ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA LINEAL • MATG1003

METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE ACTIVO

TRABAJO AUTÓNOMO 1

TÉRMINO I 2019 – 2020

ESTUDIANTE:	PARALELO:
FECHA:	

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

OBJETIVOS: Se espera que un estudiante aprenda a:

1. Plantear el sistema de ecuaciones a partir de la información dada en un problema
2. Representar un sistema en su forma matricial o como matriz aumentada
3. Reducir el sistema de ecuaciones mediante las operaciones de renglón
4. Determinar si el sistema tiene solución, y cuántas soluciones hay (Teorema Rouché-Frobenius o Kronecker-Capelli)
5. Expresar el conjunto solución en modo formal
6. Interpretar el resultado para dar una respuesta definitiva al problema original.

Si tiene alguna dificultad, consulte a su profesor, técnico o ayudante más cercano.

Problemas con énfasis en los **objetivos 2 a 5**:

1.- Determine el conjunto solución de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$a)\ \begin{cases} x+3y+11z=5 \\ 2x+3y+8z=4 \\ -x+2y+3z=-9 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x_1-x_2+x_3-x_4=5 \\ 2x_1-2x_2+x_3+3x_4=2 \\ -x_1+x_2+2x_3+x_4=4 \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x+y+z=3 \\ -x-y+z=-1 \\ 3x+3y+4z=8 \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x+y+2z=9 \\ 3x-2y+7z=20 \\ 2x+7y+3z=27 \end{cases}$$

NOTA: APLIQUE EL TEOREMA DE ROUCHÉ-FROBENIUS (RANGO DE LA MATRIZ) EN CADA CASO

Problemas con énfasis en el **objetivo 6** (interpretación del resultado):

2.- Resolver:

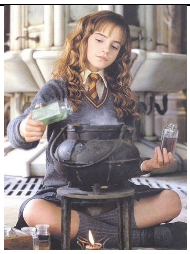
a) Hallar los valores de a, para que el sistema dado sea inconsistente $\begin{cases} 2x+3y+z &= 2 \\ 3x+(a-1)y+6z &= 9 \\ x-y+2z &= 3 \end{cases}$

b) Determine, de ser posible, los valores de las constantes reales a, b y c, para que el sistema dado tenga solución: $\begin{cases} x+y+z &= a \\ x-y+3z &= b \\ 3x+2y-z &= c \end{cases}$

c) Determine, de ser posible, los valores de a, para que el sistema dado tenga infinitas soluciónes: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=2 \\ ax_1+2x_2+2x_3=2 \end{cases}$

Problemas con énfasis en el **objetivo 1** (planteamiento):

3.- En la alacena de Hermione Granger hay 10 libras de flores molidas de *Luparia aconitum* y 14 libras de raíces de *Asphodelus ramosus* en polvo. Una poción de Amortentia, “el filtro de amor más potente que existe”, requiere 3 libras de *Luparia aconitum* y 2 libras de *Asphodelus ramosus*. En cambio, una poción de Felix Felicis para la buena suerte se prepara con 5 libras de *Luparia aconitum* y 10 libras de *Asphodelus ramosus*. ¿Qué cantidades de Amortentia y de Felix Felicis debe preparar Hermione para usar todo el contenido de forma exacta?



Cura y edición: Isaac Mancero Mosquera, 2019.

4.- Tony Stark produce dos tipos de combustible en su complejo industrial secreto. Necesita combustible sólido para la propulsión en vuelo de Iron Man, mientras el combustible líquido es para uso interno al complejo. Para producir 1 tonelada de combustible sólido se requiere 50 minutos de un proceso de mezcla y 40 minutos de refinamiento; mientras que cada tonelada de combustible líquido requiere 40 minutos en la planta mezcladora y 20 minutos en la de refinamiento. Si la planta mezcladora puede funcionar por 30 horas seguidas antes de entrar en pausa, y la refinadora está disponible por 20 horas antes de la pausa, ¿cuántas toneladas de cada tipo de combustible debe producirse para que las plantas operen en toda su capacidad?

5.- Mezio Fufezio, el último rey de *Alba Longa*, ha recolectado suficiente oro, plata y cobre para formar tres lingotes. El primer lingote contiene 200 gr. de oro, 200 gr. de plata y 600 gr. de cobre. El segundo lingote está formado por 100 gr. de oro, 400 gr. de plata y 500 gr. de cobre. El tercero contiene 200 gr. de oro, 400 gr. de plata y 400 gr. de cobre. El rey de Roma ha exigido a la ciudad de *Alba Longa* un tributo para preservar la paz, consistente en un lingote de 150 gr. de oro, 350 gr. de plata y 500 gr de cobre. ¿Cuántos gramos de cada lingote debe tomar Mezio Fufezio para pagar el tributo a Roma y salvar la ciudad de una invasión?

Problemas con énfasis en los objetivos **1 y 6** (planteamiento e interpretación):

6.- El departamento de pesca proporciona tres clases de alimentos para el hábitat donde habitan tres especies de peces. En promedio por semana, cada pez de la especie uno consume 1 unidad de alimento #1, 1 unidad de alimento #2 y 2 unidades de alimento #3. Cada pez de la especie dos consume, por semana, 3 unidades de alimento #1, 4 unidades de alimento #2 y 5 unidades de alimento #3. El consumo semanal de la especie tres es de 2 unidades de alimento #1, 1 unidad de alimento #2 y 5 unidades de alimento #3. Por semana, se vierten en el lago (hábitat) 15000 unidades de alimento #1, 10000 unidades de alimento #2 y 35000 unidades de alimento #3. Suponiendo que se consume la totalidad de los tres alimentos, ¿cuántos individuos de las tres especies pueden coexistir en el lago? ¿Existe solución única?

7.- Cuando no está estudiando álgebra, Dennise se dedica a la compra y venta de acciones. Le comenta a su asesor financiero que todas sus acciones están en tres compañías: Apple, Coca Cola y SpaceX; y que el día de ayer el valor de sus acciones aumentó en \$6000, mientras que hace dos días había caído en \$3500. El asesor recuerda que hace dos días, cada acción de Apple había caído \$10, la acción de Coca Cola disminuyó en \$15 mientras que la de SpaceX aumentó en \$5. Además, el día de ayer hubo un aumento de \$15 por acción de Apple, cada acción de Coca Cola disminuyó en \$5 mientras las acciones de SpaceX volvieron a subir \$10 cada una.

a) **Muestre** que el asesor financiero no tiene información suficiente para calcular el número de acciones que tiene Dennise en cada compañía; justifique su respuesta.
b) Muestre que si le indican que tiene 100 acciones en Coca Cola, entonces podrá calcular el número de acciones en Apple y en SpaceX.

MATRICES Y DETERMINANTES

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

1. Aplicar las propiedades de las operaciones que se realizan con matrices (suma, producto, transposición, inversa)
2. Calcular el determinante de una matriz y conocer sus propiedades

Si alguna de estas tareas se le dificulta, consulte a su profesor, técnico o ayudante más cercano.

Problemas con énfasis en el **objetivo 1**:

8.- Sean A, B, C y X matrices cuadradas de orden n tales que A y B son invertibles y $(AXB)^T + C = I$.

a) Use las operaciones con matrices y sus propiedades para despejar X en términos de las matrices A, B, C e I (no use sistemas de ecuaciones).

b) Según lo que se obtuvo en el literal anterior, determine X si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

9.- Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

a) Determine la matriz $(AB - I_{2x2})^{-1}$ en caso de existir.

b) Utilice solamente el álgebra de matrices para encontrar X tal que:

$$(A^T X)^T B - I_{2\times 2} = X^T$$

10.- Sea $\mathbf{O}_{2\times 2}$ la matriz cero de 2x2, halle dos matrices A, B diferentes de $\mathbf{O}_{2\times 2}$ tales que su producto $AB = \mathbf{O}_{2\times 2}$.

11.- Califique como Verdadero o Falso, cada una de las siguientes expresiones, en caso de ser verdadera demuéstrela, en caso contrario dé un contraejemplo:

a) Sean A y B matrices $n \times n$, si $AB = BA$, entonces $(AB)^n = A^n B^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Si A es una matriz rectangular $m \times n$, entonces $A^T A$, AA^T y $A + A^T$ son matrices simétricas.

c) Sean A y B matrices $n \times n$, si $AB = \mathbf{O}$, para alguna $B \neq \mathbf{O}$, entonces A no puede ser invertible.

d) Si $AA^T = I$, y B es simétrica, entonces ABA^{-1} es simétrica.

e) Sean A, B y C tres matrices $n \times n$, C invertible, tales que $A = C^{-1}BC$, entonces $A^n = C^{-1}B^n C$

Problemas con énfasis en el **objetivo 2**:

12.- Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3b & 3c & 3a \\ h & i & g \\ e-h & f-i & d-g \end{bmatrix}$ tales que $\det(A) = 2$

, entonces

a) Calcular $\det(B)$

b) Encuentre además: $\det(AB)$, $\det(A^{-1})$, $\det((A^T B)^{-1})$ y $\det((AB)^{-1})$.

13.- Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcule los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el determinante de $A - kI$ sea cero, donde I es la matriz identidad 3x3. NOTA: Utilice el método de cofactores.

14.- Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A^T A = I$. Encuentre qué valores posibles tiene el determinante de A.

15.- Califique como Verdadero o Falso cada una de las siguientes expresiones, en caso de ser verdadera demuéstrela, en caso contrario dé un contraejemplo.

a) Si A, B y C tres matrices $n \times n$, C invertible, tales que $A = C^{-1}BC$, entonces $\det(A) = \det(B)$.

b) El determinante de una matriz **triangular inferior 3x3** es siempre el producto de los elementos de su diagonal principal.

c) Sea A una matriz **triangular superior nxn**. Si det(A) = 0 entonces $\exists a_{ii}$ en A, tal que $a_{ii} = 0$ (es decir, existe un elemento de su diagonal principal que es cero).

16.- Calculen el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

NOTA: Utilice operaciones de renglón para hallar la triangular superior, estime el determinante de la matriz original según las operaciones que se usaron para hallar la triangular.

CONSTRUCCIONES

OBJETIVO: Pon a prueba tu creatividad

Si alguna de estas tareas se le dificulta, consulte a su profesor, técnico o ayudante más cercano.

17.- Construya de ser posible:

a) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo que sea inconsistente. Justifique su respuesta.

b) Un sistema de 5 ecuaciones lineales, 3 incógnitas, con infinitas soluciones. Justifique su respuesta.

18.- Construya de ser posible:

a) Una matriz de 3x3 cuyo determinante sea $5\pi / 7$. Justifique su respuesta.

b) Una matriz 4x4 invertible cuyo determinante sea igual a $\log(1)$. Justifique su respuesta.

19.- Construcciones

a) Construya de ser posible un sistema de ecuaciones lineales de 3 ecuaciones lineales, 5 incógnitas con solución única. Justifique su respuesta.

b) Construya de ser posible un sistema de 3 ecuaciones lineales, 5 incógnitas que tenga exactamente 3 variables libres. Justifique su respuesta.