DIAGONALIZACIÓN Y SEMEJANZA

0.- En la tienda Sortilegios Weasley's en DIAGON ALLEY, Fred y George venden principalmente el **Turrón Sangranarices** y la **ChocoFiebre**. En la elaboración de un **Turrón Sangranarices** se emplea 1 onza de tentáculos de *Murtlap* y 4 onzas de *Blood Blisterpod*; mientras en la elaboración de la **ChocoFiebre** se emplea 1 onza de tentáculos de *Murtlap* y 3 onzas de *Blood Blisterpod*. Si en un día se emplearon 4 galones de *Blood Blisterpod* y 5 cuartos de tentáculos de *Murtlap*, ¿cuántos turrones y chocofiebres se vendieron? [NOTA: 1 cuarto=32 onzas; 1 galón=128 onzas].

OBJETIVOS:

Se espera que el estudiante aprenda a:

- Determinar los valores y vectores característicos de un operador lineal.
- Determinar los valores y vectores característicos de una matriz
- Distinguir entre los vectores propios de una matriz y los de un operador lineal
- Reconocer cuándo un operador lineal (o una matriz) es diagonalizable y cuándo es diagonalizable ortogonalmente
- Calcular la potencia de una matriz y analizar secciones cónicas.

Si alguna de estas tareas se le dificulta, por favor recurra al profesor, técnico o ayudante más cercano.

VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

1.- Sea $T: P_2 \to P_2$ una transformación lineal con regla de correspondencia:

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(a-b+4c)+(3a+2b-c)x+(2a+b-c)x^2$$

Hallar los valores y vectores propios de T. ¿Es posible formar una base de P2 con tales vectores?

2.- Sea $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+2b & -a+5b \\ 2a-c & 4a-8c+3d \end{pmatrix}$$

De ser posible, hallar una base de $M_{2\times 2}$ formada por vectores característicos de T.

3.- Sea el espacio vectorial funcional $C^2_{[a,b]}$, y sea la transformación lineal $T: C^2_{[a,b]} \to C^2_{[a,b]}$ tal que $\forall f \in C^2_{[a,b]} \quad T[f(x)]=f'(x)$

a) Encuentre una familia de funciones que sean vectores característicos de T, explicando cuáles son los valores propios correspondientes.

b) Sea la transformación lineal $T_2: V \to V$, tal que $T_2[f(x)]=\dfrac{d^2 f}{dx^2}$. Hallar por lo menos 3 familias de funciones que son vectores propios de T. Explique cuáles son los valores propios respectivos.

4.- Sea la transformación $T: R^2 \to R^2$ tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz que representa a T con respecto a la base B = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

a) Complete la siguiente tabla:

valor propio	*vector propio de A_T*	*vector propio de T*	*m.a.*	*m.g.*
$\lambda_1 =$	$v_1 =$			
$\lambda_2 =$	$v_2 =$			

b) ¿Es posible hallar una base de V que contenga exclusivamente vectores propios de V?

c) Si el literal b) es posible, entonces encuentre la matriz de transformación D_T con respecto a la base formada por los vectores propios.

NOTA: En los exámenes, este tipo de problemas suele plantearse como: “encuentre una base de V con respecto a la cual la matriz de T sea diagonal”

CONSTRUCCIONES

5.- Construya un operador lineal *T* en P_2 que cumpla con las siguientes condiciones:

- El polinomio $1+x+x^2$ es un vector propio de *T* que está asociado al valor propio $\lambda = 3$.
- El polinomio $1+x-2x^2$ pertenece al *Kernel* de *T*.
- $T(x) = 1+x+x^2$

6.- Encuentre la regla de correspondencia de una transformación lineal $T: P_1 \to P_1$ que satisfaga las siguientes condiciones:

1) **v** = $2 - 7x$ es un vector propio de *T* asociado al valor propio $\lambda = 3$.
2) $T(1+x) = -6 + 12x$

El vector **w** = $-1 + x$ es también un vector propio de la transformación lineal *T* anterior. ¿A qué valor propio λ está asociado? Justifique su respuesta.

DIAGONALIZACIÓN

7.- Sea $T: P_2 \to P_2$ una transformación lineal tal que:

$$[T(p(x))]_{B1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} [p(x)]_{B1}$$

donde $B_1 = \{x^2, x+1, x-1\}$. Hallar una base de P2 con respecto a la cual, la matriz de T es diagonal.

8.- Sea el espacio $V = gen\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$ y sea $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T[f] = f'(x)$. Encuentre una representación matricial y utilícela para responder:

a) ¿Es T diagonalizable ortogonalmente?

b) ¿Cuáles son los valores propios de T?

9.- Hallar los valores propios de las siguientes matrices, determinando la multiplicidad algebraica (r_i) y la multiplicidad geométrica ($\dim(E_{\lambda i})$) en cada caso. Utilice esta información para afirmar si la respectiva matriz es diagonalizable o no.

- $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

λ	r_i	$\dim(E_{\lambda i})$

- $A = \begin{pmatrix} -5 & -5 & -9 \\ 8 & 9 & 18 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

λ	r_i	$\dim(E_{\lambda i})$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

λ	r_i	$\dim(E_{\lambda i})$

- $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -9 \\ 0 & 5 & 18 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

λ	r_i	$\dim(E_{\lambda i})$

TEMAS CONCEPTUALES:

10.- Encuentre los valores de k para que las siguientes matrices sean diagonalizables ortogonalmente:

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & \mathbf{k}^2 & -6 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ -5 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & \mathbf{k} & 4 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

11.- Califique como Verdadero o Falso (Justifique su respuesta):

a) Si $\det(A) = 0$ entonces $\lambda = 0$ es un valor característico de A.

b) Sea A una matriz real. Si A es diagonalizable ortogonalmente, entonces A es simétrica

c) Sea $A_{m \times n}$ una matriz real rectangular ($m \neq n$), entonces $A^T A$ es ortogonalmente diagonalizable.

d) Si A y B son similares, entonces $\det(A) = \det(B)$.

e) Sea $A_{n \times n}$ una matriz triangular, entonces los elementos de su diagonal principal son también sus valores característicos.

f) Sean $A, B, C \in M_{n \times n}$, si A es similar a B, y B es similar a C, entonces A es similar a C

g) Si A es similar a B, entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ A^n es similar a B^n.

h) Si A es diagonalizable con $D = C^{-1}AC$, entonces $CD^nC^{-1} = A^n$.

i) Sea T un operador lineal invertible en un espacio vectorial V. El escalar λ es un valor propio de T si y sólo si $1/\lambda$ es un valor propio de T^{-1}.

12.- Sea A una matriz real, cuadrada de 2x2, cuyos espacios propios son:

$$E_{\lambda 1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + 2y = 0 \right\}$$

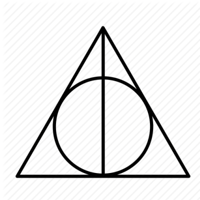
$$E_{\lambda 2} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

a) En un plano cartesiano graficar los lugares geométricos correspondientes a ambos espacios característicos

b) ¿Es $E_{\lambda 1}$ el complemento ortogonal de $E_{\lambda 2}$ con el producto interno estándar de R^2?

c) Determine si A es una matriz real simétrica de 2x2 (justifique su respuesta).

13.- Sea A una matriz real, cuadrada de 3x3, cuyos espacios propios son:



$$E_{\lambda 1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y - z = 0 \right\}$$

$$E_{\lambda 2} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 2x \;\wedge\; z = -x \right\}$$

Determine si

a) A es diagonalizable

b) A es ortogonalmente diagonalizable

14.- Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, califique como Verdadera o Falsa las siguientes proposiciones:

a) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio de B.

b) B no es diagonalizable

c) $\lambda = 2$ es un valor propio de B.

15.- Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & p & 3 \\ 0 & m & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces

a) Determinar los valores de **m**, **n** y **p** para que A sea ortogonalmente diagonalizable y $\lambda = 2$ sea un valor propio asociado al vector propio $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ de A.

b) Hallar una base ortonormal de R^3 formada por vectores característicos de A.

c) Determine las matrices D y Q tales que $D = Q^T A Q$.

APLICACIONES

16.- Calcular A^{20}, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

17.- La sucesión de Fibonacci puede expresarse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Utilice el resultado del literal h) tema 6) para obtener el término 100th de la sucesión de Fibonacci.

18.- Hallar la matriz simétrica que representa a cada una de las siguientes formas cuadráticas:

a) $6x^2 + 5xy - 6y^2 + 7 = 0$

b) $xy = 9$

c) $5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100$

19.- Identifique la cónica y bosqueje su gráfica en cada uno de los siguientes casos, indicando el ángulo de inclinación y la orientación de los ejes principales:

- $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$
- $x^2 + 2xy + y^2 - \dfrac{10}{\sqrt{2}}x + \dfrac{2}{\sqrt{2}}y + 14 = 0$
- $3x^2 + 10xy + 3y^2 + 3 = 0$
- $4x^2 - 8xy - 2y^2 + 20x - 4y + 15 = 0$
- $x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$
- $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 25$
- $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y + 3 = 0$
- $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y - 139 = 0$

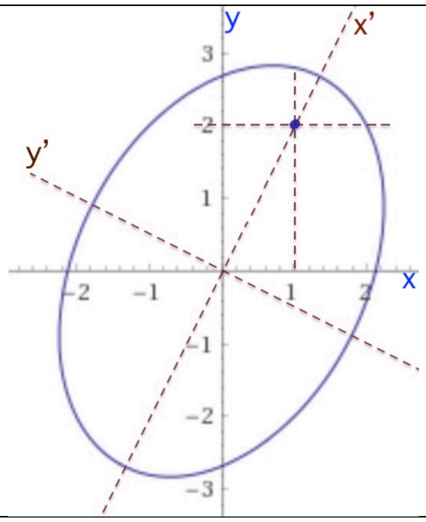
20.- La gráfica dada corresponde a un lugar geométrico cuya ecuación, en términos de **x'** e **y'** es:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36$$

a) Determine la matriz **A** que representa la ecuación cuadrática correspondiente, con respecto a la base canónica de R^2, si se sabe que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ es un vector propio de **A** asociado a $\lambda = 4$.

b) Determine la ecuación cuadrática en términos de las variables **x** e **y**.

c) ¿Cuál es el ángulo de rotación del eje **x'** respecto al eje **x**?



21.- OPCIONAL. DEF**:** Se dice que una forma cuadrática q(v) es **Definida Positiva** si $\forall v \in R^n \; q \geq 0$ y $q = 0 \Leftrightarrow v = \mathbf{n}_v$.

TH: q es **Definida Positiva** si y solo si los valores propios de su matriz asociada cumplen con $\lambda_i > 0$.

DEF**:** Se dice que una forma cuadrática q(v) es **Semidefinida Positiva** si $\forall v \in R^n \; q \geq 0$.

TH: q es **Semidefinida Positiva** si y solo si los valores propios de su matriz asociada cumplen con $\lambda_i \geq 0$.

Utilice esta información para determinar si la función $f : P_2 \times P_2 \to R$ es un producto interno en P_2:

$$f\left(a_2x^2 + a_1x + a_0,\; b_2x^2 + b_1x + b_0\right) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \frac{a_i b_j}{i + j + 1}$$