ANÁLISIS ARMÓNICO POR MÍNIMOS CUADRADOS

"No manipules tus datos, pues ellos podrían estar correctos"
– Wilbur Wright

COMPONENTE DE MAREA EN LAS CORRIENTES MARINAS

En 2005 se efectuaron varias mediciones de la corriente de agua que fluye a lo largo del canal de Lido di Venezia, Italia:

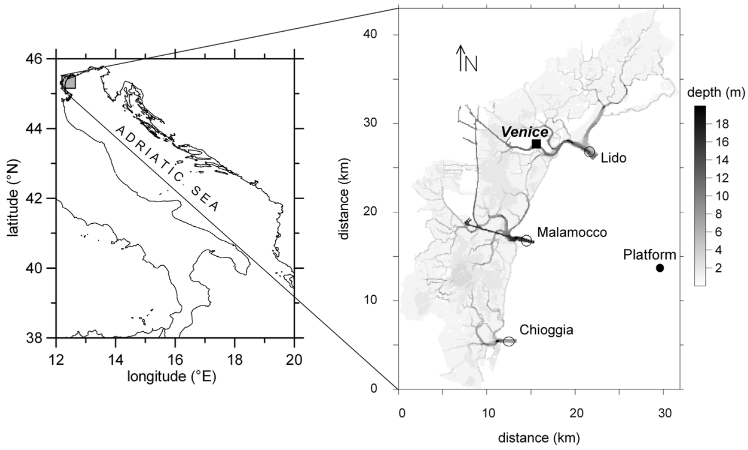

Figura 1: La ciudad de Venecia se asiente en un grupo de islas dentro de una laguna, esta laguna se conecta con el mar Adriático a través de los canales de Lido, Malamocco y Chioggia.

La Figura 2 muestra una de estas mediciones en los meses de abril y mayo de 2005, en metros por segundo. Los valores positivos indican que el agua fluye de la laguna hacia el mar Adriático; los valores negativos son el flujo que entra desde el mar hacia la laguna. La medición se efectuó con un correntómetro instalado en el fondo del canal. Conocer el motivo de las fluctuaciones es uno de los objetivos de los investigadores.

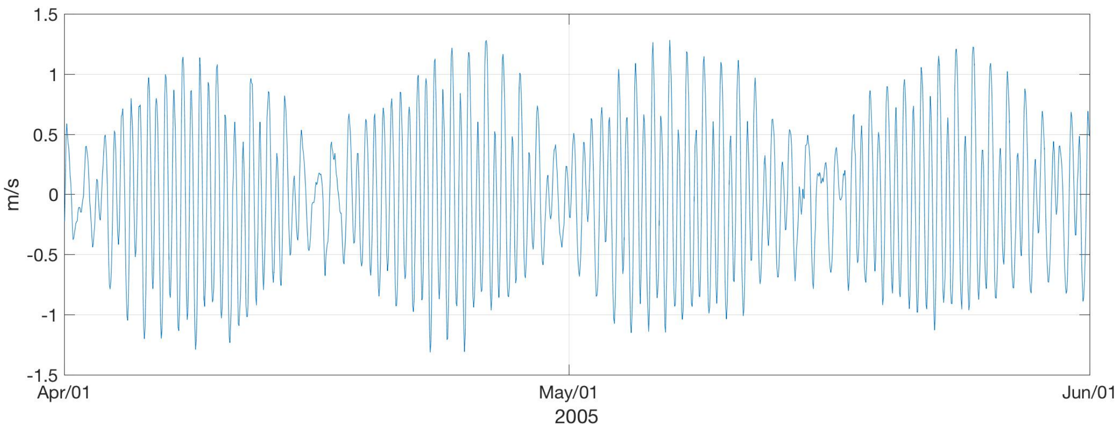

Figura 2: Velocidad del agua en el canal de Lido di Venezia, en los meses de abril y mayo de 2005.

El análisis armónico es una rama del análisis en matemáticas, que trata con funciones o señales como una suma (o superposición) de ondas básicas. Bajo este paradigma, mediciones tales como las de corrientes marinas en un canal puede considerarse como una suma de ondas o señales más elementales; cada una de las cuales puede contener información sobre los diversos mecanismos que causan las fluctuaciones.

Existen diferentes conjuntos base (señales básicas) para generar espacios de señales, uno de los más conocidos es el que proviene del trabajo de Jean-Baptiste Joseph Fourier, donde una función integrable y de norma finita f puede ser expresada como una combinación lineal del siguiente conjunto:

$$F = \left\{1,\ \mathrm{Cos}(x),\ \mathrm{Cos}(2x),\ \mathrm{Cos}(3x),\cdots\ \mathrm{Cos}(nx),\cdots\ Sen(x),\ Sen(2x),\ Sen(3x),\cdots\ Sen(mx),\cdots\right\}$$

Es decir:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k\,\mathrm{Cos}(kx) + b_k Sen(kx)\right] \qquad \text{(Ecuación 1)}$$

No es el objetivo central de este proyecto el analizar por qué esta serie es convergente; pero sí el aplicar este modelo al estudio de las mareas. Las mareas tienen origen astronómico, son causadas por la rotación terrestre, la traslación, los ciclos lunares, etc; todos *forzantes* que se hacen evidente en forma de funciones senoidales/cosenoidales en mediciones oceanográficas como las presentadas en la figura 2.

Las frecuencias de estos fenómenos astronómicos son conocidas, por ejemplo, se conoce que la tierra completa una rotación sobre su eje cada 23 horas, 56 minutos y 4.09 segundos; mientas que la traslación terrestre consta de un ciclo cada 365 días, 5 horas, 48 minutos y 45 segundos. Todas estas oscilaciones se hacen eventualmente evidente en las mediciones de nivel del mar, corrientes marinas, incluso presión atmosférica y temperaturas. Esto ha motivado a los científicos a establecer un modelo de la *Señal de marea astronómica* como una suma se cosenos:

$$m(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k\,\mathrm{Cos}(w_k x - \theta_k) \qquad \text{(Ecuación 2)}$$

Donde A_k, w_k y θ_k son constantes. Nótese la similitud con la combinación lineal de la Ecuación 1. El parámetro w_k corresponde a una frecuencia específica de cada componente de marea; A_k es la amplitud de dicha componente de marea, y θ_k su *retardo de fase*.

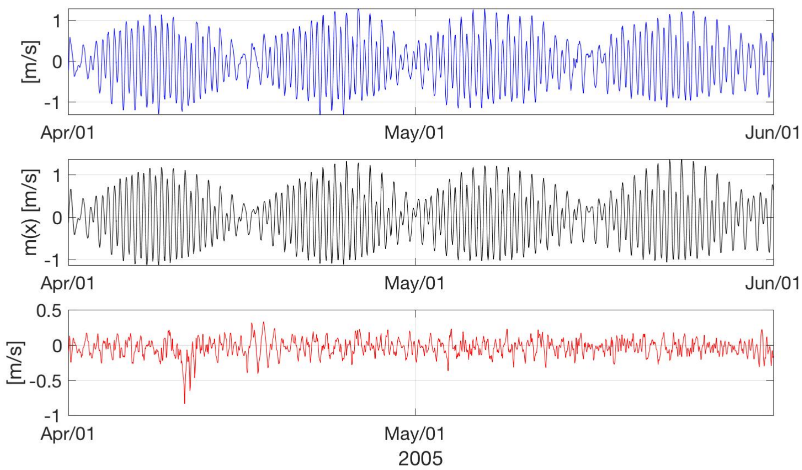

Figura 3: Mediciones originales de corrientes en el panel superior. La componente aislada de mareas en el panel central. Y el residuo (la diferencia entre las primeras) en el panel inferior.

En la figura 3 se observa como luce el resultado de un análisis armónico. La señal de marea $m(x)$ está aislada en el panel central, y se puede decir que es responsable de casi la totalidad del comportamiento de los datos originales. La señal residual se obtiene restando la marea de las mediciones:

$$r(x) = s(x) - m(x)$$

Por ejemplo, todas las fluctuaciones de la señal residual **no** se deben a mareas, y por lo tanto, deben buscarse sus causas en tormentas, terremotos submarinos, tsunamis, efecto del viento, etc.

Actividades:

- En el archivo adjunto se incluye las mediciones de corrientes en el canal de Lido para un mes del 2005, las mediciones son tomadas una cada hora por los todos los días del mes. La primera columna indica la fecha en formato yymmddhhmnss (por ejemplo, 051102150000 indica 2005, noviembre 2 a las 15h00 y 00 segundos); mientras la segunda columna es la velocidad de corriente en mm/s (datos positivos fluyen de la laguna hacia el mar, y negativos del mar hacia la laguna).

Tabla 1: Constituyentes de marea esperadas, con su frecuencia en ciclos por hora (cph) y su descripción.

Nombre	**Frecuencia f_k [cph]**	**Descripción**:
O1	0.0387307	Constituyente lunar diurna
K1	0.0417807	Constituyente lunisolar diurna
J1	0.0432929	Constituyente lunar elíptica menor diurna
N2	0.0789992	Constituyente lunar elíptica mayor semidiurna
M2	0.0805114	Constituyente lunar principal semidiurna
S2	0.0833333	Constituyente solar principal semidiurna

- La Tabla 1 indica las 6 constituyentes de marea que se espera aparezcan en el registro de datos provisto. Por lo tanto, la Ecuación 2 se modifica para que tenga N=6. Las frecuencias $\mathbf{f_K}$ se indican en la Tabla 1, y recuerden que la frecuencia angular w_k de la Ecuación 2 se calcula como $w_k = 2\pi f_k$. No se conocen ni las amplitudes A_k, ni las fases θ_k.
- Aplique una identidad trigonométrica para llevar cada término $A_k \operatorname{Cos}(w_k x - \theta_k)$ a la forma de combinación lineal $a_k \operatorname{Cos}(w_k x) + b_k \operatorname{Sin}(w_k x)$, donde w_k se toma de la Tabla 1, y x es la variable en el dominio del tiempo (puede ser un índice de horas de 1 a 720). Las incógnitas realmente son a_k y b_k.
- Aplique el método de mínimos cuadrados para estimar los valores de a_k y b_k (regresión lineal).
- Deduzca la fórmula $A_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$ y estime las amplitudes con ella.
- Deduzca la fórmula $\theta_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ y estime las fases con ella.
- Ahora que ya tiene lo necesario, evalúe en x, y calcule así la señal exclusivamente mareal $m(x)$.
- Presente gráficos mostrando las mediciones originales, la señal $m(x)$ y los residuos.
- Presente una tabla con las constituyentes de marea, indicando amplitudes y fases encontradas para cada constituyente.
- Los datos se proveen en el archivo adjunto: AA_LIDO05*_grupo*.txt

REFERENCIAS:

- Grossman, S. I., Flores Godoy, J.: Álgebra Lineal. McGraw-Hill Ed., México 2012).
- Gačić, M., Kovačević, V., Mancero Mosquera, I., Mazzoldi, A., Cosoli, S: Water fluxes between the Venice Lagoon and the Adriatic Sea; en: Flooding and environment challenges for Venice and its lagoon, Fletcher & Spencer (Ed.). Cambridge University Press, Cambridge (2005).
- Pugh, D. T., Tides, Surges and Mean Sea-Level, Wiley, 1987.
- Foreman, M. G. G., "Manual for Tidal Currents Analysis and Prediction", Pacific Marine Science Report 78-6, Institute of Ocean Sciences, Patricia Bay, Sidney, British Columbia, 1996.

NOTA: Es lícito apoyarse en la tecnología: si utiliza un software o calculadora (Matlab®, Python, Excel, etc), o algún sitio web de resolución de matrices (Geogebra, etc), debe ser indicado en el documento: planteando la fórmula teórica, indicando lo que se utilizó para resolver esa ecuación y escribiendo el resultado directamente. Así, para cada una de las ecuaciones resueltas. Si consultó un libro o artículo, se debe incluir en una sección Bibliografía o Referencias del documento.