ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA LINEAL • MATG1003

METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE ACTIVO

TRABAJO AUTÓNOMO

TÉRMINO II 2019 – 2020

0.- En su tiempo libre, Sofía prepara cakes de vainilla y panes de banano para vender en la universidad; productos que son muy populares. Rommy compra 5 cakes de vainilla y 7 panes de banano, pagando en total \$31. Andrea compra 10 cakes de vainilla y 14 panes de banano, pagando por ellos \$62; mientras Daniela compra un cake de vainilla y 3 panes de banano, pagando en total \$11. ¿Cuál es el precio por unidad del cake de vainilla y del pan de banano?

TRANSFORMACIONES LINEALES – PARTE I

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Determinar cuándo una transformación es lineal
- Aplicar la regla de correspondencia para hallar la transformada de un vector
- Saber utilizar los teoremas relacionados para resolver eficientemente un problema

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

1.- Las siguientes funciones **no son** transformaciones lineales. Encuentre un contraejemplo que muestre que no lo son.

a) La función $T1: V \to W$, donde $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \;/\; a,b,c,d \in \mathrm{R}^+ \right\}$ y $W=\mathbb{R}^4$, y la regla de correspondencia es $T1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(a) \\ \ln(b) \\ \ln(c) \\ \ln(d) \end{pmatrix}$.

b) La función T: $M_{2X2} \to \mathrm{R}$ tal que T(A) = det(A), donde A es una matriz de M_{2X2}.

c) La función T: $S_{2X2} \to P_2$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = (-3a-5b+5)x^2 + (8b+6c+3)x + (9c+a-8)$.

2.- Las siguientes funciones **sí son** transformaciones lineales. Demuestre formalmente que lo son.

a) La función $T: P_2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a+ib \\ c-ia \end{pmatrix}$

b) La función $T: P_2 \to M_{2\times 2}$ tal que $T(p(x)) = \begin{pmatrix} 6\int_0^1 p(x)\,dx & p(1) \\ p(0) & p'(0) \end{pmatrix}$

c) La función $T: M_{5\times 5} \to M_{5\times 5}$ tal que $\forall A \in M_{5\times 5}$ $T(A) = A - A^T$.

3.- Determinar si las siguientes funciones son transformacines lineales.

a) La función T: $S_{2X2} \to \mathrm{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b-2c \\ 4a+8b+6c \\ 10a+10b+9c \end{pmatrix}$

b) La función $T: C^2_{[a,b]} \to C^2_{[a,b]}$ tal que $T[f(x)] = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$

c) La función T: $M_{2X2} \to \mathbb{R}$ tal que T(A) = tr(A^T)

OPERACIONES NO CONVENCIONALES

4.- Determine si las siguientes transformaciones son lineales:

a) Sea $\langle V, \oplus, \odot \rangle$ el espacio vectorial dado por $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \ / \ a,b,c,d \in \mathrm{R}^+ \right\}$ con las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidos como:

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 \\ c1 & d1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a2 & b2 \\ c2 & d2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1.a2 & b1.b2 \\ c1.c2 & d1.d2 \end{pmatrix} \text{ y } \alpha \odot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\alpha & b^\alpha \\ c^\alpha & d^\alpha \end{pmatrix}$$

mientras que $W = \mathbb{R}^4$ con las operaciones convencionales.
Determine si son lineales $T1: V \to W$ y $T2: W \to V$ cuyas reglas de correspondencia son:

$$T1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(a) \\ \ln(b) \\ \ln(c) \\ \ln(d) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ e^z & e^w \end{pmatrix}.$$

b) Sea $< V, \oplus, \odot >$ el espacio vectorial dado por $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones de suma y producto por un escalar definidos como:

$$\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1+a2-5 \\ b1+b2+3 \\ c1+c2+8 \end{pmatrix} \text{ y } \alpha \odot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a-5\alpha+5 \\ \alpha.b+3\alpha-3 \\ \alpha.c+8\alpha-8 \end{pmatrix}$$

mientras que $W = S_{2\times 2}$ con las operaciones convencionales.
Determine si es lineal $T: W \to V$, cuya regla de correspondencia es:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b-2c+5 \\ 4a+8b+6c-3 \\ 10a+10b+9c-8 \end{pmatrix}$$

5.- A continuación se presenta algunas transformaciones usadas extensivamente en ingeniería. **Escoja un par** y pruebe que son lineales:

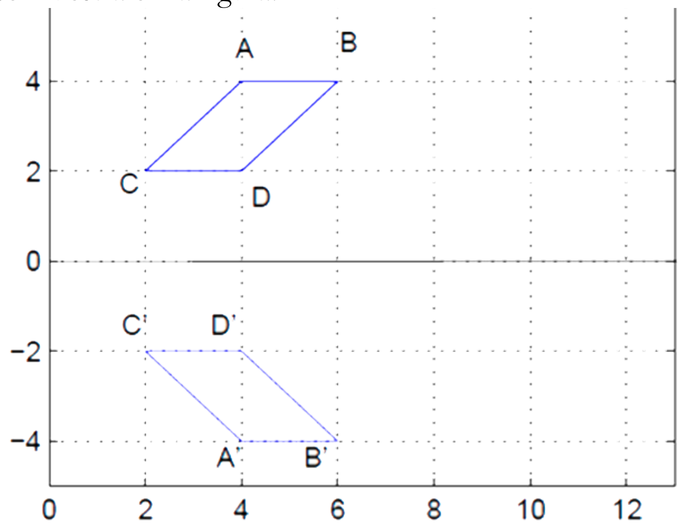
a) $\mathcal{F}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$, transformada de Fourier de una función f(x)

b) $\mathcal{W}[f(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{s}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^* \left(\dfrac{x-\tau}{s} \right) dx$, transformada wavelet de una función f(x)

c) $\mathcal{L}[f(t)] = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t) e^{-st} dt$, transformada de Laplace de f(t)

d) $\mathcal{H}[s(x)] = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{s(x)}{t-x} dx$, transformada de Hilbert de una función s(x)

6.- Sean R y R' los conjuntos de vectores cuyas coordenadas se asocian a los rombos ABCD y A'B'C'D' respectivamente, según se muestra en la figura:



Se define $T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ como $T(x,y) = (-y, 2x)$. Grafique el lugar geométrico R" definido como R"=T(R'). Encuentre además la regla de correspondencia de la transformación que mapea los elementos de R en los elementos de R".

NÚCLEO IMAGEN

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Encontrar el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
- Determinar el rango y la nulidad de una transformación.

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

7.- Encontrar Núcleo, Imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T: P_2 \to P_3$ tal que $T(p(x)) = x^2 p'(x)$

b) $T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ tal que $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} - \mathbf{A}$, $\forall \mathbf{A} \in M_{2\times 2}$.

c) $T: R^2 \to R^2$ tal que T efectúa la proyección vectorial de un vector **v**=(x,y) en $\mathbb{R}^2$, sobre la recta dada por la ecuación $\ell: y = 3x$