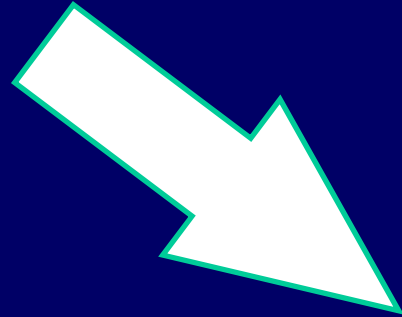


Circuitos LRC & Filtros



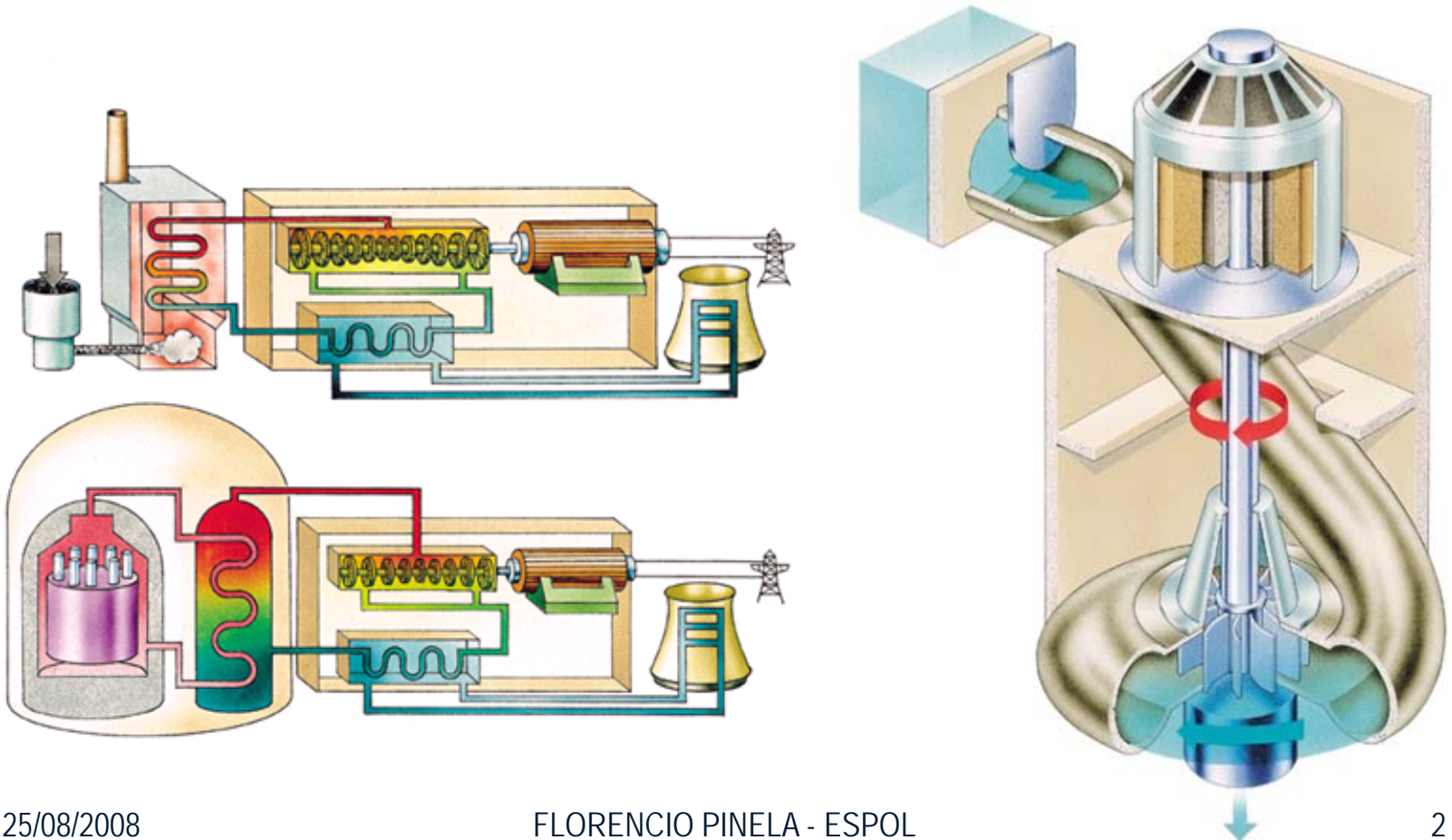
Corriente Alterna

25/08/2008

FLORENCIO PINELA - ESPOL



GENERACION DE ENERGIA ELECTRICA



25/08/2008

FLORENCIO PINELA - ESPOL

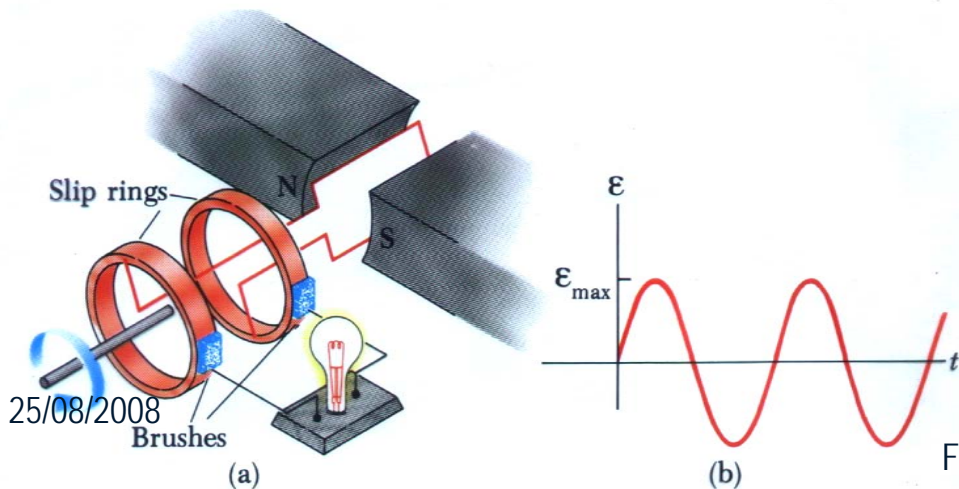
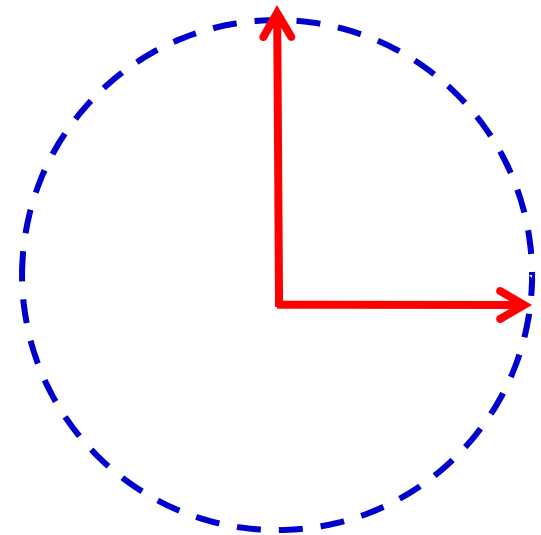
CIRCUITOS DE CORRIENTE ALTERNA

Generación de una tensión alterna

$$\varepsilon = NBA\omega \sin \omega t$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \sin \omega t$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{\max} \cos \omega t$$



Valor eficaz (rms) de corriente y voltaje

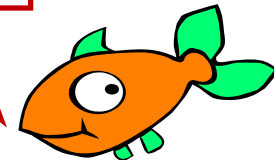
$$(I_{\text{eficaz}}^2 R)T = \int_0^T i^2 R dt$$

$$i = I_o \text{sen} \omega t$$

$$I_{\text{eficaz}}^2 = \frac{\int_0^T I_o^2 \text{sen}^2 \omega t dt}{T}$$

$$\frac{\int_0^T \text{sen}^2 \omega t dt}{T} = \frac{1}{2}$$

¿Qué es valor eficaz?



El valor eficaz (valor rms) de una señal alterna, es igual al de una continua si durante el mismo intervalo de tiempo disipan la misma cantidad de energía

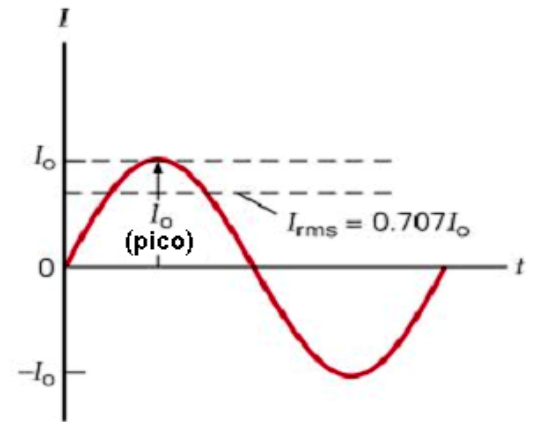
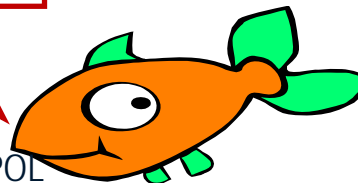
$$I_{eficaz}^2 = \int_0^T \frac{I_o^2 \sin^2 \omega t dt}{T}$$

$$I_{eficaz}^2 = \frac{I_o^2}{2} \Rightarrow I_{eficaz} = I_{rms} = \sqrt{\frac{I_o^2}{2}}$$

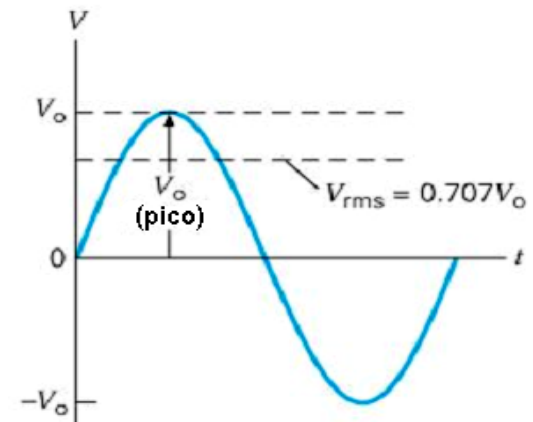
$$I_{eficaz} = I_{rms} = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = 0,707 I_o$$

$$V_{eficaz} = V_{rms} = \frac{V_o}{\sqrt{2}} = 0,707 V_o$$

!No es lo mismo que el valor medio!







(a)



(b)

Repaso sobre el comportamiento de R, L, C

- **Nuestro objetivo es entender cómo trabaja un circuito LRC en CA.**
- **Característica de cada elemento:**
 - Fuente:  produce un voltaje oscilante (suministra la corriente que el circuito “requiere”)
 - Resistor:  causa una caída de voltaje cuando una corriente fluye a través de él. Tan pronto cambia el voltaje, lo hace también la corriente → *siempre* en fase.
 - Capacitor:  resiste los cambios en la carga $Q \rightarrow$ resiste cambios en voltaje $V = \frac{Q}{C}$. El voltaje en el capacitor retrasa (90°) a la corriente (las cargas entran & salen de las placas).
 - Inductor:  resiste cambios en el flujo magnético → resiste cambios en la corriente. La corriente adelanta al voltaje (90°).

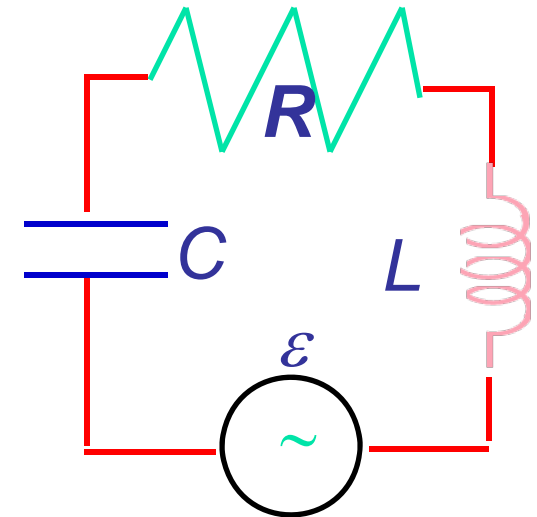
Circuitos de CA: LRC en serie

- Enunciado del problema:

Dado $\varepsilon = \varepsilon_m \cos \omega t$, **encontrar** $I(t)$.

- Procedimiento: iniciemos con la ecuación de los voltajes

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon_m \cos \omega t$$



- Esta ecuación se puede resolver con “toneladas de algebra” involucrando $\cos(\omega t)$ y $\sin(\omega t)$.

Nosotros utilizaremos un método fasorial, primeramente consideraremos circuitos simples con un elemento (R , C , o L) junto con la fuente alterna

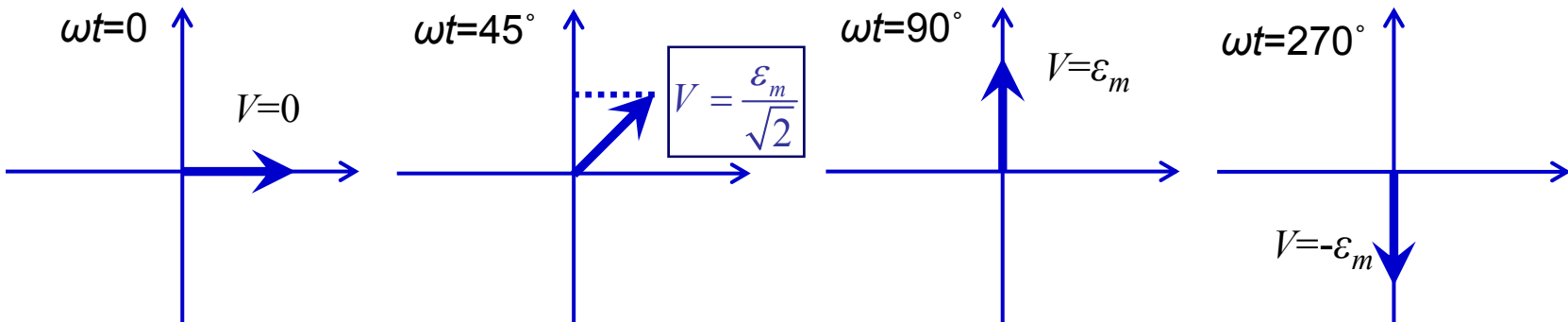
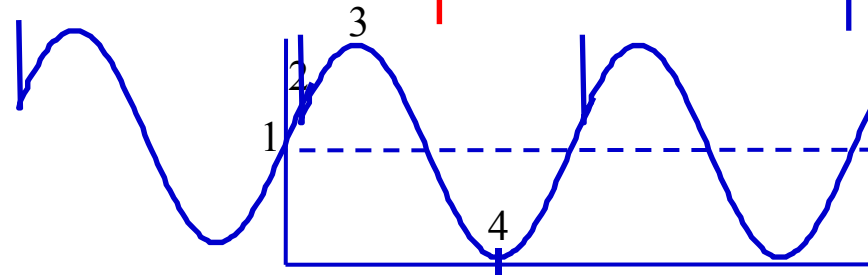
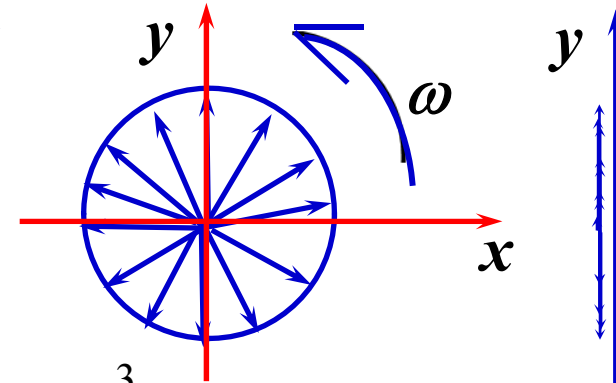
Fasores

- Un fasor es un “vector” cuya magnitud es el máximo valor de una cantidad (e.g., V) el cual rota en sentido antihorario en un plano 2-d con velocidad angular ω .

$$x = r \cos \omega t$$
$$y = r \sin \omega t$$

La proyección de r (sobre el eje vertical y) ejecuta una oscilación sinusoidal.

Ej. Fuente $V = \varepsilon_m \sin(\omega t)$
= componente “y” del fasor V



Circuito Resistivo AC

■ Relación entre Voltaje y Corriente

$$V = V_o \cos(\omega t) \quad I = \frac{V}{R} = \frac{V_o}{R} \cos(\omega t) \quad I = I_o \cos(\omega t)$$

■ Diagrama fasorial

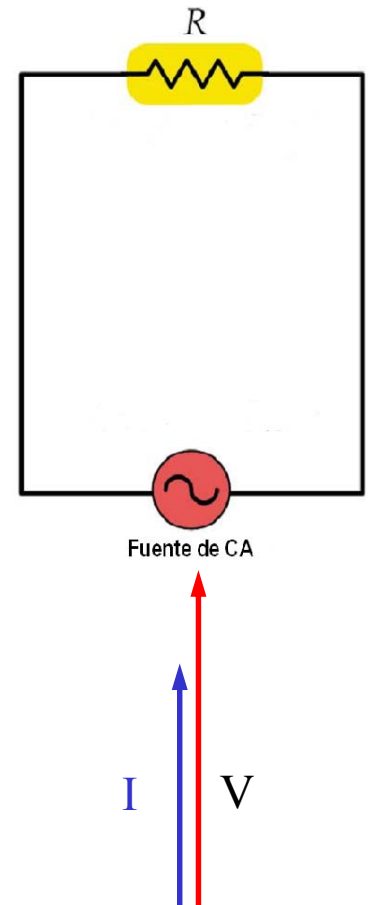
$$V = V_o \cos(\omega t)$$

$$I = I_o \cos(\omega t)$$

La misma función, no hay diferencia de fase

■ Potencia instantánea

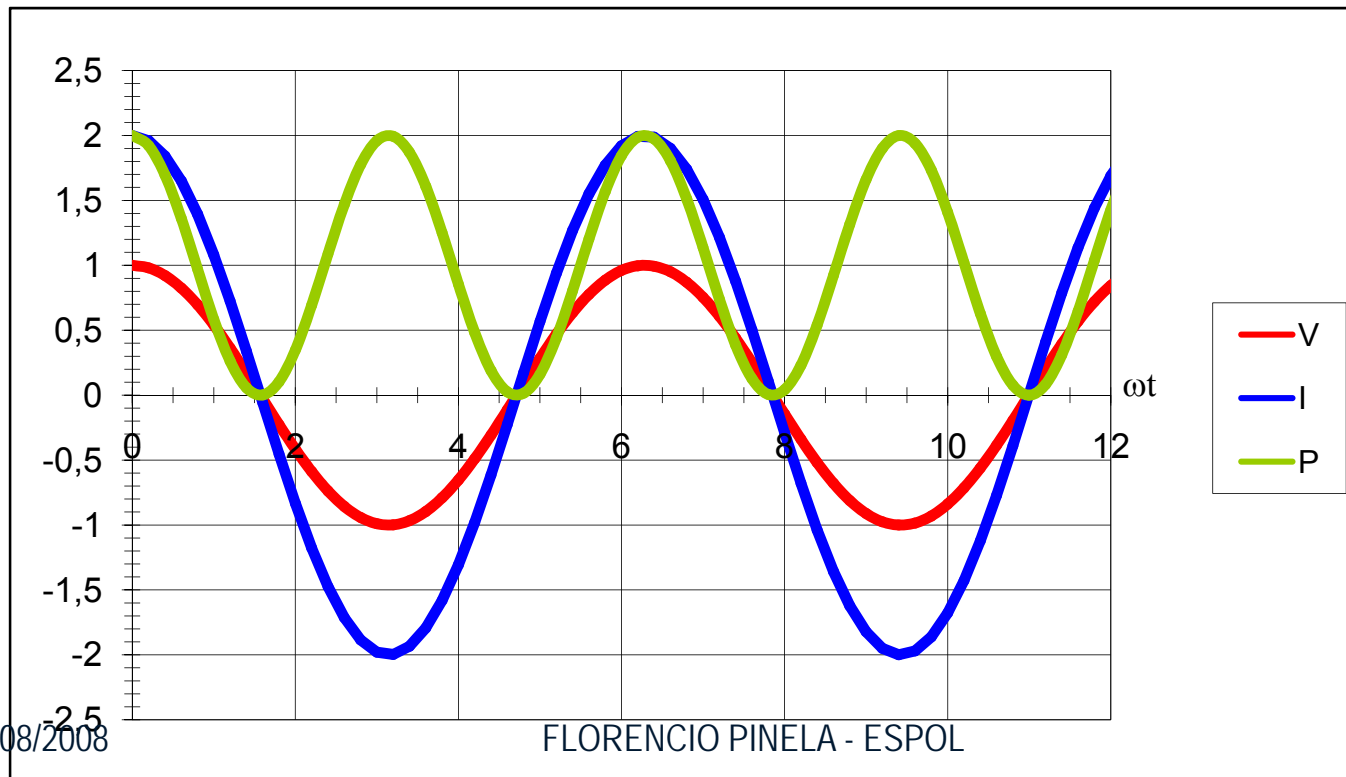
$$P(t) = V(t)I(t) = \frac{V_o^2}{R} \cos^2(\omega t) > 0$$



Circuito Resistivo AC

La potencia es siempre positiva, esto significa que la fuente está siempre suministrando energía al resistor, la que es disipada en forma de energía térmica.

$$V = V_o \cos(\omega t) \quad I = I_o \cos(\omega t) \quad P(t) = \frac{V_o^2}{R} \cos^2(\omega t)$$



Circuito Resistivo en AC (potencia promedio)

$$P_{av} = \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$$

■ Potencia promedio

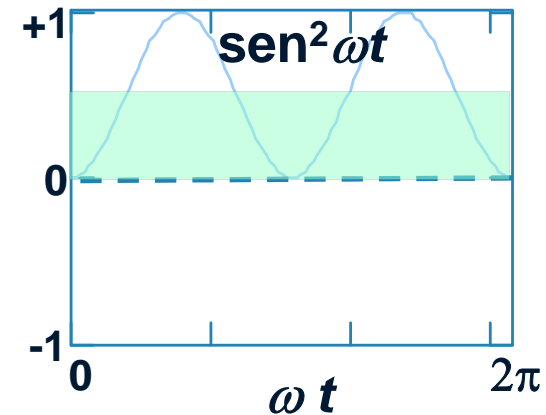
$$P_{av} = (I^2 R)_{av} = R(I^2)_{av}$$

$$\frac{\int_0^T \cos^2(\omega t) dt}{T} = \frac{1}{2}$$

$$P_{av} = R \frac{I_o^2}{2} = \frac{R}{2} (I_{rms} \sqrt{2})^2 = I_{rms}^2 R$$

**Idéntico al valor $I^2 R$ del
circuito en CC**

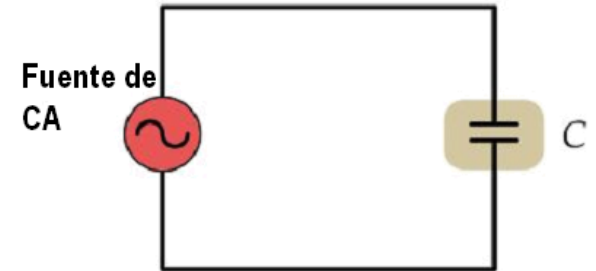
$$P_{av} = R \frac{\int_0^T I_o^2 \cos^2(\omega t) dt}{T}$$



Circuito Capacitivo en AC

■ Relación entre el voltaje y la corriente

$$V = V_o \cos(\omega t) \quad Q = CV = CV_o \cos(\omega t)$$



$$I = \frac{dQ}{dt} = -C\omega V_o \sin(\omega t) \quad I = \frac{V_o}{1/C\omega} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

■ Reactancia Capacitiva

$$X_c = \frac{1}{\omega C} \quad \Omega$$

$$I = \frac{V_o}{X_c} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_o = \frac{V_o}{X_c}$$

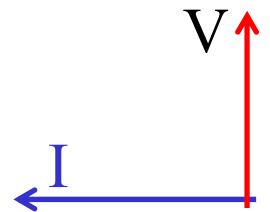
$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{X_c}$$

■ Diagrama fasorial

$$V = V_o \cos(\omega t)$$

$$I = I_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -I_o \sin \omega t$$

La corriente adelanta al voltaje en $\pi/2$



Circuito Capacitivo en AC

■ Potencia Instantánea

$$P(t) = V(t)I(t) = -\omega C V_o^2 \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) = -\frac{1}{2} \omega C V_o^2 \text{sen}(2\omega t)$$

$$P(t) > 0$$

Potencia entregada
por la fuente al
capacitor

$$P(t) < 0$$

Potencia entregada
por el capacitor a la
fuente

■ Potencia promedio

$$P_{av} = (P(t))_{av} = -\frac{1}{2} \omega C V_o^2 \frac{\int_0^T \text{sen}(2\omega t) dt}{T}$$

$$P_{av} = \frac{-\omega C V_o^2}{2T} \left[\frac{-1}{2\omega} \cos(2\omega t) \right]_0^T$$

$$P_{av} = \frac{-\omega C V_o^2}{2T} \left(\frac{-1}{2\omega} \right) \left[\cos\left(2 \times \frac{2\pi}{T} \times T \right) - \cos(0) \right]$$
$$P_{av} = \frac{-\omega C V_o^2}{2T} \left(\frac{-1}{2\omega} \right) [1 - 1] = 0$$

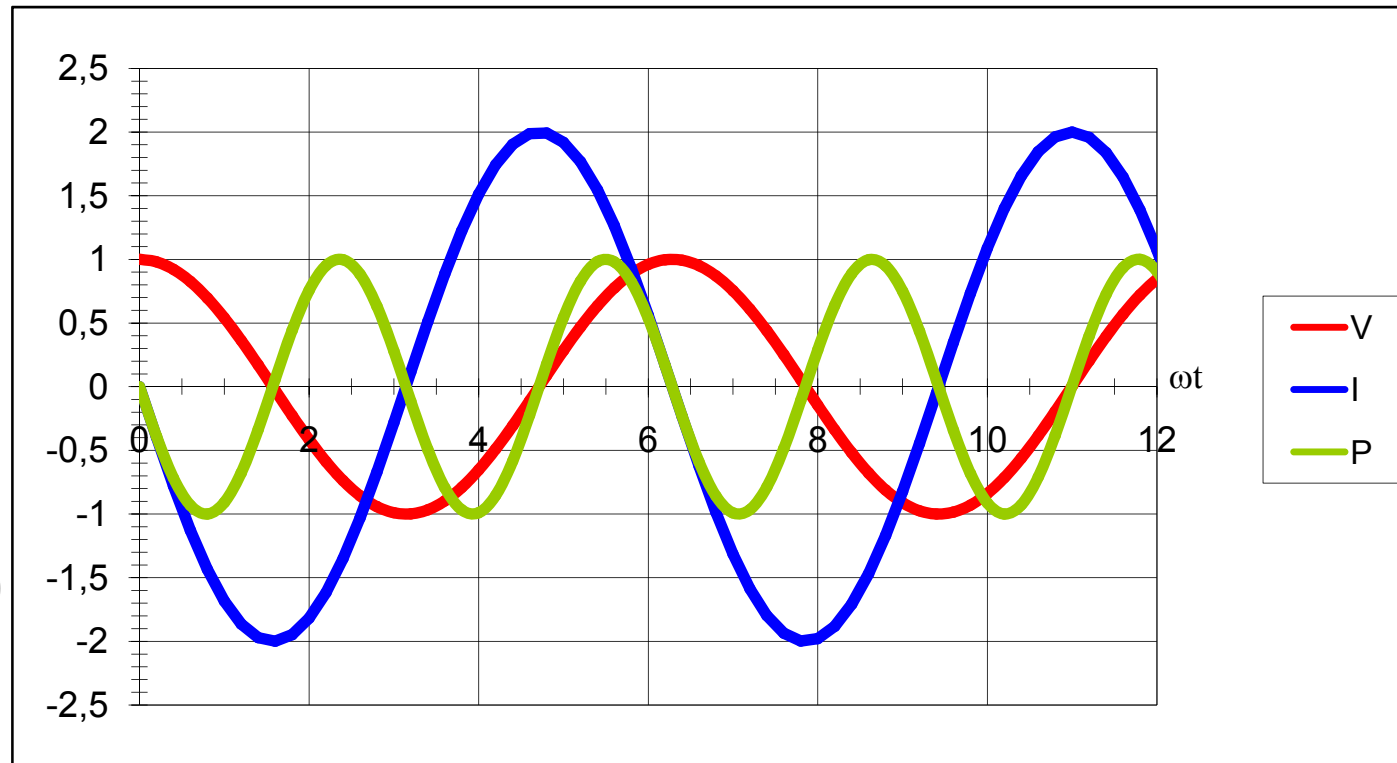
$$P_{av} = 0$$

Circuito Capacitivo en AC

$$V = V_o \cos(\omega t)$$

$$I = I_o \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$P_{av} = -\frac{1}{2} \omega C V_o^2 \sin(2\omega t)$$



Potencia positiva significa que hay energía suministrada por la fuente al **capacitor** y almacenada en forma de **campo eléctrico**. Potencia negativa significa que hay energía suministrada desde el **capacitor** a la fuente de poder.

Circuito Inductivo en AC

■ Relacion entre voltaje y corriente

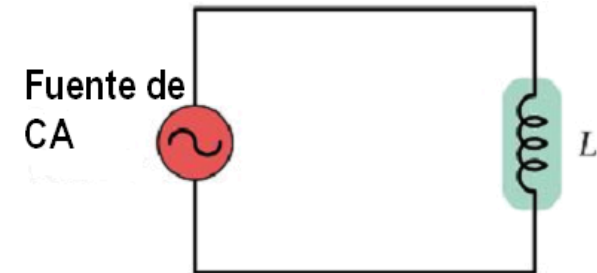
$$V = V_o \cos(\omega t) \quad V = L \frac{dI}{dt} = V_o \cos(\omega t)$$

$$\int L \frac{dI}{dt} dt = \int V_o \cos(\omega t) dt \quad \int L dI = V_o \int \cos(\omega t) dt$$

$$LI(t) = \frac{V_o}{\omega} \sin(\omega t) + \text{const}$$

$$I(t) = \frac{V_o}{L\omega} \sin(\omega t)$$

$$I(t) = I_o \sin(\omega t)$$



■ Reactancia Inductiva

$$X_L = \omega L \quad \Omega \quad I(t) = \frac{V_o}{X_L} \sin(\omega t) \quad I_o = \frac{V_o}{X_L}$$

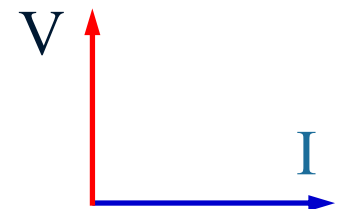
$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{X_L}$$

■ Diagrama fasorial

$$V = V_o \cos(\omega t)$$

$$I(t) = I_o \sin(\omega t)$$

El voltaje adelanta a la corriente en $\pi/2$



Circuito Inductivo en AC

■ Potencia Instantánea

$$P(t) = V(t)I(t) = \frac{V_o^2}{L\omega} \text{sen}(\omega t) \cos(\omega t) = \frac{V_o^2}{2L\omega} \text{sen}(2\omega t)$$

$$P(t) > 0$$

Potencia
entregada por la
fuente al inductor

$$P(t) < 0$$

Potencia entregada
por el inductor a la
fuente

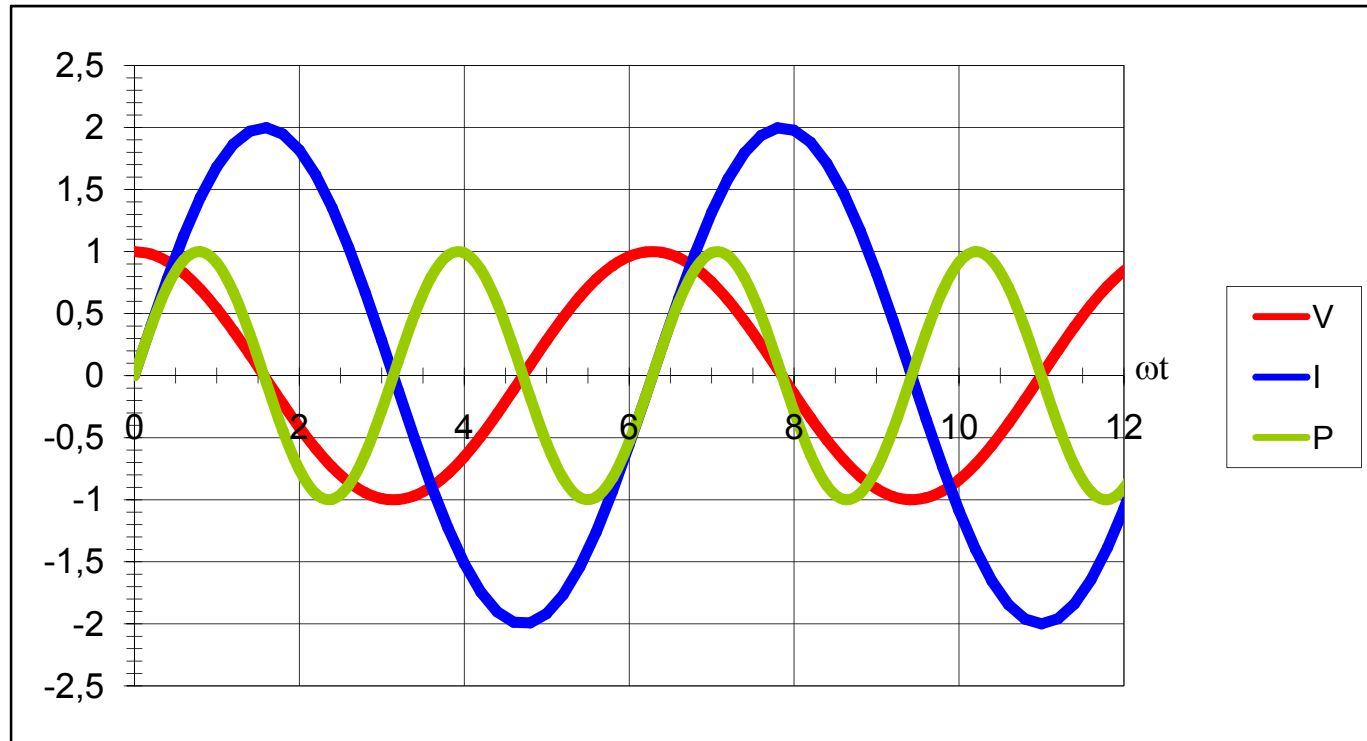
■ Potencia promedio

$$P_{av} = (P(t))_{av} = \frac{V_o^2}{2L\omega} \frac{\int_0^T \text{sen}(2\omega t) dt}{T}$$

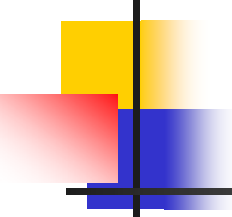
$$P_{av} = 0$$

Circuito Inductivo en AC

$$V = V_o \cos(\omega t) \quad I(t) = I_o \sin(\omega t) \quad P_{av} = \frac{V_o^2}{2L\omega} \sin(2\omega t)$$



Potencia positiva significa que hay energía suministrada por la fuente al inductor y almacenada en forma de campo magnético. Potencia negativa significa que hay energía suministrada desde el inductor a la fuente de poder.



Qué es la
reactancia?



Se puede imaginar una resistencia dependiente de la frecuencia.

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

- Para alta ω , $\chi_C \sim 0$
 - El Capacitor luce como un alambre (“corto”)
- Para baja ω , $\chi_C \rightarrow \infty$
 - El capacitor luce como un circuito abierto

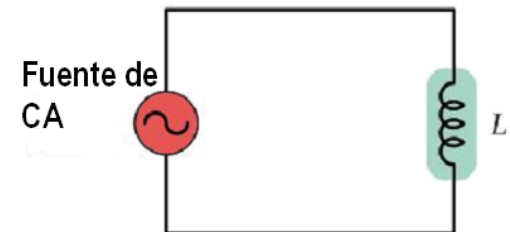
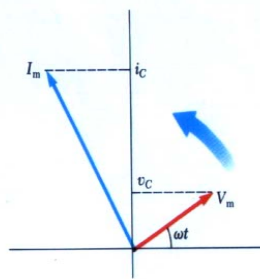
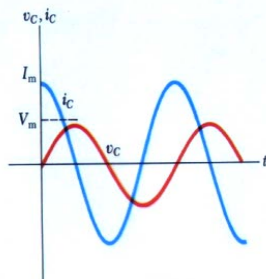
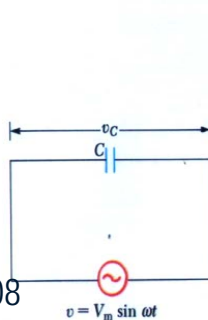
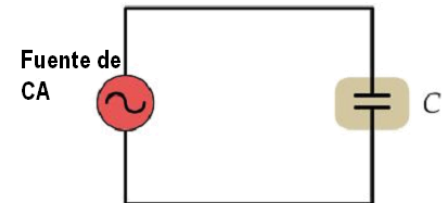
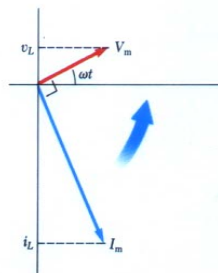
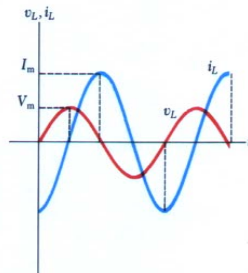
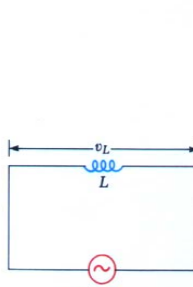
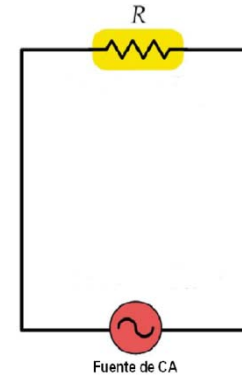
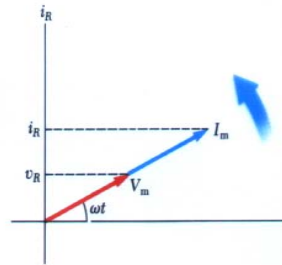
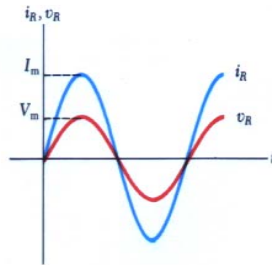
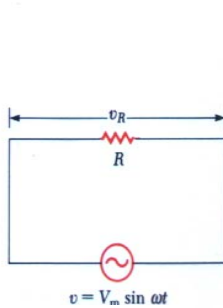
$$X_L = \omega L$$

$$("X_R" = R)$$

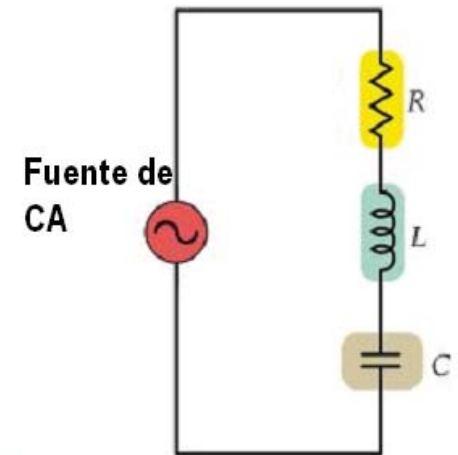
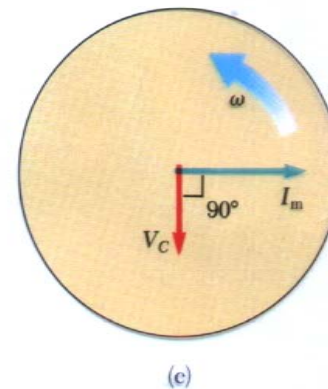
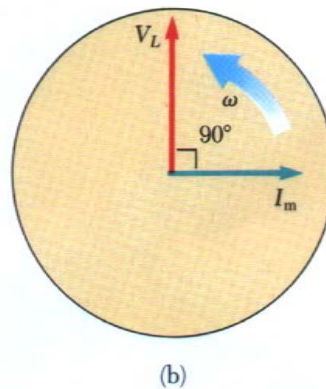
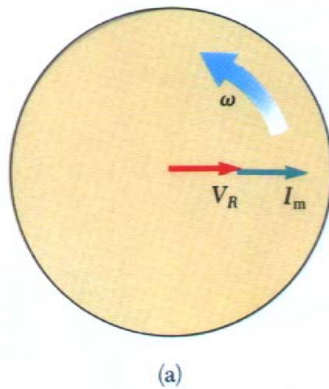
- Para baja ω , $\chi_L \sim 0$
 - El inductor luce como un alambre (“corto”)
- Para alta ω , $\chi_L \rightarrow \infty$
 - El inductor luce como un circuito abierto
(inductores resisten cambios en la corriente)

El circuito RLC en serie

Diagrama fasorial de los tres elementos actuando individualmente



Al conectar los tres elementos en serie, la corriente instantánea en cada uno de ellos debe ser la misma e igual a la corriente de la fuente. Esto es equivalente a decir que los tres fasores corriente se deben encontrar en fase.



Resistor



Resistance

$$V_R / I = R$$

V and I in phase

25/08/2008

Capacitor

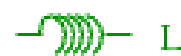


Capacitive reactance

$$V_C / I = X_C = \frac{1}{\omega C}$$

V lags I by $\pi/2$

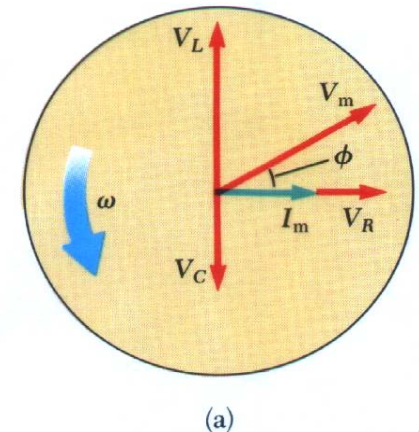
Inductor



Inductive reactance

$$V_L / I = X_L = \omega L$$

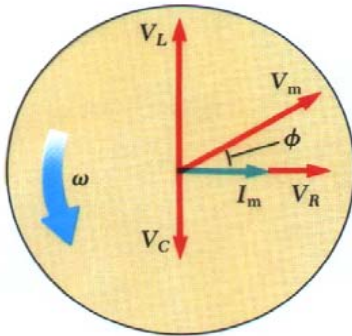
V leads I by $\pi/2$



Suma vectorial

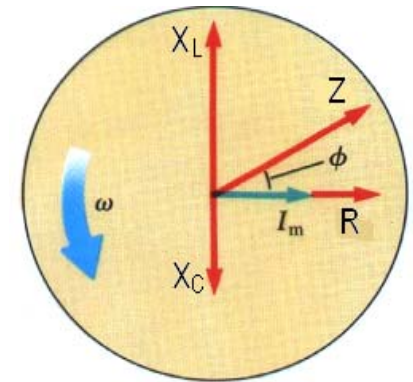
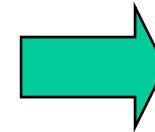
$$V_o = V_R + V_L + V_C$$

$$Z = X_L + X_C + R$$

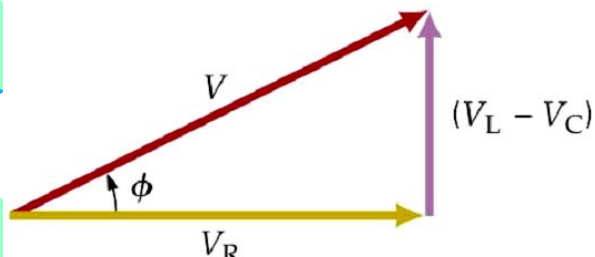


(a)

Cambio de escala
dividiendo cada
término para I_o ó I_m

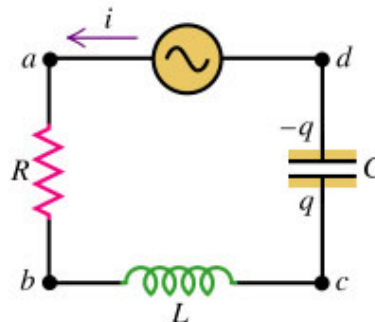


$$V_m = I_m Z$$

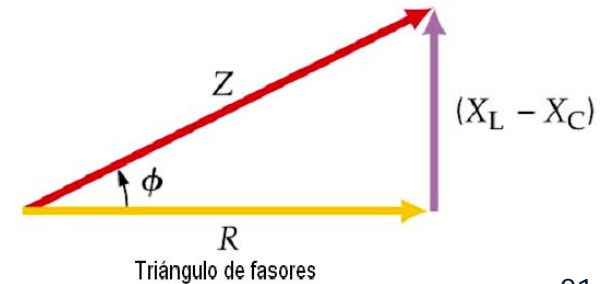


Triángulo equivalente de voltajes

25/08/2008



FLORENCIO PINELA - ESPOL



Triángulo de fasores

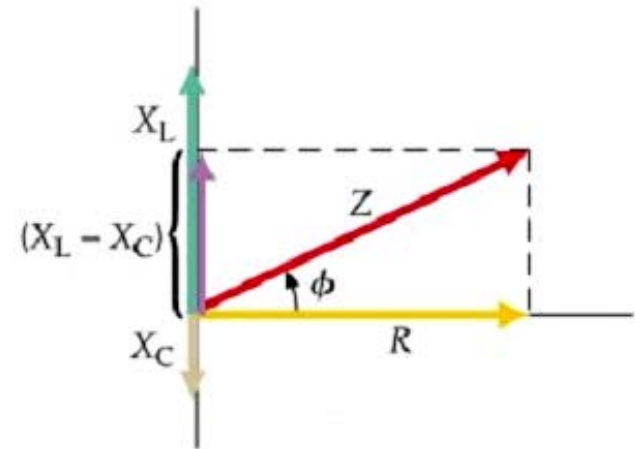
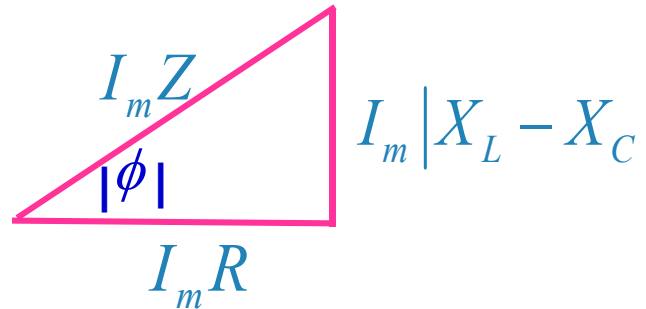
Impedancia, Z

- Del diagrama fasorial se encuentra que la amplitud de corriente I_m se relaciona con la amplitud del voltaje aplicado \mathcal{E}_m (V_m) por

$$\mathcal{E}_m = I_m Z$$

- Z es conocida como la “impedancia”, es básicamente la resistencia equivalente del circuito LRC dependiente de la frecuencia, dada por:

“Triángulo de Impedancia”



$$Z \equiv \frac{\mathcal{E}_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

- Note que Z experimenta su mínimo valor (R) cuando $\phi = 0$. Bajo estas condiciones el circuito presenta su máxima corriente.

$$Z = \frac{R}{\cos(\phi)}$$

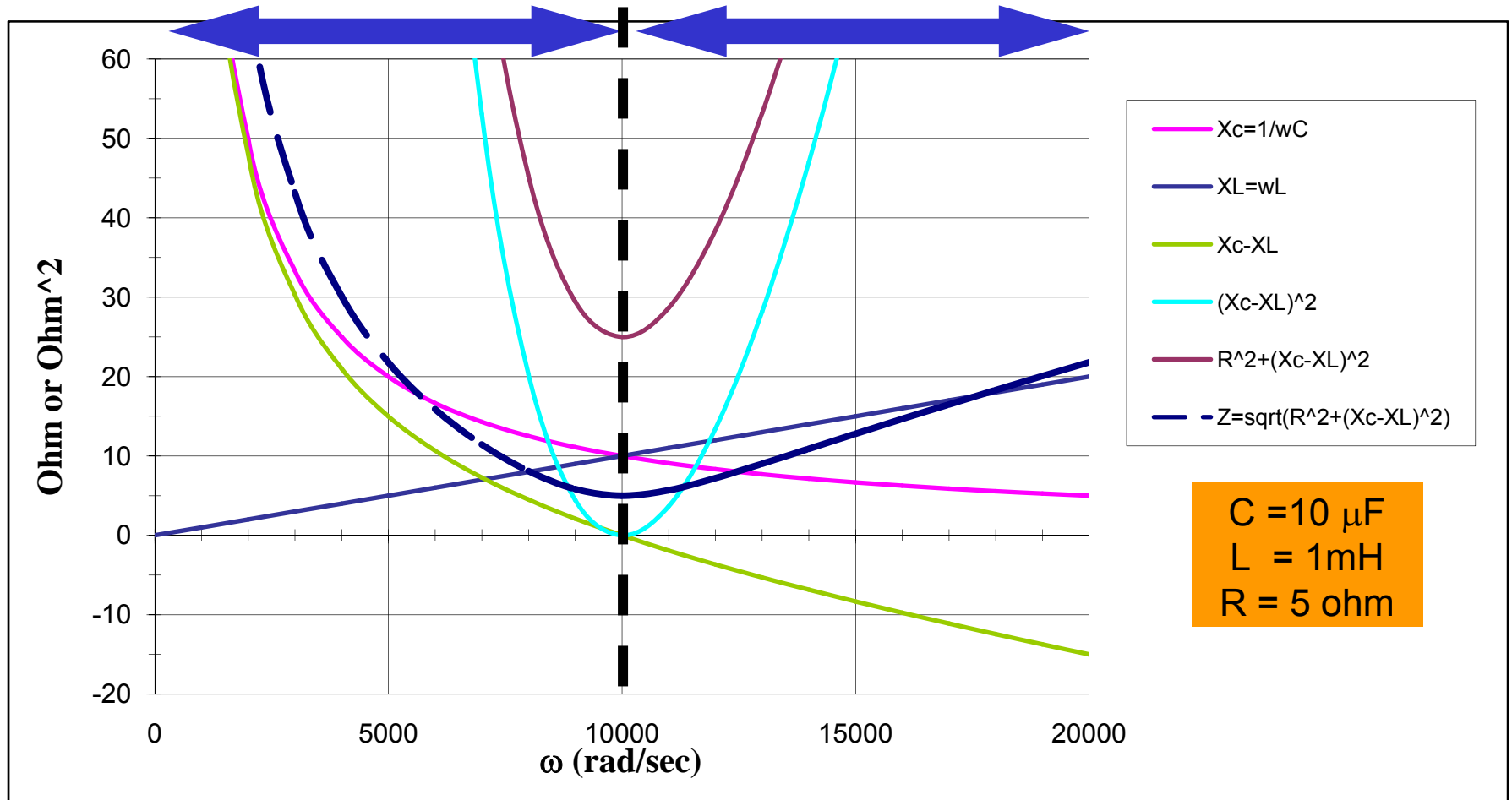
Circuito General R-L-C en C.A

Circuito Capacitivo

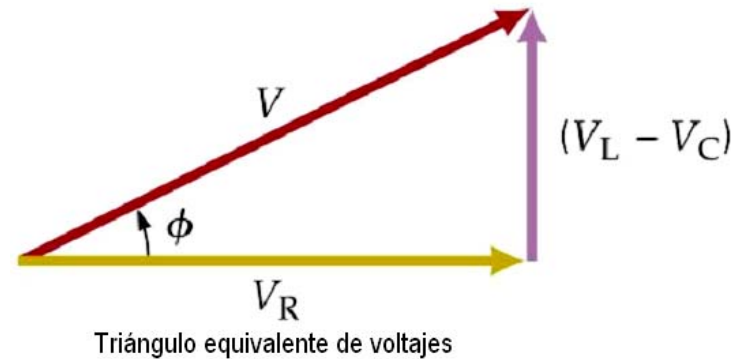
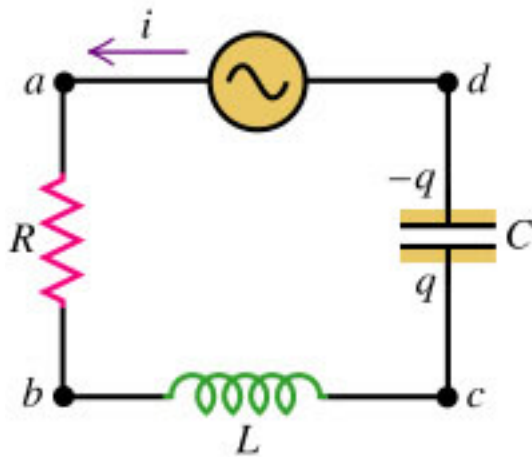
$$\frac{1}{\omega C} > \omega L$$

$$\frac{1}{\omega C} < \omega L$$

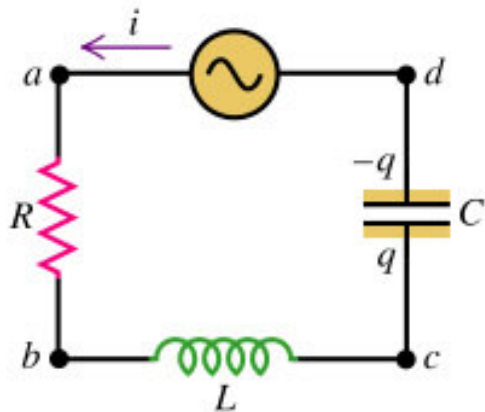
Circuito Inductivo



Se determinan los valores de las tensiones (voltajes) en el resistor (20 V), en el capacitor (60 V) y en el inductor (30 V).
¿Cuál es la tensión de la fuente?



La fuente entrega una tensión pico de 170 V a una frecuencia de 60 Hz. Si R vale 20 ohmios, $L = 100$ mH y $C = 50$ μ F. ¿Cuál es el valor de la corriente eficaz del circuito y la diferencia de fase entre la tensión y la corriente?



Circuito General R-L-C en C.A

- **Diagrama fasorial**
 - **En caso de una carga inductiva donde.**

$$I = I_o \cos(\omega t + \phi)$$

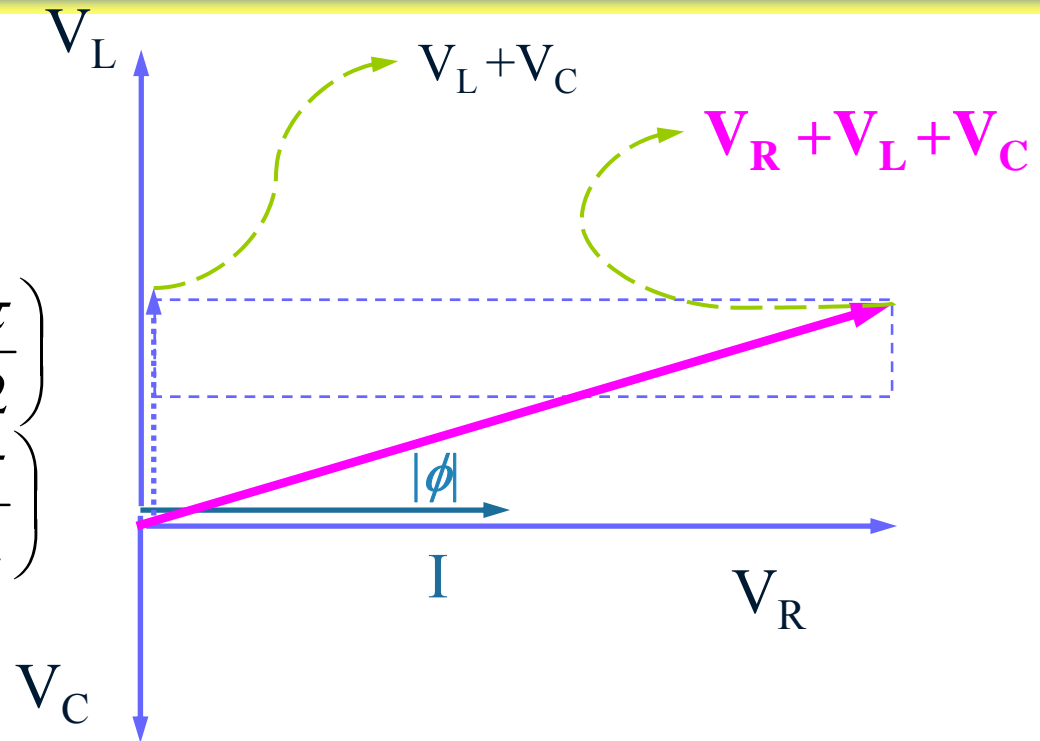
$$V_R = RI_o \cos(\omega t + \phi)$$

$$V_C = I_o X_C \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_L = I_o X_L \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Recuerde de las leyes de Kirchhoff

$$V_{Total}(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_C(t) = V_o \cos(\omega t)$$



Note: el voltaje adelanta a la corriente en un ángulo ϕ

Circuito General R-L-C en C.A

- Diagrama fasorial
 - En caso de una carga capacitiva.

$$I = I_o \cos(\omega t + \phi)$$

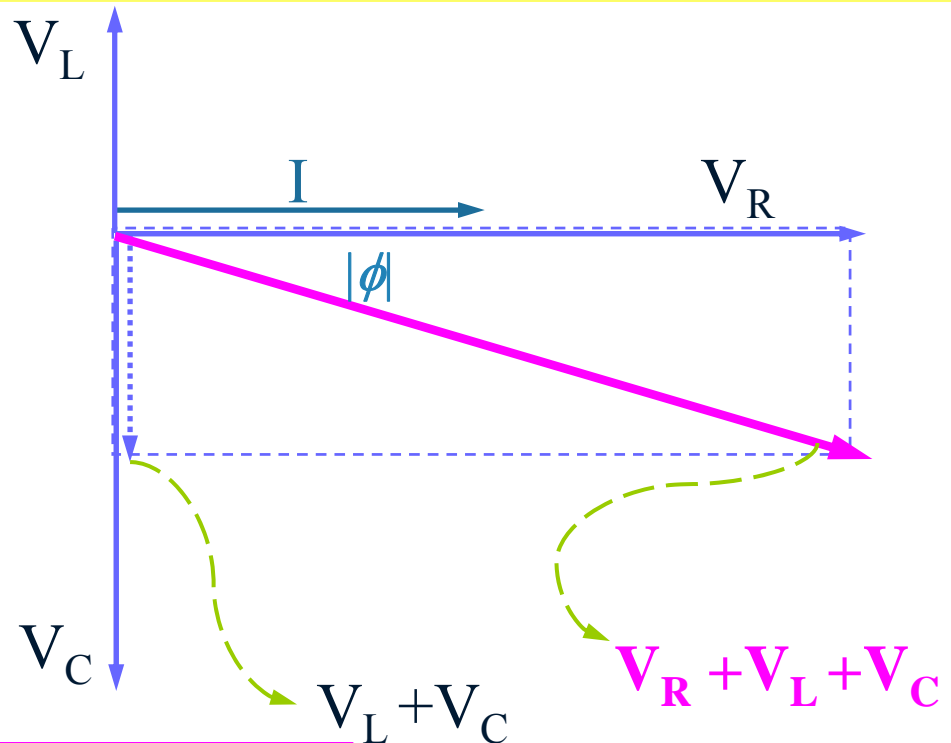
$$V_R = RI_o \cos(\omega t + \phi)$$

$$V_C = I_o X_C \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_L = I_o X_L \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

Recuerde de las leyes de Kirchhoff

$$V_{Total}(t) = V_L(t) + V_R(t) + V_c(t) = V_o \cos(\omega t)$$



Note: la corriente adelanta al voltaje en un ángulo ϕ .

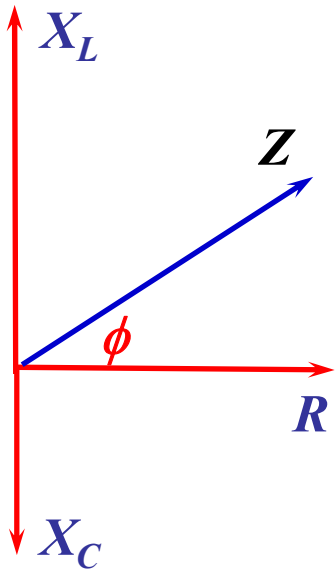
Retraso & Adelanto

La fase ϕ entre la corriente y la **fem** de la fuente depende de las magnitudes relativas de las reactancias inductiva y capacitiva.

$$I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{Z}$$

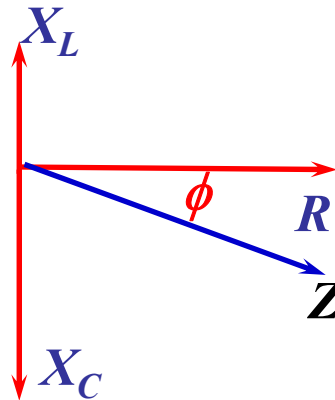
$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R}$$

$$X_L \equiv \omega L$$
$$X_C \equiv \frac{1}{\omega C}$$



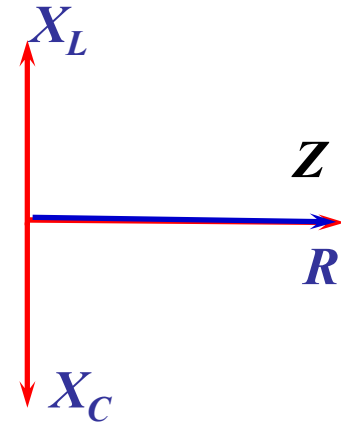
$$X_L > X_C$$
$$\phi > 0$$

La corriente
RETRASA al
Voltaje aplicado



$$X_L < X_C$$
$$\phi < 0$$

La corriente
ADELANTA al
Voltaje aplicado

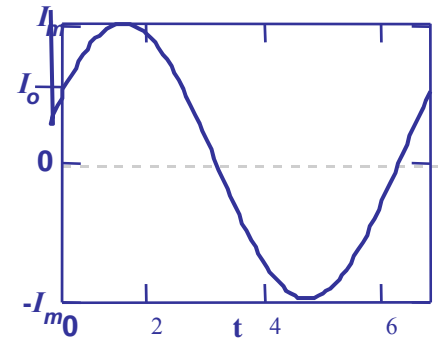
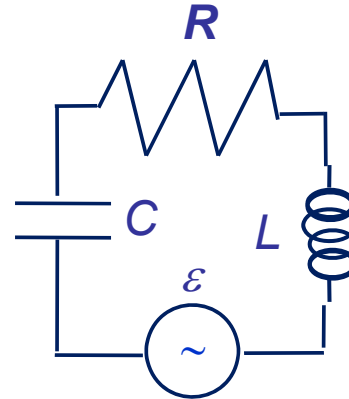


$$X_L = X_C$$
$$\phi = 0$$

La corriente está
EN FASE con el
Voltaje aplicado

Pregunta de ACTIVIDAD

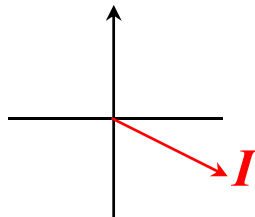
- El circuito LRC mostrado es alimentado por un generador con voltaje $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$. El gráfico de la corriente I en función del tiempo se muestra a la derecha.



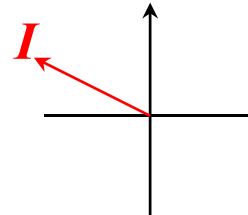
Cuál de los siguientes fasores representa la corriente I a $t=0$?

1A

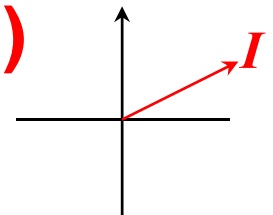
(a)



(b)

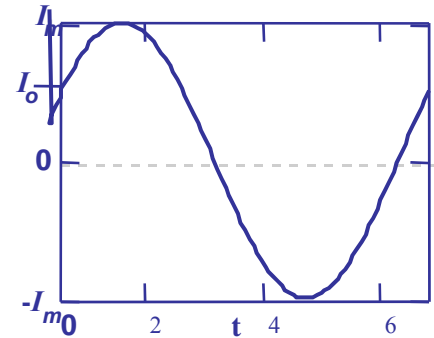
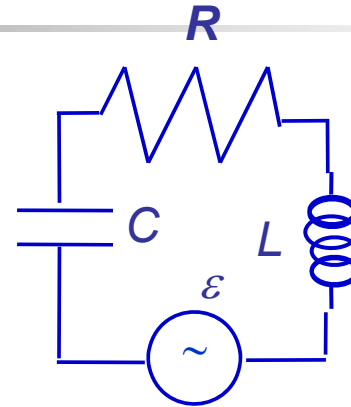


(c)



Pregunta de ACTIVIDAD

- El circuito LRC mostrado es alimentado por un generador con voltaje $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$. El gráfico de la corriente I en función del tiempo se muestra a la derecha.



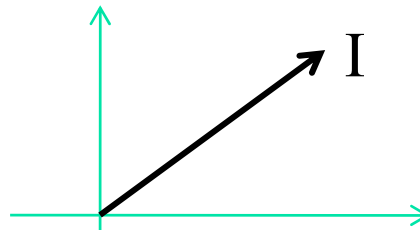
1B

Cómo debería cambiar ω para que la corriente y el voltaje se encuentren en fase?

(a) incrementar ω

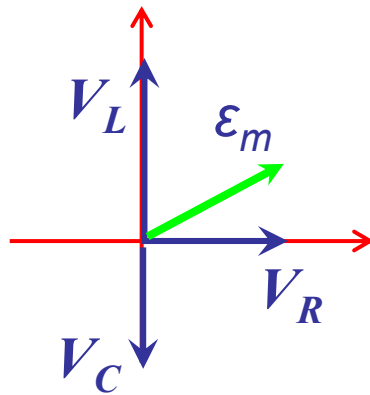
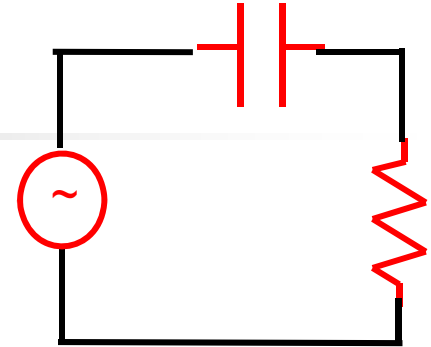
(b) disminuir ω

(c) imposible

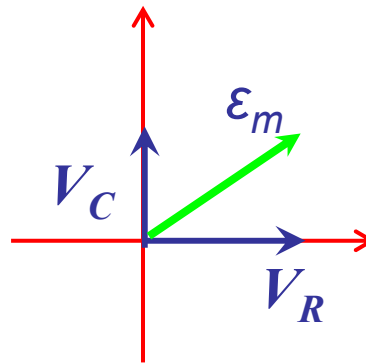


Pregunta de ACTIVIDAD

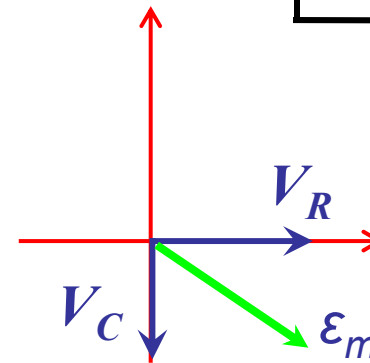
Un circuito RC es alimentado por una fem $\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t$.Cuál de los siguientes sería un diagrama fasorial apropiado?



(a)



(b)



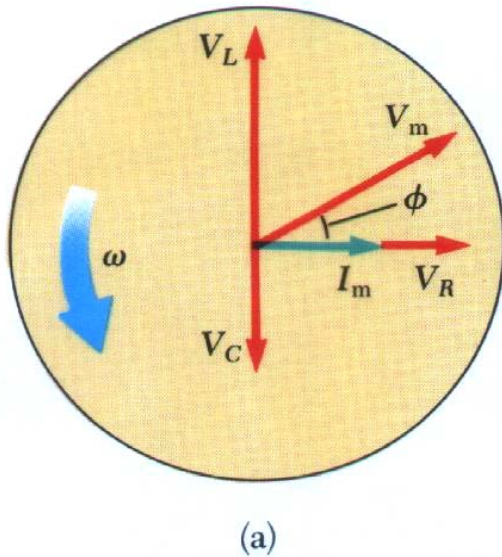
(c)

Para este circuito cuál de los siguientes es verdad?

- (a) El voltaje de entrada y la corriente están en fase.
- (b) El voltaje retrasa a la corriente.
- (c) El voltaje adelanta a la corriente.

Potencia en un circuito de CA

Potencia instantánea



$$v(t) = V_o \text{sen} \omega t$$

$$i(t) = I_o \text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$P(t) = v(t) i(t)$$

$$P(t) = V_o \text{sen} \omega t I_o \text{sen}(\omega t - \phi)$$

$$P(t) = V_o I_o \text{sen} \omega t [\text{sen} \omega t \cos \phi - \cos \omega t \text{sen} \phi]$$

Potencia promedio

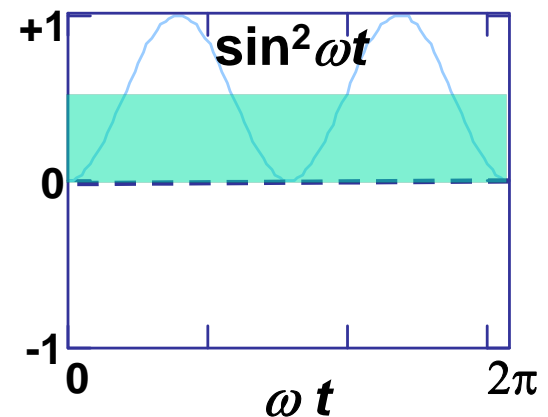
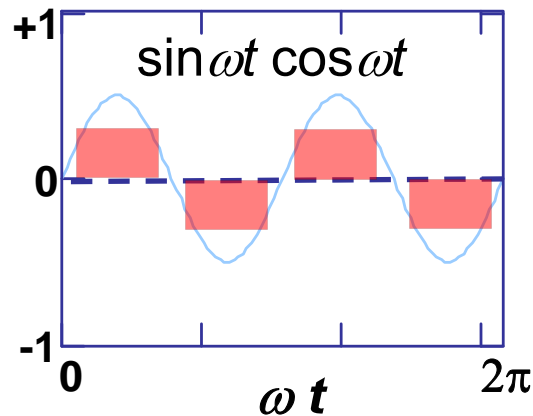
$$\bar{P} = \langle P \rangle = \int_0^T \frac{P(t) dt}{T}$$

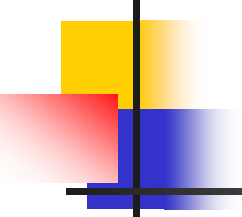
$$\bar{P} = V_o I_o \cos \phi \int_0^T \frac{1}{T} \sin^2 \omega t dt - V_o I_o \sin \phi \int_0^T \frac{1}{T} \sin \omega t \cos \omega t dt$$

$$\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$$

$$\langle \sin^2 x \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}$$

(Producto de una función par e impar = 0)





$$\int_0^T \frac{\sin^2 \omega t dt}{T} = \frac{1}{2} \qquad \int_0^T \frac{\sin \omega t \cos \omega t dt}{T} = 0$$

$$\bar{P} = \frac{V_o I_o \cos \phi}{2} = V_{rms} I_{rms} \cos \phi$$

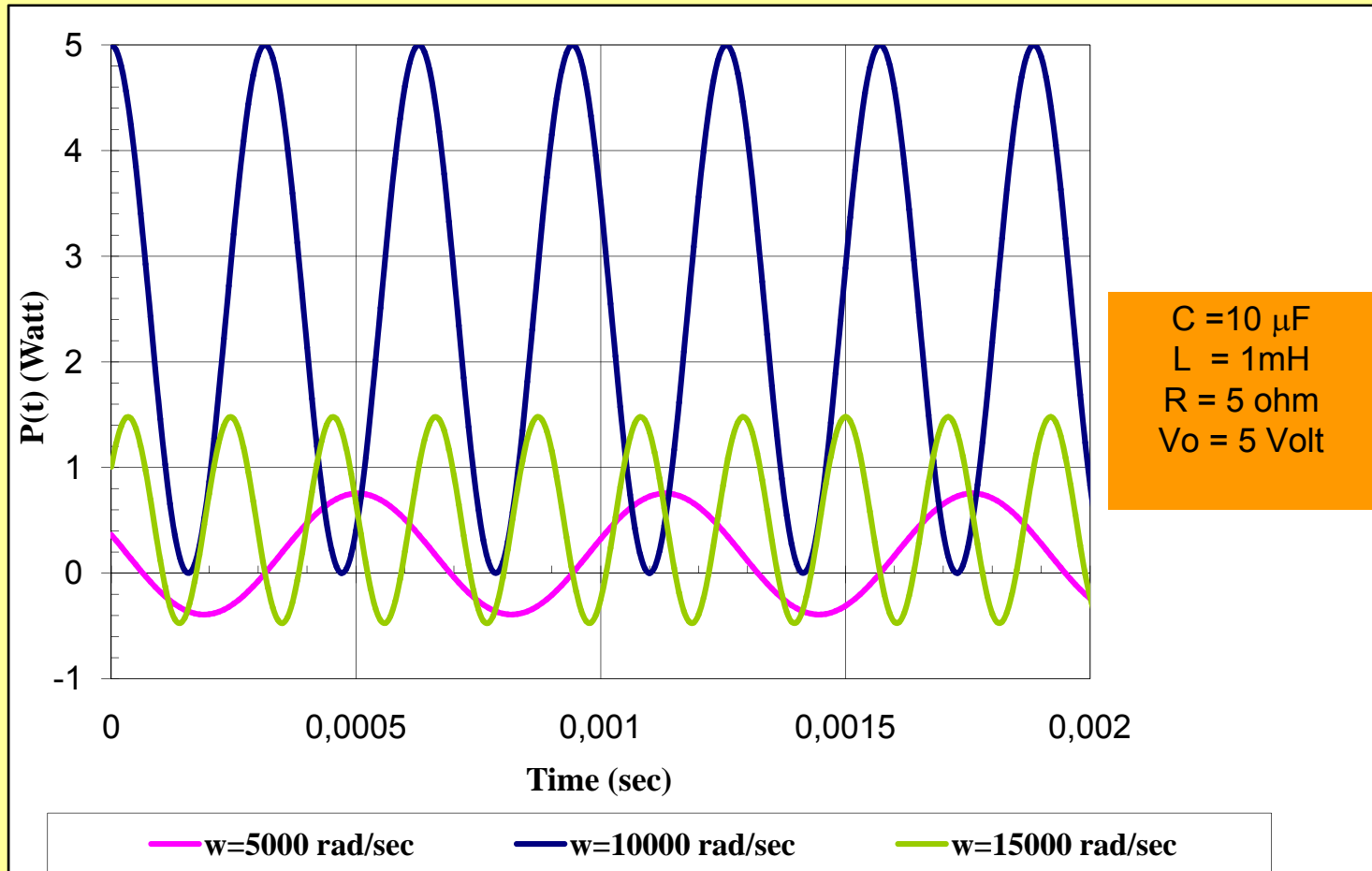
El término ***cos φ*** se denomina *factor de potencia*.

$$I_{rms} = \frac{I_o}{\sqrt{2}}, \dots V_{rms} = \frac{V_o}{\sqrt{2}}$$

- La potencia es máxima cuando $\phi = 0$ $\omega = \omega_0$
 $= (1/LC)^{1/2}$

Circuito General R-L-C en C.A

$$P(t) = V_o I_o \text{sen}\omega t [\text{sen}\omega t \cos\phi - \cos\omega t \text{sen}\phi]$$

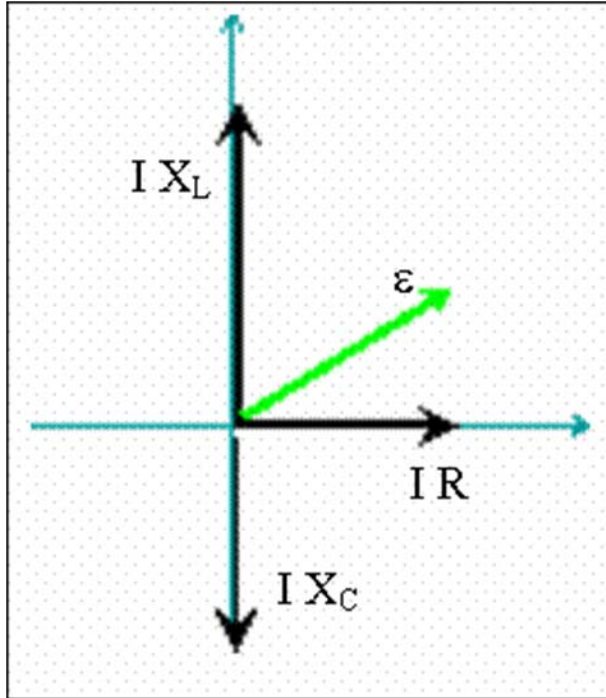


Caso Capacitivo, $\phi < 0$

Caso Resistivo, $\phi = 0$

Caso Inductivo, $\phi > 0$

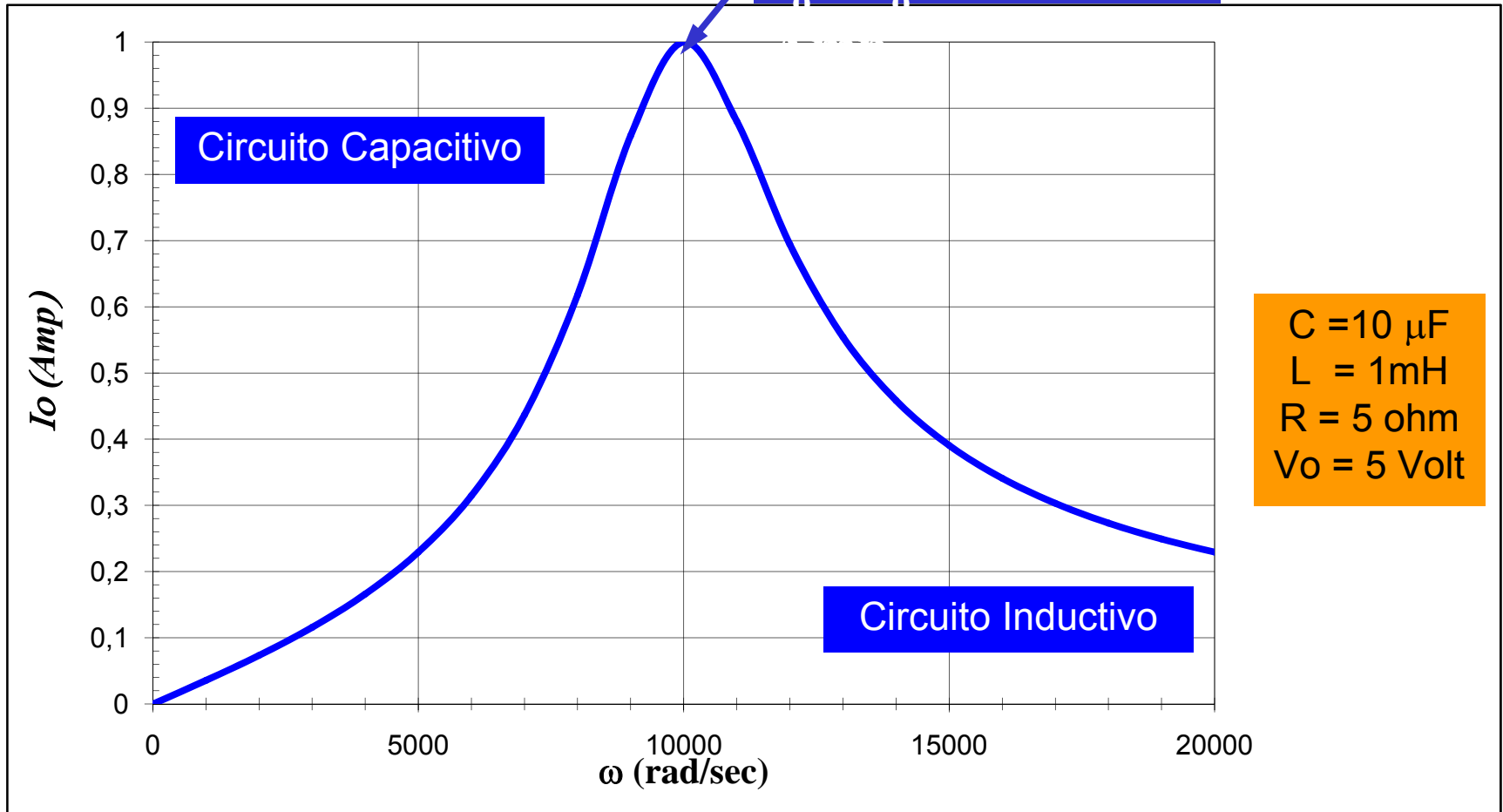
Si usted quiere incrementar la potencia entregada a este circuito RLC , qué modificación(es) trabajarían?



Utilizar un gran resistor incrementará el valor de la corriente?

Resonancia

$$I_0 = V_0 / R = 5/5 = 1$$



Resonancia

■ Diagrama fasorial en resonancia

$$\phi(\omega_{res}) = 0$$

$$I(\omega_{res}, t) = I_o \cos(\omega_{res} t)$$

$$V_R(\omega_{res}, t) = RI_o \cos(\omega_{res} t)$$

$$V_C(\omega_{res}, t) = I_o X_C \cos\left(\omega_{res} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_L(\omega_{res}, t) = I_o X_L \cos\left(\omega_{res} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

