-2z,\ 4xz \rangle$$



$\phi_T = \phi_s + \phi_{t_1} - \phi_2$ aumento.

$$\phi_{t1} = \iint \langle 3x+y,\ y^2-2z,\ 4xz \rangle \langle 0,0,-1 \rangle \, dA$$

$$= \iint -4xz \, dy\,dx = 0$$



$$\phi_{t2} = \iint \langle 3x+y,\ y^2-2z,\ 4xz \rangle \langle -1,0,0 \rangle \, dy\,dz$$

$$= \iint -3x - y \, dy\,dz$$

$$\int_0^1 \int_0^2 -y \, dy \, dz$$

$$\iiint \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z^2} (3+2y+4x) \, dx \, dy \, dz$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \left[3x + 2xy + 2x^2\right]_0^{1-z^2} dy \, dz$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \left[3(1-z^2) + 2(1-z^2)y + 2(1-z^2)^2\right] dy \, dz$$

$$\int_0^1 \left[3y(1-z^2) + y^2(1-z^2) + 2y(1-z^2)^2\right]_0^2 dz$$

$$\int_0^1 \left[6(1-z^2) + 4(1-z^2) + 4(1-z^2)^2 dz\right.$$

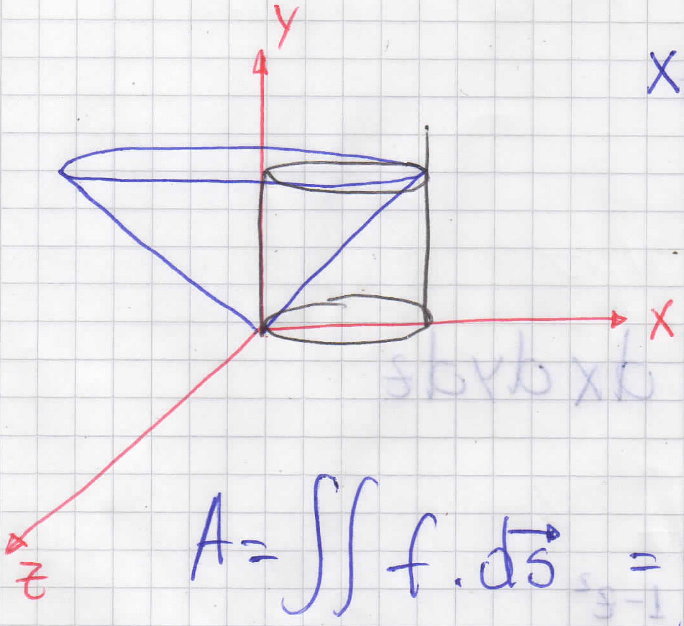
→ Calcular el área de la Superficie $y=\sqrt{x^2+z^2}$;

$x^2+z^2=2x$.

$x^2-2x+z^2=0$

$x^2-2x+1+z^2=1-1$

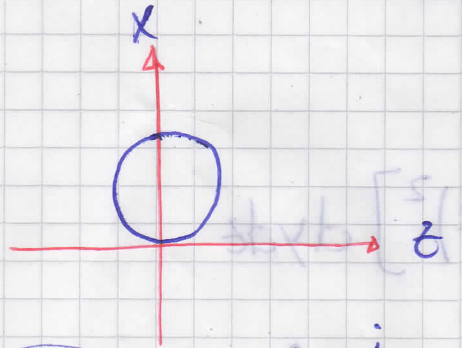
$(x-1)^2+z^2=1$



$x^2-2x+1+z^2=1$

$(x-1)^2+z^2=1$

$$A=\iint_S f\cdot d\vec{s}=\iint\sqrt{x^2+z^2}\cdot\|T_r\times T_\theta\|dA$$



$$\phi(r,\theta)=\langle \overset{z}{r\cos\theta},\ \overset{x}{r\,\text{sen}\,\theta},\ \overset{y}{r}\rangle$$

$$\|T_r\times T_\theta\|=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & 1\\ -r\,\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0\end{vmatrix}$$

$$i(-r\cos\theta)-j(r\,\text{sen}\,\theta)+k(r\cos^2+r\,\text{sen}^2\theta)$$

$$=\langle -r\cos\theta,-r\,\text{sen}\,\theta,\ r\rangle$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta + r^2}$$

$$= r\sqrt{2}$$

$$A = \iint r \cdot (\sqrt{2}\, r)\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\operatorname{sen}\theta} \sqrt{2}\, r^2\, dr\, d\theta$$