CÁLCULO DIFERENCIAL

Paralelo 2 - Tarea #2

Topología y Espacios Métricos

Isaac Mancero-Mosquera

Nombre:____

1. Determine si las siguientes funciones $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definen una métrica en $\mathbb{R}$:

$$\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad d(x,y)=x^2-y^2$$

$$\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad d(x,y)=\left(x^2-y^2\right)^2$$

$$\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad d(x,y)=\frac{|x|}{1+|y|}$$

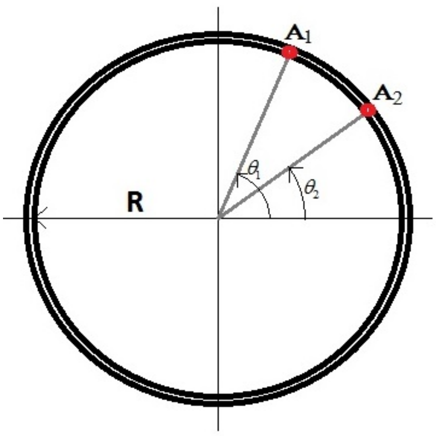
2. Determine si las siguientes funciones $d:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definen una métrica en $\mathbb{R}^2$:

- $d(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix})=\sqrt{4\left(x_1-x_2\right)^2+3\left(y_1-y_2\right)^2}$
- $d(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix})=\left(x_1-x_2+1\right)^2\left|y_1-y_2\right|^2$
- $d(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix})=\llbracket\ \left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|\ \rrbracket$

Si alguna de ellas es una métrica, grafique la bola abierta $B_5(a)$ donde a es el origen (0,0) en $\mathbb{R}^2$, utilizando dicha métrica.

3. Sean d_1 y d_2 dos métricas definidas en X. Determine si las siguientes funciones son también métricas en X:

- $d(p_1,p_2)=d_1(p_1,p_2)+d_2(p_1,p_2)$
- $d(p_1,p_2)=d_1(p_1,p_2)\ -\ d_2(p_1,p_2)$
- $d(p_1,p_2)=d_1(p_1,p_2)\ .\ d_2(p_1,p_2)$
- $d(p_1,p_2)=\frac{1}{3}d_1(p_1,p_2)+\frac{2}{3}d_2(p_1,p_2)$



4. María Isabel y Emilia Isabel compiten en una pista de carreras circular de radio R. La posición de los autos se mide en coordenadas (R,θ). Los autos corren en sentido contrario a las manecillas del reloj. La distancia entre un par de autos competidores A1, A2, se define como la longitud de arco de circunferencia que corresponde al menor ángulo que se extiende entre ellos. Determine si este modo de medir distancias es una métrica en los puntos del círculo. NOTA: considere el ángulo entre autos positivo sin importar si María Isabel sobrepasa a Emilia Isabel o viceversa.

CÁLCULO DIFERENCIAL

Paralelo 2 - Tarea #2

Topología y Espacios Métricos

Isaac Mancero-Mosquera

5. Sea el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ con la métrica convencional *d*. Sean los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle/ y \geq x \right\}$$

$$H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle/ 2y < x + 4 \right\}$$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle/ x^2 + y^2 < 32 \right\}$$

- i) Bosqueje el gráfico de la región correspondiente a $H_1 \cap H_2 \cap H_3$
- ii) ¿Es $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ un conjunto abierto?
- iii) Determine de ser posible los puntos límites, de adherencia y de frontera de $H_1 \cap H_2 \cap H_3$.

6. Sea el espacio métrico $\mathbb{R}^2$ con la métrica convencional d. Sean los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle/ |y| = 1 \right\}$$

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle/ y = Cos(x) \right\}$$

$$E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle/ x^2 + y^2 \leq (\pi^2 + 1) \right\}$$

- i) Determine si el conjunto $E_3 \cup (E_1 \cap E_2)$ es abierto o cerrado (o ambos o ninguno)
- ii) Sea S= $E_3 \cup (E_1 \cap E_2)$, determine $\overline{S}$, S' y ∂S.

7. Sea el espacio métrico $\langle \mathbb{R}^2, d \rangle$ con la métrica d definida como:

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Y sean los entornos abiertos $B_4(0,0)$ y $B_4(4,0)$. Es el conjunto $B_4(0,0) \cap B_4(4,0)$ un vecindario del punto (2,1)?

8. Sea el espacio métrico $\langle \mathbb{R}, d \rangle$ con la métrica convencional. Sea el siguiente predicado:

$$p(x): \frac{2 + |x-2|}{1 - |x+1|} > 5$$

- i) Determine si el conjunto solución es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.
- ii) Halle sus puntos de frontera, de adherencia, de acumulación y aislados.

9. Demuestre que una bola abierta $B_\delta(a)$ es un vecindario de todos sus puntos

CÁLCULO DIFERENCIAL

Paralelo 2 - Tarea #2

Topología y Espacios Métricos

Isaac Mancero-Mosquera

10. Sea $\langle X,d\rangle$ un espacio métrico, y sean p1, p2, p3, p4, cuatro puntos cualesquiera de X. Verifique que $d(p_1,p_4)\ \leq\ d(p_1,p_2)+d(p_2,p_3)+d(p_3,p_4)$.

11. Melanie hornea una torta de chocolate "*ai 7 velí*" tradicional. Se dispone a comerla cuando un visitante llama a la puerta. Decide compartir 1/4 de la misma con el huésped. Cuando finalmente la visita se retira, y Melanie se alista a comerse el pastel, una segunda visita llama a su puerta. Esta vez decide compartir la mitad de lo que compartió previamente, es decir 1/8. Melanie no puede comerse el pastel porque cada vez que quiere hacerlo alguien llama a su puerta. La tercera visita recibe 1/16 de torta, el cuarto visitante recibe 1/32, y así sucesivamente. ¿Qué porción de pastel quedará para Melanie al final del día si la cantidad de visitantes se incrementa a un número muy grande?

12. Sea el espacio métrico $\langle \mathbb{R},d\rangle$ con métrica convencional y $n\in\mathbb{N}$. Hallar los puntos de acumulación, de frontera, aislados y de adherencia de los siguientes subconjuntos:

$i)\ \ a_n=\dfrac{2+n\sqrt{2}}{n\pi}$ $\qquad v)\ \ a_n=\dfrac{n^2-2n+1}{n^2-n}$ $\qquad ix)\ \ (-5,-2]\cup[3,6)$

$ii)\ \ a_n=Tan\left(\dfrac{n\pi+1}{4n}\right)$ $\qquad vi)\ \ a_n=\ln\left(\dfrac{1+n(e+1)+n^2}{n^2}\right)$ $\qquad x)\ \ (6,12)\cup\{0,\ 3,\ 5\}$

$iii)\ \ a_n=\pm\sqrt{25-16e^{-n}}$ $\qquad vii)\ \ a_n=(-1)^n\left[\dfrac{4n+1}{n}\right]$ $\qquad xi)\ \ \mathbb{R}^+\cap\mathbb{Z}$

$iv)\ \ a_n=\dfrac{nCos(n\pi)+3}{5n+1}$ $\qquad viii)\ \ a_n=\dfrac{2-e^{-n}}{5+e^{-n}}$

13. Sea el espacio métrico $\langle \mathbb{R}^2,d\rangle$ con la métrica convencional y $n\in\mathbb{N}$. Hallar la clausura, los puntos aislados, el conjunto derivado y la frontera de los siguientes subconjuntos:

$$E=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\Bigg/\ \begin{matrix}x=\dfrac{3n+24}{n}\\ y=\dfrac{2n-24}{n}\end{matrix}\right\}$$

$$H=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\Bigg/\ x^2+y^2=\left(\dfrac{4n+1}{n}\right)^2\right\}$$

14. Sea el espacio métrico $\langle \mathbb{R},d\rangle$ con métrica convencional y $n\in\mathbb{N}$. Hallar los puntos de acumulación, de frontera, aislados y de adherencia del siguiente subconjunto:

$$W=\left\{\pi,\ 6-\pi,\ \frac{\pi}{2},\ 6-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{3},\ 6-\frac{\pi}{3},\ldots\ \ \frac{\pi}{n},\ 6-\frac{\pi}{n},\ldots\right\}$$