Movimiento en dos dimensiones

Nivelatorio de Física

ESPOL

Ing. José David Jiménez

Continuación

Contenido:

- Movimiento circular

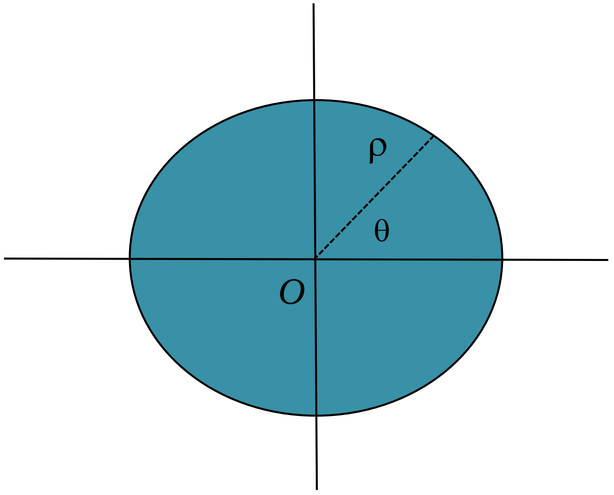
Movimiento circular

Existen muchos ejemplos de movimiento circular:

Discos de música compactos, dvd, blu ray, discos duros magnéticos, rueda de la fortuna, rueda moscovita, etc.

El movimiento circular uniforme se refiere a movimiento a rapidez constante.

En el movimiento circular se utilizan las coordenadas polares, estas se especifican mediante una distancia ρ y un ángulo θ.



Longitud de arco

La longitud de arco se define como:

Longitud de arco = (Ángulo formado por el arco) x Radio

$$S = \theta \times R$$

Donde el ángulo θ se mide en radianes

Qué es un radián ?

1 radián es la medida del ángulo comprendido entre la longitud del arco S cuando S mide exactamente la longitud del radio de la circunferencia, es decir S = R

$$S = \theta \times R$$

$$R = \theta \times R$$

$$\theta = 1 \text{ radián}$$

Relación entre grados y radianes

La longitud de arco S de una circunferencia completa se halla por medio de la ecuación del perímetro:

$$S = 2\pi \times R$$

Donde se puede concluir que $\theta = 2\pi$. Esto quiere decir que una vuelta o revolución que tiene 360° equivale a 2π radianes.

Calcular:

Cuántos grados tiene 1 radián ?

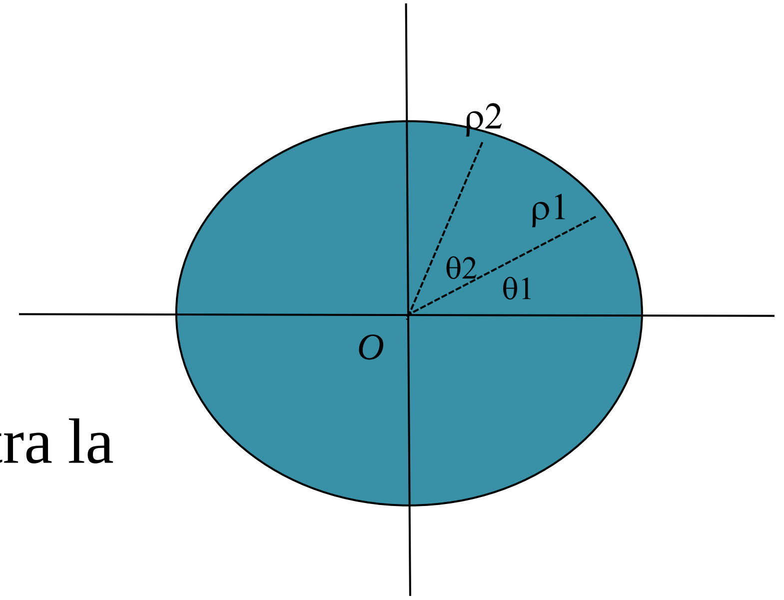
Movimiento circular

Rapidez angular media

En el movimiento alrededor de un círculo, $\rho = R$ y solo θ va cambiando mientras transcurre el tiempo.

En un intervalo de tiempo Δt se realiza un desplazamiento angular $\Delta\theta$

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$$



En qué unidades se encuentra la rapidez angular ?

Movimiento circular

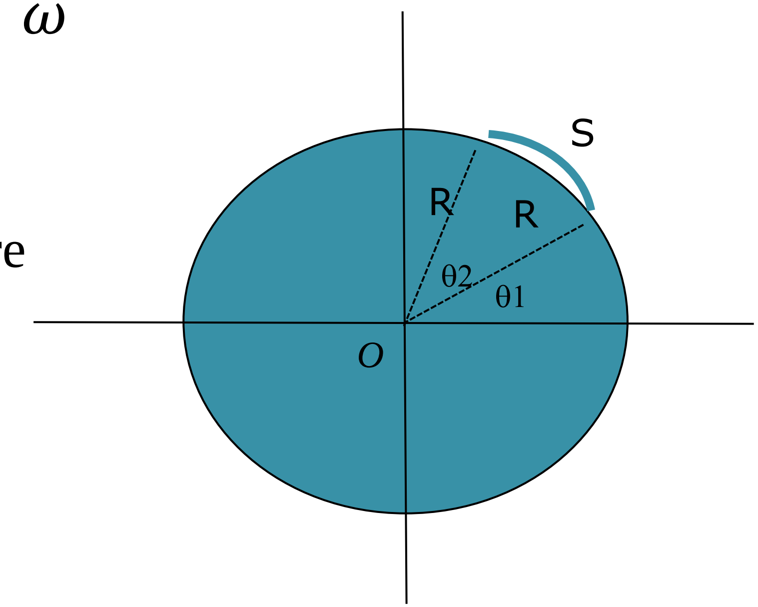
Rapidez angular instantánea

Es igual al límite de la rapidez angular media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$$

En un intervalo de tiempo Δt se recorre un arco dado por

$$S = R\,\Delta\theta$$



Autor: Ing. José David Jiménez

Movimiento circular

Para obtener la rapidez lineal o tangencial dividimos la ecuación anterior para Δt

$$\frac{S}{\Delta t} = R\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Recordemos que definimos la rapidez angular como

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Entonces

$$V = \omega\, R$$

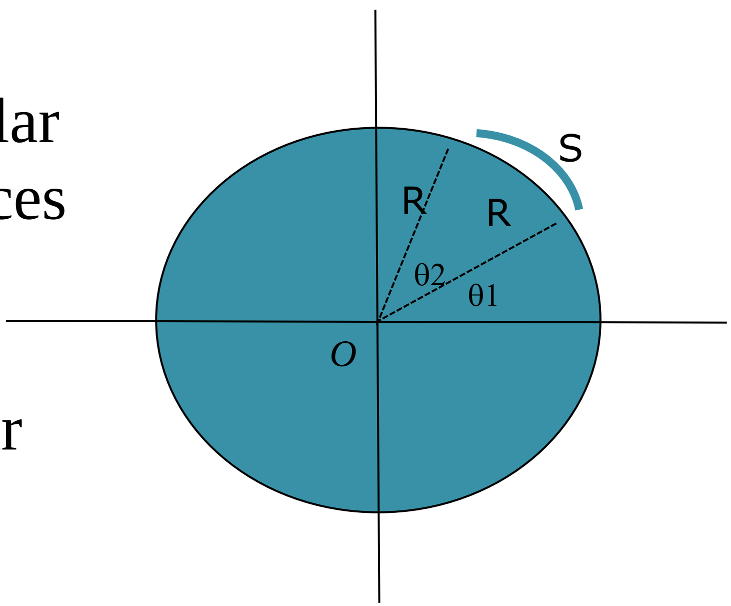
Autor: Ing. José David Jiménez

Movimiento circular

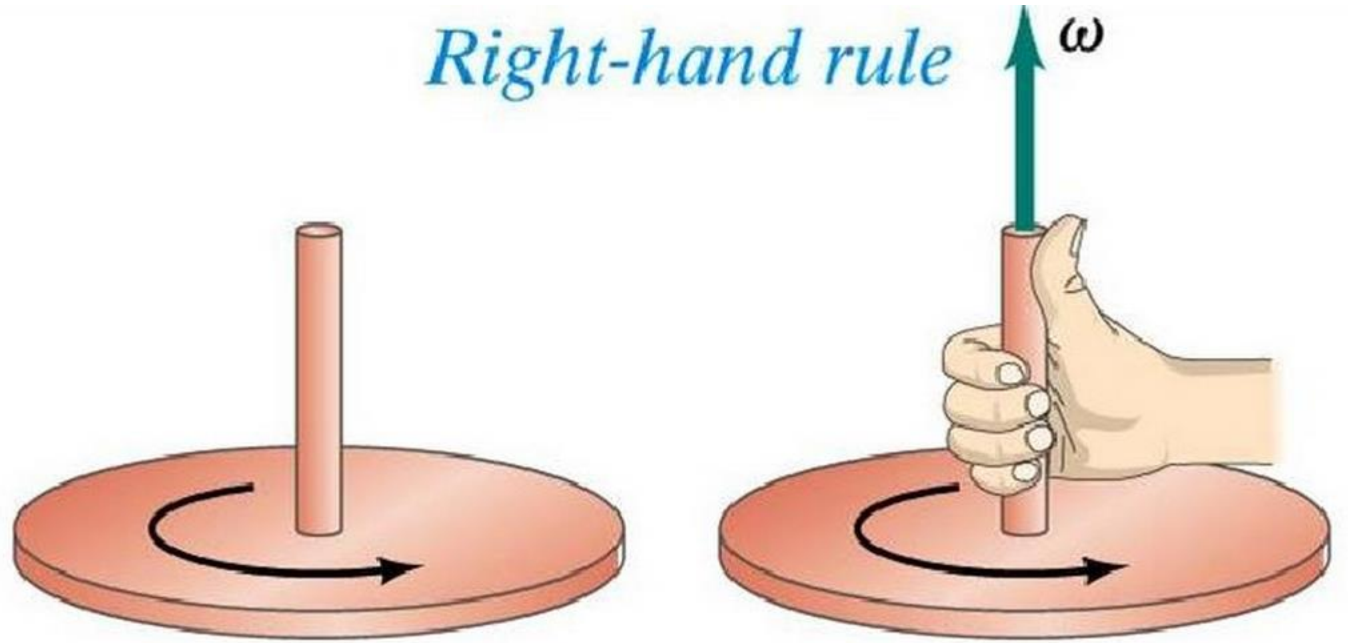
Velocidad angular media e instantánea

La velocidad angular media tiene la misma definición que la rapidez angular media al igual que la velocidad angular instantánea tiene la misma definición que la rapidez angular instantánea.

Pero hay que recordar que al hablar de velocidades y ya no de rapideces estamos tratando ahora con cantidades vectoriales y no escalares, por lo que hay q indicar también su dirección.

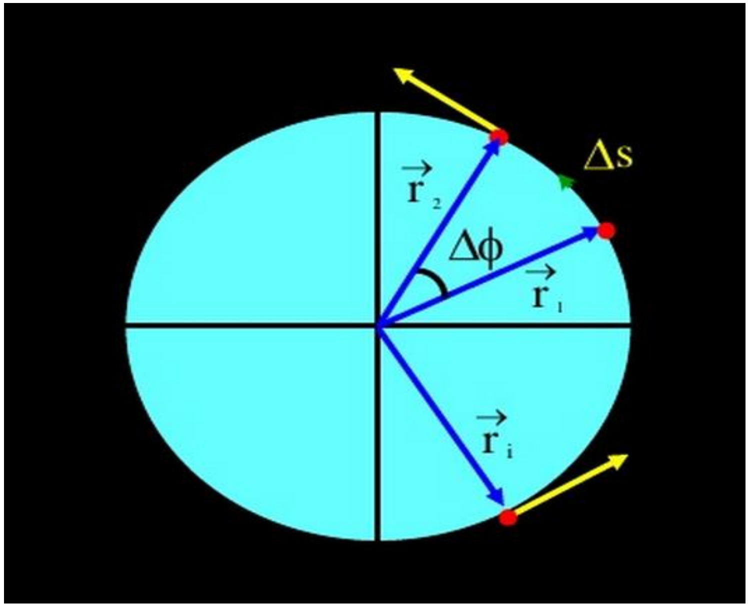


Dirección del vector velocidad angular



(a) Rotating wheel. (b) Right-hand rule for obtaining direction of **ω**.

Movimiento circular



El vector velocidad V es siempre tangente a la trayectoria y perpendicular al vector posición R.

Vectorialmente la velocidad tangencial se define como el producto cruz entre la velocidad angular ω y R

$$\bar{V} = \bar{\omega}\ x\ \bar{R}$$

Periodo y frecuencia

Al tiempo en que tarda un objeto en dar una vuelta completa se le llama periodo (T) está dado por

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\omega R} = \frac{2\pi}{\omega}$$

T se mide en segundos

La frecuencia es el recíproco del periodo

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$

La frecuencia es el número de revoluciones o vueltas que un objeto da en un segundo, se mide en hertz (Hz)

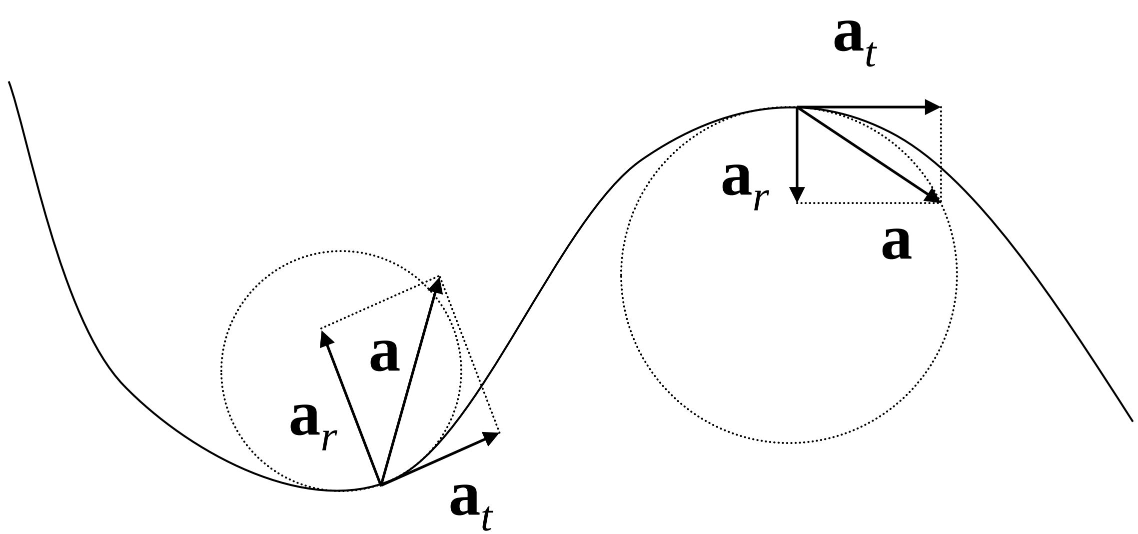
Otra unidad es las revoluciones por minuto rev/min o rpm.

Movimiento en una trayectoria curva

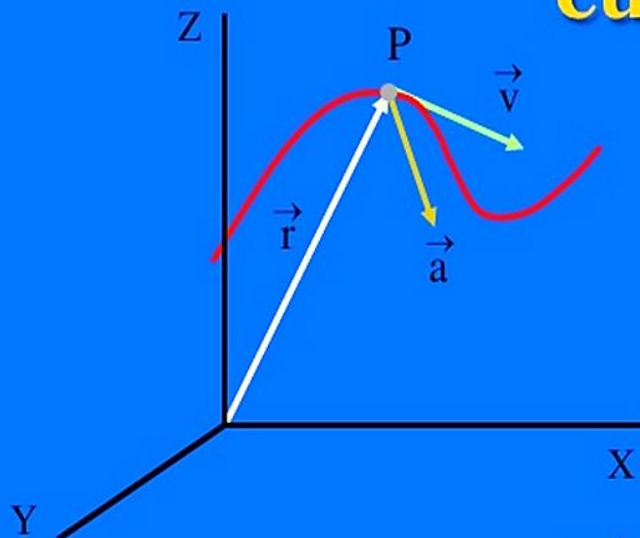
La aceleración se descompone en radial y tangencial.

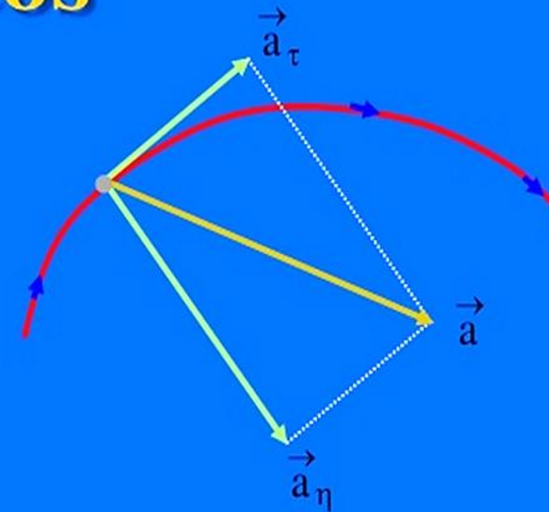
La aceleración radial se debe al cambio de dirección del vector velocidad.

La aceleración tangencial proviene del cambio en la magnitud de la velocidad.



La aceleración en los movimientos curvilíneos





- Un móvil tiene aceleración $\vec{a}$ si varía al menos algún factor (módulo o dirección) del vector velocidad
- Sus componentes tangencial y normal se llaman intrínsecas, $\boxed{\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_\eta}$

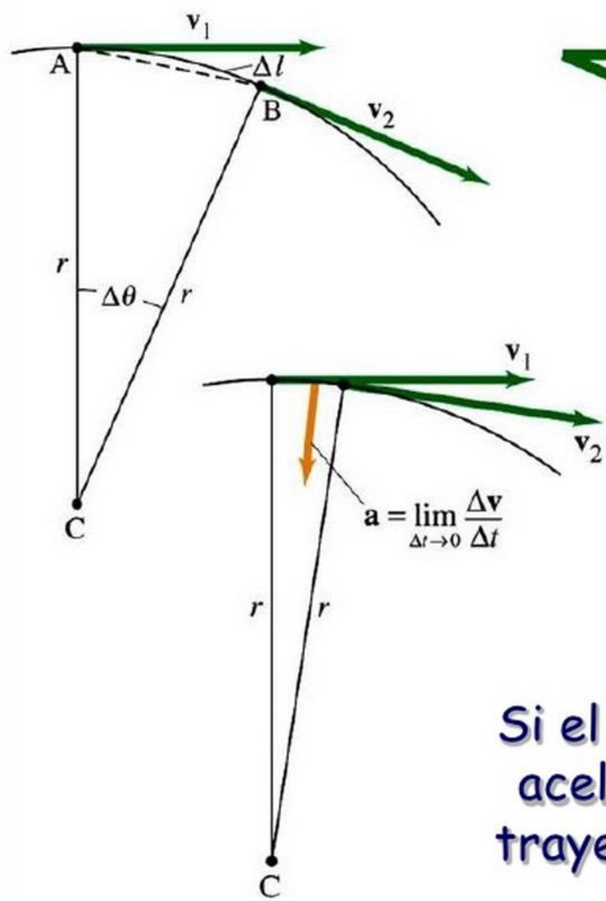
$\boxed{a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0}$ está relacionada con la variación del módulo

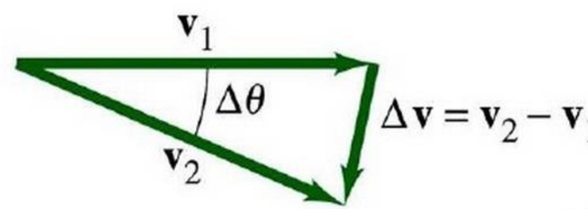
$\boxed{a_\eta = \frac{v^2}{R}}$ **está relacionada con la variación de la dirección de la velocidad**

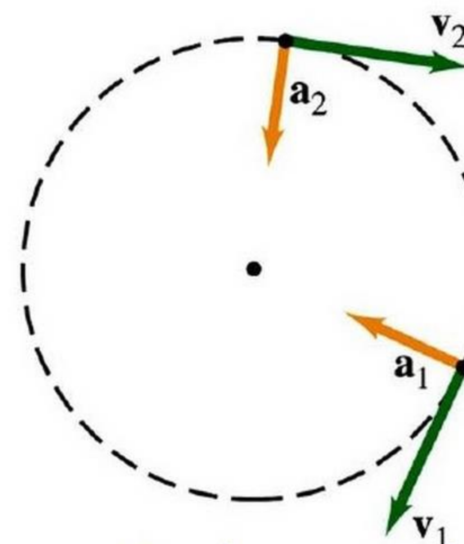
Autor: Ing. José David Jiménez

Aceleración radial

La aceleración siempre apunta en la dirección del vector CAMBIO de velocidad







Si el intervalo de tiempo tiende a cero, la aceleración apunta hacia el centro de la trayectoria, de ahí el término aceleración CENTRIPETA.

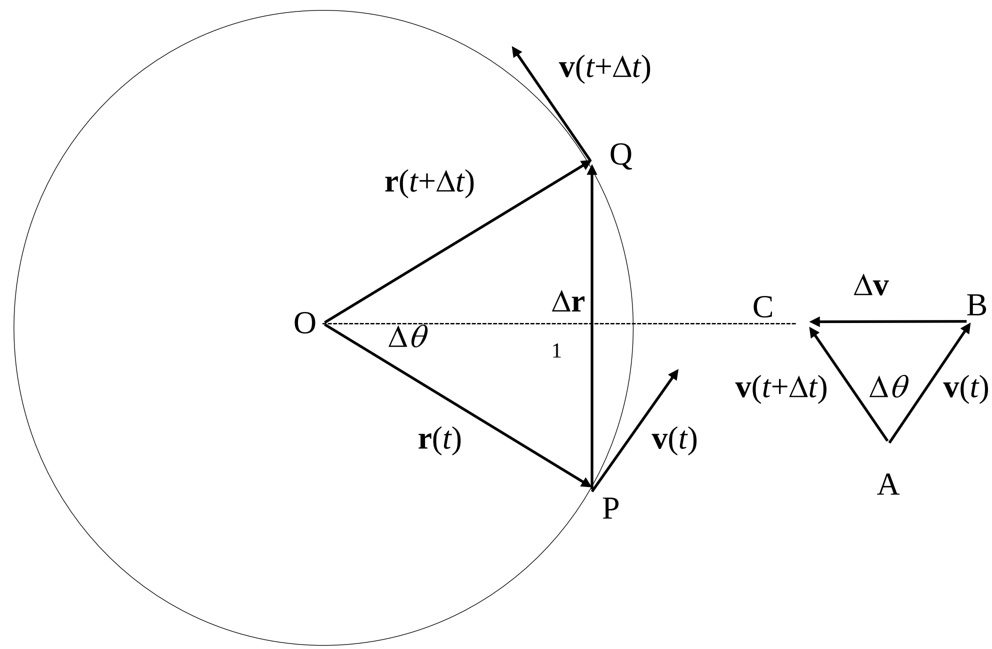
Aceleración radial

Los triángulos OPQ y ABC son ambos triángulos isósceles con ángulos iguales. Así,

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v}$$

de donde se obtiene

$$|\Delta V| = \frac{V}{r}|\Delta r|$$



Para ángulos muy pequeños V ≈ |Δ**r**| / Δ*t*, vemos que: V Δ*t* ≈ |Δ**r**|

$$|\Delta V| = \frac{V}{r}\,.V\,\Delta\mathrm{t}$$

$$\frac{|\Delta V|}{\Delta t} = \frac{V^2}{R}$$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega . r)^2}{r} = \omega^2 r$$

Esta es llamada **aceleración centrípeta o radial**.

Autor: Ing. José David Jiménez

Aceleración radial

El subíndice *r* indica que la aceleración es radial. Vectorialmente se escribirá como

$$\mathbf{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$$

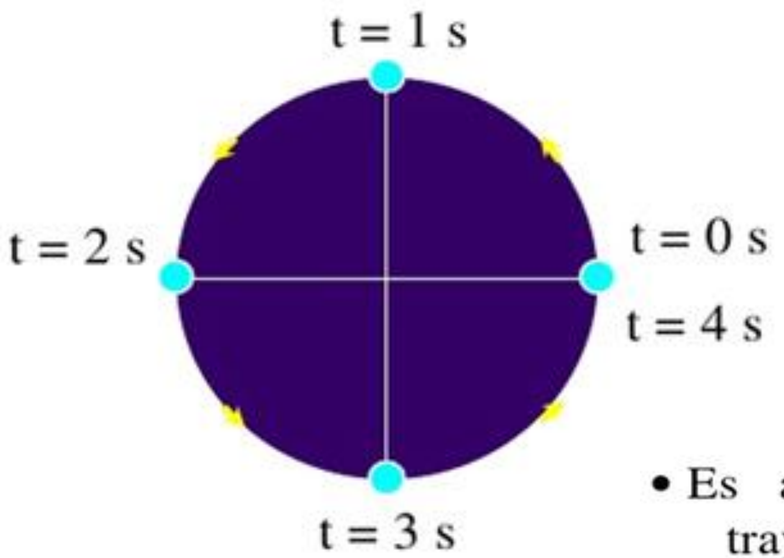
En donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario en la dirección del radio del círculo. Este vector cambia de dirección conforme la partícula se mueve en la trayectoria circular.

La aceleración se puede expresar como

$$a_r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 4\pi^2 r f^2$$

Autor: Ing. José David Jiménez

Movimiento circular uniforme



$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \text{Constante}$$

- Es aquel movimiento que describe una trayectoria circular con velocidad constante en módulo

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\phi\ R}{\Delta t} = \boxed{\omega\ R = cte}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \omega\, t$$

$\boxed{\omega = \text{cte}}$ (por ser R cte)

- La velocidad angular de este MCU es:

$\pi/2$ rad/s

Ejemplo

Un conductor ajusta el control de crucero de su automóvil y amarra el volante para que el vehículo viaje con rapidez uniforme de 15 m/s en un círculo con diámetro de 120 m

a) ¿Qué distancia angular recorre el coche en 4 minutos.

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{3600\,m}{60\,m} = 60\,rad$$

b) ¿qué distancia lineal recorre en ese tiempo.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad \Delta s = v\,\Delta t = 15x4x60 = 3600\,m$$

Ejemplo

Calcule la rapidez angular, la rapidez, la frecuencia, el periodo y la aceleración correspondiente en un punto del ecuador de la tierra.

El periodo es 24 h o sea

$$T = 24\text{h } (60 \text{ min/h})(60 \text{ s/min}) = 86{,}400 \text{ s}$$

La frecuencia es

$$f = 1/T = 1.16 \times 10^{-5} \text{ Hz}$$

El radio de la tierra es $R = 6.4 \times 10^6$ m, la velocidad es

$$v = 2\pi R/T = (2\pi)(6.4 \times 10^6)/86{,}400 = 465 \text{ m/s}$$

La rapidez angular es

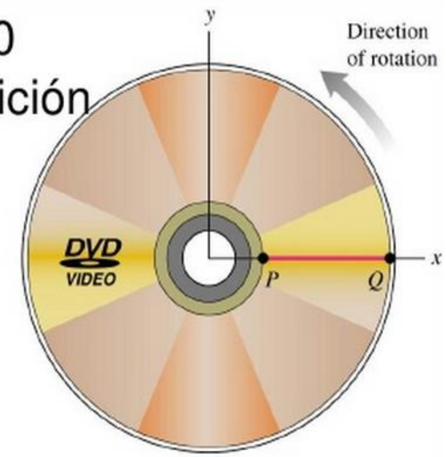
$$\omega = 2\pi f = 2\pi(1.16 \times 10^{-5}) = 7.3 \times 10^{-5} \text{ Hz}$$

La aceleración es

$$a = v^2/R = (465)/(6.4 \times 10^6) = 0.034 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo

Un DVD rota con velocidad angular constante de 10000 RPM. r_P = 3 cm y r_Q = 5 cm. Si el disco parte de la posición indicada en la figura, determine;



1. La posición angular del punto P al cabo de 4 s.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad \Rightarrow \theta = \theta_o + \omega\Delta t$$

$$\theta = 0 + 10000\left(\frac{\text{Rev}}{\min}\right)\left(\frac{2\pi\, rad}{\text{Rev}}\right)\left(\frac{\min}{60\, s}\right)4 \qquad \theta = 4188,8 rad$$

2. La distancia lineal recorrida por el punto Q

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} \quad \Rightarrow \Delta s = \Delta\theta\, R \qquad \Delta s = 4188,8\, rad \;\; 5cm \;\; = 20944\, cm$$

3. La aceleración centrípeta del punto Q

$$\omega = 1047\, rad/s \qquad a_c = \omega^2 R \qquad a_c = 1047^2 (0,05) = 54810\, m/s^2$$

4. La velocidad tangencial del punto P

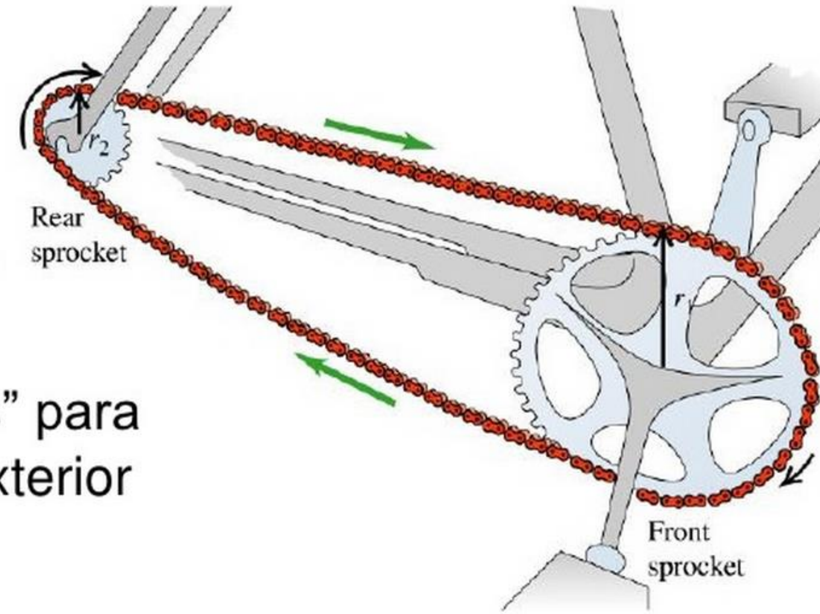
$$v = \omega R \qquad v = 1047\frac{rad}{s}(0,03)m = 31,41\, m/s$$

Autor: Ing. José David Jiménez

Ejemplo

Si el ciclista pedalea a razón de 40 rpm. Y si r_1=15 cm y r_2=5 cm. determine:

1. La velocidad lineal de la cadena
2. La relación entre la aceleración centrípeta de las "ruedas dentadas" para puntos ubicados en el perímetro exterior



La velocidad lineal de la cadena corresponde a la velocidad tangencial de la polea.

$$v = \omega\, r$$

$$\omega = 40\,\frac{rev}{min}\, x\, \frac{2\pi\, rad}{rev}\, x\, \frac{min}{60\, s} = 4{,}18\,\frac{rad}{s}$$

$$v = 4{,}18\,\frac{rad}{s}\, x 15\, cm = 62{,}7\, cm/s$$

$$\frac{a_{c1}}{a_{c2}} = \frac{\dfrac{v_1^2}{r_1}}{\dfrac{v_2^2}{r_2}} = \frac{r_2}{r_1} = 3$$

Autor: Ing. José David Jiménez

Ejemplo

Un disco de 20 cm de radio gira a 33,33 rpm. Hallar la velocidad ; angular, la velocidad lineal y la aceleración centrípeta de:

a) Un punto de su periferia.
b) Un punto situado a 10 cm del centro.
c) ¿Cuánto tiempo tardará el disco en girar 780º?
d) ¿Y en efectuar 15 revoluciones?

La velocidad angular no depende de la distancia que separa al punto considerado del centro del disco. Todos los puntos de un mismo radio del disco describen el mismo ángulo en el mismo tiempo.

Autor: Ing. José David Jiménez

… Continuación

Pasamos la longitud del radio y la velocidad angular a unidades del sistema internacional:

R=0,2 m

$$\omega = 33,3\,\frac{\text{revol}}{1\ \text{min}} \cdot \frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}} \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{revol}} = 3,5\ \text{rad/s}$$

a) Un punto de su periferia.

$$v = \omega \cdot R = 3,5\ \text{rad/s} \cdot 0{,}2\ \text{s} = 0{,}7\ \text{m/s}$$

$$a_C = \frac{V^2}{R} = \frac{0,7^2}{0,2} = 2,5\ \text{m/s}^2$$

b) Un punto situado a 10 cm del centro.

$$v = \omega \cdot R = 3,5\ \text{rad/s} \cdot 0{,}1\ \text{m} = 0{,}35\ \text{m/s}$$

$$a_C = \frac{V^2}{R} = \frac{0,35^2}{0,1} = 1,23\ \text{m/s}^2$$

… Continuación

c) Calculamos las vueltas que da el disco dividiendo los 780° entre 360° que describe en cada vuelta:

$\omega = 33,3\,rpm = 3,5\ \text{rad/s}$ Ya lo conocemos!

$$n^{o}\,vueltas = \frac{780^{o}}{360^{o}} = 2,17\ \text{vueltas}$$

También podemos pasar los 780ª a radianes:

$$780^{o}\,\frac{2\pi rad}{360^{o}} = 4.33\pi rad$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}; \qquad 3.5 rad/s = \frac{4.33\pi\, rad}{\Delta t} \qquad \Delta t = 3.9\,s$$

d) ¿Cuánto tiempo tardará el disco en girar 15 revoluciones?

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}; \qquad \omega = 33,3\,rpm = 3,5\ \text{rad/s}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{15\,rev}{33.3\,rev/\min} = 27\,s$$

Autor: Ing. José David Jiménez

Tarea

El transbordador espacial sigue una órbita circular a 220 km de la superficie terrestre y hace una revolución alrededor de la Tierra cada 89 min. Calcule la rapidez angular, la rapidez y la aceleración.

Radio de la Tierra = 6.4 x 10^6 m

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

Si una partícula se mueve en una trayectoria curva (no necesariamente circular) experimenta una aceleración radial dada por

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

donde *r* es el radio de curvatura en el punto dado.

La aceleración angular es el cambio de la velocidad angular ω con respecto al tiempo.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

Autor: Ing. José David Jiménez

Continuación

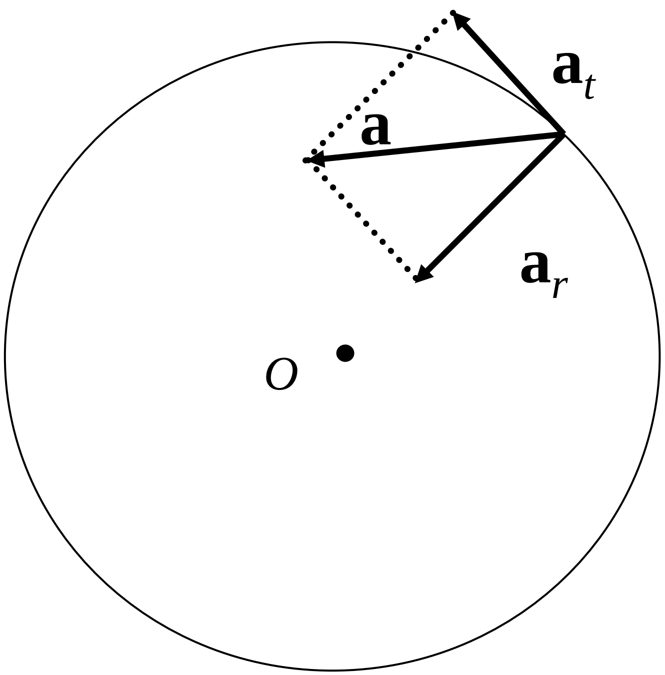
Ya que la rapidez angular cambia con respecto al tiempo, la rapidez tangencial también cambia por lo que aparece también una aceleración producida por esta variación de la rapidez tangencial

$$a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

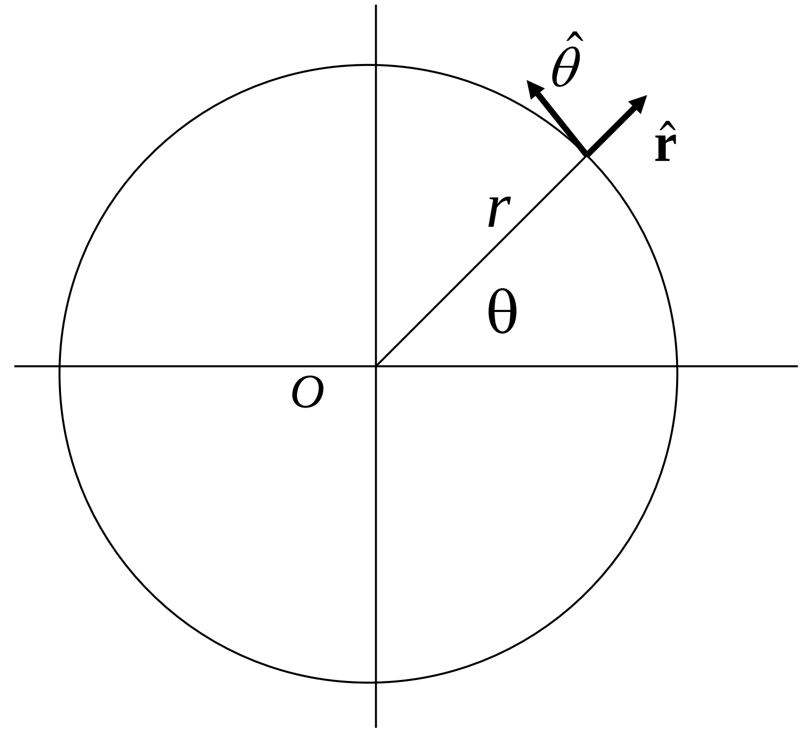
La aceleración total se la determina mediante la suma vectorial de la acelaración radial y la aceleración tangencial

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t = -\frac{v^2}{r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{dv}{dt}\hat{\theta}$$

Aceleración radial y tangencial



Componentes radial y tangencial de la aceleración



Vectores unitarios en coordenadas polares

$\hat{\theta}$ y $\hat{\mathbf{r}}$ son vectores unitarios en la dirección en que crece θ y en la dirección radial.

Autor: Ing. José David Jiménez

Continuación

la magnitud de **a** es:

$$a = \left(a_r^2 + a_t^2\right)^{1/2}$$

Ecuaciones para el Movimiento circular Uniformemente Variado

$$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0{}^2 \pm 2\alpha\Delta\theta$$

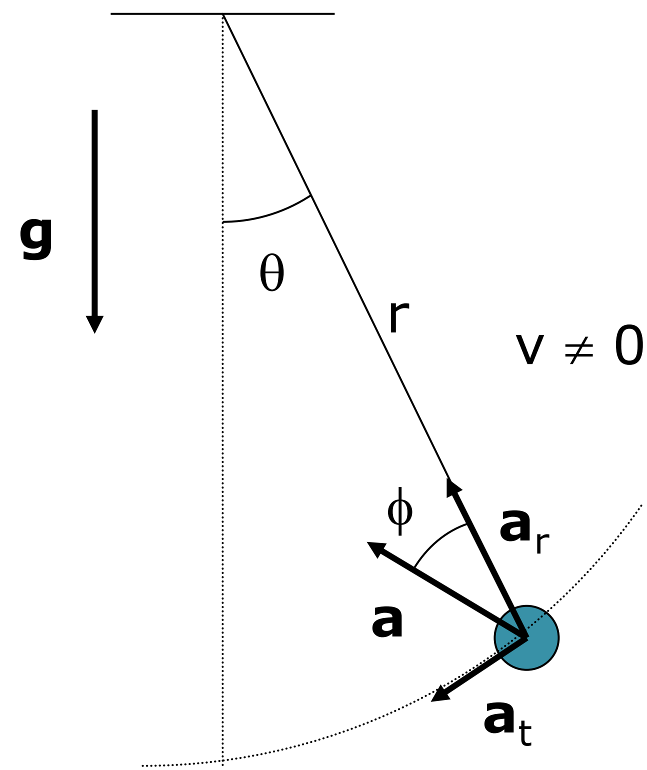
Movimiento de un péndulo

Una pelota unida al extremo de una cuerda de 0.50 m de longitud se balancea en un círculo vertical bajo la influencia de la gravedad. Cuando la cuerda forma un ángulo $\Theta = 20°$ con la vertical, la pelota tiene una rapidez de 1.5 m/s.

a) Encuentre la magnitud de la componente radial de la aceleración en ese instante.

b) La magnitud de la aceleración tangencial cuando $\Theta = 20°$

c) Encuentre la magnitud y dirección de la aceleración total cuando $\Theta = 20°$



Autor: Ing. José David Jiménez