CÁLCULO DIFERENCIAL

PARALELO 2 - TAREA #7

APLICACIONES DE LA DERIVADA

ISAAC MANCERO-MOSQUERA

Nome:____

1.- DIFERENCIALES.- Resolver los siguientes problemas con diferenciales:

a) Calcular el diferencial dy de las siguientes expresiones:

- $y = 5x + x^2$ *cuando* $x = 2$ y $\Delta x = 0{,}001$
- $y^3 - y = 6x^3$ *en el punto* $(1,2)$ y $\Delta x = 0{,}1$
- $y = \tan(x)$ *cuando* $x = \pi/3$ y $\Delta x = \pi/100$
- $x^2 + 2xy - y^2 = 2$ *en el punto* $(1,1)$ y $\Delta x = 0{,}025$
- $y = 2/\sqrt{x}$ *cuando* $x = 9$ y $\Delta x = 0{,}01$

b) ¿En cuánto aumentará el lado de un cuadrado si su área aumenta de 9 m^2 a 9.1 m^2?

c) ¿En cuánto aumenta el volumen de una esfera si su radio R=15 cm se alarga en 2 mm?

d) Muestre que un error relativo de 1% en la medida de longitud del radio, causa un error relativo aproximado de 2% en la superficie de una esfera.

e) El periodo de un péndulo está dado por $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$. Pero la gravedad g varía de un lugar a otro en la superficie terrestre. Suponga que se desea usar el periodo del péndulo para determinar el valor de g, cuál es el error porcentual en g si al medir T se obtiene apenas un 0.1% de error?

f) Aproximar mediante diferenciales los siguientes valores:

- $sen(31°)$ • $\log_{10}(0.9)$ • $e^{0.2}$ • $\arctan(1.05)$ • $\tan(44°)$

g) Mediante diferenciales resuelva los siguientes límites:

- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+\alpha h) - f(a+\beta h)}{h}$ $\quad R: \textit{debe quedar } f'(a)(\alpha - \beta)$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{2h}$ $\quad R:\ 0$
- $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ $\quad R: \textit{debe resultar } f'(x)$

h) Hallar el diferencial de segundo orden $d^2y = f''(x)dx^2$ para las funciones del literal a)

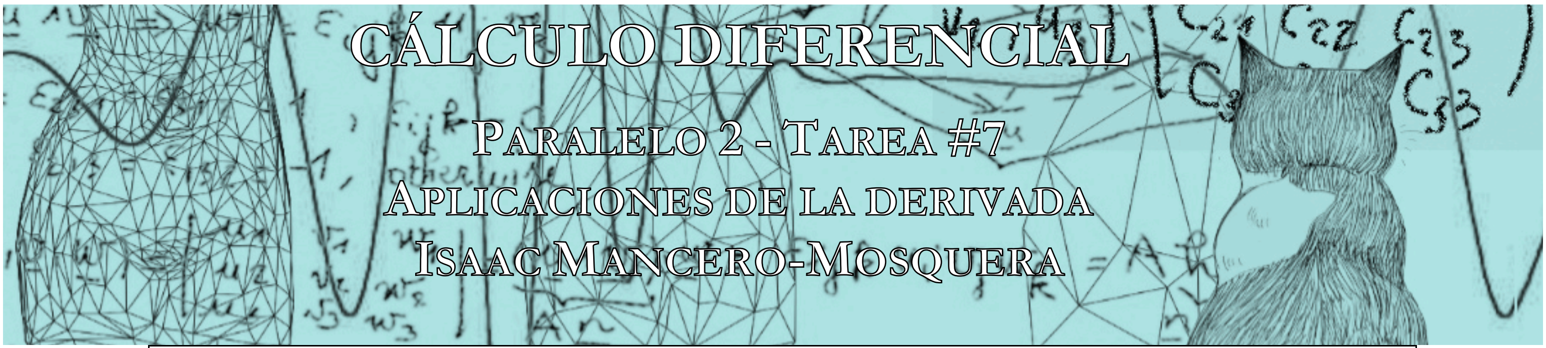
2.- Encontrar los intervalos en que las siguientes funciones son crecientes o decrecientes:

- $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$
- $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$
- $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$
- $f(x) = x^3$
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$
- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 0 & 0 \le x \le 1 \\ -(x-1)^2 & x > 1 \end{cases}$
- $f(x) = \dfrac{cos(x)}{1 + sen^2(x)}$
- $f(x) = sen^2(x) + sen(x)$
- $f(x) = \dfrac{x}{2} + \cos(x)$

3.- Explique por qué $f(x) = Tan(x)$ tiene un máximo en $[0, \pi/4]$, pero no en $[0, \pi]$.

Explique por qué $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ tiene un mínimo en $[0, 2]$, pero no en $[-2, 0]$.

4.- Halle los puntos críticos y los valores extremos (de existir), en cada una de las siguientes funciones, en el intervalo dado:



Función	*intervalo*	*Función*	*intervalo*
• $f(x)=3x^{2/3}-2x$	$[-1,1]$	• $f(x)=2Sen(x)-Cos(2x)$	$[0,2\pi]$
• $f(t)=\dfrac{t^2}{t^2+3}$	$[-1,1]$	• $f(x)=x^4-8x^2+3$	$[-5/2,5/2]$
• $h(s)=\dfrac{s}{s-2}$	$[3,5]$	• $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(4-x)$	$[0,4]$
• $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+4}$	$[-2,2)$	• $h(x)=-3x\sqrt{x+1}$	$[-1,1]$
• $f(t)=t+\dfrac{32}{t^2}$	$(2,5]$	• $g(s)=4-\lvert s\rvert$	$(-4,4)$
• $g(v)=(v+2)^{2/3}$	$(-3,-1)$	• $f(t)=Cos(\pi t/2)$	$(-1,3)$

5.- Resolver los siguientes problemas:

a) En un periodo de dos horas tras la ingestión de alcohol, la concentración del mismo en la sangre del Pana de Chupa de ____________ es $C=0.29483t+0.04253t^2-0.00035t^3$, donde C se mide en miligramos y t en minutos. Hallar los intervalos donde C crece y donde C decrece.

b) El kiosko de Jonathan vende **x** hamburguesas con un beneficio B dado por: $B=2.44x-\dfrac{x^2}{20000}-5000$, donde $0\le x\le 35000$. Encontrar los intervalos donde B crece o decrece.

c) Durante sus prácticas en el hospital, Evelyn ha descubierto que un bebé pierde peso durante unos días tras su nacimiento, antes de volverlo a ganar. La ecuación que modela este fenómeno es $P=0.033t^2-0.3974t+7.3032$, donde P es el peso y t se mide en días. Hallar el periodo de pérdida y de ganancia de peso durante un intervalo de 0 a 14 días.

6.- Hallar los puntos de inflexión si los hubiere, y los intervalos donde la concavidad es positiva ("hacia arriba") o negativa ("hacia abajo"), para cada una de las siguientes funciones:

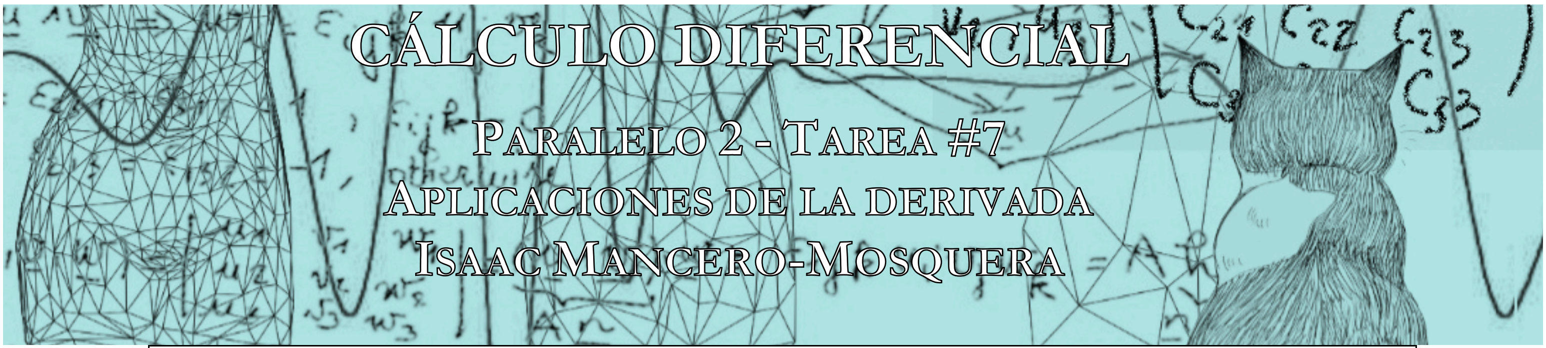
- $f(x)=x^2-x-2$
- $f(x)=-x^3+3x^2-2$
- $f(x)=\dfrac{24}{x^2+12}$
- $f(x)=x^3$
- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x+1}$
- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$
- $f(x)=\dfrac{-3x^5+40x^3+135x}{270}$
- $f(x)=x^4+x^3-3x^2+1$
- $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$

7.- Resolver los siguientes problemas:

a) Hallar los valores a, b y c para que $f(x)=ax^2+bx+c$ tenga un máximo relativo en (5, 20) y pase por (2, 10).

b) Hallar los valores de a, b, c, d tales que $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un mínimo relativo en (0,0) y un máximo relativo en (2,2).

c) En un estudio oceanográfico, Andrea ha determinado que la temperatura (Fahrenheit) diaria en las aguas superficiales del golfo di Taranto en un año está dada por $T=45-23Cos\left(2\pi(t-32)/365\right)$, donde t es el día del año y t=1 corresponde al primero de enero mientras t=365 al 31 de diciembre. Hallar el día en que las aguas tienen la mayor y la menor temperatura.



d) La salida de una batería viene dada por $P = VI - RI^2$, donde V es el voltaje medido en voltios, R la resistencia medida en ohmios, e I la intensidad en amperios. Encuentre el valor de I que corresponde al máximo valor de P en una batería de 12 voltios y R=0.5 ohmios. (Supóngase que un fusible acota la salida a un intervalo $0 \le I \le 15$.

e) Nayive ha determinado que el costo C de pedir y almacenar x unidades de cierto producto en su negocio es $C = 2x + \dfrac{300000}{x}$, para $0 \le x \le 300$. Hallar el pedido que minimiza el costo si el camión de transporte puede a lo sumo cargar 300 unidades.

8.- Califique como Verdadero o Falso, justificando su respuesta. Si un enunciado es falso, entonces proporcione un contraejemplo que ilustre su falsedad.

i) Si f es cóncava hacia abajo en un intervalo (a,b), entonces no puede ser creciente en (a,b)

ii) Si f es cóncava hacia abajo en un intervalo (a,b), entonces no puede ser decreciente en (a,b)

iii) $f(x) = |x|$ tiene un punto crítico en x=0

iv) Una función discontinua no puede tener valores extremos

v) Sea f una función estrictamente monótona, entonces f no tiene un valor extremo en ningún intervalo abierto (a,b).

vi) Sea f una función monótona, entonces f no tiene un valor extremo en ningún intervalo abierto (a,b).

vii) Si una función es periódica y continua, entonces tiene siempre un punto de inflexión.

viii) Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$ en un punto x=c, $c \in (a,b)$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f en (a,b).

Bosquejando la gráfica de una función.- Los conceptos que se discuten en Cálculo incluyen: Dominio, recorrido, intersecciones con los ejes, simetría (par o impar), continuidad/discontinuidad, asíntotas (verticales, horizontales, oblicuas), puntos críticos (derivada cero o no definida), valores extremos, concavidad y puntos de inflexión. Para graficar una función se sugiere considerar las siguientes ideas:

i) Un esbozo preliminar que contenga las intersecciones con los ejes (x=0, y=0), hallar el dominio y los puntos donde no esté definida la función.

ii) Localizar las asíntotas, verticales, horizontales y oblicuas si las hubiere.

iii) Hallar los puntos donde $f'(x)$ no esté definida o sea cero.

iv) Hallar los puntos donde $f''(x)$ no esté definida o sea cero.

v) Estudiar el comportamiento de $f(x)$ entre cada uno de esos valores (monotonía, concavidad)

vi) Hallar los valores extremos, puntos de inflexión, y algún otro punto que ayude a localizar bien la función en el plano cartesiano.

9.- Bosquejar la gráfica de las siguientes funciones:

- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$
- $f(x) = \dfrac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$
- $f(x) = x^{1/3}(x+3)^{2/3}$
- $f(x) = 2x^{5/3} - 5x^{4/3}$
- $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 9)}{x^2 - 4}$
- $f(x) = \dfrac{Cos(x)}{1 + Sen(x)}$
- $f(x) = x^3 + \dfrac{243}{x}$
- $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$
- $f(x) = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x$
- $f(x) = x\sqrt{4 - x}$
- $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2x|$

10) RECTAS TANGENTES Y NORMALES.-

a) Hállense los puntos de tangencia horizontal y vertical (si existen) en las siguientes curvas polares:

- $r = 1 + sen(\theta)$ • $r = 2cosec(\theta) + 3$ • $r = a.sen(\theta)\cos^2(\theta)$ • $r = a.sen(\theta)$

b) De ser posible, halle las tangentes en el polo en las siguientes curvas polares:

- $r = 3.sen(5\theta/2)$ • $r^2 = \dfrac{1}{\theta}$ • $r = 3cosec(\theta)$ • $r = 2 + 3sen(\theta)$

c) Hallar la pendiente de la gráfica en el punto dado:

• $r = 3.sen(\theta)$	$\theta = \pi/3$	• $r = 2sec(\theta)$	$\theta = \pi/4$
• $r = \dfrac{6}{2sen(\theta) - 3\cos(\theta)}$	$\theta = \pi$	• $r = 3 - 2\cos(\theta)$	$\theta = 0$

d) Encuentre la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas, en el valor indicado del parámetro:

• $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 3t - 1 \end{cases}$	$t = 1$	• $\begin{cases} x = 2 + \sec(\theta) \\ y = 1 + 2\tan(\theta) \end{cases}$	$\theta = \pi/6$
• $\begin{cases} x = t^2 - t + 2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$	$t = -1$	• $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = \dfrac{1}{t} + 1 \end{cases}$	$t = 1$

e) Hallar los puntos de tangencia horizontal de las siguientes curvas paramétricas:

• $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$	• $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$	• $\begin{cases} x = \cot(\theta) \\ y = 2sen(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$	• $\begin{cases} x = t^2 - t + 2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$

f) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva indicada en el punto dado:

• $(x+y)^3 = 27(x-y)$ $en\ (2,1)$	• $ye^y = e^{x+1}$ $en\ (0,1)$	• $y^2 = x + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $en\ (1,1)$	• $(x+y)^3 - 4x^3y = 4xy^3$ $en\ (1,1)$

g) ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

h) ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

i) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2,3)$ y es paralela a la recta normal a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $(1,0)$.

j) Demuestre que las curvas $y = 4x^2 + 2x - 8$ y $y = x^3 - x + 10$ son tangentes entre sí en el punto $(3,34)$. ¿Ocurrirá lo mismo en el punto $(-2,4)$?

k) Hallar el ángulo de intersección de las parábolas $y = (x-2)^2$ y $y = -4 + 6x - x^2$.