# CADENAS DE MARKOV

## Introducción

Las cadenas de Markov, nombradas en honor de Andrei A. Markov quien las desarrolló a mediados de los 1900, son un modelo matemático que se utiliza en una amplia variedad de áreas tales como la economía, la meteorología, la sociología; para analizar procesos y tratar de predecir patrones de comportamiento. La característica notable de un modelo de cadena de Markov es su carencia de memoria, ya que, dada una matriz de transición fija, el siguiente estado depende solamente del estado actual y no de la historia pasada. Esto es, si se parte del estado $S_3$ , luego va al $S_2$, $S_1$, y luego $S_2$, la posibilidad de pasar luego al estado $S_3$ sería igual si originalmente partió de $S_3$, luego $S_4$, $S_3$ y $S_2$

**Vector de probabilidad** (DEF)**.-** es un vector de $\mathrm{R}^n$ que cumple con tener solo componentes positivas que suman 1 en total.

**Matriz de probabilidad** (DEF)**.-** es una matriz $n \times n$ que cumple con dos condiciones:

a) $\forall i, j \quad a_{ij} \geq 0$ (sus entradas son todas positivas)

b) La suma de las componentes en cada columna es 1.

Es decir, una matriz de probabilidad tiene en sus columnas solo vectores de probabilidad.

**Teorema**.- Sea A una matriz de probabilidad nxn, entonces A tiene un valor propio igual a 1.

Las matrices de probabilidad son fundamentales en el modelo de las cadenas de Markov, y para observar cómo se aplica, considérese en el siguiente ejemplo, el vector probabilidad:

$$v_o = \begin{bmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{bmatrix}$$

El cual indica el porcentaje de gente que vive en la ciudad (60%) y en el campo (40%) en una región dada, en un año dado. Ahora considérese la siguiente matriz que muestra los porcentajes de migración anual entre la ciudad y el campo.

$$\begin{array}{cccc} & \textit{desde la ciudad} & \textit{desde el campo} & \\ A = & \left[\begin{array}{c} 0.95 \\ 0.05 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.03 \\ 0.97 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \textit{a la ciudad} \\ \textit{al campo} \end{array} \end{array}$$

Así, en un año dado, el 95% de los habitantes de la ciudad se quedan en la ciudad, pero un 5% migran al campo; por otra parte, el 3% de los habitantes del campo se mudan a la ciudad mientras el 97% se queda en el campo. En total, las columnas consideran el 100% de la población, y constituyen una matriz de probabilidad. Supongamos que la población inicial en una región en el año 2000 es descrita por el vector $v_o$, ¿cuál es la proyección del porcentaje que vive en el campo y en la ciudad en el año 2001? La aplicación del modelo de Markov indica que:

$$v_1 = Av_0 = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{bmatrix}$$

Es decir, en el año siguiente, 58.2% viven en la ciudad, y 41.8% en el campo. ¿Cuál es el porcentaje de población en el campo y la ciudad en el 2002? ¿Cuál es el porcentaje de población en el campo y la ciudad en el 2016? ¿En el 2050? Solo la aplicación reiterada del producto matricial podría darnos la solución.

$$v_2 = Av_1 = A(Av_0) = A^2 v_0$$

La matriz A tiene un valor propio 1, lo que significa que existe un respectivo vector propio $v_c$ tal que $Av_c = v_c$. Este vector se conoce como estado estable del sistema, o vector de equilibrio, pues una vez alcanzado, el sistema permanece en el mismo. Para encontrarlo, hay que resolver el sistema correspondiente a $(A-I)v = \bar{\mathbf{0}}$, y al vector propio correspondiente, convertirlo en un vector de probabilidad multiplicándolo por algún escalar conveniente:

$$(A-I)v = \bar{\mathbf{0}} \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -0.05 & 0.03 & 0 \\ 0.05 & -0.03 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -0.05 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

donde el espacio solución es:

$$E_{\lambda=1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \;/\; -5x_1 + 3x_2 = 0 \right\}$$

Un vector propio es $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, o $v = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 5/8 \end{bmatrix}$, pues se quiere un vector característico de probabilidad.

Este vector indica que cuando la población alcanza una distribución de 37.5% en la ciudad (3/8) y 62.5% en el campo (5/8), el sistema alcanza su estado de equilibrio y permanecerá en él.

En conclusión, el modelo de Markov permite modelar transiciones entre estados en un sistema dinámico, y permite calcular el estado del sistema en tiempos posteriores; tanto como estimar el comportamiento en el largo plazo mediante los vectores de equilibrio.

## Entregables

En la parte conceptual, cada estudiante debe poder responder a las siguientes cuestiones:

1. Demuestre que una Anxn tal que todas sus columnas suman el valor de k, entonces k es un valor propio de A.
2. Demuestre que una Anxn tal que todas sus filas suman el valor de k, entonces k es un valor propio de A.

3. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ tal que $a_{ij} \geq 0$, $i = 1,\ 2;$ $j = 1,\ 2$; y $a_{11} + a_{21} = 1$ y $a_{12} + a_{22} = 1$. Demostrar que si $p(\lambda)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(1) = 0$.
4. Sea A una matriz nxn con n>3. Determine el determinante de A, si A contiene en sus entradas a los elementos de la secuencia de Fibonacci en orden.
5. Demuestre que toda matriz de probabilidad tiene un valor propio igual a 1
6. Demuestre utilizando inducción matemática que, si A es diagonalizable, entonces $D^n = C^{-1}A^nC$
7. Pruebe que si A es invertible y $\lambda$ es un valor propio, entonces $1/\lambda$ es un valor propio de $A^{-1}$.
8. Demuestre que si $\lambda$ es un valor propio de A, entonces $\lambda^n$ es un valor propio de $A^n$.
9. Una matriz de Markov, tiene cada entrada positiva y la suma de las entradas de cada columna igual a 1. Demuestre que las potencias de una matriz de Markov también son matrices de Markov
10. Una matriz de Markov, tiene cada entrada positiva y la suma de las entradas de cada columna igual a 1. Demuestre que el producto de dos matrices de Markov de dimensiones iguales también es una matriz de Markov.

En la parte aplicativa, debe constar exclusivamente el análisis del caso de estudio dado, las conexiones que existe entre las variables, proveyendo respuestas a las siguientes cuestiones:

- Escriba la matriz de probabilidad (transición) correspondiente al problema.
- ¿Cuál es el estado del sistema luego de un periodo de tiempo? Justifique su respuesta.
- ¿Dónde se observan los mayores cambios? Justifique su respuesta.
- Basado en la información dada, prediga cuál será el estado del sistema luego de 10, 20, 30 periodos de tiempo. Justifique su respuesta.
- ¿Qué ocurrirá con el sistema en el largo plazo? Justifique su respuesta.
- ¿Qué son los estados absorbentes?

Además, hay una parte interpretativa de los resultados, que puede ser muy complicado en cierto aspecto, se trata del fundamental problema filosófico del determinismo y la predictibilidad:

- Investigar sobre la predictibilidad: El ser humano siempre ha querido poder adelantarse a los hechos por los más variados motivos. Sin embargo, esto implica por una parte un universo regido por leyes naturales que pueden ser comprendidas (determinismo), y, por otra parte, implica lidiar con fenómenos de naturaleza aleatoria (el azar). Explique en sus propias palabras y ejemplos estos conceptos de determinismo, azar y predictibilidad.

**NOTA:** Es lícito apoyarse en la tecnología: si utiliza un software o calculadora (Matlab®, Python, Excel, etc), o algún sitio web de resolución de matrices (Geogebra, etc), debe ser indicado en el documento: planteando la fórmula teórica, indicando lo que se utilizó para resolver esa ecuación y escribiendo el resultado directamente. Así, para cada una de las ecuaciones resueltas. Si consultó un libro o artículo, se debe incluir en una sección Bibliografía o Referencias del documento.

CASOS DE ESTUDIO:

- Grupo 1: Entropía y difusión molecular
- Grupo 2: El precio del petróleo
- Grupo 3: Algoritmo PageRank® de Google
- Grupo 4: Participación de mercados
- Grupo 5: Sistemas dinámicos

Cada grupo tendrá que sustentar 3 ítems de los presentados en Entregables