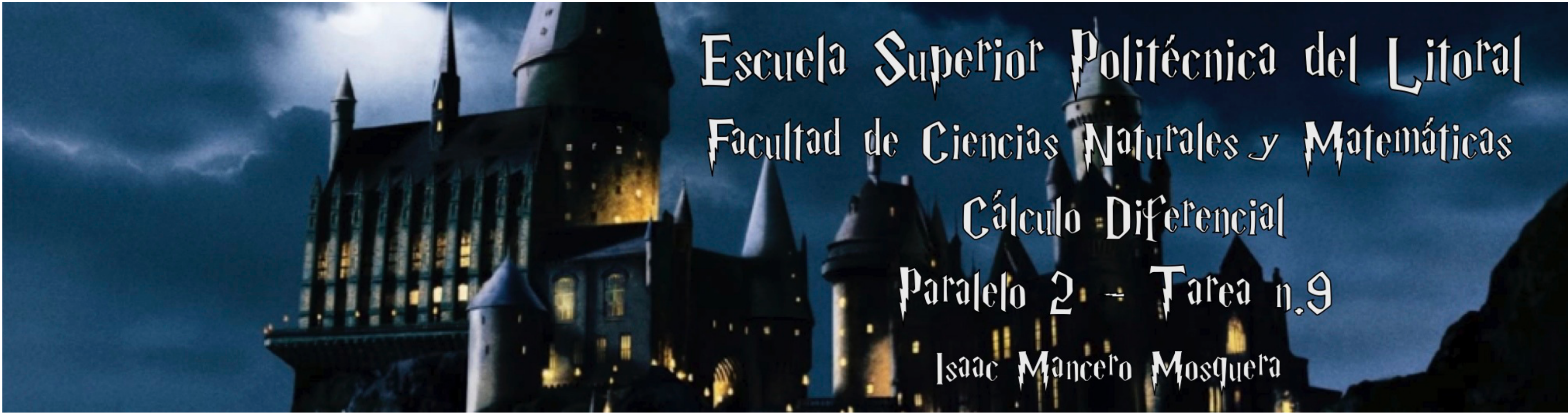
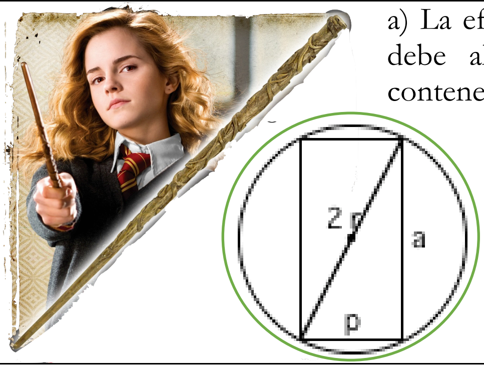


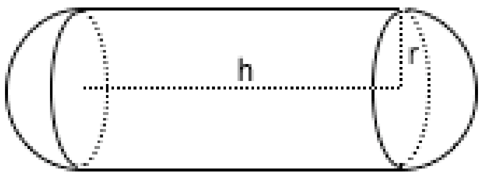
Nombre:____

1.- OPTIMIZACIÓN (Maximización/minimización), resolver los siguientes problemas:



a) La efectividad de la varita mágica de Hermione Granger se debe al núcleo de fibra de corazón de dragón en un contenedor rectangular en el interior de la misma. Si la efectividad es proporcional a la anchura **p** del núcleo y al cuadrado de su altura **a**; hallar las dimensiones del núcleo a utilizarse si se desea maximizar la efectividad de una varita con un radio interno **r** de 1.2 cm.

b) José Ignacio quiere construir un tanque de gas formado por un cilindro y dos semiesferas. El costo por m^2 de las semiesferas es doble de la parte cilíndrica. Si la capacidad es 10π, ¿cuáles son las dimensiones que minimizan el costo?



R: $r = \sqrt[3]{15}/2$ y $h = 30/\sqrt[3]{225}$.

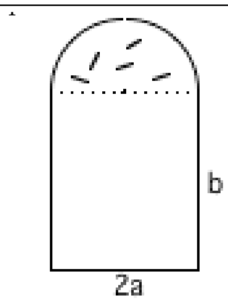
c) Dada una esfera de radio R, encontrar las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que contiene a la esfera. Sugerencia: La generatriz del cono es tangente a la esfera, por lo tanto perpendicular al radio en el punto de corte. Establecer semejanza de triángulos rectángulos.

R: $h = 4R$ y $r = R/\sqrt{2}$.

d) Hallar las coordenadas del punto sobre $y = \sqrt{x}$ más cercano al punto (4, 0). Sugerencia: En vez de minimizar la distancia, es más cómodo minimizar el cuadrado de la distancia. La variable independiente no cambia.

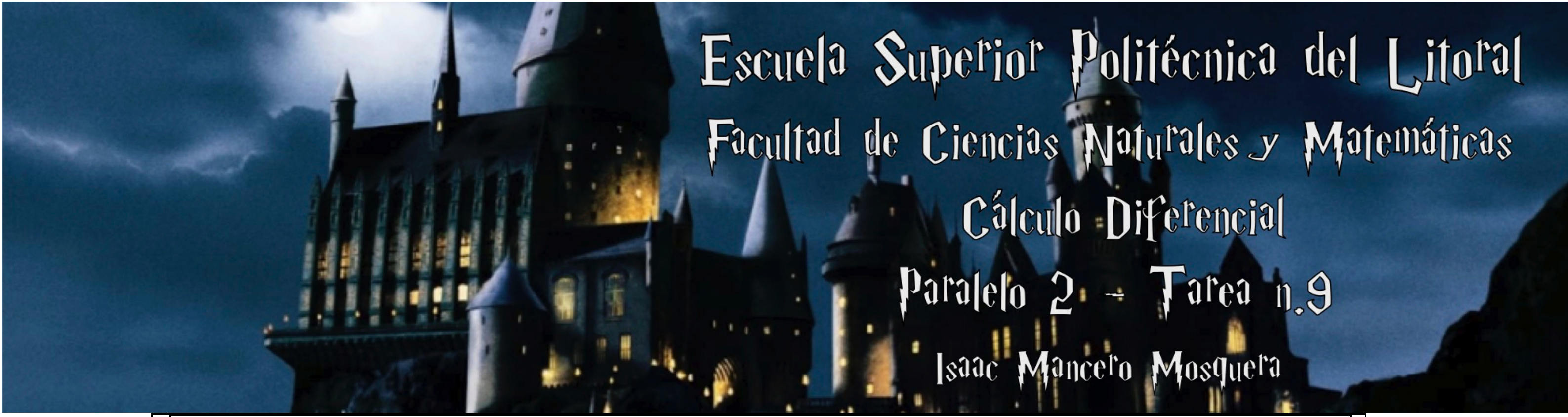
R: $\left(7/2, \sqrt{7/2}\right)$.

e) En casa de Gabriela Belén, una ventana tiene forma rectangular con semicírculo en la parte superior. El rectángulo es de vidrio claro y el semicírculo de vidrio coloreado. El coloreado sólo transmite la mitad de luz por m^2 que el claro. Si el perímetro P de la ventana es fijo, determinar las proporciones de la ventana que admitirá más luz.

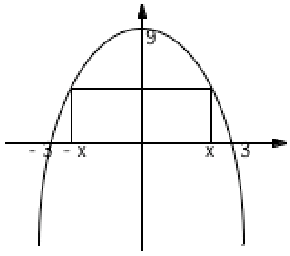


R: $a = 2P/(8+3\pi)$ y $b = P(4+\pi)/(16+6\pi)$.

f) Hallar las dimensiones del cilindro circular recto de máximo volumen que se puede inscribir en una esfera de radio R.

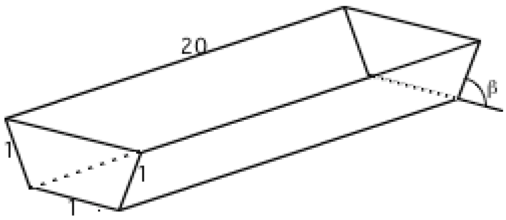


g) Hallar el perímetro y el área del rectángulo de área máxima que se puede inscribir entre la parábola $y = 9 - x^2$ y el eje X.



h) Jorge Luis se encuentra en una barca a 2 Km de la costa, tienen que ir a comprar en el negocio de Maitte, situado en un punto Q a 3 Km costa abajo y 1 Km tierra adentro. Si puede navegar a 2 Km/h y caminar a 4 Km/h, ¿en qué punto de la costa debe desembarcar para alcanzar el punto Q en el menor tiempo posible?

i) Katherine construye un depósito como el de la figura con una pieza de metal de 3 m. ¿de ancho y 20 m. de longitud. Expresar el volumen en términos de β y hallar el máximo volumen posible



R: $V_{max} = 15\sqrt{3}$

Sugerencia: La figura es un prisma recto cuya base es un trapecio. El volumen es igual al área de la base por la altura.

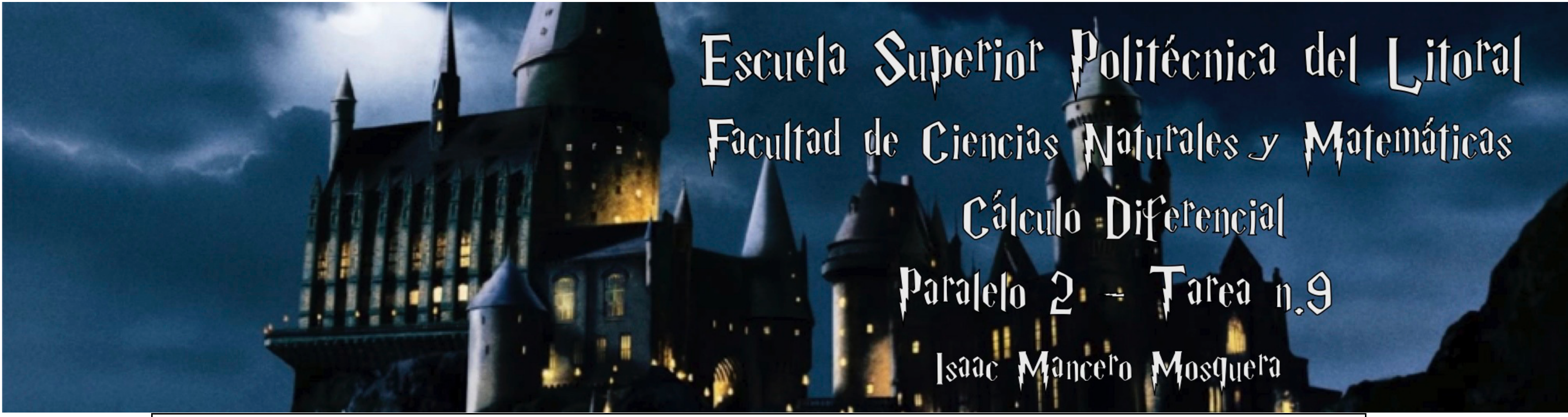
2.- Resolver los siguientes límites mediante la **REGLA DE L'HÔPITAL**:

a) Indeterminaciones de tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(|x|)}{1-x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - sen(x)}{\tan(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{\sqrt{x}} - 1}{3^{\sqrt{x}} - 1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arcsen(x)}{\arctan(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x + x - 1}{e^x - \cos(x)}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^{100}}{e^x}$
- $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x - 4}}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3}$

b) Indeterminaciones de tipo $(0 \cdot \infty)$ o $(\infty - \infty)$:

- $\lim\limits_{x\to \pi/4} \left(\sec(x) - \tan(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x) \cdot \ln(\tan(x))$
- $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{sen(x)}{x - \pi}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\pi x}{2} - x \cdot \arctan(x)\right)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{sen(x)}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \arctan\left(\dfrac{n}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(a^x - e^x\right)$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{2 - \sqrt{2x}} - \dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{4x}}$
- $\lim\limits_{x\to \infty} x^2 - x\sqrt{x^2 + 1}$



c) Indeterminaciones de tipo $\left(0^0\right)$ o $\left(1^\infty\right)$:

- $\lim\limits_{x\to 0}\left(sen(x)\right)^x$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-e^x\right)^{1/x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-x^3\right)^{1/x}$
- $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x^2}}$
- $\lim\limits_{x\to \pi/2}\left(sen(x)\right)^{\tan(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 1}\left(1-x\right)^{\ln(|x|)}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{n/x}$
- $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/\ln(|x|)}$
- $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^x$

3.-RAZONES DE CAMBIO. Resolver los siguientes problemas:

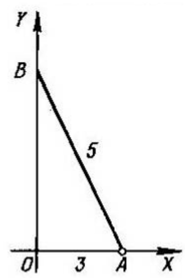
a) Un punto se mueve sobre la hipérbola $y=10/x$ de tal modo que su abscisa x aumenta uniformemente con velocidad de 1 unidad por segundo. ¿Con qué velocidad varia su ordenada cuando pase por el punto $(5,2)$?

b) En qué punto de la parábola $y^2=18x$ la ordenada crece dos veces más rápido que la abscisa?

c) Ron infla un balón esférico de tal modo que su radio crece a 5 cm/s constantes. ¿A qué velocidad crecerá el área de dicho balón, y su volumen, cuando el radio sea igual a 13 cm?

d) Un punto se mueve por la espiral $r=10^\theta$ de modo que su velocidad angular de rotación es constantemente 6 grados por segundo. Determinar la velocidad con que se alarga el radio en el instante que $r=25$.

e) Pamela Lissette apoya una escalera de 5 metros de longitud en una pared, con la base apoyada a 3 metros de la misma. Si la escalera empieza a resbalarse de modo que su punto de apoyo A se aleja de la pared a 2 metros por segundo, ¿cuál será la velocidad del desplazamiento del extremo B en el momento que ha descendido 1 metro de su posición original?



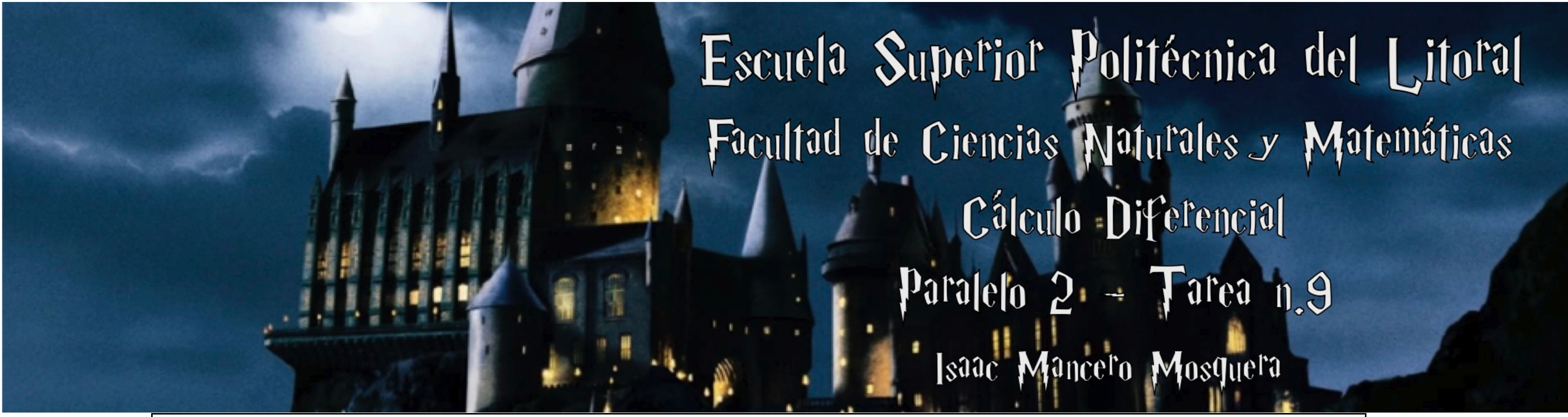
f) La capitana Leonela parquea su auto patrulla a 50 metros de un muro. Si su reflector policial de luz gira a 30 revoluciones por minuto, ¿a qué velocidad se desplaza el haz de luz sobre el muro, cuando el rayo forma un ángulo de 60 grados con respecto a la línea imaginaria que une el auto y el muro?

4.- Teorema de Rolle y del Valor Medio para derivadas (o de Lagrange).
Resuelva, justificando su respuesta:

i) Al calcular la derivada de $f(x)=|2x-1|-3$ se observa que nunca se anula. Sin embargo $f(2)=f(-1)=0$ ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

ii) Califique como Verdadero o Falso: Si la gráfica de un polinomio intersecta el eje x en 3 puntos, entonces hay al menos dos puntos donde la tangente es horizontal.

iii) El Pana de Chupa de.., conduciendo un auto, recorrió 202 Km en dos horas, pero al ser detenido aseguró que nunca sobrepasó el límite de velocidad de 100Km/h. Use el teorema del Valor Medio (para derivadas) para



mostrar que mintió.

iv) Averiguar si alguna de las siguientes funciones cumple las hipótesis del teorema del Valor Medio (para derivadas). En caso afirmativo, encontrar los valores de c que verifican el teorema:

- $f(x)=\sqrt{x-1}$ $\quad en\ [1,3]$
- $f(x)=-3+3(x-1)^{2/3}$ $\quad en\ [0,2]$
- $f(x)=\begin{cases}(3-x^2)/2 & x\le 1\\ 1/x & x>1\end{cases}$ $\quad en\ [0,2]$

v) Califique como Verdadero o Falso: Si $r1$ y $r2$ son dos raíces reales distintas de un polinomio $p(x)$, tal que $r1<r2$, entonces $p'(x)=0$ en algún punto $c\in(r1,r2)$.

5. SÍNTESIS FUNCIONAL.- Construir gráficas de funciones que satisfagan las características dadas. Sugerencia: tenga a mano su lista de definiciones de límites, continuidad, límites laterales, límites infinitos, límites en el infinito; pero también las de función par, impar, acotada, periódica, creciente, monótona, etc. Así también, los criterios de la primera derivada sobre monotonía, valores extremos, puntos críticos y de la segunda derivada sobre concavidad.

a)

- f *decrece en* $(-\infty,-3)\cup(0,2)\cup(2,4)$
- $dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
- f *tiene un punto de inflexión en* $x=1$
- f *tiene un mínimo local en* $x=4$
- $(3x-6)/2$ *es asíntota y corta a la curva en* $x=1$
- $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x)=3,\ \lim_{x\to -3^-} f(x)=-2,\ \lim_{x\to -3^+} f(x)=-4$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x)=0,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$

b)

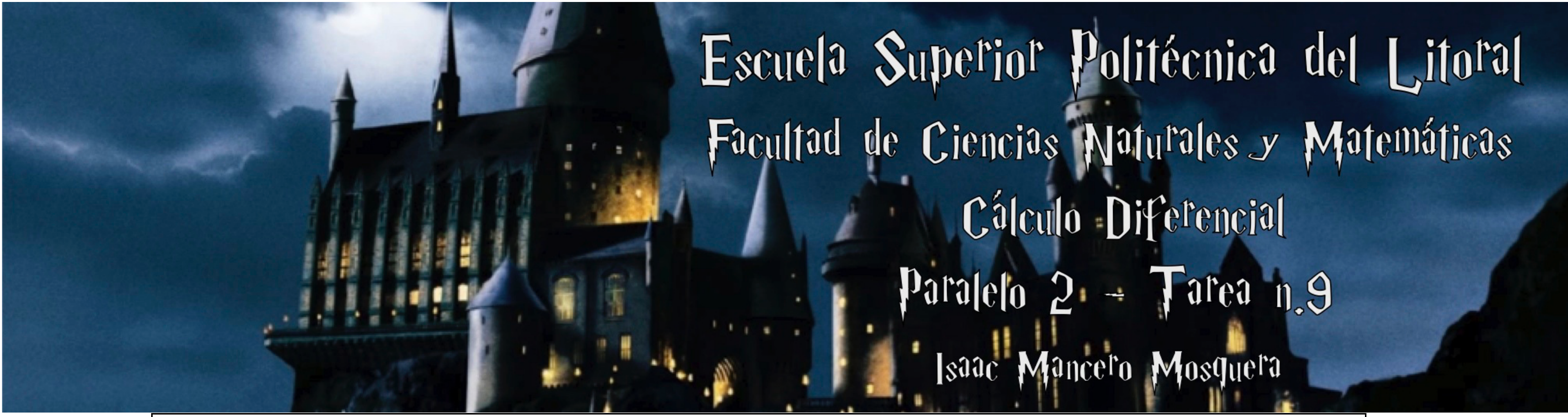
- f *es derivable en* $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x)=0$
- $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f(x)<0\ \wedge f'(x)<0\ \wedge f''(x)<0$
- $\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$
- $x\in(0,1)\Rightarrow f(x)<0\ \wedge f'(x)>0\ \wedge f''(x)<0$
- $f(1)=0$
- $x\in(1,2)\Rightarrow f(x)>0\ \wedge f'(x)>0\ \wedge f''(x)<0$
- $f(2)=1$
- $x\in(2,3)\Rightarrow f(x)>0\ \wedge f'(x)<0\ \wedge f''(x)<0$
- $f(3)=1/2$
- $x\in(3,\infty)\Rightarrow f(x)>0\ \wedge f'(x)<0\ \wedge f''(x)>0$
- $\lim_{x\to \infty} f(x)=0$

c)

- $dom(f)=[-2,4)\cup(4,+\infty)$
- f *es continua en su dominio*
- $f(-2)=-3,\ f'(2)=f'(6)=0,\ f'(3)$ *no existe*
- $\forall x\in(2,3)\cup(4,6)\ f'(x)<0$
- $\forall x\in[-2,2)\cup(3,4)\cup(6,8)\ f'(x)>0$
- $\forall x\in(0,3)\ f''(x)<0$
- $\forall x\in(-2,0)\cup(3,4)\cup(4,\infty)\ f''(x)>0$
- $f''(0)=0$
- $\forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in dom(f)\ 0<|x-4|<\delta\ \Rightarrow f(x)>M$

d)

- $dom(f)=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$
- f *es continua y derivable en su dominio*
- *no hay simetría con el eje Y*
- $f(0)=0,\ f(-2)=-4$
- $\forall x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)\ f'(x)>0$
- $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$
- $f''(0)>0,\ f''(-2)<0$
- $f'(0)=0,\ f'(-2)=0$
- $\lim_{x\to\infty} f(x)-x+1=\lim_{x\to -\infty} f(x)-x+1=0$



e)

- *es continua en* $(-\infty,3)\cup(3,\infty)$
- $f(-2)=8,\ f(0)=4,\ f(2)=-1$
- *si* $|x|>2,\ f'(x)>0$
- *si* $|x|<2,\ f'(x)<0$
- $f'(2)=0$
- $f'(-2)$ *no existe*
- $\forall x\in(-2,0)\ \ f''(x)<0$
- $\forall x>0\ \ f''(x)>0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4$
- $x=3$ *es asíntota vertical*

6.-SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN.

a) Encuentre el polinomio de Maclaurin del orden n especificado:

- $f(x)=e^{-x}\quad n=4$
- $f(x)=\dfrac{1}{x+1}\quad n=4$
- $f(x)=\sec(x)\quad n=2$
- $f(x)=sen(\pi x)\quad n=3$
- $f(x)=xe^{x}\quad n=4$
- $f(x)=2-3x^3+x^4\quad n=4$

b) Encuentre el polinomio de Taylor del orden n especificado alrededor del punto c dado:

- $f(x)=\dfrac{1}{x}\quad n=4,\ c=1$
- $f(x)=x^2\cos(x)\quad n=2,\ c=\pi$
- $f(x)=\sqrt{x}\quad n=4,\ c=4$
- $f(x)=\ln(x)\quad n=4,\ c=1$

c) Demuestre mediante series de Maclaurin el límite notable $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

d) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 3 para $f(x)=arcsen(x)$ y luego úselo para calcular $arcsen(0.1)$.

e) Hallar el intervalo de convergencia

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\qquad R:\ -2<x<2$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}\qquad R:\ 0<x\le 2$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(2n)!\left(\dfrac{x}{2}\right)^n\qquad R:\ x=0$
- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n!}\qquad R:\ -8<x<\infty$
- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(x-c)^{n-1}}{c^{n-1}},\ c>0\qquad R:\ 0<x<2c$

f) Si $Sen(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, hallar $Sen(x^2)$

g) Hallar la serie de Maclaurin de $f(x)=\cos(\sqrt{x})$.

h) Hallar el grado polinomial de Taylor con centro en $c=1$, que debe usarse para calcular $\ln(\ 1{,}2)$ con un error menor que 0,001?

i) ¿Qué grado polinomial de Maclaurin para la función $f(x)=\ln(x+1)$ se debe usar si se quiere calcular $\ln(\ 1{,}5)$ con un error menor que 0,0001?