ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA LINEAL • MATG1003

METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE ACTIVO

TRABAJO AUTÓNOMO

TÉRMINO II 2019 – 2020

ESTUDIANTE:

0.- Cuando Xavier apruebe Álgebra Lineal, podrá dedicarse finalmente a la joyería. Le toma Δt_1 horas de trabajo hacer un anillo, Δt_2 horas un brazalete, Δt_3 horas una cadena y Δt_4 horas un collar. Karla quiere dos brazaletes con un teorema grabado en oro, Gabriela desea tres anillos y un collar, Victoria quiere dos unidades de cada prenda, mientras Doménica desea un anillo y dos cadenas. A Xavier le toma cinco horas elaborar el pedido de Gabriela, diez horas el de Victoria, tres horas el de Karla y dos horas el de Doménica ¿Cuánto es el tiempo de elaboración por unidad de cada prenda?

TRANSFORMACIONES LINEALES – PARTE II

NÚCLEO & IMAGEN

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Encontrar el núcleo y la imagen de una transformación lineal.
- Determinar el rango y la nulidad de una transformación.
- Describir propiedades tales como inyectividad, sobreyectividad, biyectividad en una transformación.

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

1.- Encontrar Núcleo, Imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales:

a) $T: P_2 \to P_3$ tal que $T(p(x)) = x^2 p'(x)$

b) $T: M_{2x2} \to M_{2x2}$ tal que $T(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} - \mathbf{A}$, $\forall \mathbf{A} \in M_{2\times 2}$.

c) $T: R^2 \to R^2$ tal que T efectúa la proyección vectorial de un vector **v**=(x,y) en $\mathbb{R}^2$, sobre la recta dada por la ecuación $\ell: y = 3x$

2.- Sea la siguiente transformación lineal $T: C_{\mathbb{R}}^2 \to C_{\mathbb{R}}^2$, tal que $T[f(x)] = af''(x) + bf'(x) + cf(x)$,

a) Hallar $Nu(T)$ cuando a=0 y b=c=1.

b) Hallar $Nu(T)$ cuando a=b=1 y c=0.

NOTA: Requiere conocimientos de cálculo. $C_{\mathbb{R}}^2$ simboliza el espacio de funciones de variable real, continuas y dos veces diferenciables

3.- Construya *de ser posible*:

a) Una transformación lineal inyectiva pero no sobreyectiva

b) Una transformación lineal sobreyectiva pero no inyectiva

c) Una transformación lineal ni inyectiva ni sobreyectiva

d) Una transformación lineal inyectiva y sobreyectiva

NOTA: el tutorial incluido más adelante podría ser útil

MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Dada la regla de correspondencia, determinar la matriz de transformación.
- Dada una matriz de transformación, determinar la regla de correspondencia.

Cura y edición: Isaac Mancero Mosquera, 2019.

- Utilizar la matriz de transformación para el cálculo de la transformada de un vector.

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

4.- Sea el espacio $V = gen\left\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\right\}$ y sea $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T[f] = f'(x)$. Encuentre una representación matricial de T.

5.- Sea $T: S_{2\times2} \to P_2$, tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ representa a T con respecto a las bases:

$\beta 1 = \left\{1, 1+x, 1+x^2\right\}$ y $\beta 2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$.

a) Hallar la regla de correspondencia de T
b) Hallar las matrices que representan a T y T^{-1} con respecto a las bases canónicas.

6.- Sea $T: P_2 \to M_{2\times2}$ tal que:

$$T[p(x)] = \begin{pmatrix} p(0) & p'(-1) \\ 2p(1) & p(0)+p(1) \end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz que representa a T con respecto a las bases $\beta 1 = \left\{1, 1+x, 1+x+x^2\right\}$ y $\beta 2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ de P_2 y $M_{2\times2}$, respectivamente.
b) Si $[p]_{\beta 1} = (1,1,-1)$, hallar $p(x)$ y $T[p(x)]$.

7.- Sean $T_1: \mathbb{R}^3 \to P_2$ y $T_2: P_2 \to S_{2\times2}$ dos transformaciones lineales tales que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ representa a T1 con respecto a las bases canónicas, mientras que $T_2[a_2x^2 + a_1x + a_0] = \begin{pmatrix} a_2 + a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 - a_0 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de la composición C_{T2oT1}, con respecto a las bases canónicas.

8.- Sea $T: P_3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ representa a T con respecto a las bases $\beta_1 = \left\{1-x^3, 1-x, 1-x^2, 1\right\}$ y $\beta 2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, encuentre la matriz que representa a T con respecto a las bases $\beta_3 = \left\{x^3+x^2, 1-x, x^3-x^2, 1+x\right\}$ y $\beta 4 = \left\{, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Hallar también la matriz que representa a T con respecto a las bases canónicas.

COMPOSICIÓN E INVERSA

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Determinar si una composición de transformaciones puede efectuarse.
- Determinar si una transformación lineal es invertible.
- Determinar la composición y/o inversa en los casos en que sea posible.

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

9.- Sean $T_1: P_2 \to M_{2\times2}$ y $T_2: M_{2\times2} \to \mathrm{R}^3$ dos transformaciones lineales tales que:

$$T_1(p(x)) = \begin{pmatrix} 6\int_0^1 p(x)\,dx & p(1) \\ p(0) & p(0) \end{pmatrix},\ \text{y}\ T_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b-c \\ a+b-c \\ 2a+2b-c \end{pmatrix}.$$ Hallar de ser posible $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$.

10.- Sean $T_1 : S_{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ y $T_2 : P_2 \to \mathbb{R}^3$ dos transformaciones lineales tales que:

$$T_1\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 2a-b+2c \\ a+b+2c \end{pmatrix},\ \text{y}\ T_2(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(0) \\ p(-1) \end{pmatrix}.$$ Hallar de ser posible $T_1^{-1} \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1^{-1}$.

11.- Sea H={v_1, v_2, v_3, v_4} una base de V y sea $T : V \to V$ una transformación lineal, tal que $T(v_1)=v_2$, $T(v_2)=v_3$, $T(v_3)=v_4$ y $T(v_4)=\mathbf{n_V}$. Determine el Núcleo de T^4. NOTA: $T^4(v) = (T \circ T \circ T \circ T)(v)$.

12.- Sea $T:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ una transformación lineal tal $T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{z_1} + z_2 \\ \overline{z_2} + z_1 \end{pmatrix}$ donde $\mathbb{C}^2$ es el espacio vectorial de pares ordenados complejos. Pruebe que $\forall v \in \mathbb{C}^2\ (T \circ T)(v) = 2\overline{T(v)}$.
NOTA: $\overline{z}$ denota el complejo conjugado de z

TEMAS CONCEPTUALES

13.- Califique como verdadero o falso (justifique su respuesta).

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal:

a) Si v no es el neutro de V, entonces T(v) no es el neutro de W.
b) La transformación de $v_1 - v_2$ es $T(v_1) - T(v_2)$.
c) Si V y W son espacios isomorfos, T puede ser sobreyectiva pero no inyectiva.
d) Si $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ es L.I. entonces $\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ es L.I.
e) Si $\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ genera a V, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ genera a W.
f) Si dim(V)>dim(W) y $\{v_1, v_2 \ldots v_n\}$ generan a V, entonces $\{T(v_1), T(v_2), \ldots T(v_n)\}$ genera W.

14.- Sean V y W dos espacios vectoriales. Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Sea **v** un vector de V, y **w** un vector de W tales que T(**v**)=**w**. Sea **x** otro vector de V, pruebe que T(**x**)=**w** si y solo si **x**=**v**+**y**, donde **y** pertenece al núcleo de T.

TUTORIAL: DETERMINACIÓN Y CONSTRUCCIONES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Determinar la regla de correspondencia de una transformación si se conoce las transformadas de un conjunto base.
- Dada una matriz de transformación, determinar la regla de correspondencia.
- Aprender a construir transformaciones según las características dadas.

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

15.- Una transformación puede determinarse si se sabe como afecta a un conjunto base. Por ejemplo: Sea B={x^2-1, x^2+1, $x-1$} es una base de P_2, determine la *regla de correspondencia* de la transformación T de P_2 a $\mathbb{R}^3$, si se sabe que:

$T(x^2 - 1) = (1, 2, 0)$
$T(x^2+1) = (0, 0, 0)$

T(x –1) = (0, –1 , –1)

La regla de correspondencia se encuentra cuando se conoce la transformación de un vector cualquiera del espacio de partida.

En este caso, T(ax^2+bx+c) = ¿?

Entonces, puesto que se sabe la transformación de una base del espacio de partida, hay que escribir el vector cualquiera como una combinación lineal de la base:

$$ax^2+bx+c=\alpha_1(x^2-1)+\alpha_2(x^2+1)+\alpha_3(x-1)$$

y resolver para obtener los coeficientes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ -1 & 1 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[f2\leftrightarrow f3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{f2+f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & -1 & c+a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{f2+f3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 & c+a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

Se puede concluir que $\alpha_3=c$, $\alpha_2=(c+a+b)/2$, y $\alpha_1=a-\alpha_2=a-(c+a+b)/2=(a-c-b)/2$.

Luego, transformando la combinación a ambos lados:

$$T\ [ax^2+bx+c]=T\ [\ \alpha_1(x^2-1)+\alpha_2(x^2+1)+\alpha_3(x-1)]$$

Aplicando linealidad en el lado derecho:

$$T\ [ax^2+bx+c]=\alpha_1 T\ [\ (x^2-1)]+\alpha_2 T\ [(x^2+1)]+\alpha_3 T\ [(x-1)]$$

Podemos reemplazar los coeficientes que hallamos del sistema lineal y las transformaciones de los vectores que son datos del problema:

$$T\ [ax^2+bx+c]=\left(\frac{a-c-b}{2}\right)T\ [\ (x^2-1)]+\left(\frac{a+c+b}{2}\right)T\ [(x^2+1)]+(c)T\ [(x-1)]$$

$$=\left(\frac{a-c-b}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\left(\frac{a+c+b}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(a-c-b)/2\\a-b-2c\\-c\end{pmatrix}$$

Siendo esta última expresión la regla de correspondencia:

$$T\ [ax^2+bx+c]=\begin{pmatrix}(a-c-b)/2\\a-b-2c\\-c\end{pmatrix}$$

Esto fue posible porque se conocía como T afectaba a un conjunto base. Muchas veces no se tiene el conjunto base, o no está completo. En ese caso, hay libertad para construir una base según el caso. En otras ocasiones, se proporcionan datos distintos de modo que se construye una base siguiendo los requerimientos dados.

A continuación se presenta una serie de ejercicios de este tipo.

a) Sea $T:R^2\to R^3$ una transformación lineal.

Si se conoce que $T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\-6\\5\end{pmatrix}$ calcule $T\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$

b) Una transformación lineal $T:\mathbb{R}^4\to M_{2\times 2}$ tal que:

$$\operatorname{Im}(T)=\left\{\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}\in M_{2\times2}\ /\ \begin{array}{r}x+y-z=0\\ y-z+2w=0\end{array}\right\}$$

c) Una transformación lineal $T:P_2\to\mathbb{R}^3$ tal que:

$$Nu(T)=\left\{ax^2+bx+c\in P_2\ /\ 2a+3b-c=0\right\}$$

d) De ser posible, halle un isomorfismo $T:\mathbb{R}^3 \to V$, donde: $V = gen\left\{Sen^2(x), Sen(2x), Cos^2(x), Cos(2x)\right\}$

e) Sea $T: P_3 \to P_3$ una transformación lineal tal que:

- $T(x - x^3) = 1 + x^2$
- $T(1 - x^2) = x + x^3$

Hallar la regla de correspondencia de T si se sabe además que $Nu(T) = Im(T)$.

f) Construir de ser posible una transformación lineal de P_3 en S_{2x2} tal que:

- $x^3 - x^2 - x - 1 \in Nu(T)$ • $\rho(T) < 3$ • $T(x-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ • $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(T)$

g) Sea $T: P_2 \to P_2$ una transformación lineal tal que

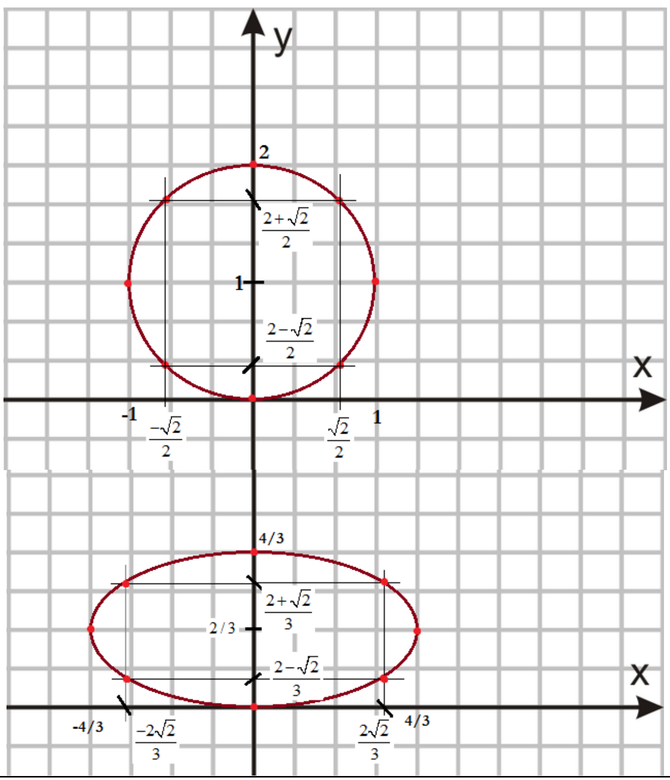
$$[T(p(x))]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} [p(x)]_{B1}$$

donde $B_1 = \left\{x^2, x+1, x-1\right\}$. Hallar la regla de correspondencia de T

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

16.- Una pelota de goma de radio 1 cae. Instantes antes del impacto, la pelota aun conserva su forma esférica. Instantes luego del impacto, la pelota se ha deformado según se muestra en el gráfico, contrayéndose en sus coordenadas "y", pero expandiéndose en sus coordenadas "x".

a) Encuentre la regla de correspondencia de una transformación T que efectúe este tipo de modificación, ayudándose con los puntos mostrados.

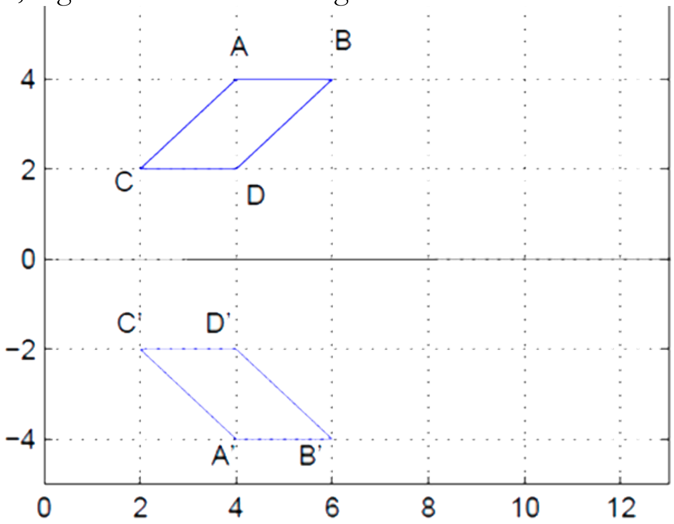


17.- Sea $T: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ una transformación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 7y - 6x \end{pmatrix}$$

Y considere el paralelogramo P con vértices A(0,0), B(1,2), C(2,5) y D(1,3). En el plano cartesiano, grafique el paralelogramo P y su imagen después de la transformación T, T(P). ¿Es T(P) también un paralelogramo?

18.- Sean R y R' los conjuntos de vectores cuyas coordenadas se asocian a los rombos ABCD y A'B'C'D' respectivamente, según se muestra en la figura:



Se define $T:\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ como $T(x,y)=(-y,2x)$. Grafique el lugar geométrico R" definido como R"=T(R'). Encuentre además la regla de correspondencia de la transformación que mapea los elementos de R en los elementos de R".