

## CALCOLO DIFFERENZIALE

## PARALLELO #2

## CÒMPITO COMPLESSIVO #3 – LÌMITI PARTE 1.

ISAAC MANCERO-MOSOUERA

Nome: \_\_\_\_\_

**Preliminares:** Como resumen de la clase sobre límites, se vió que:

- 1) En general, el límite  $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  no depende de que exista  $f(c)$ , pero si existe, y es continua en ese punto, entonces se aplica el método de Sustitución Directa y se tiene que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ .
- 2) Si  $f(c)$  no está definida (hay una indeterminación en  $x = c$ ), se busca una función equivalente  $g(x)$  que sea igual a  $f$  excepto en  $x = c$ . Luego se aplica el Teorema de las Funciones Coincidentes en Casi Todos Sus Puntos, según el cual  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ .
- 3) El modo de hallar esta nueva función coincidente depende de cada problema. Se estudiaron en clase 3 tipo básicos: Técnica del Cancelación, Racionalización y otras manipulaciones algebraicas. Si el tipo de límite involucra funciones trigonométricas, entonces hay que ayudarse con las identidades trigonométricas básicas.

La mayor parte de los ejercicios son tomados del libro Problemas de Análisis Matemático de Demidovich (descargable en el link enviado por SidWeb.)

**1.- Resuelva los siguientes límites mediante la técnica de cancelación:**

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) & \bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(x+4)] - (1/4)}{x} & \bullet \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[1/(2+x)] - (1/2)}{x} & \bullet \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 25} \end{aligned}$$

**2.- Resuelva los siguientes límites mediante la técnica de racionalización del numerador:**

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3} & \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}} & \bullet \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{x - a} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} & \bullet \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49} \\ & \bullet \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} & \bullet \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{2x^2 - 2} & \bullet \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{x-1}}{x-1} \end{aligned}$$

**3.- Resuelva los siguientes límites involucrando funciones trigonométricas:**

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{\cos(x) - 1} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\sin(x)} & \bullet \lim_{x \rightarrow 3\pi/2} \frac{\sin^3(x) + 1}{\sin(x) + 1} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow \pi} \theta \cos(\theta) & \bullet \lim_{\Delta\beta \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta\beta)}{\operatorname{Ctg}(\Delta\beta)} & \bullet \lim_{x \rightarrow 3\pi} 1 + \cos(\theta) + \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

## CALCOLO DIFFERENZIALE

## PARALLELO #2

## CÒMPITO COMPLESSIVO #3 – LÌMITI PARTE 1.

ISAAC MANCERO-MOSOUERA

**Cambios de variables:**

Como resumen, cuando se tiene radicales diferentes en el numerador y denominador, por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Un cambio de variable puede ayudar si es elegido inteligentemente, por ejemplo, en este caso sería  $y^{12} = x+1$ . De este modo la expresión se convierte en:

$$\frac{\sqrt[4]{y^{12}}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \frac{y^3}{y^4}$$

Es decir, una nueva expresión polinomial. Si originalmente, el límite era del tipo  $\lim_{x \rightarrow -1}$ , al despejar “y” en el cambio de variable se obtiene un nuevo límite de tipo  $\lim_{y \rightarrow 0}$ .

**4.- Resuelva los siguientes límites involucrando funciones radicales:**

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{-1 + \sqrt[4]{x}} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1+x} - 1} & \bullet \lim_{x \rightarrow 64} \frac{4 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - 8} & \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

**Límites Trigonómicos Especiales.-** Se refieren a las identidades:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(x)}{x} = 1 \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{Cos}(x)}{x} = 0$$

Se trata de saber reconocer cuando un límite se resuelve solo con manipulaciones algebraicas (como en el ejercicio 2) o se puede reducir a la forma de estas identidades; o si requiere de manipulaciones algebraicas e identidades trigonométricas combinadas con las identidades mencionadas aquí.

**5.- Resuelva los siguientes límites involucrando funciones trigonométricas, utilice si es necesario, las identidades de límites especiales:**

$$\begin{aligned} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(8x)}{\text{Sen}(5x)} & \bullet \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{Cos}^2(\theta) - 1}{\text{Cos}(\theta) - 1} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(mx)}{\text{Sen}(nx)} & \bullet \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(n+x) - \text{Sen}(x)}{n} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \text{Sen}(x)} - \sqrt{1 - \text{Sen}(x)}}{x} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \text{Sen}(x)}{x + \text{Tan}(x)} \\ & \bullet \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\text{Sen}(x) - \text{Cos}(x)}{1 - \text{Tan}(x)} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Sen}(x) - \text{Sen}(\pi)}{x - \pi} \end{aligned}$$

# CALCOLO DIFFERENZIALE

## PARALLELO #2

### COMPITO COMPLESSIVO #3 – LIMITI PARTE 1.

ISAAC MANCERO-MOSOUERA

**Existencia del Límite.**- Se dice que el límite de una función cuando  $x$  tiende a  $c$  existe, si y solo si los límites laterales cuando  $x$  tiende a  $c^+$  y  $c^-$  existen y son iguales entre sí.

6.- Determine si  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  existe, donde:

$$\bullet g(x) = \begin{cases} 5-x & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1 & 2 < x \leq 3 \end{cases} \bullet g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 6 & x < 2 \\ -x^2 + 4x - 2 & x \geq 2 \end{cases} \bullet g(x) = \begin{cases} x+1 & x < 2 \\ 2 & x = 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$$

7.- Califique como Verdadero o Falso. Justifique su respuesta:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1 \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x-3|}{\text{Sgn}(x-2)} + \text{Sgn}(x-4) = 2$$

8.- Encuentre el valor de  $c$  para que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  exista, donde

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 2 \\ cx+6 & x > 2 \end{cases}$$

9.- Calcular los siguientes límites en el infinito:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^4 + x}} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \cos(x)}{x} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2 + x} \bullet \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{4x^2 + 1}$$

10.- Calcular los siguientes límites infinitos:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2}{x^2 - 9} \bullet \lim_{x \rightarrow -3^-} \sec\left(\frac{\pi x}{6}\right) \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1} \bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2}{x^2 + 16}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2+x}{1-x} \bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{x+1} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1}$$

11.- Calcule los siguientes límites laterales:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-x}{x-3} \bullet \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x \text{ Sgn}(x+5)}{x^2} \bullet \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\mu(x-4)}{x-4}$$

12.- Califique como Verdadero o Falso, justifique su respuesta:

- $\forall x \in \mathbb{R} \text{ Cosh}^2(x) = \frac{1 + \text{Cosh}(2x)}{2}$
- Si  $g$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ , tal que  $\forall x \in \mathbb{R} g(x) = |f(x)|$  entonces  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .
- La función  $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$  tiene al menos una raíz en el intervalo  $[-3, 1]$
- Si  $f(x) = x + -x$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$
- Si  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) \neq g(x)$  entonces  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c} g(x)$
- $\text{Senh}(\ln(3)) = 4/3$