ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL
FACULTAD DE CIENCIA NATURALES Y MATEMÁTICAS
ÁLGEBRA LINEAL • MATG1003

METODOLOGÍA DE APRENDIZAJE ACTIVO

TRABAJO AUTÓNOMO 11

TÉRMINO I 2019 – 2020

ESTUDIANTE:

0.- Durante el periodo navideño, el grupo de la Mesa 3 se intercambian mutuamente regalos. Antonella decide comprar tres regalos destinados a Salma, Danilo y Santiago. Antonella pagó en total 110 euros por los tres regalos, luego de haber obtenido un descuento del 10% sobre el precio total. Además, el precio del regalo de Santiago es el doble que el del regalo de Salma; y el regalo de Santiago es 20 euros más caro que el regalo de Danilo. ¿Cuánto era el precio de cada regalo antes del descuento obtenido?

OBJETIVOS: Se espera que el estudiante aprenda a:

- Determinar si una función dada es un producto interno o no
- Calcular norma de un vector y a reconocer sus propiedades; así como calcular la distancia entre dos vectores y construir vectores unitarios.
- Calcular el ángulo entre dos vectores y reconocer cuándo hay *ortogonalidad* o *perpendicularidad* (ángulo de 90° o $\pi/2$ radianes).
- Realizar proyecciones escalares y vectoriales ("de un vector sobre otro vector").
- Realizar la ortonormalización de bases, mediante el algoritmo de Gram-Schmidt
- Hallar el complemento ortogonal de un subespacio.
- Realizar la proyección ortogonal ("de un vector sobre un subespacio").
- Aplicar el teorema de Aproximación de la Norma.

NOTA: Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

PRODUCTO INTERNO

1.- Sea el espacio vectorial P_2, y sea la función $f: P_2 \times P_2 \to R$ tal que $\forall p,q \in P_2$

$$f(p,q) = \langle p,q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

a) Explique por qué f no cumple los requerimientos necesarios para ser considerado un producto interno en P_2.

b) Explique por qué, si modificamos f con la siguiente regla de correspondencia:

$$\forall p,q \in P_2 \quad f(p,q) = \langle p,q \rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1) + p(0)q(0)$$

entonces sí puede ser considerado un producto interno en P_2.

c) Determine si la siguiente función f es producto interno, $f: P_2 \times P_2 \to \mathrm{R}$, tal que:

$$f(p_1(x),\ \mathrm{p}_2(x)) = \int_0^1 [p_1(x) + p_2(x)]\,dx$$

2.- En el conjunto de números complejos se define la siguiente función $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$:

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \langle z_1,\ z_2 \rangle = z_1 \overline{z}_2$$

Donde $\overline{z}_2$ representa el conjugado de z_2. Determine si se trata de un producto interno complejo.

Norma y Distancia

3.- Calcule la norma de los siguientes polinomios de P_2:

$$p(x) = 2 - x + 2x^2 \quad \text{y} \quad q(x) = 1 - 3x^2 .$$

a) Usando el producto interno convencional de P_2

b) Usando el producto interno dado en el literal b) del problema 1.

4.- Sea el espacio vectorial funcional $V = C_{[-\pi,\pi]}$, donde se ha definido el producto interno: $\left\langle f(x), g(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Calcule la norma de los siguientes vectores (funciones):

función :	• $f(x) = cos(x)$	• $f(x) = cos(2x)$	• $f(x) = sen(3x)$	• $f(x) = 1$	• $f(x) = sen(x)$
norma :					

SUGERENCIA: Con excepción de f(x)=1, se puede resolver para una función general Cos(nx), o Sen(mx), donde n y m son números enteros.

5.- Califique como verdadero o falso el siguiente enunciado. Si es verdadero, demuéstrelo; si es falso dé un contraejemplo:

«Sea V un espacio euclidiano, y sea **v** un vector de V. Si **v** es unitario con el producto interno estándar de V, entonces **v** es unitario con cualquier otro producto interno en V»

6.- ¿Cómo convertiría los vectores dados en el problema 4 en vectores unitarios?

vector :	• $f(x) = \text{Cos}(x)$	• $f(x) = \text{Cos}(2x)$	• $f(x) = Sen(3x)$	• $f(x) = 1$	• $f(x) = Sen(x)$
vector unitario :					

7.- Usando el producto interno convencional:

a) En el espacio M_{2X4}, calcule la distancia entre las matrices A y B, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) En el espacio P_2, calcule la distancia entre los polinomios p y q, donde:

$$p(x) = 2 - x + 2x^2 \quad \text{y} \quad q(x) = 1 - 3x^2 .$$

Ángulo y Ortogonalidad

8.- Usando el producto interno convencional:

a) En el espacio M_{2X4}, calcule el ángulo entre las dos matrices dadas en el problema 7-a.

b) En el espacio P_2, calcule el ángulo entre los dos polinomios dados en el problema 7-b.

9.- Sean el espacio vectorial funcional $V = C_{[-\pi,\pi]}$, donde se ha definido el producto interno:

$$\left\langle f(x), g(x) \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx ,$$

a) Muestre que los conjuntos $H = \{1, Cos(x), Cos(2x)\}$ y $W = \{1, Sen(x), Sen(2x)\}$ son ortogonales.

b) Muestre que, en general, un conjunto de la forma:

$$\{1, Cos(x), Cos(2x), \ldots Cos(mx), \ldots Sen(x), Sen(2x), \ldots Sen(nx)\}$$

cumple con las condiciones para ser considerado ortogonal.

10.- Determine si el ángulo entre los siguientes vectores de R^5 es 90 grados:

$v_1 = (1, 2, 4, -3, 1/7)$ y $v_2 = (-4, -2, -1, 1, 7)$

11.- Demuestre la **Ley del Coseno** generalizada: « Sea V un espacio vectorial euclidiano, y sean $v_1, v_2 \in V$, entonces $\|v_1 - v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - 2\|v_1\|.\|v_2\| Cos(\theta)$; donde θ es el ángulo entre los vectores v_1 y v_2 ».

Proyección Escalar y Proyección Vectorial

12.- Usando el producto interno convencional:

a) En el espacio M_{2X4}, calcule la proyecciones escalares $Proy_B A$ y $Proy_A B$, con las dos matrices dadas en el problema 7-a.

b) En el espacio P_2, calcule la proyecciones escalares $Proy_q p$ y $Proy_p q$, con los dos polinomios dados en el problema 7-b.

c) Calcule también las proyecciones vectoriales $\overrightarrow{Proy_B A}$ y $\overrightarrow{Proy_p q}$.

13.- Sea el espacio $S_{2\times2}$ y sea $\varphi : S_{2\times2} \times S_{2\times2} \to R$ un producto interno tal que:

$$\varphi\left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2a_1a_2 + b_1b_2 + 2c_1c_2$$

a) Hallar un vector unitario con la misma dirección y sentido de $v1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Hallar la proyección escalar y la proyección vectorial de $v2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sobre v_1.

c) Encuentre el ángulo y la distancia entre $2v_2$ y $-v_1$.

Ortonormalización de Gram-Schmidt

14.- Encuentre una base ortonormal de los siguientes subespacios vectoriales:

a) $H = \{p \in P_3 \,/\, p(1) = 0 \;\wedge\; p'(-1) = 0\}$

b) $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times2} \,/\, a - 2b + c - 2d \right\}$

15.- Sea $V = R^4$ y sea el siguiente subespacio $H = \left\{ (a, b, c, d) \in R^3 \,/\, \begin{matrix} a+b+c-3d=0 \\ \wedge\; b+2c-d=0 \end{matrix} \right\}$

a) Halle una base ortonormal de H

b) Halle una base ortonormal de $H^\perp$

c) De ser posible, halle una base ortonormal de R^4 que contenga una base de H y una base de $H^\perp$.

d) Si $v = (1, \; -1, \; 2, \; -1)$, hallar las coordenadas de v, respecto a la base del literal c).

16.- Sea $S = gen\{1, \; 1 + x^2, \; x^3\}$ un subespacio de P_3 utilizando el siguiente producto interno en P_3:

$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

a) Halle una base de S, B, que sea ortonormal.

b) Se sabe que el vector $r(x) = -x^2(x-2) \in S$, encuentre $[r(x)]_B$

COMPLEMENTO ORTOGONAL Y PROYECCIÓN ORTOGONAL

17.- Sea el espacio vectorial real $V = M_{2\times 2}$, con el producto interno real $\forall\, A, B \in V$ $\langle A, B\rangle = traza(AB^T)$. Sea el subespacio $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, \begin{matrix} a+b+c=0 \\ \wedge\, d-2a=0 \end{matrix} \right\}$.

a) Encuentre una base y la dimensión de $H^\perp$.

b) Si $v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$, entonces halle un vector $h_1 \in H$ y un vector $h_2 \in H^\perp$, tal que $v = h_1 \oplus h_2$.

18.- Sea $W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$, utilizando el producto interno estándar en R^3,

a) Determinar $W^\perp$.

b) Si $v = (-3, 1, 4)$, determinar la proyección de v sobre W.

c) Si $v = (-3, 1, 4)$, determinar el vector en $W^\perp$ que más se aproxima a v. (Nota: Aplicar el teorema de la "Aproximación de la norma")

19.- Sea el espacio vectorial P_2 con el producto interno $\langle\ ,\ \rangle$ definido por:

$$\forall\ p(x), q(x) \in P_2 \quad \langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

Sea el subespacio H de V definido por $H = \{ p(x) \in P_2 \,/\, p'(1) = 0 \}$,

a) Hallar una base de H

b) Determine el conjunto complemento ortogonal $H^\perp$

c) Exprese el vector $v = 16x$ como la suma de un elemento de H y uno de $H^\perp$.

TEMAS CONCEPTUALES

20.- Califique como Verdadero o Falso (Justifique su respuesta)

a) Sea V un espacio vectorial euclidiano, $\forall v \in V$, si $v \neq \mathbf{n}_V$ entonces el ángulo entre v y su inverso aditivo v^* es π radianes.

b) Sean v_1 y v_2 dos vectores de un espacio vectorial euclidiano V, entonces los vectores $\overrightarrow{\text{Proy}}_{v_2} v_1$ y $v_1 - \overrightarrow{\text{Proy}}_{v_2} v_1$ son ortogonales.

c) Si A es una matriz ortogonal, entonces det(A) = –1.

d) Si $f_1 : V \times V \to C$ y $f_2 : V \times V \to C$ son dos productos internos del mismo espacio V, entonces la función $f_3 : V \times V \to C$ definida como $f_3(v_1, v_2) = f_1(v_1, v_2) + f_2(v_1, v_2)$ es también un producto interno en V.

e) Si $f_1 : V \times V \to R$ es un producto interno de V, entonces la función $f_2 : V \times V \to R$ definida como $f_2(v_1, v_2) = k f_1(v_1, v_2)$ es también un producto interno, para alguna constante k>0.

f) Sean H y $H^\perp$ dos subespacios de V, entonces $H \cap H^\perp = \{\mathbf{n}_v\}$.

g) Sea $A = \begin{pmatrix} \text{Cos}(x) & -Sen(x) \\ Sen(x) & \text{Cos}(x) \end{pmatrix}$, entonces para todo x real A es una matriz ortogonal

21.- Muestre que el producto interno estándar en R^4 puede expresarse como una multiplicación matricial:

$$\forall v_1, v_2 \in R^4 \ \langle v_1, v_2 \rangle = (\mathbf{v}_1)^T \mathbf{v}_2,$$

donde los vectores **v** se representan como matrices columnas 4X1.

¿Se cumple identidad en modo similar para R^n?

22.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno real; demuestre que se cumple la denominada **Ley del Paralelogramo**:

$$2\| v_1 \|^2 + 2\| v_2 \|^2 = \|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2$$

para todo $v_1, v_2 \in V$.

¿Se cumple la misma identidad para producto interno complejo?

23.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno real; demuestre que se cumple la denominada **Identidad de Polarización**:

$$\langle v_1 \mid v_2 \rangle = \frac{1}{4}\|v_1 + v_2\|^2 - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|^2$$

para todo $v_1, v_2 \in V$.

¿Se cumple la misma identidad para producto interno complejo?

24.- Muestre que con el producto interno estándar en R^3 se cumple la siguiente identidad:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \mathbf{A} \in M_{3\times 3} \quad \langle \mathbf{A}\mathbf{x},\ \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x},\ \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{y} \rangle$$

donde los vectores **x**, **y** se representan como matrices columnas 3X1.

¿Se cumple la misma identidad para R^n?

ꕤ