CALCOLO DIFFERENZIALE

PARALLELO #2

CÒMPITO COMPLESSIVO #4 – LÌMITI PARTE 2

ISAAC MANCERO-MOSQUERA

Nome:____

- **Lista de Indeterminaciones:**

  • $\frac{0}{0}$ • 1^{∞} • $\infty - \infty$ • $0 \times \infty$ • $\frac{\infty}{\infty}$ • 0^0 • ∞^0

- **Definición** de **e** = 2.71828182846…

  • $e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ • $e = \lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{1/x}$

1.- Resuelva los siguientes límites con la forma $\left[f(x)\right]^{g(x)}$, utilizando la metodología vista en clases (descrita también en el libro de Demidovich):

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2+4x-6}{7x^2-4x-6}\right)^{\left(\frac{3x^4-1}{2x^4+1}\right)}$ • $\lim_{\theta\to\infty}\left(\frac{\theta-1}{\theta+3}\right)^{\theta+2}$ • $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt[15]{x}}$ • $\lim_{x\to 0}\left(Cos(x)\right)^{1/x}$
- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\left(Sen(x)/x\right)}$ • $\lim_{n\to 0}\frac{\ln(1+n)}{n}$ • $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{2x}$ • $\lim_{x\to 0}\left(1+Sen(x)\right)^{1/x}$
- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2-4x-2\sqrt{x}+3}{2x^2-x+\sqrt{x}}\right)^{\left(\sqrt{x+9}-3\right)/4x}$ • $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$ • $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$ • $\lim_{x\to 0}\left(\pi+\frac{Cos(x)}{x+2}\right)^{\left(\frac{x+2}{Cos(x)}\right)}$

2.- Composición.- Si $\lim_{x\to c} g(x) = L$ existe, y f(L) está definido, entonces

$$\lim_{x\to c} f\left(g(x)\right) = f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

Resuelva los siguientes límites involucrando composición de funciones:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ • $\lim_{x\to\infty}\text{Arctan}\left(\frac{2x^3-2x^2}{2x^3+3x^2-x}\right)$ • $\lim_{\theta\to\infty}\left[\ln(2\theta+1)-\ln(\theta+2)\right]$ • $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+10x)}{x}$ • $\lim_{x\to 0+}\text{Arctan}\left(\frac{2}{x}\right)$ • $\lim_{n\to\infty} n\left[\left(\ln(n+1)-\ln(n)\right]\right.$ • $\lim_{x\to 0}\text{Arctan}\left(Cos(x)\right)$

3.- Utilice el teorema del Encaje ("emparedado" o "sándwich") para resolver los siguientes límites:

- $\lim_{x\to 3}\left|x-3\right| Sen\left(\frac{20x}{\pi}\right)$ • $\lim_{x\to\infty} e^{-x}Cos(x)$ • $\lim_{x\to -\infty} e^{x}Sen(x)$ • $\lim_{x\to 1}\left|\ln(x)\right|Cos(x)$

LÍMITES NOTABLES.- Se refiere a las identidades:

- $\lim_{x\to 0}\frac{Sen(x)}{x}=1$ • $\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos(x)}{x}=0$ • $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ • $e=\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$

Sin embargo, estos no son los únicos. Otros límites notables son:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ • $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ • $\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$ • $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a)$

CALCOLO DIFFERENZIALE

PARALLELO #2

CÒMPITO COMPLESSIVO #4 – LÌMITI PARTE 2

ISAAC MANCERO-MOSQUERA

4.- Resuelva los siguientes límites, utilice si es necesario, las identidades de **límites notables**:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cos^3(x)}{5x^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-5^x}{1-3^x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-Cos(x)}{x^2}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x\left[\ln(x+k)-\ln(x)\right]$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}$
- $\lim\limits_{\theta\to 1}\dfrac{1-e^{(1-\theta)^2}}{3(\theta-1)^2}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sen^2(2x)}{1-Cos(3x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-Cos^2(x)}{Tan(x)Sen(2x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sen(2x)}{\ln(1+x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-7^x}{6^x-5^x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{Sen^3(x)+4x^3-x}{2x^3+6Sen^3(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-Cos(5x)}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\ln(1+2x)}{\left[2Cos(3x)-2\right]Sen(x)}$
- $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1-Cos(u)}{\ln(u/(u-1))}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x-2}\right)^x$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}Cos(x-1)-e^{\frac{x^2-2x}{2}}}{(x-1)^2}$

5.- Determine de ser posible los valores de **a** y **c** para que las estas funciones sean continuas:

- $f(x)=\begin{cases} 3x+7 & x\le 4 \\ ax-1 & x>4 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} ax-1 & x<2 \\ ax^2 & x\ge 2 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} x-1 & x<1 \\ a & x=1 \\ x^2+a & x>1 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} Sen^2(4x)/x^2 & x\ne 0 \\ a & x=0 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} -3Sen(x) & x\le -\pi/2 \\ aSen(x)+c & -\pi/2<x<\pi/2 \\ Cos(x) & x\ge \pi/2 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} x+2c & x<-2 \\ 3ax+a & -2\le x\le 1 \\ 3x-2a & x>1 \end{cases}$

6.- Calcular todas las asíntotas, verticales, horizontales y oblicuas, de las siguientes funciones:

- $f(x)=\dfrac{6x^2-7x-5}{3x+1}$
- $f(x)=\dfrac{e^{2x}-4e^x+3}{e^x-2}$
- $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+3x+2}$
- $f(x)=\dfrac{Sen(x)}{x}$

7.- Resuelva los siguientes límites tomados de exámenes anteriores:

- $\lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{2}{2x+x^2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right]$
- $\lim\limits_{x\to\pi/4}\left[\dfrac{\sqrt[3]{Tan(x)}-1}{2Sen^2(x)-1}\right]$
- $\lim\limits_{\theta\to 0}(Csc(\theta)-1/\theta)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-e^{-x}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{\mu(-x^2+9)}{x^2+2x-3}$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
- $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-Sen(x/2)}{(\pi-x)^2}$

Revisitando las secuencias discretas.- Dada la equivalencia entre las definiciones topológicas de secuencia convergente y límites de funciones, el problema de hallar los puntos de acumulación en subconjuntos discretos de $\mathbb{R}$, se convierte en un problema de límites en el infinito. Así, por ejemplo, hallar el punto de acumulación del subconjunto S:

$$S=\left\{\frac{2n}{5n+1}, n\in \mathrm{N}\right\}$$

Se resuelve mediante el límite en el infinito $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, donde se describe el n-ésimo término mediante $a_n=\dfrac{2n}{5n+1}$. O sea, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{5n+1}=\dfrac{2}{5}$, donde 2/5 es el punto de acumulación de S.

8.- Reconsidere nuevamente los problemas de punto de acumulación del deber de Topología y Espacios Métricos, ejercicios 12), 13) y 14); y resuélvalos mediante límites en el infinito. Presente sus respuestas junto a los demás ejercicios de este deber.

9.- Considere la curva polar $r=f(\theta)$, donde $r=4+\pi/\theta$.

a) Hallar $\lim\limits_{\theta\to\infty} f(\theta)$

b) Bosquejar la gráfica para $\theta>0$.

c) Bosquejar separadamente la gráfica para $\theta<0$.

10.- Bosquejar el gráfico de las siguientes funciones. Sugerencia: tenga a mano su lista de definiciones de límites, continuidad, límites laterales, límites infinitos, límites en el infinito; pero también las de función par, impar, acotada, periódica, creciente, monótona, etc.

a)
- $\forall x_1,x_2\in(-\infty,-4)\quad x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
- $\forall \mathrm{M}>0\ \exists\delta>0\quad 0<-4-x<\delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$
- $\forall \mathrm{N}<0\ \exists\delta>0\quad 0<x+4<\delta\Rightarrow f(x)<\mathrm{N}$
- $f(2)=0$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad 0<|x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-2|<\varepsilon$
- $\forall \mathrm{M}>0\ \exists\delta>0\quad 0<4-x<\delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad 0<x-4<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathrm{N}<0\quad x<\mathrm{N}\Rightarrow|f(x)-x/2-2|<\varepsilon$
- $\forall x\in(4,\infty)\quad |f(x)|\le 2$
- $\forall x\in(4,\infty)\quad f(x+3)=f(x)$

b)
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathrm{N}<0\quad x<\mathrm{N}\Rightarrow|f(x)+2|<\varepsilon$
- $\forall x_1,x_2\in(-\infty,-2)\quad x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
- $\forall \mathrm{M}>0\ \exists\delta>0\quad 0<-2-x<\delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$
- $f(-3)=f(-1)=f(0)=f(1)=f(3)=0$
- $\forall \mathrm{N}<0\ \exists\delta>0\quad 0<x+2<\delta\Rightarrow f(x)<\mathrm{N}$
- $\forall \mathrm{N}<0\ \exists\delta>0\quad 0<-x<\delta\Rightarrow f(x)<\mathrm{N}$
- $\forall \mathrm{M}>0\ \exists\delta>0\quad 0<x<\delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$
- $\forall \mathrm{M}>0\ \exists\delta>0\quad 0<|x-2|<\delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad 0<|x-3|<\delta\Rightarrow|f(x)-4|<\varepsilon$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathrm{M}>0\quad x>\mathrm{M}\Rightarrow|f(x)-x/2|<\varepsilon$

c)
- $dom(f)=\mathrm{R}-\{4,-4\}$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad 0<-4-x<\delta\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$
- $\forall x\in dom(f)\quad |f(x)|<3$
- $\forall x_1,x_2\in(-\infty,-4)\quad x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad 0<x+4<\delta\Rightarrow|f(x)+3|<\varepsilon$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad 0<-x<\delta\Rightarrow|f(x)-3|<\varepsilon$
- $f(0)=0$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall \mathrm{a}\in(-4,0)\ |x-\mathrm{a}|<\delta\Rightarrow|\mathrm{f(x)-f(a)}|<\varepsilon$
- $\forall x\in dom(f)\quad f(-x)=-f(x)$

d)
- $dom(f)=\mathrm{R}-\{0\}$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathrm{N}<0\quad x<\mathrm{N}\Rightarrow|f(x)-x-2|<\varepsilon$
- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall \mathrm{a}\in(-\infty,0)\ |x-\mathrm{a}|<\delta\Rightarrow|\mathrm{f(x)-f(a)}|<\varepsilon$
- $\forall x_1,x_2\in(-\infty,0)\quad x_1>x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$
- $\forall \mathrm{M}>0\ \exists\delta>0\quad 0<|x|<\delta\Rightarrow f(x)>\mathrm{M}$
- $\forall x\in dom(f)\quad f(x)=f(-x)$

CALCOLO DIFFERENZIALE

PARALLELO #2

CÒMPITO COMPLESSIVO #4 – LÌMITI PARTE 2

ISAAC MANCERO-MOSQUERA

e)

- $dom(f) = \mathrm{R} - \{-3/2,\ 0,\ 3/2\}$
- $\forall \mathrm{N} < 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < |x + 3/2| < \delta \Rightarrow f(x) < \mathrm{N}$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{N} < 0\ \ x < \mathrm{N} \Rightarrow |f(x) + 2| < \varepsilon$
- $\forall x \in dom(f)\ \ \ |f(x)| > 2$
- $\forall x \in dom(f)\ \ f(-x) + f(x) = 0$

f)

- $dom(f) = \mathrm{R} - \{\pi, 0, -\pi\}$
- $\forall \mathrm{N} < 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < x + \pi < \delta \Rightarrow f(x) < \mathrm{N}$
- $\forall x_1, x_2 \in (0, \pi)\ \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- $\forall x \in dom(f)\ \ f(x) < 0$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < -x < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < -\pi - x < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$
- $\forall x \in dom(f)\ \ f(x) - f(-x) = 0$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mathrm{M} > 0\ \ x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x) + \pi| < \varepsilon$

g)

- $dom(f) = \mathrm{R}$
- $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0]\ \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in (-\infty, 0]\ \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- $\forall x \in (0, \infty)\ \ 2 \le |f(x)| \le 4$
- $\forall x \in (0, \infty)\ \ f(x + 2\pi) = f(x)$
- $f(-1) = 3$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathrm{dom(f)}\ |x| < \delta \Rightarrow |\mathrm{f(x)} - 3| < \varepsilon$
- $f(\pi) = 4$

h)

- $dom(f) = (-3, 5] \cup \{8\}$
- $\forall x_1, x_2 \in dom(f)\ \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- $\forall x_1, x_2 \in dom(f)\ \ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ 0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$

11.- Con respecto a las funciones del ejercicio (**7**), califique como Verdadero o Falso justificando apropiadamente su respuesta:

a) La función f(x) en el literal c) es continua en x=0.
b) La función f(x) en el literal h) es continua en todo su dominio.
c) La función f(x) en el literal f) es acotada.
d) La función f(x) en el literal a) es periódica en todo su dominio.
e) La función f(x) en el literal h) es estrictamente monótona.
f) La función f(x) en el literal b) es monótona en el intervalo $(-\infty, -2)$.
g) La función f(x) en el literal g) es continua en x=0.
h) La función f(x) en el literal e) es acotada.
i) La función f(x) en el literal d) es creciente y decreciente en todo su dominio.

12.- Demuestre formalmente los siguientes límites:

- $\lim_{x \to 3} 2x - 4 = 2$
- $\lim_{x \to 6} \sqrt{x + 3} = 3$
- $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$
- $\lim_{x \to 4} \dfrac{1}{(x-4)^2} = \infty$
- $\lim_{x \to 2+} \dfrac{1}{x - 2} = \infty$
- $\lim_{x \to 3} \dfrac{x + 2}{x - 2} = 5$
- $\lim_{x \to 2} \sqrt{5x^2 - 4} = 4$
- $\lim_{x \to 1} \dfrac{5x + 2}{4x - 2} = \dfrac{7}{2}$