ÁLGEBRA LINEAL: EJERCICIOS RESUELTOS

Isaac Mancero Mosquera

(draft)

ADVERTENCIA PARA EL ESTUDIANTE:

- Falibilidad del autor: Yo me puedo equivocar.
- No unicidad: Existen ejercicios con más de una solución, y con más de un modo de resolverlos.
- No completitud: Bajo ningún concepto este documento contiene todos los tipos de problemas de la materia.

COMO USAR ESTE DOCUMENTO:

Este documento es una guía complementaria a los problemas planteados. La solución dada no es necesariamente la más eficiente o más rápida, pero es la más adecuada a la estrategia didáctica utilizada en el aula. Se puede imprimir, fotocopiar y distribuir gratuitamente este documento citando su autor.

TRANSFORMACIONES LINEALES, 1RA PARTE.

36.- Sea $<V,\oplus,\odot>$ el espacio vectorial dado por $V=\mathbb{R}^3$ con las operaciones de suma y producto por un escalar definidos como:

$$\begin{pmatrix} a1 \\ b1 \\ c1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} a2 \\ b2 \\ c2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1+a2-5 \\ b1+b2+3 \\ c1+c2+8 \end{pmatrix} \text{ y } \alpha\odot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha.a-5\alpha+5 \\ \alpha.b+3\alpha-3 \\ \alpha.c+8\alpha-8 \end{pmatrix}$$

mientras que $W=S_{2\times2}$ con las operaciones convencionales.

Determine si es lineal la función $T:W\rightarrow V$ cuya regla de correspondencia es:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a-5b-2c+5 \\ 4a+8b+6c-3 \\ 10a+10b+9c-8 \end{pmatrix}.$$

Hay que probar las dos propiedades de linealidad. Sean: $\alpha\in\mathbb{R}$ y

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

- $\forall A,B\in S_{2\times2} \quad T(A+B)=T(A)\oplus T(B)$

$$T(A+B)=T\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ b_1+b_2 & c_1+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(a_1+a_2)-5(b_1+b_2)-2(c_1+c_2)+5 \\ 4(a_1+a_2)+8(b_1+b_2)+6(c_1+c_2)-3 \\ 10(a_1+a_2)+10(b_1+b_2)+9(c_1+c_2)-8 \end{pmatrix}$$

Por otro lado: $T(A)\oplus T(B)=\begin{pmatrix} -3a_1-5b_1-2c_1+5 \\ 4a_1+8b_1+6c_1-3 \\ 10a_1+10b_1+9c_1-8 \end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix} -3a_2-5b_2-2c_2+5 \\ 4a_2+8b_2+6c_2-3 \\ 10a_2+10b_2+9c_2-8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} (-3a_1 - 5b_1 - 2c_1 + 5) + (-3a_2 - 5b_2 - 2c_2 + 5) - 5 \\ (4a_1 + 8b_1 + 6c_1 - 3) + (4a_2 + 8b_2 + 6c_2 - 3) + 3 \\ (10a_1 + 10b_1 + 9c_1 - 8) + (10a_2 + 10b_2 + 9c_2 - 8) + 8 \end{pmatrix} = T(A+B)$$

- $\forall k \in \mathbb{R}\ \forall A \in S_{2\times 2} \quad T(kA) = k \odot T(A)$

$$T(kA) = \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 \\ kb_1 & kc_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3(ka_1) - 5(kb_1) - 2(kc_1) + 5 \\ 4(ka_1) + 8(kb_1) + 6(kc_1) - 3 \\ 10(ka_1) + 10(kb_1) + 9(kc_1) - 8 \end{pmatrix}$$

Por otro lado $k \odot T(A) = k \odot \begin{pmatrix} -3a_1 - 5b_1 - 2c_1 + 5 \\ 4a_1 + 8b_1 + 6c_1 - 3 \\ 10a_1 + 10b_1 + 9c_1 - 8 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} k(-3a_1 - 5b_1 - 2c_1 + 5) - 5k + 5 \\ k(4a_1 + 8b_1 + 6c_1 - 3) + 3k - 3 \\ k(10a_1 + 10b_1 + 9c_1 - 8) + 8k - 8 \end{pmatrix} = T(kA)$$

CONCLUSIÓN: T es una transformación lineal.

37.- Una transformación puede determinarse si se sabe cómo afecta a un conjunto base. Por ejemplo: Sea B={x^2–1, x^2+1, x –1} es una base de P_2, determine la *regla de correspondencia* de la transformación T de P_2 a R^3, si se sabe que:

T(x^2 –1) = (1, 2, 0)

T(x^2+1) = (0, 0, 0)

T(x –1) = (0, –1 , –1)

Necesitamos conocer la transformada de un vector típico del espacio de partida:

$$T(ax^2 + bx + c) = ?$$

Escribiendo el vector típico del espacio de partida como una combinación lineal de la base:

$$ax^2 + bx + c = k_1(x^2 - 1) + k_2(x^2 + 1) + k_3(x - 1)$$

Lo que conduce al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = a \\ k_3 = b \\ k_1 - k_2 - k_3 = c \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 1 & -1 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[f3-f1]{f2\leftrightarrow f3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & -1 & c-a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

Es decir:

$k_3 = b$

$k_2 = (a - b - c)/2$

$k_1 = a - k_2 = a - (a - b - c)/2 = (a + b + c)/2$

Luego:

$T(ax^2 + bx + c) = T[k_1(x^2 - 1) + k_2(x^2 + 1) + k_3(x - 1)]$

$T(ax^2 + bx + c) = k_1T(x^2 - 1) + k_2T(x^2 + 1) + k_3T(x - 1)$

Reemplazando:

$$T(ax^2+bx+c)=\begin{pmatrix}(a+b+c)/2\\ a+c\\ -b\end{pmatrix}$$

38.- Determinar si la siguiente función es una transformación lineal:

$T:M_{2\times 2}\to R$ tal que, para toda matriz A del espacio de partida, $T(A)=\det(A)$

T no cumple ninguno de los dos axiomas de linealidad, por ejemplo, en la segunda propiedad:

$$\forall k\in\mathbb{R}\ \forall A\in M_{2\times 2}\quad T(kA)=kT(A)$$

Se tiene que:

$$T(kA)=\det(kA)=k^2\det(A)\neq kT(A)$$

Pues por propiedad de los determinantes:

$$\forall A\in M_{n\times n}\quad \det(kA)=k^n\det(A)$$

CONCLUSIÓN: T no es una transformación lineal.

39.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Si $T:V\to W$ es una transformación lineal, y $T(v)=\overline{\mathbf{0}}_W$ entonces $v=\overline{\mathbf{0}}_V$ (es decir, si T(v) es el neutro de W, entonces v es el neutro de V).

Falso. Cualquier transformación cuyo kernel no sea trivial es un contraejemplo a esta afirmación. Por ejemplo:

$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(x-y,y-x)$.

CONCLUSIÓN: Falso.

40.- Sea T una transformación lineal. Si $T(1)=x^2+2$, y $T(x)=x+3$, calcular $T(-x+2)$

Por la linealidad de T:

$$T(-x+2)=-T(x)+2T(1)$$

Por lo tanto:

$$T(-x+2)=-(x+3)+2(x^2+2)=2x^2-x+1$$

TRANSFORMACIÓN LINEAL COMO UNA FUNCIÓN

41.- En la siguiente transformación lineal $T:P_2\to P_3$ tal que $T(p(x))=x^2p'(x)$

a) Encontrar Núcleo, Imagen, rango y nulidad de T

b) Indique según los resultados obtenidos si tal transformación es inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e invertible.

Cuando piden Núcleo e Imagen, es mejor comenzar por imagen:

- **IMAGEN Y RANGO:**

  Sean $v = ax^2 + bx + c \in P_2$ y $w = w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 \in P_3$

  $T(v) = x^2(2ax + b) = 2ax^3 + bx^2$

  $T(v) = w \equiv 2ax^3 + bx^2 + 0x + 0 = w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0$

  de donde se obtiene el sistema: $\begin{cases} 2a = w_3 \\ b = w_2 \\ 0 = w_1 \\ 0 = w_0 \end{cases}$ o $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & w_3 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 0 & w_0 \end{array}\right)$ es decir, la imagen es:

  $\mathrm{Im}(T) = \left\{ w_3x^3 + w_2x^2 + w_1x + w_0 \in P_3 \,/\, w_1 = w_0 = 0 \right\}$, con $Base\,\mathrm{Im} = \left\{ x^3, x^2 \right\}$ y $\rho = 2$.

- **NÚCLEO Y NULIDAD:**

  Con $v = ax^2 + bx + c \in P_2$, requerimos que $T(v) = \overline{0v}$, es decir:

  $T(v) = x^2(2ax + b) = 2ax^3 + bx^2 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$, lo que conduce a:

  $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, es decir a=0 y b=0. Dado que no hay condiciones para c, entonces $c \in \mathbb{R}$

  $Nu(T) = \left\{ ax^2 + bx + c \in P_2 \,/\, a = b = 0 \right\}$ con $BaseNu = \left\{ 1 \right\}$ y $\nu = 1$

- **INYECTIVIDAD Y SOBREYECTIVIDAD:**

  No es inyectiva porque su nulidad no es cero; y no es sobreyectiva porque su rango no es la dimensión del espacio de llegada (no es 4). Por lo tanto no es biyectiva, ni invertible.

42.- En la siguiente transformación lineal $T: \ P_2 \to M_{2\times 2}$

$$T[p(x)] = \begin{pmatrix} p(1) & p'(0) \\ p(1) & p(-1) \end{pmatrix}$$

a) Encontrar Imagen, base de la Imagen y el rango de T

b) Encontrar Núcleo, base del Núcleo y la nulidad de T

Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$, entonces la regla de correspondencia es:

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a+b+c & b \\ a+b+c & a-b+c \end{pmatrix}$$

- **IMAGEN:**

  Sea el vector del espacio de llegada $w = \begin{pmatrix} w1 & w2 \\ w3 & w4 \end{pmatrix}$

  Entonces

$$T(p) = w$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b \\ a+b+c & a-b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w1 & w2 \\ w3 & w4 \end{pmatrix}$$

De donde se obtiene el sistema a resolver:

$$\begin{cases} a+b+c=w1 \\ b=w2 \\ a+b+c=w3 \\ a-b+c=w4 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w1 \\ 0 & 1 & 0 & w2 \\ 1 & 1 & 1 & w3 \\ 1 & -1 & 1 & w4 \end{array}\right) \to \ldots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & w1 \\ 0 & 1 & 0 & w2 \\ 0 & 0 & 0 & w3-w1 \\ 0 & 0 & 0 & w4-w1+2w2 \end{array}\right)$$

Respuestas:

$$\mathrm{Im} = \left\{ \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \in M_{2\times2} \,/\, w_3 - w_1 = 0 \;\; y \;\; w_4 - w_1 + 2w_2 = 0 \right\}$$

Base:

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1 & w_1 - 2w_2 \end{pmatrix} \to Base = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Rango = 2

- **NÚCLEO**

  Tomamos el sistema resuelto de la imagen y lo convertimos en homogéneo (pues se cumple que $T(p) = \overline{0}_V$), y se analiza para las incógnitas a, b y c:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

es decir:

$$Nu = \left\{ ax^2 + bx + c \in P_2 \,/\, a + c = 0 \;\; y \;\; b = 0 \right\}$$

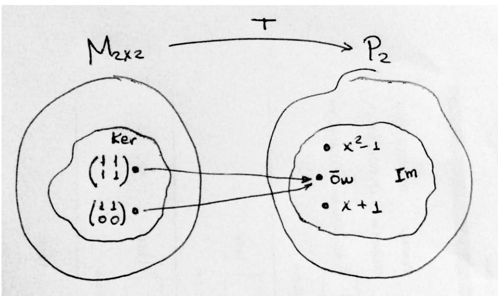
$Base = \left\{ -x^2 + 1 \right\}$

Nulidad=1

43.- Construir, de ser posible, una transformación lineal $T : M_{2\times2} \to P_2$ tal que:

- El núcleo sea $Ker(T) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$
- mientras que su imagen es $im(T) = \left\{ ax^2 + bx + (b-a) \,/\;\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$.

Existen muchas soluciones posibles para este tema, pero el procedimiento pasa por encontrar una base del espacio de partida que satisfaga las condiciones dadas, de ser posible. Para ello hallamos la base del Ker(T) y de la Im(T), y nos ayudamos con un diagrama de Venn:



Los vectores de la base del Ker se transforman en el **cero-vector** de llegada, pero en la imagen están también dos vectores de la base, hallados del conjunto dado en el problema.

Es decir, se tiene Nulidad=2 (dos vectores en la base del núcleo) y Rango=2 (dos vectores en la base de la imagen. Sumando, rango + nulidad se obtiene 4, que es la dimensión del espacio de partida, lo que indica que sí es posible construir esta transformación respetando los teoremas y las condiciones dadas en el ejercicio.

Se necesita ahora una base del espacio de partida, pero solo hay dos vectores en el Ker(T), se deben elegir dos vectores más de fuera del Ker (porque si estuvieran adentro formarían un conjunto LD y no serían base), podemos elegir vectores de afuera, así que por lo general se recomienda probar con los vectores de la base canónica; **siempre y cuando el conjunto resultante sea LI, no LD**.

Por ejemplo, una **mala elección** sería:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \to son\ LD$$

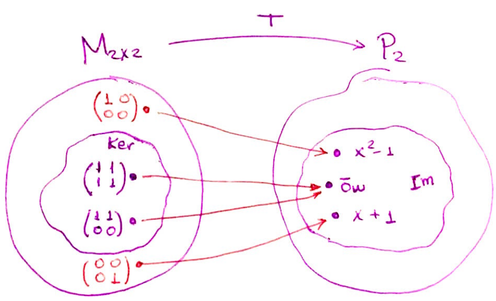
Los dos vectores de la base canónica al sumarse forman uno de los vectores de la base del Ker, por lo tanto son LD y no es una base. Entonces probamos otros vectores de la base canónica:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \to son\ LI$$

Se recomienda hacer el test de independencia lineal para confirmar antes de proseguir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{f4 \leftrightarrow f1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) solución\ única \to son\ LI$$

Ya tenemos una base de partida, ahora construimos la transformación, ayudándonos con el diagrama de Venn:



Para construir la regla de correspondencia, necesitamos la transformada de un vector de partida cualquiera:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ?$$

No sabemos esta expresión, pero sabemos cómo se transforma la base (según el último diagrama de Venn), entonces podemos escribir al vector cualquiera como combinación lineal de la base elegida previamente. Antes de transformar, es necesario hallar los escalares "alfas":

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolviendo:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right) \xrightarrow{f4 \leftrightarrow f1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c \end{array}\right) \to \begin{cases} \alpha 1 = c \\ \alpha 2 = b - c \\ \alpha 3 = a - b \\ \alpha 4 = d - c \end{cases}$$

Ahora sí, transformamos la combinación lineal para hallar la regla de correspondencia

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = T\left[\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \alpha_1 T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \overline{0}_V + \overline{0}_V + (a-b) T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (d-c) T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los vectores del Ker se convierten en el $\mathbf{0_V}$ de llegada, así que no influye en la regla final, que sería:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)\left(x^2 - 1\right) + (d-c)\left(x+1\right)$$

44.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Si $\dim W \le \dim V$ entonces T es sobreyectiva.

- **FALSO.** Como contraejemplo se busca un espacio de llegada con dimensión menos o igual que el de partida, pero una T.L. que no sea sobreyectiva. La Transformación Trivial siguiente es un buen contraejemplo:

$$T: R^2 \to R^2 \ \ tal\ \ que \ \ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Tiene dimW=dimV pero no es sobreyectiva.

45.- Califique la siguiente proposición como Verdadero o Falso. En caso de ser verdadera, demuéstrela; caso contrario, dé un contraejemplo:

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Si $\{T(v_1),\ T(v_2),\ T(v_3)\}$ genera a W, entonces $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ genera a V.

- **FALSO.** Como contraejemplo se puede construir la siguiente transformación de R4 a R3:

$$T: R^4 \to R^3 \ tal \ que \ T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Y observar que, si $v1 = (1,0,0,0),\ v2 = (0,1,0,0)\ \ y\ \ v3 = (0,0,1,0)$, sus transformadas son $\mathrm{T}(v1) = (1,0,0),\ \mathrm{T}(v2) = (0,1,0)\ \ y\ \ \mathrm{T}(v3) = (0,0,1)$. O sea: $\{\mathrm{T}(v1),\ \mathrm{T}(v2),\ \mathrm{T}(v3)\}$ genera a R^3, pero $\{v1,\ v2,\ v3\}$ no genera R^4.

MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

46.- Sea $T: P_2 \to M_{2\times 2}$ una transformación lineal tal que

$$T(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) & p'(0) \\ p(1) & p(-1) \end{pmatrix}$$

a) Encuentre la representación matricial de T (matriz de transformación) respecto a las bases $B_1 = \{1+x,\ 1-x,\ 1+x+x^2\}$ y $B_2 = canónica\ de\ M_{2\times 2}$,

b) Si $[u]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $[w]_{B1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ hallar $T(u+w)$, $u+w$ y $[T(u+w)]_{B2}$

c) Solo mediante observación, sin hacer ningún cálculo, determine si T es una transformación invertible. Justifique su respuesta.

- **MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN LINEAL**

  Transformando cada vector de la base:

$$T(1+x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad T(1-x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad T(1+x+x^2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  Y, dado que la base a utilizar en el espacio de llegada es la base canónica, la matriz de transformación es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- **LINEALIDAD DE LAS COORDENADAS**

  Sumando las coordenadas de u y w se obtiene las coordenadas de $u+w$, por la linealidad de la transformación coordenadas:

$$[u+w]_{B1} = [u]_{B1} + [w]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  Con este resultado se puede calcular $u+w$:

$$u+w = 1(1+x) + 3(1-x) + 4(1+x+x^2) = 4x^2 + 2x + 8$$

  También se puede calcular $[T(u+w)]_{B2}$, usando la matriz A:

$$[T(u+w)]_{B2} = A[u+w]_{B1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Pero como la base de llegada es canónica, se puede rápidamente calcular $T(u+w)$:

$$T(u+w) = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 14 & 10 \end{pmatrix}$$

- **¿ES INVERTIBLE?**
  No. Dado que los espacios no son isomorfos, la transformación jamás será un isomorfismo. También puede observarse que la matriz de transformación A no es invertible.

47.- Sea el espacio $V = gen\left\{e^{2x},\, xe^{2x},\, x^2e^{2x}\right\}$ y sea $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T[f] = f'(x)$.

a) Encuentre una base B de V, y una representación matricial de T respecto a B

b) Si $[g(x)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, hallar g(x), T(g(x)) y $[T(g)]_B$

- **BASE PARA V**
  Se demuestra primero que el conjunto generador dado es L.I. y por tanto una base:

$$\alpha_1 e^{2x} + \alpha_2 xe^{2x} + \alpha_3 x^2 e^{2x} = 0$$
$$e^{2x}(\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = 0$$

Y dado que la función e^{2x} es siempre positiva, la ecuación se reduce a:

$$\alpha_1 .1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0$$

Dado que $\left\{1,\ x,\ x^2\right\}$ es L.I., los escalares son necesariamente cero, por lo cual el conjunto original es L.I. y, por lo tanto, es una base:

$$\text{B}= \left\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\right\}.$$

- **REPRESENTACIÓN MATRICIAL**
  1.- hallar una base del espacio de partida (ya se realizó)
  2.- transformar la base del espacio de partida:

$$T(e^{2x}) = 2e^{2x}$$
$$T(xe^{2x}) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$
$$T(x^2e^{2x}) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

3.-hallar las coordenadas de las transformadas, respecto a la base de llegada:

$$T(e^{2x}) = 2e^{2x} = 2e^{2x} + 0xe^{2x} + 0x^2e^{2x}$$
$$T(xe^{2x}) = e^{2x} + 2xe^{2x} = 1e^{2x} + 2xe^{2x} + 0x^2e^{2x}$$
$$T(x^2e^{2x}) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} = 0e^{2x} + 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

4.- formar la matriz conteniente las coordenadas en las columnas, en su respectivo orden

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **HALLAR g(X), T(g), [T(g)]B**

$$[T(g)]_B = [T]_B [g(x)]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$[g(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow g(x) = 1e^{2x} + 2xe^{2x} + 3x^2e^{2x}$$

$$[T(g)]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow T(g) = 4e^{2x} + 10xe^{2x} + 6x^2e^{2x}$$

48.- Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to S_{2\times2}$ y $T_2 : S_{2\times2} \to P_1$ dos transformaciones lineales tales que sus representaciones matriciales respectivas son:

$$[T_1]_{B1B2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } [T_2]_{B2B3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

Con respecto a las bases $B1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $B2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, y $B3 = \{x, 1\}$.

a) Encuentre la matriz correspondiente a la composición $[T_2 \circ T_1]_{B1B3}$,

b) En caso que $T_2 \circ T_1$ sea un isomorfismo, encuentre la regla de correspondencia de su inversa: $(T_2 \circ T_1)^{-1}$.

- **LA MATRIZ DE LA COMPOSICIÓN:**

La matriz de composición es el producto de las respetivas matrices, siempre que compartan la misma base común en el espacio intermedio de la composición S_{2X2}. Como tienen la misma base B2 en ese espacio, se procede a multiplicar:

$$A_{T2\circ T1} = A_{T2}A_{T1}$$

$$A_{T2\circ T1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- **LA REGLA DE CORRESPONDENCIA DE $T_2 \circ T_1$ Y SU INVERSA:**

La matriz de la composición inversa, es la inversa de la matriz de composición hallada en el literal anterior. Invirtiendo:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \to \dots \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \end{array} \right)$$

Se utilizará esta matriz para la regla de correspondencia.
Recuérdese que al componer dos funciones de la forma:

$$V \xrightarrow{T1} W \xrightarrow{T2} Z$$

El resultado es de la forma:

$$V \xrightarrow{T2oT1} Z$$

Por lo tanto, la inversa de esta composición tiene la forma:

$$Z \xrightarrow{(T2oT1)^{-1}} V$$

Es decir que, en el problema, el espacio de partida de esta inversa es P1 y el de llegada es R2. Y sus respectivas bases son las que utilizaremos para analizar la matriz inversa hallada. Dado que las columnas son coordenadas de las transformadas de la base de partida (partida de la inversa, P1), entonces

$$\left[T(x)\right]_{B1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[T(1)\right]_{B1} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir, como son coordenadas respecto a la base de llegada (llegada de la inversa, R2) se puede hacer lo siguiente:

$$\left[T(x)\right]_{B1} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \to T(x) = (-1/2)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (0)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[T(1)\right]_{B1} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \to T(1) = (-2/3)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1/3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, tenemos la transformada de las bases de partida:

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$T(1) = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

Y la regla de correspondencia se puede hacer mediante:

$$T(ax+b) = aT(x) + bT(1) = a\begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

$$T(ax+b) = \begin{pmatrix} -b/3 \\ (-3a-4b)/6 \end{pmatrix}$$

Finalmente recordemos que esta T que hemos analizado no es otra sino la inversa de la composición, es decir $(T2oT1)^{-1}$:

$$(T2oT1)^{-1}(ax+b) = \begin{pmatrix} -b/3 \\ (-3a-4b)/6 \end{pmatrix}$$

49.- Sea $\langle V, \oplus, \odot \rangle$ un espacio vectorial sobre el campo real, y sea $B = \{u_1,\ u_2\}$ una base de V. Sea $T: V \to V$ un operador lineal en V, tal que:

$$T(u_1) = 2u_1 + u_2$$

$$T(u_2) = u_1 + 2u_2$$

a) Encuentre una representación matricial del operador T

b) Determine si T es inyectiva y sobreyectiva

- **REPRESENTACIÓN MATRICIAL:**

  Dado que los espacios de partida y de llegada son iguales, se usa la misma base en ambos casos. De este modo, la matriz se obtiene por simple inspección:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- **¿ES BIYECTIVA?**

  Como la matriz es cuadrada, se puede calcular el determinante. Y, dado que el determinante es $\det A = 3$, la matriz es invertible, lo que indica que la transformación que representa es biyectiva, o sea, inyectiva y sobreyectiva

50.- Construya una transformación lineal $T : S_{2\times 2} \to S_{2\times 2}$, tal que:

- $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $\operatorname{Im} T = D_{2\times 2}$

a) Determine la representación matricial de T respecto a la base canónica
b) ¿Es T un isomorfismo?
c) Determine la representación matricial de $T \circ T$

- **DISEÑO DE T**

  Existen muchos modos de resolver este ejercicio. Lo primero es obtener una base del espacio de partida cuyas transformadas sean conocidas. Un pequeño test nos confirma que el conjunto siguiente es una base de S_{2X2}:

$$B=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

  Así también, se requiere una base para la imagen de T. Se puede completar una base de la imagen con el vector dado $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$, y otro vector $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in D_{2\times 2}$. Por lo tanto, una T que cumple con los requerimientos indicados es tal que:

  - $T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
  - $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

- **MATRIZ DE T RESPECTO A LA BASE CANÓNICA**

  La base canónica de S_{2X2} es:

$$Bc=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

  Sumando las primeras transformadas:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de esto se deduce que:

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Y la matriz buscada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- **NO ES UN ISOMORFISMO**
  Pues A no es invertible. Además, la nulidad no es cero.
- **LA MATRIZ DE ToT**
  Se cumple que $A_{ToT} = AA = A^2$, por lo tanto:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO INTERNO

51.- Sea el espacio $V = P_3$. Determine si la siguiente función $f : V \times V \to \mathbb{R}$ es un producto interno en V:

$$\forall p,q \in P_3 \quad \langle p,q \rangle = [p(0)]^2 - [q(0)]^2.$$

Hay más de una propiedad que no se cumple con la función dada.

Una es la conmutatividad: $\forall p,q \in P_2 \quad \langle p,q \rangle = \langle q,p \rangle$

Pues

$\langle p,q \rangle = [p(0)]^2 - [q(0)]^2 \neq [q(0)]^2 - [p(0)]^2$

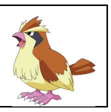
CONTRAEJEMPLO: $p(x) = x$ y $q(x) = 1$, pues $\langle p,q \rangle = -1 \neq 1 = \langle q,p \rangle$.

Otra es la propiedad ii): $\forall p \in P_2 \quad \langle p,p \rangle = 0 \leftrightarrow p = \overline{0}_V$

Pues $\langle p,p \rangle = 0$, sin importar cuál es p(x).

CONTRAEJEMPLO: $p(x) = x^2 - 2$ (o cualquier otro polinomio), pues se verifica de todos modos que $\langle p,p \rangle = [-2]^2 - [-2]^2 = 4 - 4 = 0$.

52.- Sean los siguientes vectores de M_{2X2}:



$$v_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}\quad y\quad v_3=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

Usando el producto interno:

$$\forall A,B\in V\quad \langle A,B\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right\rangle=a_{11}b_{11}+2a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+2a_{22}b_{22}$$

calcular:

a) Norma de v_2: $\|v_2\|$ ___

b) Distancia d entre v_1 y v_3: $d(v_1,v_3)$ ___

c) Ángulo entre v_2 y v_3 (deje expresado si es necesario): θ_{v_2,v_3} ___

d) Vector unitario en la dirección de $2v_1-v_2$: $u=\frac{1}{}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

- **NORMA** de v_2: $\boxed{\|v_2\| = \sqrt{24}}$

$$\langle v_2,v_2\rangle=(0)(0)+2(-2)(-2)+(-4)(-4)+2(0)(0)=24$$

$$\|v_2\|=\sqrt{24}$$

- **DISTANCIA** entre v_1 y v_3: $\boxed{d(v_1,v_3) = \sqrt{24}}$

$d(v_1,v_3)=\|v_1-v_3\|$, luego:

$$v_1-v_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}$$

O sea $v_1-v_3=v_2$:

$$d(v_1,v_3)=\|v_2\|=\sqrt{24}$$

- **ÁNGULO** entre v_2 y v_3: $\boxed{\theta_{v2,v3}\quad \arccos\left(-2/\sqrt{5}\right)}$

$$\cos(\theta)=\frac{\langle v_2,v_3\rangle}{\|v_2\|\|v_3\|}$$

Donde:

$$\langle v_2,v_3\rangle=(0)(1)+2(-2)(3)+(-4)(3)+2(0)(-1)=-24$$

$$\langle v_3,v_3\rangle=(1)(1)+2(3)(3)+(3)(3)+2(-1)(-1)=30$$

Por lo tanto:

$$\cos(\theta)=\frac{-24}{\sqrt{24}\sqrt{30}}=\frac{-\sqrt{24}}{\sqrt{30}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

- **VECTOR UNITARIO** en la dirección de $2v_1-v_2$: $\boxed{u=\frac{1}{4\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}}$

Dado que $2v_1-v_2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2\\ -4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, se tiene que:

$$\langle 2v_1 - v_2, 2v_1 - v_2 \rangle = (2)(2) + 2(4)(4) + (2)(2) + 2(-2)(-2) = 48$$
$$\|2v_1 - v_2\| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

53.- Sea $V = \mathbb{R}^3$, y sea el subespacio:

$$H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x - 2y + 3z = 0\right\}$$

a) Halle una base ortonormal de H

b) Extienda la base del literal a) para construir una base ortonormal de todo $\mathbb{R}^3$.

c) Si $\mathbf{v} = (2,0,-1)$, hallar las coordenadas de v respecto a la base del literal b)

- **BASE PARA H**.- dado un vector (a, b, c), y la condición de H; se tiene que:

$$(x,y,z) = (2y - 3z, y, z) = y(2,1,0) + z(-3,0,1)$$
$$B_H = \{(2,1,0),\ (-3,0,1)\}$$

Aplicando el procedimiento de Gram-Schmidt:

$$v_1 = (2,1,0)\ ,\ \|v_1\| = \sqrt{5}$$
$$u_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$$

Luego:

$$v_2 = (-3,0,1)$$
$$v_2^* = v_2 - \langle v_2 \,|\, u_1 \rangle u_1$$
$$\langle v_2 \,|\, u_1 \rangle u_1 = \left\langle (-3,0,1) \,|\, \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) \right\rangle \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0) = \tfrac{1}{5}[-6](2,1,0)$$
$$v_2^* = v_2 - \langle v_2 \,|\, u_1 \rangle u_1 = (-3,0,1) + \tfrac{6}{5}(2,1,0) = \tfrac{1}{5}(-3,6,5)$$

Se puede normalizar $v_2^* = (-3,6,5)$ también:

$$u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{70}}(-3,6,5)$$
$$B_{ON}H = \left\{\tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0),\ \tfrac{1}{\sqrt{70}}(-3,6,5)\right\}$$

- **BASE PARA R^3**

Existen varios modos de extender la base a todo R^3, uno es agregando un vector, por ejemplo el (1, 0, 0) que no pertenece a H, y ortonormalizando con respecto a los previos.

Otro modo es calculado el complemento ortogonal de H, hallando su base que es ya perpendicular, y normalizando; todo conociendo que solo falta un vector para una base de R^3.

Complemento ortogonal de H:

$$\langle (a,b,c) \,|\, (2,1,0) \rangle = 2a + b = 0$$
$$\langle (a,b,c) \,|\, (-3,0,1) \rangle = -3a + c = 0$$

Base de $H^\perp$:

$$(a,b,c) = (a,-2a,3a) = a(1,-2,3)$$
$$B_{H\perp} = \{(1,-2,3)\}$$

Ortonormalizando el único vector de su base:

$$u_3 = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)$$

Por lo tanto:

$$B_{ON}R^3 = \left\{\tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0),\ \tfrac{1}{\sqrt{70}}(-3,6,5),\ \tfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)\right\}$$

- **COORDENADAS DE V**

Dado que la base es ortonormal, las coordenadas pueden ser halladas mediante proyecciones:

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = \langle v,u_1\rangle u_1 + \langle v,u_3\rangle u_2 + \langle v,u_3\rangle u_3$$

Es decir:

$$\alpha_1 = \langle v,u_1\rangle = \left\langle (2,0,-1), \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(4)$$
$$\alpha_2 = \langle v,u_2\rangle = \left\langle (2,0,-1), \tfrac{1}{\sqrt{70}}(-3,6,5)\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{70}}(-11)$$
$$\alpha_3 = \langle v,u_3\rangle = \left\langle (2,0,-1), \tfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,3)\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{14}}(-1)$$

Las coordenadas son:

$$[v]_{B.ON} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{5} \\ -11/\sqrt{70} \\ -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

54.- Sea $H = \left\{ p \in P_2 \ / \ p(1) = 0 \right\}$ un subespacio de P_2. Utilizando el producto interno

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(-1)q(-1) + p(1)q(1)$$

a) Encuentre el complemento ortogonal $H^\perp$

b) Hallar $Proy_{H^\perp}p(x)$ y $Proy_H p(x)$, donde $p(x) = x^2 + x$.

- **COMPLEMENTO ORTOGONAL:**

Base para H.- dado un polinomio ax^2+bx+c, la condición de H es $a+b+c=0$; por lo tanto una base es:

$$ax^2 + bx + (-a-b) = a(x^2-1) + b(x-1)$$
$$B_H = \{x^2-1, x-1\}$$

Complemento ortogonal:

$\langle ax^2+bx+c \,|\, x^2-1\rangle = -c = 0$

$\langle ax^2+bx+c \,|\, x-1\rangle = -c-2(a-b+c) = -2a+2b-3c = 0$

$$H^\perp = \{ax^2+bx+c \ / \ c=0 \ \ y \ \ -2a+2b=0\}$$

- **PROYECCIONES**

Base para $H^\perp$.-

$$ax^2+bx+c = ax^2+ax+0 = a(x^2+x)$$
$$B_{H\perp} = \{x^2+x\}$$

Ortonormalizando la base:

$$\langle x^2+x \,|\, x^2+x\rangle = 0+0+(2)^2 = 4$$
$$\|x^2+x\| = \sqrt{4} = 2$$
$$u_1 = \frac{1}{2}(x^2+x)$$

Proyección:

$$Proy_{H\perp}p = \overrightarrow{Proy}_{u1}p = \langle p \mid u1 \rangle u1$$

Pero como $p \in H^{\perp}$, su proyección es el mismo p:

$$Proy_{H\perp}p = p(x) = x^2 + x$$

Despejando la proyección sobre H:

$$Proy_H p(x) = \overline{\mathbf{0}}_V$$

55.- Sea V un espacio vectorial euclidiano, y sean $v1$ y $v2$ dos vectores de V, distintos del vector neutro.

Demuestre que el ángulo entre $v1$ y $v2$ es $180°$, si $v1$ es el inverso aditivo de $v2$.

Si uno es el inverso del otro, entonces $v_2 = -v_1$:

$$\mathrm{Cos}(\theta) = \frac{\langle v_1 \mid v_2 \rangle}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{\langle v_1 \mid v_2 = -v_1 \rangle}{\|v_1\|\|-v_1\|} = \frac{-\langle v_1 \mid v_1 \rangle}{\|v_1\|\|v_1\|} = \frac{-\|v_1\|^2}{\|v_1\|^2} = -1$$

Donde el ArcCos(–1)=180° o π radianes.

VALORES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS

56.- Sea la transformación $T: P_1 \to P_1$ tal que $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz que representa a T con respecto a la base B = $\{1+x,\ 1-x\}$.

a) Complete la siguiente tabla:

valor propio	*vector propio de* A_T	*vector propio de T*	*m.a.*	*m.g.*
$\lambda_1 =$	$v_1 =$			
$\lambda_2 =$	$v_2 =$			

b) ¿Es posible hallar una base de P_1 que contenga solamente vectores propios de T?

c) Si el literal b) es posible, entonces encuentre la matriz de transformación D con respecto a la base formada por los vectores propios:

- **VALORES PROPIOS**, se obtienen resolviendo $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 5 = 0$$

Es decir hay dos valores propios distintos: $\lambda_1 = \sqrt{5}$ y $\lambda_2 = -\sqrt{5}$, m.a.=1 cada uno.

- **VECTORES PROPIOS:**

Resolviendo con $\lambda_1 = \sqrt{5}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & -1-\sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \to \cdots \left(\begin{array}{cc|c} 1-\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir:

$$E_{\lambda 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / (1-\sqrt{5})x + 2y = 0 \right\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (-1+\sqrt{5})/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego el primer vector propio de A_T es: $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$, m.g.=1.

Con este vector se encuentra el vector propio del operador lineal T, pues la matriz con que se trabaja representa a T respecto a la base dada. Por lo tanto, este vector propio (de P_1) es:

$$\mathrm{v}_1 = 2(1+x) + (-1+\sqrt{5})(1-x) = (3-\sqrt{5})x + (1+\sqrt{5})$$

Resolviendo con $\lambda_1 = \sqrt{5}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & -1+\sqrt{5} & 0 \end{array} \right) \to \ldots \left(\begin{array}{cc|c} 1+\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Es decir:

$$E_{\lambda 2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / (1+\sqrt{5})x + 2y = 0 \right\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ (-1-\sqrt{5})/2 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, el segundo vector propio de A_T es $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$, m.g.=1.

Con el que se encuentra el segundo vector propio del operador lineal T:

$$\mathrm{v}_2 = 2(1+x) + (-1-\sqrt{5})(1-x) = (3+\sqrt{5})x + (1-\sqrt{5})$$

Con estos resultados podemos completar la tabla requerida:

valor propio	*vector propio de* A_T	*vector propio de* T	*m.a.*	*m.g.*
$\lambda_1 = \sqrt{5}$	$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$\mathrm{v}_1 = (3-\sqrt{5})x + (1+\sqrt{5})$	1	1
$\lambda_2 = -\sqrt{5}$	$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$	$\mathrm{v}_2 = (3+\sqrt{5})x + (1-\sqrt{5})$	1	1

- **SÍ ES DIAGONALIZABLE.**

  Se puede justificar esta respuesta de varias formas. Dado que $T: P_1 \to P_1$ y P_1 tiene dimensión 2 (o la matriz es 2X2), entonces una de las siguientes afirmaciones (cualquiera de ellas) es suficiente para justificar la respuesta:

  - Hay 2 valores propios distintos
  - m.g. = m.a. en cada valor propio
  - Se pudo hallar dos vectores propios L.I. (para un espacio de dimensión 2)
  - La matriz es real simétrica

  La matriz D es $D = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$

57.- Sea el espacio $V = gen\{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$ y sea $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T[f] = f'(x)$. Encuentre una representación matricial A, y utilícela para resolver:

a) Hallar los valores propios de T, con sus respectivas multiplicidades algebraicas y geométricas.

b) ¿Es posible diagonalizar el operador T? Justifique su respuesta.

- **MATRIZ DE T**: necesitamos transformar los vectores de la base:

$$T(e^{2x}) = 2e^{2x}$$
$$T(xe^{2x}) = e^{2x} + x2e^{2x}$$
$$T(x^2e^{2x}) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

Y hallar las respectivas coordenadas respecto a la base:

$$T(e^{2x}) = 2e^{2x} = 2e^{2x} + 0xe^{2x} + 0x^2e^{2x}$$
$$T(xe^{2x}) = e^{2x} + 2xe^{2x} = 1e^{2x} + 2xe^{2x} + 0x^2e^{2x}$$
$$T(x^2e^{2x}) = 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x} = 0e^{2x} + 2xe^{2x} + 2x^2e^{2x}$$

Es decir, la matriz resulta:

$$A = [T]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **VALORES PROPIOS DE T.**

Puesto que la matriz es triangular, los valores propios son aquellos que aparecen en su diagonal, o sea $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3$, es decir $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica m.a.=3.

Para la multiplicidad geométrica debemos calcular los vectores propios, resolviendo el sistema homogéneo $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\lambda=2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde se obtiene $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$. Luego:

$$E_\lambda = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} / \, x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_3 = 0 \right\} = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo cual la multiplicidad geométrica es m.g.=1.

- **NO ES DIAGONALIZABLE.**

Porque m.a. no es igual a m.g.

58.- Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & a-3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, determine:

a) El polinomio característico de A

b) Sea $\lambda = 2$ un valor propio de A, y E_λ el correspondiente espacio característico. Determine los valores de $a \in R$ para que:

b.1) $\dim E_\lambda = 1$

b.2) $\dim E_\lambda = 2$

c) Los valores de a para que la matriz A sea diagonalizable y, en este caso, halle una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC$.Escriba también cual es tal matriz diagonal D..

- **POLINOMIO CARACTERÍSTICO:**

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} 2-\lambda & a-3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Como es triangular, el determinante es el producto de su diagonal principal

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(2-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

- **VALORES DE a.**

  Con $\lambda=2$ (que tiene multiplicidad algebraica 2 por repetirse, aparece dos veces), resolveremos el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2-\lambda & a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \end{array}\right)$$

  Nos queda:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  De donde se observa que si $a=3$, hay dos filas de ceros y hay dos variables libres, pues el espacio característico queda:

$$E_\lambda=\left\{(x,y,z)\,/\,-y+z=0 \;\; y \;\; x\in R\right\}$$

  De donde se obtienen dos vectores propios en la base:

$$(x,y,z)=(x,z,z)=x(1,0,0)+y(0,1,1)$$

  Lo que indica que la multiplicidad geométrica es 2 (pues produce dos vectores propios), es decir, es diagonalizable. La multiplicidad geométrica es igual $\dim E_\lambda=2$.

  Por otro lado, si $a\neq 3$, entonces $a-3\neq 0$; en ese caso, el sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Con $k\neq 0$, es decir que

$$E_\lambda=\left\{(x,y,z)\,/\,y=z=0 \;\; y \;\; x\in R\right\}$$

  De donde se obtiene un solo vector propio en la base:

$$(x,y,z)=(x,0,0)=x(1,0,0)$$

  Lo que indica una multiplicidad geométrica 1, y $\dim E_\lambda=1$.

  Por lo tanto:

  Con $a\neq 3$ queda $\dim E_\lambda=1$.

  Con $a=3$ queda $\dim E_\lambda=2$.

- **ES DIAGONALIZABLE** con $a=3$, pues la multiplicidad algebraica del valor propio repetido es igual a su multiplicidad geométrica.

  Con $\lambda=2$, se obtienen los vectores propios $v_1=(1,0,0)$ y $v_2=(0,1,1)$.

  Falta el vector con $\lambda=1$:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f3-f2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es decir z=0 y x=0, mientras y es variable libre.

$(x,y,z)=(0,y,0)\rightarrow v_3=(0,1,0)$

Por lo tanto, la matriz C es

$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, y la matriz D es $D=C^{-1}AC=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

59.- Encuentre, de ser posible, los valores de $a,k\in\mathbb{R}$ para que la siguiente matriz real sea diagonalizable ortogonalmente:

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&4&a\\-3&2&3&2\\4&3&1&5\\-7&2&k^2&8\end{pmatrix}$$

Se conoce por el teorema que las matrices reales son ortogonalmente diagonalizables si y solo si son simétricas, por lo cual el problema se reduce a determinar los valores de $a,k\in\mathbb{R}$ para que las matrices dadas sean simétricas.

Entonces, $a=7$ y $k=\pm\sqrt{5}$.

60.- Califique como Verdadero o Falso la siguiente proposición, justificando su respuesta: Si $\lambda=0$ es un valor característico de A, entonces A no es invertible.

- **VERDADERO.**

  Recordemos que la estructura lógica es una implicación $p\rightarrow q$, por lo cual podemos aplicar *Ponendo Ponens*. O sea, suponer el antecedente verdadero, lo que conlleva a: $\lambda=0$ es un valor característico de A.

  Si $\lambda=0$ es un valor característico de A, quiere decir que se cumple lo siguiente:

$$\det(A-\lambda I)=0$$
$$\det(A-0I)=0$$
$$\det(A)=0$$

  Pero si $\det(A)=0$, entonces A no es una matriz invertible.

  Nota: Se puede demostrar también la contrarrecíproca

APLICACIONES

61.- Calcular A^{5114}, donde $A=\begin{pmatrix}3&-4\\2&-3\end{pmatrix}$.

Se aplicará la fórmula $A^n=CD^nC^{-1}$, siempre que A sea diagonalizable. Calculando los valores propios:

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda&-4\\2&-3-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-1=0$$

Es decir, $\lambda = 1 \ \vee \ \lambda = -1$. Dado que los valores propios son todos distintos, la matriz es diagonalizable, existe una matriz C tal que $D = C^{-1}AC$ y, por lo tanto:

$$A^n = C\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n C^{-1} = C\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}C^{-1}$$

Puesto que 5114 es una potencia par, esta expresión se reduce a:

$$A^{5114} = C\begin{pmatrix} 1^{5114} & 0 \\ 0 & (-1)^{5114} \end{pmatrix}C^{-1} = CIC^{-1} = I$$

62.- Identifique la cónica dada, utilizando la teoría sobre formas cuadráticas del programa de álgebra lineal. Bosqueje su gráfico, determinando la matriz de rotación de ejes.

$$x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$$

Esta forma cuadrática contiene solo el término cruzado de rotación "xy", sin desplazamientos lineales.
La representación matricial es:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$$

Diagonalizar la matriz A implica hallar sus valores y vectores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 25 = 0$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda - 24 = (\lambda - 6)(\lambda + 4) = 0$$

Es decir $\lambda = 6 \ \wedge \ \lambda = -4$. En este momento sabemos ya que se trata de una hipérbola por el signo negativo del producto de los valores propios, pero el mejor modo de comprobar esto es con la nueva representación matricial con la matriz diagonal D:

$$\begin{bmatrix} \overline{x} & \overline{y} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} + 1 = 6\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 + 1 = 0 \text{ (hipérbola)}$$

Esta ecuación puede ser llevada a la forma simétrica para poder graficar:

$$-6\overline{x}^2 + 4\overline{y}^2 = 1$$
$$-\frac{\overline{x}^2}{\left(\frac{1}{6}\right)} + \frac{\overline{y}^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} = 1$$

Lo que falta es la orientación y ubicación de los ejes nuevos para las coordenadas $(\overline{x},\ \overline{y})$. Esto se logra con ayuda de la martiz de rotación Q, que diagonaliza ortogonalmente a la matriz original. Esto implica calcular los vectores propios y ortonormalizarlos:

$$\lambda = 6 \quad Nu(A - \lambda I) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f2-f1]{(-1/5)f1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

es decir $E_{\lambda=6} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x = -y\right\}$, donde el primer vector propio sería:

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ o $u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ una vez ortonormalizado.

$$\lambda = -4 \quad Nu(A-\lambda I) \to \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f2+f1]{(1/5)f1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

es decir $E_{\lambda=-4} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = y\right\}$, donde el segundo vector propio sería:

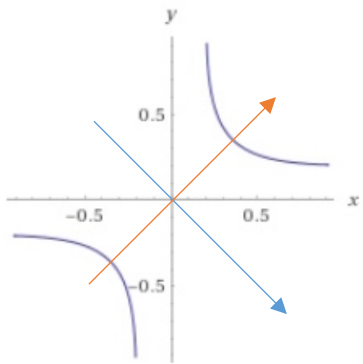
$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ o $u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ una vez ortonormalizado.

La matriz Q que diagonaliza ortogonalmente la matriz de la forma cuadrática original es:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Dado que det(Q)=1, y los vectores están ordenados con el mismo orden de los valores propios originales (primero $\lambda = 6$, luego $\lambda = -4$), entonces el vector propio **u**$_1$ (al igual que **v**$_1$) apunta en la dirección positiva de $\overline{x}$; mientras **u**$_2$ (al igual que **v**$_2$) apunta en la dirección positiva de $\overline{y}$.

La gráfica se muestra a continuación, con la flecha azul indicando el eje positivo de $\overline{x}$, y la flecha naranja indicando el eje positivo de $\overline{y}$.



La rotación ocurrió en este caso en un ángulo de –45° en todo el plano, según de obtiene de la primera columna de la matriz Q, pues el coseno es positivo mientras el seno es negativo, por lo tanto es un ángulo relacionado a 45° en el 4to cuadrante:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

63.- Identifique la cónica y bosqueje su gráfica, identificando los ejes principales y los ángulos de rotación.

$$a)\ x^2 + 2xy + y^2 - \frac{10}{\sqrt{2}}x + \frac{2}{\sqrt{2}}y + 14 = 0$$

Primero construimos la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática $x^2+2xy+y^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De modo que se puede representar a la ecuación cuadrática q, en relación a las coordenadas respecto a la base canónica, del siguiente modo:

$$q=\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-\frac{10}{\sqrt{2}}x+\frac{2}{\sqrt{2}}y+14=0$$

Diagonalizando ortogonalmente la matriz A

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}=(1-\lambda)^2-1=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=2 \ \ y \ \ \lambda_2=0$$

Encontrando los núcleos $Nu(A-\lambda I)$ para cada valor propio:

$$\lambda_1=2\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)\ldots\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow E_{\lambda 1}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / -x+y=0\right\}$$

Es decir, el primer vector propio, asociado al primer valor propio, es $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\lambda_2=0\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)\ldots\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow E_{\lambda 2}=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x+y=0\right\}$$

Es decir, el segundo vector propio es $v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La diagonalización ortogonal se completa ortonormalizando la base de vectores característicos, de modo que la matriz Q tenga determinante 1:

$$u_1=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y } u_2=\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Con esta información, se tiene que la matriz diagonal que representa la forma cuadrática es:

$$D=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$q=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}-\frac{10}{\sqrt{2}}x+\frac{2}{\sqrt{2}}y+14=0$$

$$=2(x')^2+0(y')^2-\frac{10}{\sqrt{2}}x+\frac{2}{\sqrt{2}}y+14=0$$

O sea, se trata de una parábola. Además se conoce que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Es decir: $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')$ y $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y')$, expresiones que permiten llevar los términos lineales de la ecuación cuadrática a x' e y', como sigue:

$$q=2(x')^2-\frac{10}{2}(x'-y')+\frac{2}{2}(x'+y')+14=0$$

$$=2x'^2-4x'+6y'+14=0$$

$$=x'^2-2x'+3y'+7=0$$

Completando cuadrados para conocer el desplazamiento en x', se tiene:

$$\begin{aligned} q &= (x'^2 - 2x' + 1 - 1) + 3y' + 7 = 0 \\ &= (x'^2 - 2x' + 1) + 3y' + 6 = 0 \\ &= (x' - 1)^2 + 3y' + 6 = 0 \end{aligned}$$

Es decir, la siguiente parábola:

$$y' = -\tfrac{1}{3}(x' - 1)^2 - 2$$

En el sistema cartesiano **x'-y'** se trata de una parábola desplazada 1 unidad "a la derecha" en **x'**, y 2 unidades "hacia abajo" en el eje **y'**, eje de simetría en **x'**=1, vèrtice en (**x'**, **y'**)=(1, –2).

El asunto es, pues, saber la orientación de los ejes **x'-y'** respecto al plano cartesiano canónico x-y. Para ello utilizamos los vectores ortonormales $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$, el $\mathbf{u_1}$ apunta en dirección postiva de **x'**, el $\mathbf{u_2}$ apunta en dirección positiva de **y'**. Se observa que $\mathbf{u_1}$ está a 45° en el primer cuadrante, y $\mathbf{u_2}$ es perpendicular al primero. La siguiente gráfica fue elaborada en Wolfram Alpha:

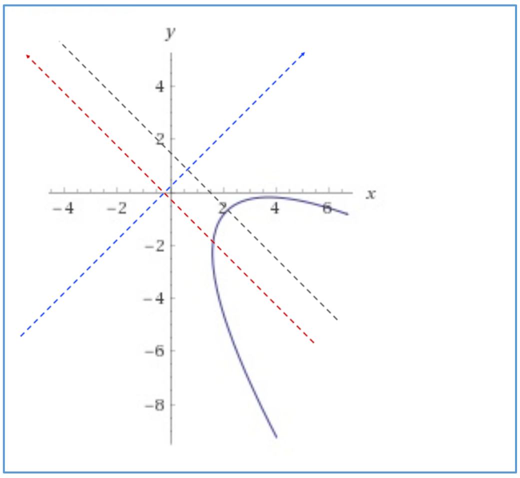


Figura 1.- La línea punteada en azul apunta en la dirección positiva de **x'**, mientras la roja a **y'**. La línea intermitente negra es el eje de simetría de la parábola. Accesible en:
https://www.wolframalpha.com/input/?i=x%5E2+%2B+2xy+%2B+y%5E2+-+(10%2Fsqrt(2))x+%2B+(2%2Fsqrt(2))y+%2B+14+%3D+0

64.- La función $f : P_1 \times P_1 \to \mathbb{R}$, definida como:

$$f(a_1x + a_0, b_1x + b_0) = 5a_0b_0 + 3a_0b_1 + 3a_1b_0 + 5a_1b_1$$

es un producto interno en P_1.

Demuestre que se cumple la propiedad $\forall p \in P_1 \quad f(p,p) = 0 \to p = 0x + 0$.

Sea $p = a_1x + a_0$, entonces la expresión $f(p,p)$ equivale a la forma cuadrática:

$$f(p,p) = a_0^2 + 6a_1a_0 + 5a_1^2$$

O, en forma matricial:

$$f(p,p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Calculando los valores propios:

$$\det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = 0$$

Es decir, $\lambda = 2$ y $\lambda = 8$.

Dado que todos sus valores propios son positivos, esta matriz es definida positiva, es decir $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$$f(p,p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \geq 0$$

donde el vector de coordenadas de p respecto a la base canónica es $[p]_{Bc} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Dado que la matriz de representación es simétrica, existe una matriz diagonal semejante tal que:

$$f(p,p) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \end{pmatrix} Q \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} Q^T \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_0' & a_1' \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \end{pmatrix} = 2\left(a_0'\right)^2 + 8\left(a_1'\right)^2$$

Y esta expresión claramente es definida positiva; es decir, si $f(p,p) = 0 \rightarrow p = 0x + 0$.

65.- En un pequeño pueblo hay solo dos estaciones de radio, una de noticias y una de música. Entre los oyentes de la estación de noticias, 70% permanecerán oyendo noticias luego de la pausa comercial cada media hora; mientras que el 30% cambiará a la estación de música. Entre los oyentes de la estación de música, 60% cambiarán a las noticias luego de la pausa, mientras el 40% permanecerán oyendo música.

Suponga que todos están oyendo las noticias a las 8:15 AM, entonces:

a) Construya la matriz de probabilidades que describe cómo los oyentes cambian de estación de radio
b) Muestre el vector de estado inicial
c) ¿Qué porcentaje de oyentes estará sintonizando la radio de música a las 9:25PM?.

- **LA MATRIZ DE PROBABILIDAD:** o estocástica, o de transición de estados es:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.6 \\ 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- **VECTOR INICIAL.** En base a los datos del problema, a las 08h00 se tiene:

$$v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **EL ESTADO A LAS 21H25.** Suponiendo que los cambios se dan a las horas en punto y a las xxh30; entonces en el intervalo de 8h00 a 8h30 el 100% de las personas están oyendo noticias. Luego, luego de la 26-ésima transición se llega al intervalo de interés, de 21h00 a 21h30. De acuerdo al modelo de Markov, el vector de estado es

$$v_n = A^n v_0$$

Con $n{=}26$, donde la potencia n-ésima se puede factorizar como:

$$v_n = A^n v_0 = CD^nC^{-1}v_0$$

Hallando los vectores propios:

$$\det(A-\lambda I)=\begin{pmatrix} 0.7-\lambda & 0.6 \\ 0.3 & 0.4-\lambda \end{pmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\tfrac{1}{10})=0$$

Espacio propio con $\lambda=1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & -0.6 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[f1/0.3]{f2+f1}\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Y el correspondiente vector propio es: $e_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Espacio propio con $\lambda=\frac{1}{10}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow[f1/0.6]{f2-0.5f1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Y el correspondiente vector propio es: $e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, las matrices C y C^{-1} son:

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{y } C^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

La potencia 26 de A es:

$$A^{26}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^{26} & 0 \\ 0 & (1/10)^{26} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Y el vector de estado es:

$$v_{26}=A^{26}v_0=\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir, a las 21h25 hay 67% de radioescuchas sintonizando noticias, mientras un 33% estará oyendo música.