TRABAJO AUTÓNOMO 2

TÉRMINO II 2019 – 2020

ESTUDIANTE: PARALELO:

FECHA:

0.- Ash se encuentra caminando hacia una poké-stop cuando ve a un pidgey en el camino. Decide capturarlo con un lanzamiento curvo, de modo que la trayectoria de la pokéball sigue la ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Suponga que Ash se encuentra en el punto (1, 2) y pidgey en el punto (5, -1); encuentre la ecuación de la trayectoria si se sabe que la pokéball pasó por el punto (3, 3)

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

1. Determinar si una estructura dada es un Espacio Vectorial
2. Determinar si una estructura dada es un Campo Escalar

PROCEDIMIENTOS QUE UN ESTUDIANTE DEBE APLICAR:

a) Demostrar formalmente cuando un enunciado es verdadero
b) Proveer un contraejemplo cuando un enunciado es falso

NOTA: No olvide dar una conclusión final: ¿Es cierto o es falso? ¿Se cumple o no? Si tiene alguna dificultad, consulte a su profesor, técnico o ayudante más cercano.

ESPACIOS VECTORIALES

Problemas con énfasis en los **objetivos 1-a:**

1. Las siguientes estructuras **SÍ SON** espacios vectoriales. Su tarea consiste en probar que se cumplen los 10 axiomas en cada ejercicio, ajustándose al procedimiento formal de demostración. **SUGERENCIA**: probar por lo menos las cerraduras, la existencia del neutro, del inverso, y al menos una de las distributivas.

a) El conjunto de funciones periódicas de variable real con período π, con las operaciones convencionales de suma de funciones y producto de una función por un escalar real, $V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x+\pi) = f(x) \right\}$

b) El siguiente conjunto $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0 \right\}$ junto con las siguientes operaciones no convencionales:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 x_2 \ ,\ y_1 + y_1 + 1)$$
$$\alpha \odot (x,y) = (x^\alpha \ ,\ \alpha y + \alpha - 1)$$

c) El siguiente conjunto de pares ordenados de números complejos:

$$\mathbb{C}^2 = \left\{ (z_1, z_2) \,/\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

con las operaciones convencionales de suma de pares complejos y producto por un escalar complejo:

$$(z_1, z_2) \oplus (w_1, w_2) = (z_1 + w_1 \ ,\ z_2 + w_2)$$
$$k \odot (z_1, z_2) = (kz_1, kz_2)$$

Recuerde: cada elemento del par es un número complejo, con una parte real y una imaginaria; además, el escalar k es también complejo.

Problemas con énfasis en los **objetivos 1-b**:

2.- Las siguientes estructuras **NO SON** espacios vectoriales. Encuentre una propiedad que no se cumple y presente un **contraejemplo** que lo muestre.

a) Los números reales en el intervalo $(-10, 10)$, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales.

b) El conjunto de polinomios $V=\{p\in P_3 \,/\, p(1)=4\}$ con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales.

c) Los números reales positivos $V=\mathbb{R}^+$, con las siguientes operaciones:

$$R_1\oplus R_2=\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]^{-1} \quad y \quad \alpha\odot R=\frac{R}{\alpha}$$

Donde el escalar también es un real positivo.

d) Los números complejos que pertenecen al círculo unitario en el plano complejo:

$$V=\{z\in\mathbb{C} \,/\, \|z\|=1\}$$

con las operaciones convencionales de suma de números complejos y producto por un escalar complejo.

NOTA: Si $z=x+iy$, en el círculo unitario se cumple que $x^2+y^2=1$.

NOTA: Para probar que una estructura no es un espacio vectorial basta encontrar una propiedad que no se cumple; pero si desea puede practicar hallando más de una propiedad que no se cumple.

PREGUNTAS CONCEPTUALES

3.- Califique como Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

a) Sean **u** y **v** dos vectores de un espacio vectorial real $\langle V,\oplus,\odot\rangle$. Si $\boldsymbol{u}\oplus(3\odot \boldsymbol{v})=(2\odot \boldsymbol{v})\oplus \boldsymbol{u}$ entonces **v** es el vector neutro de V.

b) Sea **v** un vector fijo de un espacio vectorial $\langle V,\oplus,\odot\rangle$, entonces el inverso de **v** es único.

c) Sea un espacio vectorial $\langle V,\oplus,\odot\rangle$, si $\alpha\odot \boldsymbol{v}=\boldsymbol{n}$ entonces $\alpha=0$

PROBLEMAS SUMATIVOS

4.- A María José le gustan los gatos, así que ha decidido crear el siguiente conjunto con un único elemento: $V=\{gato\}$; con operaciones $\oplus$ y $\alpha\odot$ definidas como $gato\oplus gato=gato$ y $\alpha\odot gato=gato$, donde el escalar proviene de un campo escalar $\mathbb{K}$. ¿Es $\langle V,\oplus,\odot\rangle$ un espacio vectorial?

5.- La siguiente estructura $<S_{2\times2},\oplus,\odot>$ **sí** es un espacio vectorial real. S_{2x2} es el conjunto de matrices simétricas de 2x2, junto con las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar definidas a continuación:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2-1 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2+1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\otimes\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a-\alpha+1 & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c+\alpha-1 \end{pmatrix}$$

- Demuestre formalmente que se cumple el axioma 7
- Determine el neutro de este espacio
- ¿Cuál es el inverso aditivo de la matriz $v=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?
- Calcule el resultado de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6.- Sea un conjunto no vacío X, y sea V=P(X) el conjunto potencia de X (cuyos elementos son los subconjuntos de X). Se definen las operaciones siguientes:

$$\forall\ A,B \in P(X)\ \ A \oplus B = A \cup B$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall\ A \in P(X)\ \ \alpha \odot A = \begin{cases} \varnothing & ,\ \alpha = 0 \\ A & ,\ \alpha \neq 0 \end{cases}$$

Determine si la estructura $< V, \oplus, \odot >$ es un espacio vectorial.

7.- Sea $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / b > 0\}$ un espacio vectorial, con las operaciones siguientes definidas en V:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (ad + bc,\ bd)$$

$$k \odot (a,b) = (kab^{k-1},\ b^k)$$

- Demuestre formalmente que se cumple la cerradura de la adición
- Demuestre formalmente que se cumple la cerradura de la multiplicación por un escalar
- Encuentre el elemento neutro de la adición
- Halle el inverso de (5, 3)

8.- Sea el conjunto $V = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 / b > 0\}$, pero ahora las operaciones definidas son las siguientes:

$$(a,b) \oplus (c,d) = \left(a + c + 3,\ \frac{bd}{2}\right)$$

$$k \odot (a,b) = (ka + 3k - 3,\ 2b^k 2^{-k})$$

- Demuestre formalmente que se cumple la cerradura de la adición
- Demuestre formalmente que se cumple la cerradura de la multiplicación por un escalar
- Encuentre el elemento neutro de la adición
- Halle el inverso de (5, 3)

CAMPOS ESCALARES (OPCIONAL)

Problemas con énfasis en los **objetivos 2-a:**

8.- Las siguientes estructuras **SÍ** son Campos Escalares. Su tarea consiste en probar que se cumplen todos los axiomas de campo en cada ejercicio, ajustándose al procedimiento formal de demostración:

a) El conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, con las operaciones aritméticas de suma y multiplicación convencionales. NOTA: recuerde que un número real es racional siempre que se pueda expresar como la división entre dos números enteros p y q:

$$\mathbb{Q} = \left\{ a \in \mathbb{R}\ /\ a = \frac{p}{q},\ \text{donde}\ p,q \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) El conjunto $\mathbb{K}=\{\triangle, \square, \lozenge\}$ con las operaciones + y . definidas a continuación:

+	△	□	◊
△	△	□	◊
□	□	◊	△
◊	◊	△	□

y

·	△	□	◊
△	△	△	△
□	△	□	◊
◊	△	◊	□

¿Cuáles son los elementos neutro aditivo y multiplicativo del campo $\mathbb{K}$?

c) El conjunto de números binarios $\mathbb{B}=\{0, 1\}$, con las operaciones + y . definidas a continuación:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

y

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Problemas con énfasis en los **objetivos 2-b:**

9.- Las siguientes estructuras **NO SON** campos escalares. Encuentre una propiedad que no se cumple y presente un **contraejemplo** que lo muestre.

a) El conjunto de números irracionales $\mathbb{I}$, con las operaciones aritméticas de suma y multiplicación convencionales. NOTA: recuerde que un número real es irracional cuando es imposible expresarlo como la división entre dos números enteros p y q.

b) El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, con las operaciones aritméticas de suma y multiplicación convencionales.

c) El intervalo cerrado [-2, 1] de los números reales, con las operaciones aritméticas de suma y multiplicación convencionales.

NOTA: Para probar que una estructura no es un campo escalar basta encontrar una propiedad que no se cumple; pero si desea puede practicar hallando más de una propiedad que no se cumple.

PROBLEMAS SUMATIVOS

10.- Sea el siguiente conjunto $\mathbb{K}=[0, 1]$. Sea p un número fijo tal que $p \in [0, 1]$. Se definen las siguientes operaciones de suma y multiplicación:

$$\forall a,b \in \mathbb{K} \quad a \oplus b = pa + (1-p)b$$

$$\forall a,b \in \mathbb{K} \quad a \otimes b = a^b$$

Determine si la estructura $< \mathbb{K}, \oplus, \otimes >$ es un campo escalar

ꕥ