Scuola Superiore Politecnica del Litorale

Facoltà di Scienze Naturali e Matematica

Calcolo Differenziale

Còmpito Complessivo #5 – Derivación Parte 1

Isaac Mancero-Mosquera

Nome:____

Utilizando la definición:

Si $y = f(x)$, la derivada de f se define como:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

donde $f'(x)$ es la notación de Lagrange, y $\frac{dy}{dx}$ la notación de Leibniz.

1.- Encuentre las derivadas de las siguientes funciones, utilizando la definición dada, no las técnicas de derivación:

- $f(x) = 4x^3$
- $f(x) = -Cos(x)$
- $f(x) = Sen(x) - x + e^{2x}$
- $f(x) = e^x$

2.- Aplicando las técnicas.- A veces es conveniente manipular algebraicamente una función para evitar confusiones al aplicar las técnicas de derivación. Por ejemplo, la función $y = \frac{x+1}{2}$, se puede resolver con la fórmula para el cociente, pero eso tomaría más tiempo del necesario. Si notamos que la misma se puede expresar como $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, evitaríamos perder el tiempo con la fórmula del cociente. En los siguientes problemas, reexpresar/simplificar la función antes de derivarla:

- $y = \frac{x^2+2x}{x}$
- $y = \frac{3x^2-5}{7}$
- $y = \frac{3-1/x}{x+5}$
- $y = \frac{x^2-4}{x+2}$
- $y = \frac{4x^{3/2}}{x}$
- $y = \frac{-3(3x-2x^2)}{7x}$

3.- Funciones Algebraicas. Encuentre la derivada de las siguientes funciones, calculando $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dt}$ o $\frac{dy}{dz}$, según sea el caso:

- $y = 3x^{2/3} - 2x^{5/2} + x^{-3}$
- $y = x^2\sqrt[3]{x^2}$
- $y = \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}$
- $y = at^m + bt^{m+n}$
- $y = \frac{a+bx}{c+dx}$
- $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{\sqrt[4]{x^3}}$
- $y = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x}$
- $y = \frac{\pi}{x} - \ln(2)$

4.- Funciones trigonométricas y trigonométricas inversas. Encuentre la derivada de las siguientes funciones, calculando $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dt}$ o $\frac{dy}{dz}$, según sea el caso:

- $y = 5Sen(t) + 3Cot(t)$
- $y = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arcsec}(x)$
- $y = zCot(z)$
- $y = \frac{Sen(x)+Cos(x)}{Sen(x)-Cos(x)}$
- $y = 2tSen(t) - (t^2-2)Cos(t)$
- $y = x\mathrm{Arcsen}(x)$

5.- Funciones hiperbólicas:

a) Deduzca expresiones para las derivadas de las funciones hiperbólicas $y = Senh(x)$ y $y = Tanh(x)$.

b) Investigue y complete una lista de derivadas para las restantes funciones hiperbólicas y sus respectivas hiperbólicas inversas. **Esta lista es para su uso personal, no incluir como parte del deber.**

6.- Funciones exponenciales y logarítmicas. Encuentre la derivada de las siguientes funciones, calculando $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dt}$ o $\frac{dy}{dz}$, según sea el caso:

- $y = \frac{x^2}{\ln(x)}$
- $y = t^5 e^t - (t^2 - 2)e^{-t}$
- $y = x^7 e^x$
- $y = \ln(z)\log(z) - \ln(a)\log_a(z)$
- $y = \frac{1}{x} + 2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}$
- $y = e^x \operatorname{Arcsen}(x)$

Regla de la Cadena.- Permite hallar las derivadas de funciones compuestas. Si $y = f(u)$ donde $u = g(x)$, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Es decir, esta regla ayuda a resolver el problema de la composición $f \circ g(x) = f(g(x))$. A veces, cuando no es fácil darse cuenta qué función está siendo compuesta con qué, uno o más cambios de variable del tipo $u = g(x)$ podrían aclarar la situación.

7.- Encuentre la derivada de las siguientes funciones, utilizando la regla de la cadena:

- $y = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$
- $y = \pi\left(1 + 3x - 5x^2 + x^3\right)^{24}$
- $y = \sqrt{1+\cos(x)}$
- $y = \left(x^{2/3} - 2Sen(x)\right)^5$
- $y = Cos\left(Cos\left(Cos\left(Cos\left(x\right)\right)\right)\right)$
- $y = \tan(x) - \frac{1}{3}\tan^3(x) + \frac{1}{5}\tan^5(x)$
- $y = \sqrt{\arctan(x)} - \left(arcsen(x)\right)^3$
- $y = \sqrt{xe^x + x^3}$
- $y = \sqrt[a]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5(x)$
- $y = Sen(3x) + \tan\left(\sqrt{x}\right)$
- $y = x^2 10^{2x} + \ln(1 - x^2)$
- $y = \ln^2(x) - \ln\left(\ln(x)\right)$

8.- Califique como Verdadero o Falso, justificando su respuesta (estos son temas de exámenes anteriores):

i) Si f es derivable en x=a, entonces $\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathrm{a}+\alpha h) - f(\mathrm{a}+\beta h)}{h} = f'(\mathrm{a})(\alpha - \beta)$.

ii) $\frac{D_x Sen(x)}{D_x Cos(x)} = \frac{Cos(x)D_x Sen(x) - Sen(x)D_x Cos(x)}{Cos^2 x}$

iii) Si $f(2)=1$, $f'(2)=5$, $g(2)=2$ y $g'(2)=-3$, entonces $\frac{d}{dx}\left[\frac{x^2 f(x)}{g(x)}\right]=15$ cuando $x=2$.

iv) Si $\frac{d}{du}[f(u)]=\frac{1}{u}$, entonces $\frac{d}{dx}[f(-10x+7)]=\frac{-10}{-10x+7}$.

v) Si f es una función par y diferenciable para todo $x\in dom(f)$, entonces $f'(x)$ es una función impar.

vi) Si $f'(x)$ existe, entonces el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ existe.

vii) Si f es una función impar y diferenciable para todo $x\in dom(f)$, entonces $f'(x)$ es otra función impar.

9.- Encuentre la derivada de las siguientes funciones (compilación de problemas de Demidovich):

- $y=\sqrt{\alpha Sen^2(x)+\beta Cos^2(x)}$
- $y=\text{Arcsen}(x^2)+\text{Arccos}(x^2)$
- $y=\frac{1}{\sqrt{b}}\text{Arcsen}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\frac{1}{2}$
- $y=3b^2\text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{x}{b-x}}\right)-(3b+2x)\sqrt{bx-x^2}$
- $y=\ln(a+x+\sqrt{2ax+x^2})$
- $y=\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right)$
- $y=2^{Arcsen(3x)}+(1-\text{Arccos}(3x))^2$
- $y=3^{\left(\frac{sen(ax)}{\cos(bx)}\right)}+\frac{1}{3}\frac{sen^3(ax)}{\cos^3(bx)}$
- $y=\text{Arctan}\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
- $y=\frac{xArcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}}-\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$