ÁLGEBRA LINEAL: EJERCICIOS RESUELTOS

Isaac Mancero Mosquera
(draft)

ADVERTENCIA PARA EL ESTUDIANTE:

- Falibilidad del autor: Yo me puedo equivocar.
- No unicidad: Existen ejercicios con más de una solución, y con más de un modo de resolverlos.
- No completitud: Bajo ningún concepto este documento contiene todos los tipos de problemas de la materia.

COMO USAR ESTE DOCUMENTO:

Este documento es una guía complementaria a los problemas planteados. La solución dada no es necesariamente la más eficiente o más rápida, pero es la más adecuada a la estrategia didáctica utilizada en el aula. Se puede imprimir, fotocopiar y distribuir gratuitamente este documento citando su autor.

MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

0.- Mezio Fufezio, el último rey de Alba-Longa, ha recolectado suficiente oro, plata y cobre para formar tres lingotes. El primer lingote contiene 200 gr. de oro, 200 gr. de plata y 600 gr. de cobre. El segundo lingote está formado por 100 gr. de oro, 400 gr. de plata y 500 gr. de cobre. El tercero contiene 200 gr. de oro, 400 gr. de plata y 400 gr. de cobre. El rey de Roma ha exigido a la ciudad de Alba Longa un tributo para preservar la paz, consistente en un lingote de 150 gr. de oro, 350 gr. de plata y 500 gr de cobre. ¿Cuántos gramos de cada lingote debe tomar Mezio Fufezio para pagar el tributo a Roma y salvar la ciudad de una invasión?

PLANTEAMIENTO: La información por lingotes se puede ordenar en una tabla:

	$L1$	$L2$	$L3$	$demandado:$
$oro:$	$200\ gr.$	$100\ gr.$	$200\ gr.$	$150\ gr.$
$plata:$	$200\ gr.$	$400\ gr.$	$400\ gr.$	$350\ gr.$
$cobre:$	$600\ gr.$	$500\ gr.$	$400\ gr.$	$500\ gr.$

Para reconocer cómo ordenar las ecuaciones, hacemos el siguiente razonamiento:

La unidad con componentes inseparables es el "lingote", el cual representaremos como un vector. El lingote 1 tiene las siguientes componentes en su aleación:

$L1=\begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 600 \end{pmatrix}$; si solo se desea tomar la mitad, se multiplicaría este vector por 0.5, si solo se desea una décima parte se multiplica por 0.1. Pero como no sabemos cuánto

necesitamos de este primer lingote, se lo multiplica por un escalar desconocido "x". Similar razonamiento se aplica para extraer porciones de los demás lingotes:

$$x\begin{pmatrix}200\\200\\600\end{pmatrix},\ y\begin{pmatrix}100\\400\\500\end{pmatrix},\ z\begin{pmatrix}200\\400\\400\end{pmatrix}$$

Con la suma de lo extraído de los 3 lingotes debería formarse el lingote demandado por el rey enemigo, de donde salen las ecuaciones:

$$x\begin{pmatrix}200\\200\\600\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}100\\400\\500\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}200\\400\\400\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}150\\350\\500\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}200x+100y+200z=150\\200x+400y+400z=350\\600x+500y+400z=500\end{cases}$$

SOLUCIÓN: Resolviendo este sistema (**favor usar GAUSS o GAUSS-JORDAN para evitar confusiones**):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}200&100&200&150\\200&400&400&350\\600&500&400&500\end{array}\right)\xrightarrow[(1/100)f3]{\substack{(1/50)f1\\(1/50)f2}}\left(\begin{array}{ccc|c}4&2&5&3\\4&8&8&7\\6&5&4&5\end{array}\right)\cdots\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1/4\\0&1&0&1/2\\0&0&1&1/4\end{array}\right)$$

Al final se obtiene x=0.25, y=0.5, z=0.25.

INTERPRETACIÓN: Hace falta es interpretar el resultado para dar una respuesta adecuada. Se pedían los gramos de cada lingote, por lo tanto x=0.25 significa la cuarta parte del Lingote 1, dado que el Lingote 1 pesa 1000gr en total, **la respuesta es 250 gr del Lingote 1. Así también son 500 gr del Lingote 2 y 250 gr del Lingote 3**.

1.- El departamento de pesca proporciona tres tipos de alimentos a un lago donde habitan peces de tres especies. Cada pez de la especie uno consume, por semana, un promedio de 1 unidad de alimento #1, 1 unidad de alimento #2 y 2 unidades de alimento #3. Cada pez de la especie dos consume, por semana, 3 unidades de alimento #1, 4 unidades de alimento #2 y 5 unidades de alimento #3. El consumo semanal de la especie tres es de 2 unidades de alimento #1, 1 unidad de alimento #2 y 5 unidades de alimento #3. Cada semana se vierten en el lago 15000 unidades de alimento #1, 10000 unidades de alimento #2 y 35000 unidades de alimento #3. Suponiendo que se consume la totalidad de los tres alimentos, ¿cuántos individuos de las tres especies pueden coexistir en el lago? ¿Existe solución única?

Tabla describiendo los consumos por especie:

	Especie 1	*Especie* 2	*Especie* 3
Alimento 1	1	3	2
Alimento 2	1	4	1
Alimento 3	2	5	5

Razonamiento:

Si UN pez tipo 1 consume $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ unidades de alimento, dos peces comerán $2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, diez peces consumirían 10 veces más, y una cantidad **x** no especificada consumiría $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix}$.

Similarmente, una cantidad **y** no especificada de peces tipo 2 consumiría $\begin{pmatrix} 3y \\ 4y \\ 5y \end{pmatrix}$; y una cantidad **z** no especificada de peces tipo 3 consumiría $\begin{pmatrix} 2z \\ z \\ 5z \end{pmatrix}$. Y el consumo total es:

$$\begin{pmatrix} x \\ x \\ 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y \\ 4y \\ 5y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z \\ z \\ 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15000 \\ 10000 \\ 35000 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 1 & 4 & 1 & 10000 \\ 2 & 5 & 5 & 35000 \end{array}\right) \underset{f3-2f1}{\overset{f2-f1}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & -1 & -5000 \\ 0 & -1 & 1 & 5000 \end{array}\right) \underset{f3+f2}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & -1 & -5000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solución no es única. Pues:

$$y = z - 5000$$
$$x = 15000 - 2z - 3(z - 5000) = 30000 - 5z$$

Donde z es variable libre. Pero como estas cantidades no pueden ser negativas, z≥0, además:

$$y = z - 5000 \geq 0$$
$$x = 15000 - 2z - 3(z - 5000) = 30000 - 5z \geq 0$$

Entonces se tiene: $5000 \leq z \leq 6000$, o solo 1001 soluciones.

2.- Si $A = \begin{bmatrix} a & 1+a \\ 1-a & 0 \end{bmatrix}$, determine para qué valores de $a \in \mathrm{R}$, la matriz A tiene inversa.

SOLUCIÓN: Dado que:

$$\det A = 0 - (1-a)(1+a) = a^2 - 1$$

y la matriz no tiene inversa cuando su determinante es cero, se tiene que det(A)= $a^2-1=0$ implica que a=±1. Por lo tanto, para que A tenga inversa, $a \neq 1 \ \vee \ a \neq -1$.

3.- Califique como Verdadero o Falso la siguiente proposición, en caso de ser verdadera demuéstrela, en caso contrario dé un contraejemplo: Sean A, B y C tres matrices $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$, C invertible, tales que $A = C^{-1} B\, C$, entonces $\det(A) = \det(B)$

El enunciado tiene la forma de una implicación, $p \rightarrow q$ y puede analizarse

mediante *Modus Ponendo Ponens*; es decir, se supondrá el antecedente verdadero y, a continuación, se determinará el valor de verdad del consecuente.

Si $A = C^{-1}B\,C$, entonces, al calcular el determinante en ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$\det(A) = \det(C^{-1}B\,C), \text{ pero}$$

$$\det(A) = \det(C^{-1}B\,C) = \det(C^{-1})\det(B)\det(C)$$

y como se cumple que $\det(C^{-1}) = 1/\det(C)$, entonces resulta que $\det(A) = \det(B)$.

Es decir, el consecuente es verdadero. Luego, el enunciado es verdadero.

4.- Construya, de ser posible, un sistema de ecuaciones lineales de 4 ecuaciones, 3 incógnitas y con solución única.

Se puede partir de un sistema resuelto, y "desarreglarlo" un poco:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f1+f2\to f4]{f3+f1\to f3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

por lo cual una solución (entre muchas) podría ser el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ y + 2z = 1 \\ x + 2y + 2z = 3 \\ 1 + 3y + 3z = 3 \end{cases}$$

5.- Sean las matrices cuadradas, del mismo orden, A, B y X, donde A–B es invertible. Si se cumple que $XA^T = I + (BX^T)^T$, donde I es la matriz identidad; utilice las operaciones con matrices y sus propiedades para expresar X en términos de I, A y B. Justifique cada paso tomado.

Por propiedad de la transposición de un producto:

$$(BX^T)^T = X^{T^T}B^T = XB^T$$

Luego, sumando el inverso aditivo de este término a ambos lados de la igualdad, se obtiene:

$$XA^T - XB^T = I$$

Factorizando X por la izquierda:

$$X(A^T - B^T) = I$$
$$X(A - B)^T = I$$

Dado que A–B es invertible, entonces su transpuesta es invertible también:

$$X = I\left((A-B)^T\right)^{-1} = \left((A-B)^T\right)^{-1}$$

ESPACIOS VECTORIALES

6.- La siguiente estructura **SÍ** es un espacio vectorial real. Se trata del conjunto

$$R^{2^*} = \left\{(x,y) \in R \,/\, x \in R \wedge y > 0\right\}$$

con las operaciones de adición vectorial y multiplicación por un escalar definidas a continuación:

$$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1 + x_2 + 1, y_1 y_2)$$

$$\alpha \odot (x,y) = (\alpha x + \alpha - 1, y^{\alpha})$$

a) Demuestre formalmente que se cumple el axioma M-3
b) Determine el neutro de este espacio
c) ¿Cuál es el inverso del vector $(3,5)$?
d) Calcule el resultado de $(2,3) \oplus (-2,2) \oplus (-1,\frac{1}{2})$

- **EL AXIOMA M-3:** $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{*2}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\quad \alpha \odot (v_1 \oplus v_2) = (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)$

  Sean: $\alpha \in \mathbb{R}$

  $v_1 \in \mathbb{R}^{*2} \rightarrow v_1 = (a_1, b_1) \,/\, b_1 > 0$

  $v_2 \in \mathbb{R}^{*2} \rightarrow v_2 = (a_2, b_2) \,/\, b_2 > 0$

  Luego:

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (v_1 \oplus v_2) &= \alpha \odot (a_1 + a_2 + 1,\ b_1 b_2) \\
&= (\alpha[a_1 + a_2 + 1] + \alpha - 1,\ [b_1 b_2]^{\alpha}) \\
&= (\alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha + \alpha - 1,\ b_1^{\alpha} b_2^{\alpha}) \\
&= (\alpha a_1 + \alpha + \alpha a_2 + \alpha - 1 + 1 - 1,\ b_1^{\alpha} b_2^{\alpha}) \\
&= ([\alpha a_1 + \alpha - 1] + [\alpha a_2 + \alpha - 1] + 1,\ b_1^{\alpha} b_2^{\alpha}) \\
&= (\alpha a_1 + \alpha - 1, b_1^{\alpha}) \oplus (\alpha a_2 + \alpha - 1,\ b_2^{\alpha})
\end{aligned}$$

  Es decir, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\alpha \odot (v_1 \oplus v_2) &= \alpha \odot (a_1, b_1) \oplus \alpha \odot (a_2, b_2) \\
&= (\alpha \odot v_1) \oplus (\alpha \odot v_2)
\end{aligned}$$

  Lo que completa la demostración.

- **EL NEUTRO DE ESTE ESPACIO**

  Dado que sí es un Espacio Vectorial, entonces $n = 0 \odot v$.

  $n = 0 \odot (x,y) = (0x + 0 - 1, y^0) = (-1,\ 1)$

- **¿CUÁL ES EL INVERSO DEL VECTOR $(3,5)$?**

  Dado que sí es un Espacio Vectorial, entonces $v' = -1 \odot v$

  $v' = -1 \odot (3,5) = (-1 \times 3 - 1 - 1, 5^{-1}) = (-5,\ 1/5)$

- **CALCULE EL RESULTADO DE $(2,3) \oplus (-2,2) \oplus (-1,\frac{1}{2})$**

  Asociando: $(2,3) \oplus [(-2,2) \oplus (-1,\ \frac{1}{2})]$

  $(-2,2) \oplus (-1,\ \frac{1}{2}) = (-2 - 1 + 1,\ 2 \times \frac{1}{2}) = (-2,\ 1)$

Luego:

$$(2,3)\oplus[(-2,2)\oplus(-1,\ \tfrac{1}{2})]=(2,3)\oplus(-2,\ 1)=(1,\ 3)$$

7.- La siguiente estructura **NO** es un espacio vectorial. Justifique mediante alguna propiedad que no se cumpla, proveyendo de contraejemplos si es necesario.

- Los números reales positivos, R^+, con las operaciones definidas como:

$$\forall R_1,R_2\in\mathbb{R}^+\ \ \forall R\in\mathbb{R}^+\quad R_1\oplus R_2=\left[\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right]^{-1}\quad y\ \ \alpha\odot R=\frac{R}{\alpha}$$

donde el escalar α también proviene del conjunto de los reales positivos.

SOLUCIÓN: No existe el neutro (Existen otros axiomas que tampoco se cumplen, pero basta mostrar uno).

$\exists n\in\mathbb{R}^+\ \forall R\in\mathbb{R}^+\ R\oplus n=R$

$Sea\ R\in\mathbb{R}^+,\ n\in\mathbb{R}^+$

$$R\oplus n=\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{n}\right)^{-1}=R$$

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{n}=\frac{1}{R}\rightarrow\frac{1}{n}=0\rightarrow n=\infty$$

Pero infinito no es un número real.

8.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

Sean **u** y **v** dos vectores de un espacio vectorial $\langle V,\oplus,\odot\rangle$. Si $u\oplus(3\odot v)=(2\odot v)\oplus u$ entonces **v** es el vector neutro de V.

Suponiendo el antecedente verdadero, se tiene que

$$u\oplus(3\odot v)=(2\odot v)\oplus u$$

Dado que la adición es conmutativa, puedo cambiar el orden y colocar **u** a la derecha para sumarle su inverso aditivo **u'**:

$$u\oplus(3\odot v)=(2\odot v)\oplus u$$

$$(3\odot v)\oplus u\oplus u'=(2\odot v)\oplus u\oplus u'$$

Pero la suma de **u** con **u'** resulta en el neutro **n**, por lo cual:

$$(3\odot v)\oplus(n)=(2\odot v)\oplus(n)$$

$$3\odot v=2\odot v$$

Sumo el inverso de $(2\odot v)$ a ambos lados de la igualdad:

$$(3\odot v)\oplus(-2\odot v)=n$$

Pues el inverso es:

$$(2\odot v)'=(-1)\odot(2\odot v)=(-2)\odot v$$

Luego:

$$(3\odot v)\oplus(-2\odot v)=n$$

$$(3-2)\odot v=n$$

$$1\odot v=n$$

$$v=n$$

Por lo tanto, el enunciado es **VERDADERO**.

9.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

Sea **v** un vector fijo de un espacio vectorial $\langle V,\oplus,\odot\rangle$, entonces el inverso de **v** es único.

Procediendo por Reducción al absurdo, supongamos que el inverso de **v** no es único:

Sea **v'** un inverso de **v**, $v \oplus v' = n$

Sea **v"** otro inverso de **v**, $v \oplus v'' = n$

Por lo tanto:

$$v \oplus v' = v \oplus v''$$

Sumando un inverso de **v** a ambos lados de la igualdad:

$$v' \oplus (v \oplus v') = v' \oplus (v \oplus v'')$$
$$(v' \oplus v) \oplus v' = (v' \oplus v) \oplus v''$$
$$(n) \oplus v' = (n) \oplus v''$$

Por lo tanto:

$$v' = v'' \quad \Rightarrow\Leftarrow \text{ contradicción}$$

En consecuencia, el inverso de **v** es único. **VERDADERO**.

10.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

Sea un espacio vectorial $\langle V,\oplus,\odot\rangle$, si $\boldsymbol{\alpha} \odot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n}$ entonces $\alpha = 0$. (NOTA: $\boldsymbol{n}$ es el vector neutro)

FALSO, pues podría suceder que el vector **v** es el neutro, en cuyo caso el escalar no necesariamente es cero; es decir se valida el antecedente pero no el consecuente.

CONTRAEJEMPLO: En R^2 podemos elegir:

$v = (0,0)$ y $\alpha = 5$, con lo cual el enunciado es **FALSO**.

SUBESPACIOS VECTORIALES

11.- Determine si la siguiente estructura es un subespacio del espacio vectorial dado:

$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\right\}$ en el espacio R^2.

No se cumple la cerradura de la suma.

Sean:

$v_1 = (2,0)$ y $v_2 = (0,2)$; $v_1, v_2 \in S$

Pero $v_1 + v_2 = (2,2) \notin S$, pues $2^2 + 2^2 = 8 \neq 4$

CONCLUSIÓN: S no es un subespacio de las R^2.

12.- Determine si la siguiente estructura es un subespacio del espacio vectorial dado:

$W = \left\{A_{2\times2} / \det(A) = 0\right\}$ en el espacio de las matrices reales de 2x2.

No se cumple la cerradura de la suma.

Sean:

$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

det(A)=0 y det(B)=0

Pero det(A+B)=1, es decir $A+B \notin W$.

CONCLUSIÓN: W no es un subespacio de las matrices reales de 2x2

13.- Determine si la siguiente estructura es un subespacio del espacio vectorial dado:

$H=\left\{(x,y)\in R^{2*} \,/\, x=2\log(y)-1\right\}$ en el espacio R^{2*} del **Tema 6**.

- **COMPROBEMOS PRIMERO QUE H NO SEA VACÍO**

  Uno de los modos más sencillo es verificar que el neutro del espacio esté en H.

  El neutro es $n=(-1,1)$, y este vector cumple con la condición del conjunto H que indica:

  $$-1=2\log(1)-1$$

  Luego $n\in H$, y H no es vacío, pues por lo menos contiene al neutro.

- **PRIMERA CERRADURA:**

  $\forall v_1, v_2 \in H \quad v_1 \oplus v_2 \in H$

  Sean:

  $v_1 \in H \rightarrow v_1=(a_1,b_1) \,/\, a_1=2\log(b_1)-1$

  $v_2 \in H \rightarrow v_2=(a_2,b_2) \,/\, a_2=2\log(b_2)-1$

  $$v_1 \oplus v_2=(a_1+a_2+1,\ b_1b_2)$$

  Pero

  $$\begin{aligned} a_1+a_2+1 &= 2\log(b_1)-1+2\log(b_2)-1+1 \\ &= 2\log(b_1b_2)-1 \end{aligned}$$

  Se cumple la condición del conjunto H, es decir $v_1 \oplus v_2 \in H$

- **SEGUNDA CERRADURA:**

  $\forall v \in H \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \alpha \odot v = v$

  Sean:

  $v \in H \rightarrow v=(a,b) \,/\, a=2\log(b)-1$

  $\alpha \in \mathbb{R}$

  $$\alpha \odot v=\alpha \odot (a,b)=(\alpha a+\alpha-1,\ b^{\alpha})$$

  Pero

  $$\begin{aligned} \alpha a+\alpha-1 &= \alpha(2\log(b)-1)+\alpha-1 \\ &= \alpha 2\log(b)-\alpha+\alpha-1 \\ &= 2\log(b^{\alpha})-1 \end{aligned}$$

  Se cumple la condición del conjunto H, es decir $\alpha \odot v \in H$

CONCLUSIÓN: H sí es un subespacio de R^{2*}.

14.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso, justificando su respuesta:

Sea V un espacio vectorial. Si H es un subespacio de V, entonces H^C es también un subespacio de V.

FALSO. Si H es un subespacio de V, es un espacio vectorial en sí mismo, cumpliendo todos los axiomas; en particular, contiene al neutro del espacio. Luego, el complemento de H no puede ser un subespacio pues no contiene al neutro del espacio.

15.- Determine si la siguiente estructura es un subespacio del espacio vectorial dado:

El conjunto $H = \left\{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 < 0\right\}$ en el espacio real R^3.

No es un subespacio por ser un conjunto vacío. No existen números reales x, y & z tales que la suma de sus cuadrados sea negativa.

CONCLUSIÓN: H no es un subespacio de R^3.

GENERACIÓN, INDEPENDENCIA LINEAL Y BASES

16.- Sea el siguiente subespacio de P_3:

$$H = \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3 \,/\; 3a + 4b + c - 6d = 0 \;\wedge\; b = -2d\right\}$$

Encuentre subconjuntos que sean: generador y L.I; generador pero L.D; no generador pero L.I; no generador y L.D. Complete la siguiente tabla:

H	*genera*	*no genera*
L.I.		
L.D.		

SOLUCIÓN: Existen varios modos de resolver este problema; yo iniciaré construyendo una base del subespacio, que es el conjunto que genera y es L.I.

Base de H:

$$\begin{cases} 3a + 4b + c - 6d = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{aligned} c &= -3a - 4b + 6d = -3a + 14d \\ b &= -2d \end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - 2dx^2 + (-3a + 14d)x + d = a(x^3 - 3x) + d(-2x^2 + 14x + 1)$$

Se obtiene la base:

$$B_H = \left\{x^3 - 3x,\ \ -2x^2 + 14x + 1\right\}$$

Que genera y es L.I.

A continuación, enumero el orden en que voy llenando los casilleros restantes: A partir de este conjunto base B_H **(1)**, quitarle un vector lo hace no generador, pero aun es L.I. **(2)**. Aumentar a la base B_H un múltiplo de uno de los vectores en cambio hace al conjunto generador, pero L.D. **(3)**. Y si al conjunto que no genera y es L.I. se le aumenta un múltiplo de ese vector, o el vector neutro, se vuelve un conjunto no generador, pero L.D. **(4)**.

H	gen	$no\ gen.$
$L.I.$	(1) $B_H = \left\{x^3 - 3x,\ \ -2x^2 + 14x + 1\right\}$	(2) $\left\{x^3 - 3x\ \right\}$
$L.D.$	(3) $\left\{x^3 - 3x,\ \ -2x^2 + 14x + 1,\ 2x^3 - 6x\right\}$	(4) $\left\{x^3 - 3x,\ 0x^3 + x^2 + 0x + 0\right\}$

17.- Sea el siguiente subespacio de M_{2X2}.:

$$W = gen\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right\}$$

Encuentre una base de M_{2X2} que contenga a la base de W

SOLUCIÓN: Se inicia hallando una base para W, a partir del conjunto generador dado, analizando si son L.I:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[f3+f1]{f2+4f1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2+f3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El conjunto generador dado es L.D. (el 3er vector es combinación lineal de los otros dos) así que, al eliminar del conjunto al vector dependiente, se obtiene una base:

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

se completa con elementos de la base canónica hasta completar 4 vectores (pues dim $M_{2X2} = 4$)

$$B_W = \left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right\} \rightarrow Base_{M2\times2}\left\{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

y se comprueba que sean L.I. Por ejemplo, al colocarlos en filas, se puede verificar su independencia lineal:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2+4f1} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La base requerida es:

$$B_{M2X2}=\left\{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

NOTA: Hay muchas otras soluciones y modos de hallar una respuesta.

18.- Sea $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\right\}$ un subconjunto de M_{2X2}.

a) Describa el espacio generado por H, o sea gen(H) o $\mathcal{L}(H)$ según la notación.

b) ¿Puedo quitar algún vector de H y seguir generando el mismo espacio vectorial?

- **gen(H)**

Planteamos la combinación lineal:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Lo cual lleva al sistema:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=a\\ \alpha_2+2\alpha_3=b\\ \alpha_2+2\alpha_3=c\\ -\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=d\end{cases}$$

Resolviendo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & 1 & 2 & c\\ -1 & 1 & 2 & d\end{array}\right)\xrightarrow{f_4+f_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & 1 & 2 & c\\ 0 & 2 & 4 & d+a\end{array}\right)\xrightarrow[f_3-f_2]{f_4-2f_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 2 & a\\ 0 & 1 & 2 & b\\ 0 & 0 & 0 & c-b\\ 0 & 0 & 0 & d+a-2b\end{array}\right)$$

Luego:

$$gen(H)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}\,/\,c-b=0\ \wedge\ d+a-2b=0\right\}$$

- **¿PUEDO QUITAR ALGÚN VECTOR DE H Y SEGUIR GENERANDO EL MISMO ESPACIO VECTORIAL?**

Sí, se puede quitar solo uno de estos dos:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ \text{o}\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},$$

porque son linealmente dependientes (uno múltiplo del otro), evidente también porque corresponden a las posibles variables libres del sistema lineal resuelto.

19.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.

Sean v_1,v_2,u_1,u_2 cuatro vectores del espacio vectorial V. Si $gen\{v_1,v_2\}=gen\{u_1,u_2\}$ entonces $\{v_1,v_2,u_1,u_2\}$ es linealmente dependiente.

Como una aplicación de *Ponendo Ponens*, se supone que el antecedente es verdadero, es decir que $gen\{v_1, v_2\} = gen\{u_1, u_2\}$.

Se sabe que $v_1 \in gen\{v_1, v_2\}$, pero como $gen\{v_1, v_2\} = gen\{u_1, u_2\}$, existen escalares α_i tales que $v_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, por lo tanto, el conjunto $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ es L.D. dado que uno de los vectores es combinación lineal de los demás.

CONCLUSIÓN: La proposición es **VERDADERA**.

20.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. Justifique su respuesta.

Si en un espacio vectorial se tiene un conjunto de n vectores linealmente independientes, entonces dim(V)=n

FALSO, pues dim(V)≥n.

CONTRAEJEMPLO: en R^3, el siguiente conjunto es L.I: $\{(1,0,0),\ (0,1,0)\}$, pero la dimensión de R^3 no es 2.

CONCLUSIÓN: La proposición es **FALSA**.

COORDENADAS Y MATRIZ DE CAMBIO DE BASE

21.- Sea el espacio vectorial R^2. Considere las dos bases dadas por $B1 = \left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ y $B2 = \left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$.

a) Hallar la matriz de cambio de base de B1 a B2.

b) Si $[w_1]_{B1} = (2 \quad 3)$ y $[w_2]_{B2} = (0 \quad 1)$, encontrar $[2w_1 - 3w_2]_{B1}$.

- **MATRIZ DE CAMBIO DE BASE DE B1 A B2**

Esta matriz requiere hallar las coordenadas de los vectores de B1 con respecto a la base B2, es decir, se deben resolver las ecuaciones lineales derivadas de las siguientes combinaciones lineales:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha_1\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

O sea, los sistemas lineales:

$$\begin{cases}-\alpha_1 + \alpha_2 = 2\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1\end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases}-\alpha_1 + \alpha_2 = 1\\ \alpha_1 + \alpha_2 = 2\end{cases}$$

Podemos resolverlos simultáneamente (pues la matriz de coeficientes no cambia, solo cambia la aumentada):

$$\left(\begin{array}{cc|c|c}-1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[f2+f1]{-f1} \left(\begin{array}{cc|c|c}1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 2 & 3 & 3\end{array}\right) \xrightarrow[0.5f2]{-f1} \left(\begin{array}{cc|c|c}1 & -1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 3/2 & 3/2\end{array}\right) \xrightarrow{f1+f2} \left(\begin{array}{cc|c|c}1 & 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 3/2 & 3/2\end{array}\right)$$

De donde se concluye que la matriz de cambio de base requerida es:

$$M_{B1\to B2}=\begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

- **ENCONTRAR** $[2w_1-3w_2]_{B1}$.

  Se aplican las propiedades de linealidad de las coordenadas:

$$[2w_1-3w_2]_{B1}=2[w_1]_{B1}-3[w_2]_{B1}$$

  Debemos aun calcular $[w_2]_{B1}$, pues sí tenemos $[w_1]_{B1}$. Se puede resolver de varios modos, por ejemplo, calculando la matriz de cambio de base de B2 a B1, como la inversa de la matriz de B1 a B2:

$$M_{B2\to B1}=\begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

  Luego:

$$[w_2]_{B1}=M_{B2\to B1}[w_2]_{B2}=\begin{pmatrix} -1 & 1/3 \\ 1 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

  Y reemplazando, se obtiene la respuesta:

$$[2w_1-3w_2]_{B1}=2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

22.- Sea V un espacio vectorial, y $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ una base de V. Se define el conjunto:

$$W=gen\{v_1+2v_2,\ -v_1+3v_2-v_3,\ v_1+3v_3\}$$

a) Extraiga una base para W, denotada por B_W, a partir del conjunto generador dado
b) Si es posible, determine la matriz de cambio de base de B a B_W

- **Para extraer una base** de W se analiza la independencia de su conjunto generador:

$$\alpha_1(v_1+2v_2)+\alpha_2(-v_1+3v_2-v_3)+\alpha_3(v_1+3v_3)=\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{v}}$$

  Reordenando:

$$(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)v_1+(2\alpha_1+3\alpha_2)v_2+(-\alpha_2+3\alpha_3)v_3=\bar{\mathbf{0}}_{\mathbf{v}}$$

  Y como $\{v_1,v_2,v_3\}$ es L.I., se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+3\alpha_2=0 \\ -\alpha_2+3\alpha_3=0 \end{cases}$$

  Que se resuelve:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[f_2\leftrightarrow f_3]{f_2-2f_1}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{f_3+5f_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 \end{array}\right)$$

  La solución única trivial indica que los únicos escalares que producen el vector neutro en la combinación lineal son ceros. Luego, el conjunto generador de W es también su base:

$$B_W=\{v_1+2v_2,\ -v_1+3v_2-v_3,\ v_1+3v_3\}$$

- **MATRIZ DE CAMBIO DE BASE DE B a B_W.**
  La matriz más fácil de hallar es aquella de B_W a B, pues al analizar los vectores de la base B_W se observan ya sus coordenadas respecto a la base B; por ejemplo:

$$v_1+2v_2=1.v_1+2.v_2+0v_3\rightarrow[v_1+2v_2]_B=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

  De modo similar se hallan las coordenadas para los vectores restantes. Luego, la matriz es:

$$M_{B_W\rightarrow B}=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&3&0\\0&-1&3\end{bmatrix}$$

  Y su inversa es la respuesta requerida:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&3&0&0&1&0\\0&-1&3&0&0&1\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&-1&3&0&0&1\\0&5&-2&-2&1&0\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-2&1&0&-1\\0&-1&3&0&0&1\\0&0&13&-2&1&5\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}13&0&-26&13&0&-13\\0&-13&39&0&0&13\\0&0&13&-2&1&5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}13&0&0&9&2&-3\\0&-13&0&6&-3&-2\\0&0&13&-2&1&5\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&9/13&2/13&-3/13\\0&1&0&-6/13&3/13&2/13\\0&0&1&-2/13&1/13&5/13\end{array}\right]$$

$$M_{B\rightarrow B_W}=\begin{bmatrix}9/13&2/13&-3/13\\-6/13&3/13&2/13\\-2/13&1/13&5/13\end{bmatrix}$$

23.- Sean $B_1=\{v_1,v_2,v_3\}$ y $B_2=\{u_1,u_2,u_3\}$ dos bases del espacio vectorial P_2. Suponga que se cumple que:

$$[x^2-x]_{B1}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad [x+1]_{B1}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad [2x^2+1]_{B1}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$[u_1+u_2]_{B1}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix},\quad [u_2+u_3]_{B1}=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix},\quad [u_3]_{B1}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}.$$

- Encuentre ambas bases.
- Construya la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

- **DETERMINANDO B1**
  Las tres primeras coordenadas indican que:

$$x^2-x=1\odot v_1\oplus 1\odot v_2\oplus 0\odot v_3$$
$$x+1=0\odot v_1\oplus 1\odot v_2\oplus 0\odot v_3$$
$$2x^2+1=1\odot v_1\oplus -1\odot v_2\oplus 1\odot v_3$$

Rápidamente se observa de la segunda ecuación que $x+1=v_2$. Luego, reemplazando en la primera ecuación: $v_1=(x^2-x)-v_2=x^2-2x-1$. Para finalmente obtener v_3: $v_3=(2x^2+1)-v_1+v_2=x^2+2x+2$. La primera base es:

$$B_1=\left\{x^2-2x-1,\ x+1,\ x^2+2x+2\right\}$$

- **DETERMINANDO B2**

De modo similar, de las últimas 3 coordenadas dadas, se puede observar que:

$[u_3]_{B1}=(3,0,0)\Leftrightarrow u_3=3v_1+0v_2+0v_3$, o sea $u_3=3x^2-6x-3$.

$[u_2+u_3]_{B1}=(5,2,0)\Leftrightarrow u_2+u_3=5v_1+2v_2+0v_3$, o sea. $u_2=5v_1+2v_2-u_3=2x^2+6x+3$

$[u_1+u_2]_{B1}=(3,1,1)\Leftrightarrow u_1+u_2=3v_1+v_2+v_3$, o sea $u_1=3v_1+v_2+v_3-u_2=2x^2-9x-3$.

De donde se obtiene la segunda base:

$$B_2=\left\{3x^2-6x-3,\ 2x^2+6x+3,\ 2x^2-9x-3\right\}$$

- **LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE DE B_1 a B_2**

En este caso, se debe hallar las coordenadas de los vectores de la base B_1, respecto a la base B_2, lo cual quiere decir que se combinan linealmente los vectores de la base B_2:

$$\alpha_1(3x^2-6x-3)+\alpha_2(2x^2+6x+3)+\alpha_3(2x^2-9x-3)=ax^2+bx+c$$

Y se hallan los respectivos escalares α_i, para el polinomio ax^2+bx+c. Obteniéndose el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 3\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3=a \\ -6\alpha_1+6\alpha_2-9\alpha_3=b \\ -3\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_3=c \end{cases}$$

Aplicando la técnica de múltiples aumentadas, para cada vector de la base B1, se obtiene la representación matricial, que se resuelve mediante Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 6 & -9 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)\rightarrow\cdots\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4/15 & 11/15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz requerida es:

$$M_{B1\rightarrow B2}=\begin{pmatrix} 1/3 & -2/5 & -3/5 \\ 0 & 4/15 & 11/15 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

24.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso.

Sea V un espacio vectorial, y B_1, B_2 y B_3 tres bases de V. Si M es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, y Q es la matriz de cambio de base de B_2 a B_3; entonces $P = M^{-1}Q^{-1}$ es la matriz de cambio de base de B_3 a B_1.

VERDADERO. Si M es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2, entonces se cumple que:

$$\left[\mathbf{v}\right]_{B2} = \mathbf{M}\left[\mathbf{v}\right]_{B1} \qquad \text{(Eq.1)}$$

Si Q es la matriz de cambio de base de B_2 a B_3, entonces se cumple que:

$$\left[\mathbf{v}\right]_{B3} = \mathbf{Q}\left[\mathbf{v}\right]_{B2} \qquad \text{(Eq.2)}$$

Reemplazando (eq.1) en (eq.2), se obtiene:

$$\left[\mathbf{v}\right]_{B3} = \mathbf{QM}\left[\mathbf{v}\right]_{B1}$$

Es decir, QM es la matriz que realiza la transición de la base B1 a la base B3. Su inversa es:

$$(\mathbf{QM})^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$$

Es decir, en efecto la matriz $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}$ hace el cambio de base de B3 a B1.

CONCLUSIÓN: La proposición es **VERDADERA**.

25.- Sea V un espacio vectorial. Sea $B = \left\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\right\}$ una base de V, y sea $S = \left\{v_5 - v_4, v_4 - v_3, v_3 - v_2, v_2 - v_1, v_1\right\}$ un subconjunto de V.

a) Pruebe que S es una base de V
b) Encuentre la matriz de cambio de base de S a B
c) Si $[\mathbf{u}]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, hallar $[\mathbf{u}]_B$ y $\mathbf{u}$.

- **S ES BASE DE V:**

Dado que B sí es una base, y contiene 5 vectores, entonces $\dim V = 5$. Y dado que S también tiene cardinalidad 5, se sabe por aplicación del teorema* que solo es necesario probar que S es L.I. o que genera. Se verificará la independencia lineal a continuación:

$$\alpha_1(v_5 - v_4) + \alpha_2(v_4 - v_3) + \alpha_3(v_3 - v_2) + \alpha_4(v_2 - v_1) + \alpha_5 v_1 = \mathbf{n}$$

Que es equivalente a:

$$(\alpha_5 - \alpha_4)v_1 + (\alpha_4 - \alpha_3)v_2 + (\alpha_3 - \alpha_2)v_3 + (\alpha_2 - \alpha_1)v_4 + \alpha_1 v_5 = \mathbf{n}$$

Dado que los vectores de B son L.I., entonces:

$$\begin{cases} \alpha_5 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_4 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Es fácil verificar que este sistema homogéneo tiene solución única, es decir, la solución trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$; lo que indica que S es un conjunto

linealmente independiente y, por aplicación del teorema*, es también generador de V. Por lo tanto, S es una base de V.

- **MATRIZ DE CAMBIO DE BASE DE S A B**

  Contiene en sus columnas las coordenadas de S con respecto a la base B. Por ejemplo, con el primer vector de la base S

$$v_5 - v_4 = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 - 1v_4 + v_5 \Rightarrow \left[v_5 - v_4\right]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Por lo tanto, se puede construir la matriz por simple inspección:

$$C_{S\to B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **OBTENCIÓN DE $[\mathbf{u}]_B$ y $\mathbf{u}$**

  Para obtener $[\mathbf{u}]_B$ se multiplican las coordenadas dadas respecto a S, por la matriz de cambio de base de S a B:

$$[\mathbf{u}]_B = C_{S\to B}[\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Mientras que **u** se obtiene mediante aplicación de la definición de coordenadas:

$$[\mathbf{u}]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{u} = 2v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + v_5$$

OPERACIONES ENTRE SUBESPACIOS

26.- Sea $V = M_{2\times 2}$, con operaciones convencionales. **Solo uno** de los siguientes subconjuntos **no es** un subespacio de V:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\; 2a + 1 = 3 + b + d - 2 \right\} \quad H_2 = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a+b & a+c \\ a+d & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

a) Identifique el subconjunto que no es un subespacios de V. (Justifique su respuesta)
b) Halle una base y la dimensión de los subespacios dados.
c) Determine la intersección, y el espacio suma de los subespacios dados; junto con sus

- **H_3 NO ES UN SUBESPACIO**

  Porque H_3 no contiene al neutro del espacio.

- **HALLAR BASES Y LAS DIMENSIONES**

  La base de H_2 es su mismo conjunto generador puesto que sus vectores son L.I. (se nota por simple inspección, pues ninguno es múltiplo de otro). Por lo tanto, $\dim H_2 = 2$.

  Para H_1, se reemplaza la condición 2a–b–d=0, o sea d=2a–b, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 2a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

  Es decir, $\dim H_1 = 3$, y la base es:

$$B_{H1} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- **INTERSECCIÓN DE LOS SUBESPACIOS DADOS; SU BASE Y DIMENSIÓN**

  Para la intersección:

  Se requieren las condiciones de H_2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \\ -1 & 0 & d \end{array}\right) \xrightarrow{f4+f1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & d+a \end{array}\right) \xrightarrow{f4-f2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d+a-b \end{array}\right)$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, c = 0 \ \wedge \ d+a-b = 0 \right\}$$

  Por lo tanto la intersección es el conjunto donde se verifican las condiciones de H_1 **y** de H_2:

$$H_1 \cap H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, 2a-b-d = 0 \ \wedge \ c = 0 \ \wedge \ d+a-b = 0 \right\}$$

  Se obtiene una base de la intersección mediante las condiciones del conjunto, que conviene simplificar mediante Gauss en este caso:

$$\left\{ \begin{array}{r} d+a-b=0 \\ 2a-b-d=0 \\ c=0 \end{array} \right. \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f2-2f1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f1+f2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Es decir, $a = 2d$, $b = 3d$, $c = 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d & 3d \\ 0 & d \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  Luego, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim H1 \cap H2 = 1$.

- **SUMA DE LOS SUBESPACIOS DADOS; SU BASE Y DIMENSIÓN**

  La dimensión del espacio suma es:

$$\dim(H1+H2) = \dim H1 + \dim H2 - \dim H1 \cap H2 = 2+3-1 = 4$$

  Es decir, que se trata de $H1 + H2 = M_{2\times 2}$, y su base puede ser la base canónica:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

27.- Sea el espacio vectorial real V=P_3. Sean los subespacios de V:

$$H=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in P_3\,/\;a-b+c=0\wedge a+2b-d=0\right\}\quad \text{y}$$
$$W=gen\left\{4+x+x^2+3x^3,\;-1-x^2+2x^3\right\}$$

a) Proporcione un ejemplo que muestre que H∪W no es un subespacio de V.
b) ¿Es el polinomio p(x)=3+x–2x^2+5x^3 un elemento de $H\cap W$? Justifique su respuesta.
c) Halle la dimensión de H+W.
d) ¿Es H+W una suma directa? Justifique su respuesta.

Observando los temas planteados, necesitaremos información sobre las condiciones de pertenencia a W; así como bases para H y W. Determinando W:

$$\begin{aligned}a+bx+cx^2+dx^3&=\alpha_1(4+x+x^2+3x^3)+\alpha_2(-1-x^2+2x^3)\\&=(4\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_1)x+(\alpha_1-\alpha_2)x^2+(3\alpha_1+2\alpha_2)x^3\end{aligned}$$

De donde se obtiene un sistema de ecuaciones a resolver:

$$\begin{cases}4\alpha_1-\alpha_2=a\\ \alpha_1=b\\ \alpha_1-\alpha_2=c\\ 3\alpha_1+2\alpha_2=d\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}4&-1&a\\1&0&b\\1&-1&c\\3&2&d\end{array}\right)\rightarrow\cdots\left(\begin{array}{cc|c}1&0&b\\0&-1&c-b\\0&0&a-3b-c\\0&0&d-5b+2c\end{array}\right)$$

Por lo tanto:

$$W=\left\{a+bx+cx^2+dx^3\in P_3\,/\;a-3b-c=0\;\wedge\;d-5b+2c=0\right\}$$

- **UN EJEMPLO QUE MUESTRA QUE H∪W NO ES UN SUBESPACIO DE V.**

H∪W no es un espacio, se lo mostrará con un contraejemplo a la primera cerradura.

$$Sea\ v_1\in H,\ pero\ v_1\notin W,\ de\ todos\ modos\ v_1\in H\cup W$$

$$v_1=1-x^2+x^3$$

$$Sea\ v_2\in W,\ pero\ v_2\notin H,\ de\ todos\ modos\ v_2\in H\cup W$$

$$v_2=-1-x^2+2x^3$$

Pero se puede verificar que $v_1+v_2\notin H$ y $v_1+v_2\notin W$, por lo tanto $v_1+v_2\notin H\cup W$:

$v_1+v_2=-2x^2+3x^3$, que no cumple con las condiciones de pertenencia, ni de H ni de W.

- **EL POLINOMIO p(x)=3+x–2x^2+5x^3 NO ES UN ELEMENTO DE $H\cap W$**

No, p(x) pertenece a H pero no cumple los requisitos para estar en W.

- **LA DIMENSIÓN DE H+W.**

Dado que dim(H+W)=dim(H)+dim(W)-dim(H∩W), necesitamos calcular una base para H y una para la intersección. En cuanto a W, el conjunto generados proporcionado es también L.I., pues no son múltiplos entre ellos; por lo tanto es también una base y dim(W)=2.

Base H= $\{1+x-x^2,\ x-x^2+2x^3\}$ pues:

$$\begin{aligned} a+bx+cx^2+dx^3 &= a+bx+(b-a)x^2+(a+2b)x^3 \\ &= a(1+x-x^2)+b(x-x^2+2x^3) \end{aligned}$$

Luego, dim(H)=2.

Para hallar una base y la dimensión de la intersección, se resuelve el sistema formado por las condiciones de H y las condiciones de W halladas:

$$\begin{cases} a-b+c=0 \\ a+2b-d=0 \\ a-3b-c=0 \\ -5b+2c+d=0 \end{cases} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \end{array}\right)$$

La solución única encontrada indica que el único elemento en la intersección es el vector neutro: $H \cap W = \{\mathbf{n}\}$. Por lo tanto, $\dim(H \cap W)=0$.

En consecuencia: $\dim(H+W)= \dim(H)+\dim(W)-\dim(H \cap W)=2+2-0=4$

- **¿ES H+W UNA SUMA DIRECTA? JUSTIFIQUE SU RESPUESTA.**
  Sí, a juzgar por las dimensiones halladas en los literales anteriores.

28.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Sea V un espacio vectorial, y sean H, W dos subespacios de V. Si $V = H + W$, entonces $\dim V = \dim H + \dim W$.

- **FALSO**. El teorema establece que

$$\dim(H1+H2) = \dim H1 + \dim H2 - \dim(H1 \cap H2)$$

y nada en el antecedente del enunciado garantiza que $\dim(H1 \cap H2)$ sea cero, luego podemos buscar un contraejemplo:

Sea $V = \mathbb{R}^2$, $H = \mathbb{R}^2$ y $W = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y = 2x\}$. W es una recta que pasa por el origen, H es todo R^2, por lo tanto $H \cap W = W$. Luego, dim(H)=2, $\dim(H \cap W)=1$, dim(W)=1.

Es sencillo verificar que $R^2=H+W$; pues $H+W=\text{gen}(\text{base}_H \cup \text{base}_W)$ y la base de H ya genera R^2, pues H es R^2. Esto valida el antecedente del enunciado, sin embargo no se cumple que: dim(V)=dim(H)+dim(W).

CONCLUSIÓN: La proposición es **FALSA**.

29.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Sea V un espacio vectorial, y sean H, W dos subespacios de V. Si $H \cap W = \{\mathbf{n}\}$ entonces $V = H \oplus W$.

- **FALSO**. Para que V sea la suma directa de H con W, debe primero cumplirse que sea una suma normal V=H+W, y además $H \cap W = \{\mathbf{n}\}$. El del enunciado solo garantiza esta última condición. *Ergo*, se puede buscar un contraejemplo:

Sea $V=\mathbb{R}^2$, $H=\{\mathbf{n}\}$ y $W=\{(x,y)\in R^2 \,/\, y=2x\}$. W es una recta que pasa por el origen, H es el espacio trivial (el neutro de R^2), por lo tanto $H\cap W=\{\mathbf{n}\}$. Luego, se tiene que dim(H)=0, dim($H\cap W$)=0, dim(W)=1. Al calcular la dimensión del espacio suma:

dim(H+W)=dim(H)+dim(W)-dim($H\cap W$) = 0+1-0 =1. Por lo cual es imposible que estos subespacios sumen el total de R^2 cuando su suma tiene dimensión 1.

CONCLUSIÓN: La proposición es **FALSA**.

30.- Sea $V=\mathbb{R}^4$, sean los subespacios $H=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x-y-z-w=0\}$ y $W=gen\{(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$.

a) Si $v=(1,2,1,2)$, determine, de ser posible, un vector $h\in H$ y otro vector $w\in W$ tales que $v=h+w$.

b) Determine si $\mathbb{R}^4=H+W$.

c) ¿Es $\mathbb{R}^4=H\oplus W$? Justifique su respuesta

Estos tres problemas son variantes de la misma cuestión. Si el espacio V es una suma de H más W, entonces el literal a) sí tiene solución. La cantidad de soluciones posibles depende si tal suma es directa o no. Por este motivo, se empezará resolviendo el literal b).

- **HALLAR LA SUMA H+W**

La base de W es dada (su conjunto generador es L.I.); se requiere una base de H, para aplicar el teorema que establece que $H+W=gen\{BaseH\cup BaseW\}$.

Construimos el vector típico de H mediante sus condiciones $(y+z+w,y,z,w)$, lo que permite hallar la base:

$$BaseH=\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1)\}$$

(**NOTA**: en este momento, se sabe que dim H=3, y que es imposible que V sea una suma directa de H y W, pero se retomará esta discusión luego).

La suma se obtiene como el espacio generado por la unión de las bases:

$$(a,b,c,d)=\alpha_1(1,1,0,0)+\alpha_2(1,0,1,0)+\alpha_3(1,0,0,1)+\alpha_4(0,1,1,0)+\alpha_5(0,1,0,1)$$

Lo que lleva al sistema:

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=a\\ \alpha_1+\alpha_4+\alpha_5=b\\ \alpha_2+\alpha_4=c\\ \alpha_3+\alpha_5=d\end{cases}\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&1&1&b\\0&1&0&1&0&c\\0&0&1&0&1&d\\1&1&1&0&0&a\end{array}\right)\xrightarrow{f4-f3-f2-f1}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&1&1&b\\0&1&0&1&0&c\\0&0&1&0&1&d\\0&0&0&-2&-2&a-b-c-d\end{array}\right)$$

Puesto que el sistema es consistente, sin importar los valores de a, b, c y d; entonces efectivamente V es una suma de H y W, $\mathbb{R}^4=H+W$.

- **¿ES UNA SUMA DIRECTA?**

No. El sistema resuelto indica que, para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^4$, es posible hallar coeficientes α_i tales que $v = h + w$, donde $h \in H$ y $w \in W$. Sin embargo, por tener infinitas soluciones, existen infinitos modos de construir tales elementos $h \in H$ y $w \in W$. Eso indica que la suma no es directa, pues la suma directa necesariamente involucra una solución única a este problema.

Además, dada las dimensiones de ambos subespacios, era imposible obtener una suma directa, pues en una suma directa se cumple que

$$\dim H \oplus W = \dim H + \dim W$$

Mientras en la suma normal se cumple que:

$$\dim(H + W) = \dim H + \dim W - \dim H \cap W$$

Y dado que $\dim H = 3$ y $\dim W = 2$, jamás se cumpliría que:

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim H + \dim W.$$

- **CONSTRUCCIÓN DE V**

En este caso, $v = (a,b,c,d) = (1,2,1,2)$. Reemplazando en el sistema de ecuaciones resuelto previamente:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{0.5f4} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Si tomamos como variable libre $\alpha_5 \in \mathbb{R}$, y elegimos $\alpha_5 = 0$; entonces la solución queda determinada como $\alpha_4 = 2$, $\alpha_3 = 2$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_1 = 0$; es decir:

$$\begin{aligned}(1,2,1,2) &= \alpha_1(1,1,0,0) + \alpha_2(1,0,1,0) + \alpha_3(1,0,0,1) + \alpha_4(0,1,1,0) + \alpha_5(0,1,0,1) \\ &= [0 \odot (1,1,0,0) - (1,0,1,0) + 2 \odot (1,0,0,1)] + [2 \odot (0,1,1,0) + 0 \odot (0,1,0,1)]\end{aligned}$$

Donde:

$$h = [0(1,1,0,0) - (1,0,1,0) + 2(1,0,0,1)] = (1,0,-1,2) \in H$$

Y:

$$w = [2(0,1,1,0) + 0(0,1,0,1)] = (0,2,2,0) \in W$$

ESPACIOS ASOCIADOS A UNA MATRIZ

31.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Determine R^A y C^A.
b) Determine $\nu(A)$ y $\rho(A)$ así como $\dim(R^A)$
c) Determine si (2, 4, 4) pertenece a la imagen de A

- **ESPACIOS RENGLÓN R^A Y COLUMNA C^A:**

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & y_2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 5 & y_3 \end{array}\right) \xrightarrow[f3-3f1]{f2-2f1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y_2-2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & y_3-3y_1 \end{array}\right)$$

Se obtiene que $C^A = \left\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y_2 - 2y_1 = 0\right\}$.

Resolviendo para el Espacio Renglón R^A:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 2 & 3 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \\ 1 & 2 & 5 & e \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f3-f1 \\ f4-f1 \\ f5-f1}]{f2-f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d-a \\ 0 & 0 & 2 & e-a \end{array}\right)$$

Se obtiene $R^A = \left\{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5 \,/\, b-a=0 \;\wedge\; c-a=0 \;\wedge\; d-a=0\right\}$.

- **NULIDAD Y RANDO DE LA MATRIZ**

El rango de la matriz es 2 (dos filas que no se hicieron cero luego de la reducción por Gauss), por lo tanto:

$\rho = 2 = \dim R^A$ y a partir de $\rho + \nu = 5$ se obtiene $\nu = 3$.

- **EL VECTOR (2,4,4)**

Sí pertenece a la imagen, porque cumple con las condiciones de C^A y la imagen y el espacio columna son siempre iguales.

32.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Sea $A \in M_{3\times5}$, entonces $\nu(A) > 0$.

VERDADERO.

Imaginemos una matriz como la mencionada:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \end{array}\right)_{3X5}$$

Se conoce que la Imagen es un subespacio de R^3, mientras que el Núcleo de R^5, por lo tanto sus dimensiones cumplen con $0 \le \rho \le 3$ y $0 \le \nu \le 5$, sin embargo el teorema de la dimensión establece que $\rho + \nu = 5$. Rango y nulidad por lo tanto se restringen solo a los siguientes valores:

ρ	ν
0	5
1	4
2	3
3	2

Por lo tanto es verdadero, se garantiza que la nulidad será mayor que cero. Además, si la nulidad fuera cero, el rango debería ser 5 y eso no es posible en una matriz de solo 3 filas.

33.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar los espacios: Im(A), Ker(A), C^A y R^A.
b) Hallar las respectivas bases y dimensiones de los espacios del literal a).
c) ¿Es el sistema $Ax = b$ es consistente cuando $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Solución:

- **IMAGEN, BASE Y DIMENSIÓN:**

Según la definición, $\mathrm{Im}(A) = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \,/\, \exists x \in \mathbb{R}^n \quad A\mathbf{x} = \mathbf{y} \right\}$, en este caso m=3 y n=5. Es decir, se plantea: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$, y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$$ que conlleva al sistema:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & y1 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & y2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & y3 \end{array}\right) \xrightarrow[f3-f1]{f2-5f1} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & y1 \\ 0 & -12 & -24 & -18 & -6 & y2-5y1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -1 & y3-y1 \end{array}\right) \xrightarrow[f2-6f3]{f2 \leftrightarrow f3}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & y1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -1 & y3-y1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y2+y1-6y3 \end{array}\right)$$

El sistema no es siempre consistente, sino que tiene una condición sobre los y_i. Por lo tanto:

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, y2 + y1 - 6y3 = 0 \right\}$$

Además C^A e Im(A) son iguales.

¿CÓMO HALLAR UNA BASE? Se podría utilizar las condiciones de Im(A) para encontrar un conjunto base sin problemas. Sin embargo, decido que prefiero elegir las columnas de la matriz que son linealmente independientes. ¿Cómo me doy cuenta de qué columnas son? Son aquellas asociadas a los pivotes del sistema

escalonado. En este ejemplo, solo son las dos primeras columnas, por lo tanto una base es $Base_{IM} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y su dimensión (o rango) es $\rho(A) = 2$.

- **NÚCLEO, BASE Y DIMENSIÓN:**

  Según la definición, $Ker(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ / \ A\mathbf{x} = \overline{\mathbf{0}} \right\}$, el sistema correspondiente se obtiene del sistema de la imagen, reemplazando **y** con **0**, el cero vector:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & y1 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -1 & y3-y1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y2+y1-6y3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Pero ahora nos preguntamos las condiciones de los x_i, por lo tanto:

$$Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \ / \ \begin{array}{c} x1+3x2+5x3+4x4+2x5=0 \\ -2x2-4x3-3x4-x5=0 \end{array} \right\}$$

  ¿CÓMO HALLAR UNA BASE? En este caso se utilizan las condiciones del conjunto; se podría despejar x1 y x5 en función de las demás variables (libres) que produce la base:

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2+3x3+2x4 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ -2x2-4x3-3x4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x2 \\ x2 \\ 0 \\ 0 \\ -2x2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x3 \\ 0 \\ x3 \\ 0 \\ -4x3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x4 \\ 0 \\ 0 \\ x4 \\ -3x4 \end{pmatrix}$$

  Por lo tanto una base es:

$$Base_{KER} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

  Y su dimensión es $\nu = 3$. (Nótese que nulidad 3 se puede despejar del teorema de la dimensión $\rho + \nu = n$).

- **ESPACIO FILA (O ESPACIO RENGLÓN), BASE Y DIMENSIÓN:**

  Según la definición, es generado por las filas de la matriz, por lo tanto, es como hallar la imagen de A^T:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & a \\ 3 & 3 & 1 & b \\ 5 & 1 & 1 & c \\ 4 & 2 & 1 & d \\ 2 & 4 & 1 & e \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f4-4f1 \\ f5-2f1}]{\substack{f2-3f1 \\ f3-5f1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & a \\ 0 & -12 & -2 & b-3a \\ 0 & -24 & -4 & c-5a \\ 0 & -18 & -3 & d-4a \\ 0 & -6 & -1 & e-2a \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{f4-3f5 \\ f5 \leftrightarrow f2}]{\substack{f2-2f5 \\ f3-4f5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 1 & a \\ 0 & -6 & -1 & e-2a \\ 0 & 0 & 0 & c+3a-4e \\ 0 & 0 & 0 & d+2a-3e \\ 0 & 0 & 0 & b+a-2e \end{array}\right)$$

Por lo tanto:

$$R^A = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \,/\, \begin{array}{c} c+3a-4e=0 \\ d+2a-3e=0 \\ b+a-2e=0 \end{array} \right\}$$

¿CÓMO HALLAR UNA BASE? La dimensión es 3, por el teorema que afirma que $\dim R^A = \dim C^A$. Para hallar la base, se pueden utilizar las condiciones del conjunto, pero, recordando que es generado por las filas, basta elegir aquellas filas que son linealmente independientes. ¿Cómo reconocerlas? Un pequeño test de independencia puede ayudar, pero podemos reconocerlas por el sistema correspondiente ya escalonado, cuyas variables libres son las filas dependientes, y sus pivotes son las columnas independientes (pero esas columnas son las filas de la matriz original). Hay 2 pivotes, de las dos primeras columnas, es decir, las dos primeras filas de la matriz forman una base de R^A:

$$Base_{RA} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

e**34.-** Con respecto al siguiente sistema: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = a \\ 2x_1 - 4x_2 = b \\ x_1 - 14x_2 + \mathbf{m}x_3 = c \end{cases}$

Si A es la matriz de coeficientes del sistema, y **m** un elemento de los números reales, responder:

a) ¿Qué valores debe tener **m** para que la matriz A tenga rango completo?
b) ¿Qué valores debe tener **m** para que el kernel de A contenga más de un vector?
c) Si la matriz no es de rango completo, ¿qué condiciones existen para que un vector pertenezca a la imagen de A?
d) ¿Qué valores debe tener **m** para que el espacio fila de A tenga dimensión 1?:

- **IMAGEN Y RANGO.**

Se procede primero a analizar la imagen de A, pues varias preguntas se relacionan a esto:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & a \\ 2 & -4 & 0 & b \\ 1 & -14 & m & c \end{array}\right) \xrightarrow[f3-f1]{f2-2f1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & -8 & -10 & b-2a \\ 0 & -16 & m-5 & c-a \end{array}\right) \xrightarrow[f3-2f2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & -8 & -10 & b-2a \\ 0 & 0 & m+15 & c-2b+3a \end{array}\right)$$

- **RANGO COMPLETO**

  Para que la matriz de coeficientes tenga rango completo, es decir, el rango sea igual al número de filas, debe suceder que $m+15 \neq 0$, o $m \in \mathbb{R} - \{-15\}$.

- **NÚMERO DE ELEMENTOS EN EL KERNEL**

  El sistema resuelto para el Ker(A) se obtiene reemplazando con ceros la aumentada del sistema anterior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -8 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & m+15 & 0 \end{array}\right)$$

  De donde se observa que si $m \neq -15$, hay solución única. Por lo tanto, para que halla más de un elemento en el kernel requerimos infinidad de soluciones al sistema homogéneo, es decir que $m = -15$.

- **PERTENENCIA A LA IMAGEN**

  Si la matriz no tiene rango completo, entonces $m = -15$, en cuyo caso el sistema resuelto luce así:

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 5 & a \\ 0 & -8 & -10 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-2b+3a \end{array}\right)$$

  Por lo tanto, para que un vector $v = (a,b,c)$ en $\mathbb{R}^3$ pertenezca a la imagen, necesariamente debe ocurrir que $c-2b+3a = 0$.

- **DIMENSIÓN DEL ESPACIO FILA**

  Es imposible que el espacio fila tenga dimensión 1, pues su dimensión coincide con el rango y, en este caso, si $m = -15$ el rango es 2; y si $m \neq -15$ el rango es 3.

35.- La siguiente es una matriz de cambio de base entre dos bases desconocidas de $\mathbb{R}^6$:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -2 & 1 & 5 & 6e & \pi \\ 2 & e & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} & \pi & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \pi \\ 1 & 2 & e & 4 & 5 & 6 \\ \pi & -2\pi & -\sqrt{7} & 1 & 2 & \ln(3) \end{pmatrix}:$$

a) Determine Im(A), Ker(A), el espacio fila EL^A y el espacio columna EC^A
b) Determine las respectivas dimensiones los espacios mencionados.

- **ESPACIOS ASOCIADOS**

Dado que es una matriz de cambio de base, se trata de una matriz invertible, cuyo $\det A \neq 0$, luego su rango es completo, lo que quiere decir que:

$$\operatorname{Im} A = EC^A = EL^A = \mathbb{R}^6$$

Y, mediante el teorema de la dimensión, sabemos que $\nu(A) = 0$, es decir que:

$$\ker A = \{\overline{\mathbf{0}}_V\} = \{(0,0,0,0,0,0)\}$$

- **DIMENSIÓN DE LOS ESPACIOS ASOCIADOS**

$$\rho(A) = \dim EC^A = \dim EL^A = 6$$

$$\nu(A) = \dim Ker(A) = 0$$

TRANSFORMACIONES LINEALES, 1RA PARTE.

36.- Sea $<V,\oplus,\odot>$ el espacio vectorial dado por $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones de suma y producto por un escalar definidos como:

$$\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1+a2-5 \\ b1+b2+3 \\ c1+c2+8 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha \odot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a-5\alpha+5 \\ \alpha.b+3\alpha-3 \\ \alpha.c+8\alpha-8 \end{pmatrix}$$

mientras que $W = S_{2\times 2}$ con las operaciones convencionales.
Determine si es lineal la función $T: W \to V$ cuya regla de correspondencia es:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b-2c+5 \\ 4a+8b+6c-3 \\ 10a+10b+9c-8 \end{pmatrix}.$$

Hay que probar las dos propiedades de linealidad. Sean: $\alpha \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

- $\forall A, B \in S_{2\times 2} \quad T(A+B) = T(A) \oplus T(B)$

$$T(A+B) = T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(a_1+a_2)-5(b_1+b_2)-2(c_1+c_2)+5 \\ 4(a_1+a_2)+8(b_1+b_2)+6(c_1+c_2)-3 \\ 10(a_1+a_2)+10(b_1+b_2)+9(c_1+c_2)-8 \end{pmatrix}$$

Por otro lado: $T(A) \oplus T(B) = \begin{pmatrix} -3a_1-5b_1-2c_1+5 \\ 4a_1+8b_1+6c_1-3 \\ 10a_1+10b_1+9c_1-8 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -3a_2-5b_2-2c_2+5 \\ 4a_2+8b_2+6c_2-3 \\ 10a_2+10b_2+9c_2-8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-3a_1-5b_1-2c_1+5)+(-3a_2-5b_2-2c_2+5)-5 \\ (4a_1+8b_1+6c_1-3)+(4a_2+8b_2+6c_2-3)+3 \\ (10a_1+10b_1+9c_1-8)+(10a_2+10b_2+9c_2-8)+8 \end{pmatrix} = T(A+B)$$

- $\forall k \in \mathbb{R} \ \forall A \in S_{2\times 2} \quad T(kA) = k \odot T(A)$

$$T(kA)=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kb_1 & kc_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3(ka_1)-5(kb_1)-2(kc_1)+5 \\ 4(ka_1)+8(kb_1)+6(kc_1)-3 \\ 10(ka_1)+10(kb_1)+9(kc_1)-8 \end{pmatrix}$$

Por otro lado $k\odot T(A)=k\odot\begin{pmatrix} -3a_1-5b_1-2c_1+5 \\ 4a_1+8b_1+6c_1-3 \\ 10a_1+10b_1+9c_1-8 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} k(-3a_1-5b_1-2c_1+5)-5k+5 \\ k(4a_1+8b_1+6c_1-3)+3k-3 \\ k(10a_1+10b_1+9c_1-8)+8k-8 \end{pmatrix}=T(kA)$$

CONCLUSIÓN: T es una transformación lineal.

37.- Una transformación puede determinarse si se sabe cómo afecta a un conjunto base. Por ejemplo: Sea B={x^2–1, x^2+1, x –1} es una base de P_2, determine la *regla de correspondencia* de la transformación T de P_2 a R^3, si se sabe que:

T(x^2 –1) = (1, 2, 0)

T(x^2+1) = (0, 0, 0)

T(x –1) = (0, –1 , –1)

Necesitamos conocer la transformada de un vector típico del espacio de partida:

$$T(ax^2+bx+c)=?$$

Escribiendo el vector típico del espacio de partida como una combinación lineal de la base:

$$ax^2+bx+c=k_1(x^2-1)+k_2(x^2+1)+k_3(x-1)$$

Lo que conduce al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1+k_2=a \\ k_3=b \\ k_1-k_2-k_3=c \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[f3-f1]{f2\leftrightarrow f3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

Es decir:

$k_3=b$

$k_2=(a-b-c)/2$

$k_1=a-k_2=a-(a-b-c)/2=(a+b+c)/2$

Luego:

$T(ax^2+bx+c)=T[k_1(x^2-1)+k_2(x^2+1)+k_3(x-1)]$

$T(ax^2+bx+c)=k_1T(x^2-1)+k_2T(x^2+1)+k_3T(x-1)$

Reemplazando:

$$T(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix} (a+b+c)/2 \\ a+c \\ -b \end{pmatrix}$$

38.- Determinar si la siguiente función es una transformación lineal:

$T: M_{2\times 2} \to R$ tal que, para toda matriz A del espacio de partida, $T(A) = \det(A)$

T no cumple ninguno de los dos axiomas de linealidad, por ejemplo, en la segunda propiedad:

$$\forall k \in \mathbb{R}\ \forall A \in M_{2\times 2} \quad T(kA) = kT(A)$$

Se tiene que:

$$T(kA) = \det(kA) = k^2 \det(A) \neq kT(A)$$

Pues por propiedad de los determinantes:

$$\forall A \in M_{n\times n} \quad \det(kA) = k^n \det(A)$$

CONCLUSIÓN: T no es una transformación lineal.

39.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, y $T(v) = \bar{\mathbf{0}}_W$ entonces $v = \bar{\mathbf{0}}_V$ (es decir, si T(v) es el neutro de W, entonces v es el neutro de V).

Falso. Cualquier transformación cuyo kernel no sea trivial es un contraejemplo a esta afirmación. Por ejemplo:

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x-y, y-x)$.

CONCLUSIÓN: Falso.

40.- Sea T una transformación lineal. Si $T(1) = x^2 + 2$, y $T(x) = x + 3$, calcular $T(-x+2)$

Por la linealidad de T:

$$T(-x+2) = -T(x) + 2T(1)$$

Por lo tanto:

$$T(-x+2) = -(x+3) + 2(x^2+2) = 2x^2 - x + 1$$

TRANSFORMACIÓN LINEAL COMO UNA FUNCIÓN

41.- En la siguiente transformación lineal $T: P_2 \to P_3$ tal que $T(p(x)) = x^2 p'(x)$

a) Encontrar Núcleo, Imagen, rango y nulidad de T
b) Indique según los resultados obtenidos si tal transformación es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e invertible.

Cuando piden Núcleo e Imagen, es mejor comenzar por imagen:

- **IMAGEN Y RANGO:**

Sean $v = ax^2 + bx + c \in P_2$ y $w = w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 \in P_3$

$T(v) = x^2(2ax + b) = 2ax^3 + bx^2$

$T(v) = w \equiv 2ax^3 + bx^2 + 0x + 0 = w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0$

de donde se obtiene el sistema: $\begin{cases} 2a = w_3 \\ b = w_2 \\ 0 = w_1 \\ 0 = w_0 \end{cases}$ o $\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & w_3 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & w_0 \end{array}\right)$ es decir, la imagen es:

$\mathrm{Im}(T) = \left\{ w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 \in P_3 \,/\, w_1 = w_0 = 0 \right\}$, con $Base\,\mathrm{Im} = \left\{ x^3, x^2 \right\}$ y $\rho = 2$.

- **NÚCLEO Y NULIDAD:**

  Con $v = ax^2 + bx + c \in P_2$, requerimos que $T(v) = \overline{0v}$, es decir:

  $T(v) = x^2(2ax + b) = 2ax^3 + bx^2 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$, lo que conduce a:

  $\left(\begin{array}{cc:c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, es decir a=0 y b=0. Dado que no hay condiciones para c, entonces $c \in \mathbb{R}$

  $Nu(T) = \left\{ ax^2 + bx + c \in P_2 \,/\, a = b = 0 \right\}$ con $BaseNu = \left\{ 1 \right\}$ y $\nu = 1$

- **INYECTIVIDAD Y SOBREYECTIVIDAD:**

  No es inyectiva porque su nulidad no es cero; y no es sobreyectiva porque su rango no es la dimensión del espacio de llegada (no es 4). Por lo tanto no es biyectiva, ni invertible.

42.- En la siguiente transformación lineal $T: \; P_2 \to M_{2\times 2}$

$$T[p(x)] = \begin{pmatrix} p(1) & p'(0) \\ p(1) & p(-1) \end{pmatrix}$$

a) Encontrar Imagen, base de la Imagen y el rango de T

b) Encontrar Núcleo, base del Núcleo y la nulidad de T

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces la regla de correspondencia es:

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+b+c & b \\ a+b+c & a-b+c \end{pmatrix}$$

- **IMAGEN:**

  Sea el vector del espacio de llegada $w = \begin{pmatrix} w1 & w2 \\ w3 & w4 \end{pmatrix}$

  Entonces

$$T(p) = w$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b \\ a+b+c & a-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w1 & w2 \\ w3 & w4 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene el sistema a resolver:

$$\begin{cases} a+b+c = w1 \\ b = w2 \\ a+b+c = w3 \\ a-b+c = w4 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & w1 \\ 0 & 1 & 0 & w2 \\ 1 & 1 & 1 & w3 \\ 1 & -1 & 1 & w4 \end{array}\right) \to \ldots \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & w1 \\ 0 & 1 & 0 & w2 \\ 0 & 0 & 0 & w3 - w1 \\ 0 & 0 & 0 & w4 - w1 + 2w2 \end{array}\right)$$

Respuestas:

$$\text{Im} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2} \,/\, w_3 - w_1 = 0 \quad y \quad w_4 - w_1 + 2w_2 = 0 \right\}$$

Base:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1 & w_1 - 2w_2 \end{pmatrix} \rightarrow Base = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Rango = 2

- **NÚCLEO**

  Tomamos el sistema resuelto de la imagen y lo convertimos en homogéneo (pues se cumple que $T(p) = \overline{0}_V$), y se analiza para las incógnitas a, b y c:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  es decir:

$$Nu = \left\{ ax^2 + bx + c \in P_2 \,/\, a + c = 0 \quad y \quad b = 0 \right\}$$

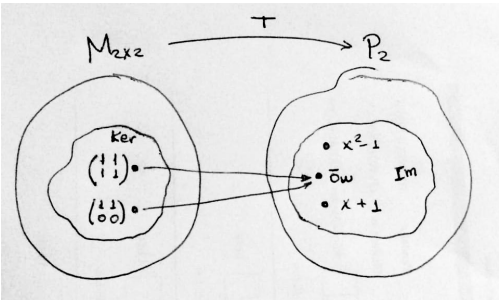
  $Base = \left\{ -x^2 + 1 \right\}$

  Nulidad=1

43.- Construir, de ser posible, una transformación lineal $T : M_{2\times 2} \rightarrow P_2$ tal que:

- El núcleo sea $Ker(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
- mientras que su imagen es $im(T) = \left\{ ax^2 + bx + (b-a) \,/\, \; a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Existen muchas soluciones posibles para este tema, pero el procedimiento pasa por encontrar una base del espacio de partida que satisfaga las condiciones dadas, de ser posible. Para ello hallamos la base del Ker(T) y de la Im(T), y nos ayudamos con un diagrama de Venn:



Los vectores de la base del Ker se transforman en el **cero-vector** de llegada, pero en la imagen están también dos vectores de la base, hallados del conjunto dado en el problema.

Es decir, se tiene Nulidad=2 (dos vectores en la base del núcleo) y Rango=2 (dos vectores en la base de la imagen. Sumando, rango + nulidad se obtiene 4, que es la dimensión del espacio de partida, lo que indica que sí es posible construir esta transformación respetando los teoremas y las condiciones dadas en el ejercicio.

Se necesita ahora una base del espacio de partida, pero solo hay dos vectores en el Ker(T), se deben elegir dos vectores más de fuera del Ker (porque si estuvieran adentro formarían un conjunto LD y no serían base), podemos elegir vectores de afuera, así que por lo general se recomienda probar con los vectores de la base canónica; **siempre y cuando el conjunto resultante sea LI, no LD**.

Por ejemplo, una **mala elección** sería:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \rightarrow son\ LD$$

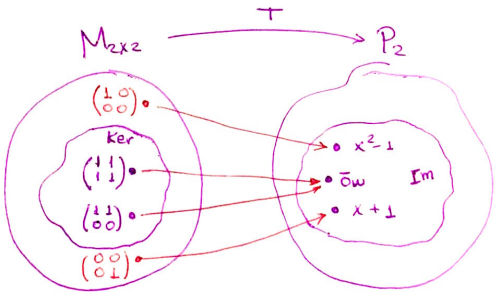
Los dos vectores de la base canónica al sumarse forman uno de los vectores de la base del Ker, por lo tanto son LD y no es una base. Entonces probamos otros vectores de la base canónica:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \rightarrow son\ LI$$

Se recomienda hacer el test de independencia lineal para confirmar antes de proseguir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f4 \leftrightarrow f1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) solución\ única \rightarrow son\ LI$$

Ya tenemos una base de partida, ahora construimos la transformación, ayudándonos con el diagrama de Venn:



Para construir la regla de correspondencia, necesitamos la transformada de un vector de partida cualquiera:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ?$$

No sabemos esta expresión, pero sabemos cómo se transforma la base (según el último diagrama de Venn), entonces podemos escribir al vector cualquiera como combinación lineal de la base elegida previamente. Antes de transformar, es necesario hallar los escalares "alfas":

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{f4 \leftrightarrow f1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha 1 = c \\ \alpha 2 = b - c \\ \alpha 3 = a - b \\ \alpha 4 = d - c \end{array}\right.$$

Ahora sí, transformamos la combinación lineal para hallar la regla de correspondencia

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= T\left[\alpha_1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \alpha_1 T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \overline{0}_V + \overline{0}_V + (a-b)T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (d-c)T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los vectores del Ker se convierten en el $\mathbf{0_V}$ de llegada, así que no influye en la regla final, que sería:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)\left(x^2 - 1\right) + (d-c)\left(x+1\right)$$