FORMAS CUADRÁTICAS & SECCIONES CÓNICAS

Isaac Mancero Mosquera

Resumen

En el presente documento se aborda el problema de cómo representar una cónica originalmente inclinada, con respecto a un nuevo sistema de coordenadas, definido por sus vectores propios, en el cual la cónica se representa de una forma no inclinada; lo que permite analizarla y graficarla con mayor facilidad.

Introducción

Una **forma cuadrática** en $\mathbb{R}^2$ es una función $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asociada a una *forma bilineal simétrica*, cuyos aspectos son relevantes pero no se estudiarán aquí. La expresión general es:

$$q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

Al igualarse a una constante se convierte en una *ecuación cuadrática*, que es el modelo conocido para las secciones cónicas. El término con producto cruzado Bxy indica una rotación de los ejes, mientras que los términos lineales, Dx y Ey, indican un desplazamiento con respecto al origen.

Mientras que una cónica sin rotar (ejes de simetría paralelos al eje x o al eje y) es fácil de identificar y graficar, este no es el caso para las cónicas con diferentes inclinaciones. En este documento se muestra cómo las técnicas de la diagonalización ortogonal ayudan a simplificar este problema [1].

La representación matricial

El tratamiento inicia con la parte cuadrática y rotación, sin incluir los términos lineales:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

Considérese el vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, la forma cuadrática tiene la siguiente representación matricial:

$$q(x, y) = \mathbf{v}^\mathbf{T}\mathbf{M}\mathbf{v} = (x, y) \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Existen otras matrices que numéricamente podrían representar la forma cuadrática, pero se elige esta matriz simétrica considerando que proviene de la representación de una forma bilineal simétrica.

Ejemplo. *La forma cuadrática* $q(x, y) = 2x^2 - 14xy + 3y^2$ *se puede representar como:*

$$q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

aunque las siguientes expresiones son numéricamente correctas:

$$q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) \begin{pmatrix} 2 & -14 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se recalca que la matriz simétrica es la representación correcta por ser aquella que representa la forma bilineal simétrica de donde la forma cuadrática proviene. Es también afortunado que la matriz simétrica sea la que garantiza la diagonalización ortogonal.

Diagonalización

La diagonalización implica un cambio de base, un cambio del sistema de coordenadas. La forma matricial de la forma cuadrática es:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{x}$$

Considerando $\mathbf{x} = [\mathbf{v}]_B$ como el vector de coordenadas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, por lo tanto, inicialmente, $\mathbf{x}$ coincide numéricamente con $\mathbf{v}$.

La teoría garantiza que, si $\mathbf{M}$ es simétrica, es diagonalizable (ortogonalmente, además), y existe una base formada por vectores característicos con la que se puede hallar una matriz diagonal $\mathbf{D}$ semejante a $\mathbf{M}$; y existe una matriz ortogonal $\mathbf{Q}$ tal que:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{Q}$$

Sea $\mathbf{x}^* = [\mathbf{v}]_{B^*}$ el vector de coordenadas con respecto a la base característica. Entonces, en el nuevo sistema de coordenadas, la forma cuadrática se representa como:

$$q(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^{*\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{x}^*$$

Sin embargo, es más sencillo el análisis de ecuaciones cuadráticas cuando la matriz es diagonal.

Ejemplo. *La siguiente ecuación cuadrática:*

$$q(x, y) = (x^*, y^*)\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = 25$$

corresponde a la cónica:

$$4{x^*}^2 + 9{y^*}^2 = 25.$$

Una elipse, por simple inspección.

En el presente documento se estudia cómo, dada una cónica con cierta inclinación, es posible hallar una nueva base —formada por vectores propios— que define un sistema de referencia en el cual la cónica aparece sin inclinación, lo que facilita su identificación y representación gráfica.

Cambio de base

Despejando $\mathbf{M}$, se obtiene $\mathbf{M} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}$, y reemplazándola en la expresión cuadrática:

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q})\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x}) = (\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x})^{\mathbf{T}}\mathbf{D}(\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x})$$

Recordemos que diagonalizar una matriz implica realizar un cambio de base. La matriz que lleva a cabo esta diagonalización —en este caso, $\mathbf{Q}$— contiene en sus columnas los vectores propios y actúa como matriz de cambio de base desde la base característica hacia la base canónica. Por lo tanto, la relación entre las coordenadas en ambas bases queda descrita por las siguientes expresiones:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}^* \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{Q}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\mathbf{x} = \mathbf{x}^* \equiv \mathbf{Q}^{\mathbf{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$

Ejemplo ilustrativo: cónica con rotación

Identifique y grafique la cónica descrita por la ecuación:

$$x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$$

Utilizando un software online como Wolfram Alpha se sabe que se trata de una hipérbola inclinada.

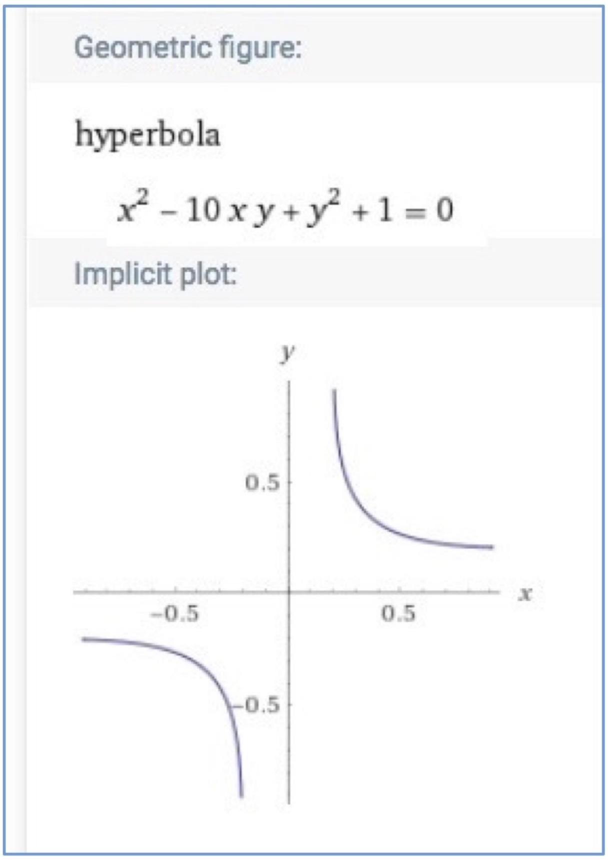


Figura 1: Hipérbola correspondiente a $x^2 - 10xy + y^2 + 1 = 0$.

- Primero, represente mediante la matriz simétrica:

$$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$$

- Diagonalice la matriz $\mathbf{M}$ obtenida:

$$det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -5 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 25 = 0$$

  Cuyos valores propios son $\lambda = -4$ y $\lambda = 6$.

- Con esta información ya se puede escribir la nueva ecuación:

$$(x^*, y^*)\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + 1 = -4x^{*2} + 6y^{*2} + 1 = 0.$$

  Como se puede observar, es una hipérbola. Se confirma lo que se sabía via software.

- Para graficar nos sirven los vectores propios.

  Con $\lambda = -4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -5 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -5 & 0 \\ -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f1/5]{f2+f1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Que resulta en el espacio característico:

$$E_{\lambda=-4} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$

  Y un vector base dado por $v_1 = (1,1)$.

  Con $\lambda = 6$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -5 & 0 \\ -5 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -5 & -5 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[-f1/5]{f2-f1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Que resulta en el espacio característico:

$$E_{\lambda=6} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$$

  Y un vector base dado por $v_2 = (1,-1)$.

- Los vectores determinan la orientación de los nuevos ejes, en relación con los cuales la cónica aparece sin inclinación. El vector $(1,1)$ proviene del espacio característico que corresponde a la recta identidad $y = x$; mientras el vector $(1,-1)$ del espacio propio $y = -x$, graficados en verde a continuación:

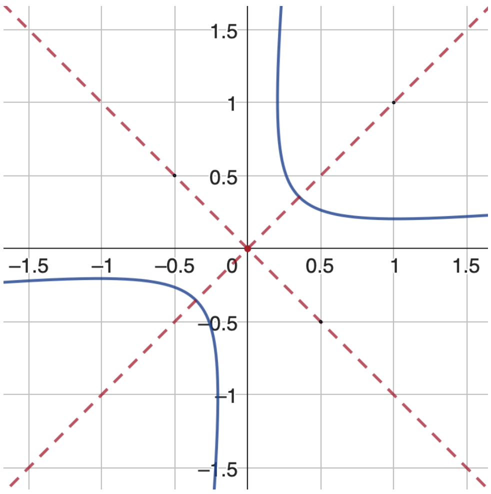


Figura 2: Los ejes en color rojo forman un nuevo sistema de referencia.

Rotación de ejes

Es fundamental que el cambio de coordenadas corresponda a una rotación de ejes. Para lograrlo, no basta con que la matriz $\mathbf{Q}$ sea ortogonal —es decir, que tenga vectores propios ortonormales en sus columnas—, sino que también debe ser una matriz de rotación propiamente dicha, lo cual exige que su determinante sea igual a 1. Así, puede compararse directamente con un operador de rotación:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Cos(\theta) & -Sen(\theta) \\ Sen(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix}$$

En el ejemplo, se tiene que los vectores propios son $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Al ser $\mathbf{M}$ una matriz simétrica, se puede ortonormalizar esta base $\{v_1, v_2\}$ obteniéndose:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y } u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Nótese que los λ_i son distintos, esto indica que sus respectivos vectores propios v_i son ya perpendiculares. Por lo tanto, ortonormalizar se reduce solo a hacerlos unitarios. La matrix $\mathbf{Q}$ tiene en sus columnas a los vectores propios ortonormalizados:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Sin embargo, el determinante de esta matriz es -1: no corresponde a una matriz de rotación. Un modo de corregir esto es simplemente multiplicar por –1 a uno de los vectores propios. El nuevo u_2 es:

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

con lo cual, la matriz de rotación ahora es:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\theta) & -Sen(\theta) \\ Sen(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Si el determinante hubiera sido 1 desde el principio, no haría falta este procedimiento de cambio de signo.

Bosquejo definitivo de los ejes

El primer vector propio u_1 corresponde al eje x^*. El segundo vector propio u_2 corresponde al eje y^*. Los vectores v_1 y v_2 asociados son más sencillos de graficar:

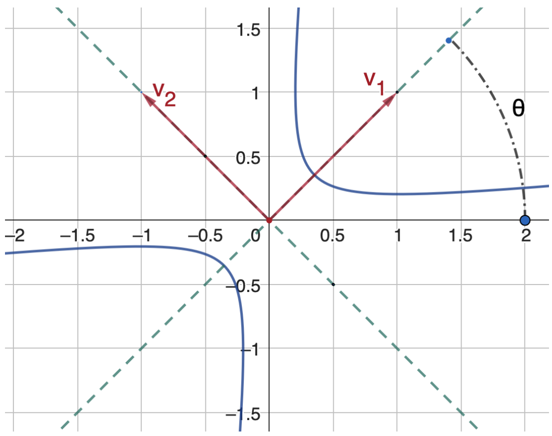


Figura 3: Los vectores en rojo, v_1 y v_2, indican la orientación de los nuevos ejes, con x^* correspondiendo a u_1 y y^* a u_2. El ángulo θ indica la rotación respecto al sistema de referencia original.

El ángulo de inclinación de la cónica sale de la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cos(\theta) & -Sen(\theta) \\ Sen(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Es un ángulo tal que $Cos(\theta) = 1/\sqrt{2}$, esto sería 45^o o 315^o; pero, si $Sen(\theta) = 1/\sqrt{2}$, entonces se trata de $\theta = 45^o$. De hecho, en la primera columna de la matriz se observa que seno y coseno son positivos, θ es un ángulo del 1er cuadrante, y puede observarse que v_1, en efecto, está localizado en el 1er cuadrante.

Se tiene que graficar la nueva representación de la cónica, $-4{x^*}^2 + 6{y^*}^2 + 1 = 0$, que respecto a los nuevos ejes no está inclinada. Esta parte debe recordarse del curso pre-universitario.

Ejemplo ilustrativo: cónica con rotación y traslación

Identifique y grafique la cónica descrita por la ecuación:

$$x^2 - 10xy + y^2 + x + y + 1 = 0$$

En el caso de una ecuación cuadrática con traslación, se comienza primero con la parte de rotación tal como en las secciones previas. La presencia de los términos lineales $x + y$ indica traslación, además de la rotación que está indicada por el término cruzado $-10xy$.

- Primero hay que ocuparse de la rotación, es decir, se halla la representación con matriz simétrica y se diagonaliza.
$$(x, y)\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + x + y + 1 = 0$$

- Se sabe (por el ejercicio anterior) que para esta matriz los valores propios son $\lambda = -4$ y $\lambda = 6$; y sus correspondientes vectores propios son ya conocidos, por lo cual la nueva ecuación queda así:
$$(x^*, y^*)\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} + x + y + 1 = 0$$
O sea, $-4{x^*}^2 + 6{y^*}^2 + x + y + 1 = 0$.

- Falta convertir los términos x e y, a x^* e y^*, mediante la relación de cambio de base $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{x}^*$:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$$
lo que produce las expresiones:
$$\begin{cases} x = \dfrac{x^*}{\sqrt{2}} - \dfrac{y^*}{\sqrt{2}} \\[2ex] y = \dfrac{x^*}{\sqrt{2}} + \dfrac{y^*}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
Que se reemplazarán en la ecuación $-4{x^*}^2 + 6{y^*}^2 + x + y + 1 = 0$:
$$-4{x^*}^2 + 6{y^*}^2 + \left(\frac{x^*}{\sqrt{2}} - \frac{y^*}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x^*}{\sqrt{2}} + \frac{y^*}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 0$$
Aquí solo queda agrupar x^*, completar cuadrados; y lo mismo con y^*.

- Completando cuadrados:
$$\begin{aligned} -4{x^*}^2 + 6{y^*}^2 + \left(\frac{x^*}{\sqrt{2}} - \frac{y^*}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x^*}{\sqrt{2}} + \frac{y^*}{\sqrt{2}}\right) + 1 &= 0 \\ -4{x^*}^2 + \sqrt{2}x^* + 6{y^*}^2 + 1 = -4\left({x^*}^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^*\right) + 6{y^*}^2 + 1 &= 0 \\ -4\left({x^*}^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}x^* + \frac{1}{32} - \frac{1}{32}\right) + 6{y^*}^2 + 1 &= 0 \\ -4\left(x^* - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{8} + 6{y^*}^2 + 1 &= 0 \\ -4\left(x^* - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + 6{y^*}^2 + \frac{9}{8} &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, se trata de la hipérbola:

$$\frac{32}{9}\left(x^* - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{16}{3}y^{*2} = 1$$

con un desplazamiento en la variable x^*. Su centro en $(\frac{\sqrt{2}}{8}, 0)$. Su eje mayor es paralelo al eje x^*, y su eje conjugado es paralelo al eje y^*. En la gráfica, se observa en rojo la hipérbola con rotación traslación a lo largo de x^*. En azul se observa la hipérbola solo con rotación del ejemplo anterior.

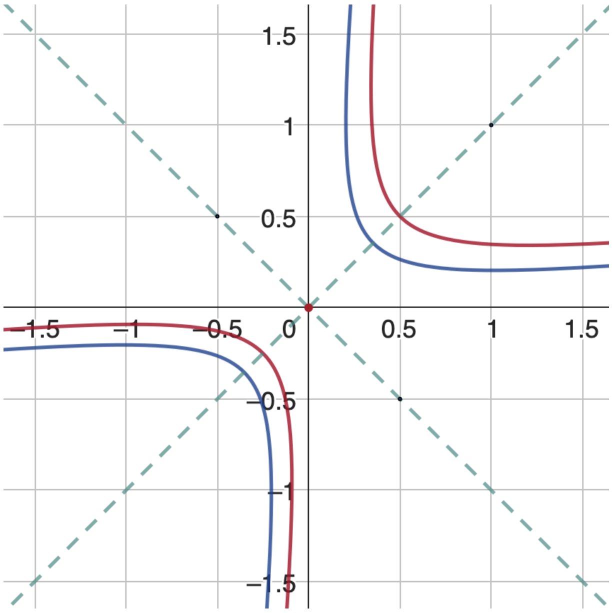


Figura 4: La hipérbola con rotación en azul; y en rojo, aquella con rotación y traslación.

En este punto, se puede ya practicar con los siguientes ejercicios.

Ejercicios

Considere la rotación y traslación de las siguientes secciones cónicas, identifique las mismas, encuentre un sistema de referencia con respecto al cual no existe rotación y, finalmente, bosqueje también sus gráficas.

a) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$

b) $4x^2 - 8xy - 2y^2 + 20x - 4y + 15 = 0$

c) $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y - 139 = 0$

d) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 56x - 42y + 49 = 0$

e) $12x^2 + 24xy + 19y^2 - 12x - 40y + 31 = 0$

f) $4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2 + 8x - 4\sqrt{5}y - 21 = 0$

g) $xy = -3$

h) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

i) $x^2 - \sqrt{3}xy + 3x - 2y - 5 = 0$

j) $3xy - 4y^2 + x - 2y + 1 = 0$

Teorema de clasificación

Considérese la matriz inicial de representación de la ecuación cuadrática:

$$M = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$$

Su determinante es exactamente igual a de la matriz diagonal asociada:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\det D = \det M$, por la semejanza de ambas matrices. Por una parte, $\det M = AC - \dfrac{B^2}{4}$, mientras que $\det D = \lambda_1 \lambda_2$. El teorema de clasificación hace uso de este determinante, que es más fácil de analizar en las coordenadas características, es decir, cuando la forma cuadrática está representada como $\lambda_1 {x^*}^2 + \lambda_2 {y^*}^2$.

- Si $\det D = 0$, entonces uno de los factores λ_i es cero (no todos), y el lugar geométrico es una parábola, o sus degeneraciones en dos líneas paralelas, una línea paralela, o un lugar imaginario.
- Si $\det D > 0$, entonces los factores λ_i tienen igual signo, lo que conlleva que el lugar geométrico sea una elipse o una circunferencia, o sus degeneraciones: un punto o un lugar imaginario.
- Si $\det D < 0$, entonces los factores λ_i tienen distinto signo, por lo cual, el lugar geométrico es una hipérbola o su degeneración: dos líneas que se intersectan.

A partir de estas observaciones, se lleva el teorema al ámbito de la matriz M en las coordenadas originales. Se requiere comparar el determinante con relación al cero, $\det M = \dfrac{4AC - B^2}{4}$, que es lo mismo que saber el signo de su numerador $4AC - B^2$.

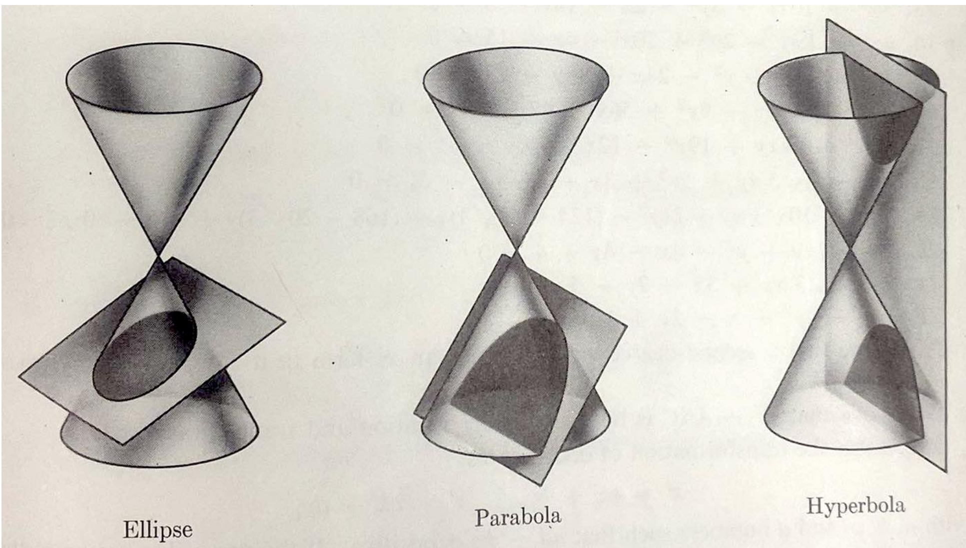


Figura 5: Las secciones cónicas [2]. La circunferencia es un caso especiald de elipse.

Teorema 1. *Fuente: [2] Dada una sección cónica de la forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, se calcula la cantidad $B^2 - 4AC$, denominada discriminante, entonces:*

- *Si $B^2 - 4AC = 0$, el lugar geométrico es una parábola, o sus degeneraciones en dos líneas paralelas, una línea paralela, o un lugar imaginario.*
- *Si $B^2 - 4AC < 0$, el lugar geométrico sea una elipse o una circunferencia, o sus degeneraciones: un punto o un lugar imaginario.*
- *Si $B^2 - 4AC > 0$, el lugar geométrico es una hipérbola o su degeneración: dos líneas que se intersectan.*

Para la demostración, se debe recordar que el discriminante es el negativo de $4AC - B^2$, que tiene el mismo signo del determinante de M, que es igual a $\det D$.

Ejercicios

Identifique las siguientes secciones cónicas mediante el **teorema de clasificación**; encuentre un sistema de referencia con respecto al cual no existe rotación y, finalmente, bosqueje también sus gráficas.

a) $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$

b) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 25$

c) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$

d) $8x^2 + 12xy + 13y^2 = 884$

e) $x^2 - 2xy = 10$

f) $2xy - 3y^2 = 5$

g) $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 240$

h) $7x^2 - 6xy - y^2 = 0$

i) $x^2 + 4xy + y^2 + 32 = 0$

j) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y = 0$

Ejercicios

a) Pruebe que una ecuación cuadrática que contenga un término xy no puede representar una circunferencia.

b) Pruebe que el discriminante $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación.

c) Dada la siguiente transformación de coordenadas: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que $ad - bc$ es siempre positivo; y se aplica esta transformación a la ecuación cuadrática, ¿qué puede concluirse acerca del discriminante $B^2 - 4AC$?

Ejercicio

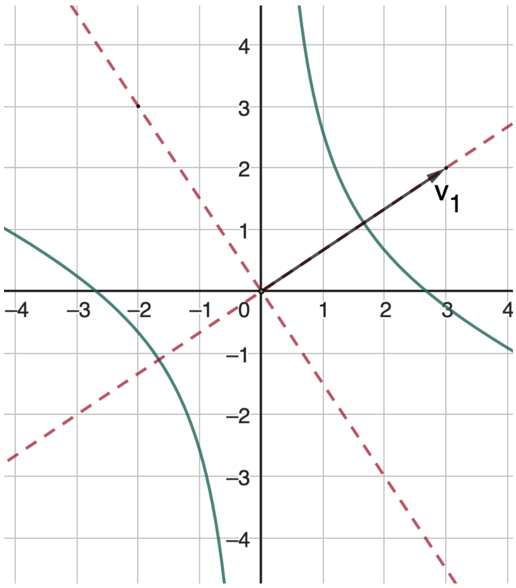
La gráfica dada corresponde a un lugar geométrico cuya ecuación, en términos de x^* e y^*, es

$$9{x^*}^2 - 4{y^*}^2 = 36$$

a) Determine la matriz $\mathbf{M}$ que representa la forma cuadrática correspondiente, con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$, si se sabe que $\mathbf{v_1} = (3, 2)$ es un vector propio de $\mathbf{M}$ asociado a $\lambda_1 = 9$.

b) Determine la ecuación cuadrática en términos de las variables x e y.

c) ¿Cuál es el ángulo de rotación del eje x^* respecto al eje x?



Referencias

[1] S. I. Grossman S. y J. J. Flores Godoy. *Álgebra Lineal*. McGraw-Hill Co. Inc., 2012.

[2] M. H. Protter y C. B. Morrey Jr. *Calculus with Analytic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1963.