SERIES DE FOURIER

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos"
– Jean-Baptiste J. Fourier

Introducción

Una serie de Fourier es una serie infinita que converge puntualmente a una función periódica y continua a trozos (o por partes). Las series de Fourier constituyen una herramienta matemática básica de análisis, empleadas para estudiar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras). El nombre se debe al matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier, que desarrolló la teoría cuando estudiaba la ecuación del calor. Fue el primero que estudió tales series sistemáticamente, y publicó sus resultados iniciales en 1807 y 1811.

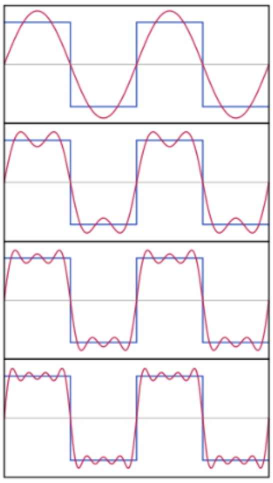

Figura 1: En color azul se muestra una señal (función) llamada "onda cuadrada", y en rojo como una suma de sinusoidales se aproxima cada vez más a la onda cuadrada.

Todo se fundamenta en el hecho que el conjunto infinito:

$$F=\left\{1,\ \operatorname{Cos}(x),\ \operatorname{Cos}(2x),\ \operatorname{Cos}(3x),\cdots\ \operatorname{Cos}(nx),\cdots\ Sen(x),\ Sen(2x),\ Sen(3x),\cdots\ Sen(mx),\cdots\right\}$$

Resulta ser linealmente independiente y generador de cierto tipo de espacio vectorial de funciones, denominado espacio de Hilbert-L1 y Hilbert-L2. No nos detendremos a analizar los detalles específicos de estos espacios, pero su característica esencial es que son funciones integrables y de norma finita [1].

Las áreas de aplicación incluyen el análisis y modelado de innumerables fenómenos oscilatorios, tales como vibraciones de estructuras civiles, ondas sísmicas, oleajes, señales en sistemas de telecomunicaciones, entre muchos otros. Sin embargo, aunque menos intuitivo, otras funciones no oscilatorias también pueden estudiarse dado que la condición suficiente para que la serie converja es que pertenezca a los espacios de Hilbert L1 y L2 (integrables y norma finita). Esta última condición sobre la norma se puede verificar mediante la aplicación del producto interno estándar para funciones de variable real:

$$\left\langle f \mid g \right\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

O, en su versión para campos complejos:

$$\left\langle f \mid g \right\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Donde $\overline{g}$ indica el complejo conjugado de g. Los límites **a** y **b** de la integral dependen del dominio de la función, pero suele utilizarse $-\infty$ e ∞ por omisión; otros valores populares son $-\pi$ y π.

Cumplidas las condiciones, una función f puede escribirse como la combinación lineal de los vectores del conjunto F:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[a_k \operatorname{Cos}(kx) + b_k Sen(kx)\right].$$

A esta combinación lineal se la conoce como *Serie de Fourier de la función f.*

Actividades

- Usted deberá leer el documento **Funciones Ortogonales y Series de Fourier** [2], antes de realizar los problemas que encontrará a continuación.
- Demuestre que, en un espacio vectorial V con producto interno, todo conjunto ortogonal de vectores no nulos es siempre linealmente independiente.
- Demuestre que los vectores del conjunto F indicado en **Introducción** es un conjunto ortogonal, si sus funciones se restringen al dominio en el intervalo $[-\pi,\ \pi)$. Es decir, utilice estos límites del intervalo en la integral.
- Calcule la norma de cada uno de los vectores del conjunto F.
- ¿Se puede ortonormalizar al conjunto F? Justifique su respuesta.
- Deduzca la fórmula de los coeficientes de la serie de Fourier para una función f que satisfaga las condiciones de integrabilidad y norma.
- Encuentre los coeficientes y la serie de Fourier de las siguientes funciones, cuyo dominio está restringido al intervalo $[-\pi,\ \pi)$, siendo **cero** fuera del mismo:

- $f(x)=\begin{cases} 1 & -\pi \le x < 0 \\ 2 & 0 \le x < \pi \end{cases}$
- $f(x)=1-x^2$
- $f(x)=3x$

- Grafique, utilizando un software, la serie de Fourier de las funciones anteriores hasta $k=10$.
- Grafique, utilizando un software, la serie de Fourier de las funciones anteriores hasta $k=23$.

Entregables

Se necesita que su grupo de trabajo elabore un reporte con sus respuestas a estos problemas.

- El reporte es un documento con introducción, fundamento teórico, solución, conclusiones, recomendaciones. Un modelo de reporte será proporcionado como ayuda.

En la parte conceptual, se requiere de cada estudiante:

- Demostrar cada teorema involucrado en la deducción de la fórmula de la serie de Fourier.
- Justificar cada acción tomada mediante la teoría del álgebra lineal.
- Responder a ¿Se puede calcular la serie de Fourier si una función es discontinua?
- Responder a ¿Se puede calcular la serie de Fourier si una función es no diferenciable?
- ¿Qué sucede cuando una función es par? ¿Qué sucede cuando una función es impar?

Todo lo anterior debe estar escrito de una manera secuencial, ordenada, y con sentido completo.

- Incluir los gráficos que considere pertinentes.

NOTA: Es lícito apoyarse en la tecnología: si utiliza un software o calculadora (Matlab®, Python, Excel, etc), o algún sitio web de resolución de matrices o cálculo (WolframAlpha, Geogebra, etc), debe ser indicado en el documento: planteando la fórmula teórica, indicando lo que se utilizó para resolver esa ecuación y escribiendo el resultado directamente. Así, para cada una de las ecuaciones resueltas. Si consultó un libro o artículo, se debe incluir en una sección Bibliografía o Referencias del documento.

REFERENCIAS:

[1] Stephane Mallat: *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press. 2008.

[2] Áurea M. Martínez: *Funciones Ortogonales y Series de Fourier*. Universidad de Vigo. Recuperado de: http://www.dma.uvigo.es/~aurea/Fourier.pdf

[3] Hwei P. Hsu: *Análisis de Fourier*. Alhambra Mexicana S.A. 2000.