ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA LINEAL • MATG1003

METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE ACTIVO

TRABAJO AUTÓNOMO 4

TÉRMINO II 2019 – 2020

ESTUDIANTE: PARALELO:
FECHA:

0.- Dayanne se fue a realizar prácticas laborales a Europa. Gastó €30 diarios por hospedaje en Londres, €20 al día en Trieste y €20 por día en Zurich. Por concepto de alimentos gastó €20 por día en Londres, €30 en Trieste y €20 en Zurich. Por conceptos varios gastó €10 diarios en cada una de las ciudades mencionadas. A su regreso, el registro de gastos indicaba un total de €340 por hospedaje, €320 por alimentos y €140 por gastos varios. ¿Cuántos días estuvo Dayanne en cada ciudad?

COMBINACIONES LINEALES Y ESPACIOS GENERADOS

OBJETIVOS.- Habilidades que el estudiante debe desarrollar:

- Dado un conjunto generador, hallar el espacio generado
- Dado un espacio vectorial, hallar un conjunto generador
- Dado un conjunto generador, aumentar vectores a este conjunto de modo que el nuevo conjunto genere exactamente lo mismo del conjunto original
- Dado un conjunto generador de un espacio, identificar cuándo es posible quitar vectores de ese conjunto sin que el mismo deje de generar a dicho espacio.

Si alguno de estos ejercicios se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

1.- Sea $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right\}$ un subconjunto de M_{2x2}.

a) Describa el espacio generado por H [gen(H) o $\mathcal{L}(H)$ según la notación]
b) ¿Es gen(H) un espacio vectorial? Justifique su respuesta
c) De ser posible, encuentre otro conjunto H_2 de M_{2x2} tal que H esté contenido en H_2, y H_2 genere el mismo espacio que H.
d) ¿Puedo quitar algún vector de H y seguir generando el mismo espacio vectorial?

2.- Sea $H=\left\{p(x)\in P_3 \,/\, p(-1)=p'(1)\right\}$ un subconjunto de P_3.

a) Encuentre por lo menos 2 conjuntos generadores del espacio H, tales que sean conjuntos disjuntos
b) Encuentre dos conjuntos generadores del espacio H, tales que uno de ellos esté contenido en el otro.

3.- Sea el siguiente conjunto $H=\left\{1, Cos(x), Sen(x), Cos^2(x), Cos(2x)\right\}$,

a) ¿Es $\mathcal{L}$(H) un subespacio de $C_{\mathbb{R}}^{k}$?
b) Si $f(x)=Sen(x)(1+Sen(x))$ y $g(x)=Sen(x)Cos(x)$, determine si f y g pertenecen a L(H).
c) ¿Es tan(x) un elemento de gen(H)?

INDEPENDENCIA LINEAL

OBJETIVOS.- Habilidades que un estudiante debe desarrollar:

- Determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente (L.I.) o dependiente (L.D.).
- Dado un conjunto L.D., eliminar vectores de este conjunto de modo que el nuevo conjunto genere exactamente lo mismo del conjunto original, pero siendo ahora L.I.
- Dado un conjunto L.I. de un subespacio, identificar cuándo es posible aumentar vectores a ese conjunto sin que el mismo deje de ser L.I.

Si alguno de estos ejercicios se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

4.- Sea el espacio vectorial de las funciones de variable real diferenciables k-veces $C_{\mathbb{R}}^{k}$, responda las siguientes preguntas:

a) Sea conjunto H={1, Cos(x), Cos(2x), $Cos^2(x)$, Sen(2x)}, ¿Es $\mathcal{L}$(H) un subespacio de $C_{\mathbb{R}}^{k}$?

b) Si $f(x)=Sen(x)(1+Sen(x))$ y $g(x)=Sen(x)Cos(x)$, determine si f y g pertenecen a $\mathcal{L}$(H).

c) ¿Es H un conjunto LI?

d) ¿Es el subconjunto {Cos(x), Sen(x), Tan(x)} de $C_{\mathbb{R}}^{k}$ L.I?

5.- Con relación al conjunto H_1 ={$1-x-x^2$, $1+x+x^2$, $1-x^2$, $1+x^2$} en P_2,

a) Determine si es H_1 es LI.

b) Si no es LI, hallar un subconjunto $H_2 \subset H_1$ que sea LI.

c) Si la cardinalidad de H_2 es menor que 3, entonces construya un nuevo conjunto que contenga exactamente 3 elementos, que incluya a los elementos de H_2, y sea LI.

6.- Con relación al conjunto $W_1=\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ en M_{2x2}

a) Determine si es W_1 es L.I.

b) Si no es L.I., hallar un subconjunto $W_2 \subset W_1$ que sea L.I.

c) Si la cardinalidad de W_2 es menor que 4, entonces construya un nuevo conjunto que contenga exactamente 4 elementos, que incluya a los elementos de W_2, y sea L.I.

TEMAS CONCEPTUALES:

7.- A Nicole le gusta la pintura, así que ha comprado 3 tipos de pigmentos para artistas, el conjunto de colores H ={amarillo, azul, rojo}. Si se considera su mezcla como una combinación lineal de los mismos, califique como Verdadero o Falso las siguientes afirmaciones, justificando su respuesta:

a) El color naranja pertenece a gen(H)

b) El conjunto {amarillo, azul, verde, rojo} es linealmente independiente

c) El conjunto {azul, rojo verde} es linealmente dependiente

d) El espacio gen{amarillo, azul, naranja, verde} es igual al espacio gen{amarillo, azul, naranja}

8.- Califique como Verdadero o Falso (Justifique su respuesta).

a) Sea V un espacio vectorial, y sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto L.I., entonces $\{v_1 - v_2 + v_4,\ v_2 + v_3,\ v_1 + v_3 + v_4,\ v_4\}$ es también L.I.

b) Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un conjunto L.I., en un espacio vectorial V, entonces el conjunto $\{v_1 + v_2 + v_3,\ v_1 + v_3 + v_4,\ v_1 + 2v_2 + v_3 - v_4\}$ es también L.I.

PREGUNTAS SUMATIVAS:

9.- Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 & 9 & 9 \\ 1 & -4 & -1 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Si tomamos cada columna como un vector de $\mathbb{R}^4$, hallar el espacio generado por las columnas de A.
b) ¿Son las columnas de A L.I.?
c) Si tomamos cada fila como un vector de $\mathbb{R}^5$, hallar el espacio generado por las filas de A.
d) ¿Son las filas de A L.I?

10.- Sea el siguiente conjunto en P_3:
$W=\left\{1+x+x^2+x^3,\ 2-x+5x^2-4x^3,\ 2+x+ax^2,\ 1-x+ax^2+bx^3\right\}$
De ser posible, determine los valores de a y b para que

a) W genere todo P_3.
b) W sea L.D.
c) W sea L.I. pero no genere todo P_3

11.- Sea el conjunto $H=\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -7 \end{pmatrix}\right\}$ en M_{2x2},

e) Hallar el espacio generado por H.
f) ¿Son los elementos de H L.I?
g) Encuentre un subconjunto de H, que sea L.I. y genere lo mismo que genera H
h) Hallar un conjunto W que contenga a H (o sea, $H\subset W$) tal que gen(W) = gen(H)

9.- Sea el conjunto de matrices simétricas S_{2x2} con las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar definidas a continuación:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+a_2-1 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2+1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\otimes\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a-\alpha+1 & \alpha b \\ \alpha b & \alpha c+\alpha-1 \end{pmatrix}$$

a) Determine si $\left\langle S_{2x2},\oplus,\alpha\otimes\right\rangle$ es un espacio vectorial.
b) Hallar todas las matrices simétricas que se pueden escribir como una combinación lineal de los vectores del conjunto H, usando las operaciones no convencionales dadas.

$$H=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

c) ¿Es $\mathcal{L}(H)$ un subespacio de $\left\langle S_{2x2},\oplus,\alpha\otimes\right\rangle$? Justifique su respuesta.
d) ¿Es H un conjunto L.I.? Justifique su respuesta.

TEMA DE INVESTIGACIÓN:

12.- El WRONSKIANO.- El ***wronskiano*** permite analizar la independencia lineal de un conjunto de funciones. Investigue acerca del ***wronskiano***, y utilice este teorema para comprobar si los siguientes conjuntos de funciones son linealmente independientes.

a) $\{e^x,\ e^{3x}\}$ b) $\{1,\ Cos(x),\ Sen(x)\}$ c) $\{x,\ x(1-x),\ x^2\}$