1 Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Encuentre soluciones generales y/o particulares de Ecuaciones Diferenciales de primer orden
- Determine Estabilidad dinámica cuantitativa y/o cualitativamente
- Resuelva problemas de aplicaciones económicas

1.1 INTRODUCCIÓN

En ciertas ocasiones resolver un problema puede conducir a plantear una ecuación que contiene derivadas. Por ejemplo, suponga que $y=e^{x^2}$ entonces $\dfrac{dy}{dx}=2xe^{x^2}$; la razón de cambio relativa $\dfrac{y'}{y}$ sería $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}}=2x$, despejando tenemos $y'-2xy=0$. Esta última expresión representa una ecuación diferencial.

1.1.1 Definición de Ecuación Diferencial

> Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes se denomina *Ecuación Diferencial*.

Ejemplo

$y'-2xy=0$ donde $y=f(x)$

Si la función desconocida depende de una sola variable, como es el caso del ejemplo anterior, se la llama ***Ecuación Diferencial Ordinaria***.

Si la función desconocida depende de más de una variable se llama ***Ecuación Diferencial Parcial*** o ***en Derivadas Parciales.***

Ejemplo

$\dfrac{\partial z}{\partial x}+2xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=xz$ donde $z=f(x,y)$

Aquí nos dedicaremos sólo al estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

1.1.2 Orden de una ecuación diferencial

El orden de una Ecuación diferencial está dado por la más alta derivada presente en la ecuación:

Ejemplos

1. $\dfrac{dy}{dx}-2xy=0$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria de **primer orden**

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + xy = y'$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria de Segundo Orden

3. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria de Cuarto Orden

1.1.3 Grado de una ecuación diferencial

El grado de una Ecuación diferencial está dado por el exponente entero positivo de la más alta derivada presente en la ecuación.

Ejemplos

1. $y'' + 5(y')^3 - 4y = x$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria de segundo orden y primer grado

2. $(y')^2 - 2xy = 0$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria de Primer orden y segundo grado

1.1.4 Ecuaciones Lineales

> Una Ecuación Diferencial es *lineal* si lo es en todas sus derivadas y también en su variable dependiente.

Ejemplos

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria Lineal de primer orden

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} - y = 0$ Una Ecuación Diferencial Ordinaria de Lineal de Segundo Orden

Como ejemplos de Ecuaciones Diferenciales **no lineales**, tenemos:

Ejemplos

1. $y'' + 5(y')^3 - 4y = x$
2. $yy' - 2x = 2$
3. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$
4. $y' - y = e^y$
5. $y' - y = \cos y$

Usualmente una Ecuación Diferencial Lineal Ordinaria se puede representar en forma polinómica de la siguiente manera:

$$\left[a_n(x)\right]y^{(n)}+\left[a_{n-1}(x)\right]y^{(n-1)}+\cdots+\left[a_0(x)\right]y=g(x)$$

1.1.5 Solución de una Ecuación Diferencial

Se dice que una función $y=f(x)$ definida en un intervalo I, es solución de una ecuación diferencial en el intervalo I, si sustituida en la ecuación diferencial se obtiene una proposición verdadera; es decir, se convierte en una identidad.

Ejemplo

Determinar si la función $y=f(x)=\frac{x^4}{16}$ es solución de la ecuación $y'-xy^{\frac{1}{2}}=0$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

De $\boxed{y=\frac{x^4}{16}}$ se obtiene $\boxed{y'=\frac{4x^3}{16}=\frac{x^3}{4}}$

Reemplazando resulta:

$$y'-xy^{1/2}=0$$

$$\frac{x^3}{4}-x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2}=0$$

$$\frac{x^3}{4}-x\left(\frac{x^2}{4}\right)=0$$

$$\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{4}=0$$

$$0=0$$

Por tanto, la función si es solución de la Ecuación Diferencial.

1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una Ecuación Diferencial lineal de primer orden se puede expresar de la siguiente forma: $y'+\left[p(x)\right]y=g(x)$

Bien, ahora determinemos su solución.

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación por la función $e^{\int p(x)dx}$, tenemos:

$$e^{\int p(x)dx}\left[y' + p(x)y\right] = e^{\int p(x)dx} g(x)$$
$$y' e^{\int p(x)dx} + y e^{\int p(x)dx} p(x) = e^{\int p(x)dx} g(x)$$

Observe que el miembro de la izquierda representa el diferencial del producto de la función buscada $y(x)$ con la función $e^{\int p(x)dx}$, es decir:

$$d\left(y e^{\int p(x)dx}\right) = e^{\int p(x)dx} g(x)$$

Integrando miembro a miembro:

$$\int d\left(y e^{\int p(x)dx}\right) = \int e^{\int p(x)dx} g(x)dx$$
$$y e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} g(x)dx + C$$

Finalmente, se obtiene $y(x) = \dfrac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left[\displaystyle\int e^{\int p(x)dx} g(x)dx + C\right]$. La cual llamaremos **Solución General.**

Ejemplo 1

Encontrar la solución general para $y' - 2xy = x$

SOLUCIÓN:

Para este caso tenemos: $\boxed{p(x) = -2x}$ y $\boxed{g(x) = x}$

Calculando primero, $e^{\int p(x)dx} = e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$

Luego utilizando la formula $y(x) = \dfrac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left[\displaystyle\int e^{\int p(x)dx} g(x)dx + C\right]$, resulta:

$$y = \frac{1}{e^{-x^2}}\left[\int e^{-x^2} x dx + C\right]$$
$$y = e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\right]$$

o lo que es lo mismo: $y = -\dfrac{1}{2} + Ce^{x^2}$. Solución General

Ejemplo 2

Encontrar la solución general para $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2 \operatorname{sen} 3x$

SOLUCIÓN:

Para este caso tenemos: $\boxed{p(x) = -\dfrac{2}{x}}$ y $\boxed{g(x) = x^2 \operatorname{sen} 3x}$

Primeramente $e^{\int p(x)dx}=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$.
Luego:

$$y=\frac{1}{x^{-2}}\int x^{-2}x^{2}sen3x=x^{2}\int sen3x$$

$$y=x^{2}\left[-\frac{\cos 3x}{3}+c\right]$$

$$y=-\frac{x^{2}\cos 3x}{3}+cx^{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar la solución general para $xy'+2y=\operatorname{sen}x$

SOLUCIÓN:

Dividiendo para "x", tenemos:

$$\frac{xy'}{x}+\frac{2y}{x}=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{\operatorname{sen}x}{x}$$

Entonces: $\boxed{p(x)=\frac{2}{x} \quad \wedge \quad g(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x}}$

Por lo tanto:

$$e^{\int \frac{2}{x}dx}=e^{2\ln x}=e^{\ln x^{2}}=x^{2}$$

$$y(x)=\frac{1}{x^{2}}\left[\int \frac{\operatorname{sen}x}{x}x^{2}dx+C\right]$$

$$=\frac{1}{x^{2}}\left[\int x\operatorname{sen}x\,dx+C\right]$$

La integral que resulta se la encuentra empleando la técnica de integración por Partes.

Haciendo $\boxed{\begin{array}{l} u=x\rightarrow du=1dx \\ dv=\operatorname{sen}x\,dx\rightarrow v=\int \operatorname{sen}x\,dx=-\cos x\end{array}}$ resulta:

$$\int x\operatorname{sen}x\,dx=x(-\cos x)+\int \cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\operatorname{sen}x$$

Por lo tanto: $y(x)=\frac{1}{x^{2}}\left[-x\cos x+\operatorname{sen}x+C\right]$ es la solución general

---

1.2.1 Teorema

Si las funciones p y g son continuas en un intervalo (a,b) que contiene el punto x_0, entonces existe una función única $y=f(x)$ que satisface a la ecuación diferencial $y' + p(x)y = g(x)$, para $x \in (a,b)$ que cumple la condición inicial $y(x_0) = y_0$

Ejemplo 4

Encontrar la solución particular $xy' + 2y = 4x^2$ si $y(1) = 2$

SOLUCIÓN:

Dividimos para "x":

$$xy' + 2y = 4x^2$$
$$y' + \frac{2}{x}y = 4x$$

Entonces: $\boxed{p(x) = \frac{2}{x} \quad \wedge \quad g(x) = 4x}$

Por lo tanto:

$$e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$y = \frac{1}{x^2}\left[\int x^2 4x dx + C\right] = \frac{1}{x^2}\left[x^4 + C\right]$$

$$y = x^2 + \frac{C}{x^2} \qquad SOLUCIÓN \quad GENERAL$$

Con la condición $y = 2 \quad \wedge \quad x = 1$ se obtiene: $\boxed{2 = 1 + \frac{C}{1} \quad \Rightarrow \quad C = 1}$

Finalmente $y = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad SOLUCIÓN\ PARTICULAR$

Ejemplo 5

Encontrar la solución particular $y' - y = 2xe^{2x} \quad ; \quad y(0) = 1$

SOLUCIÓN:

Aquí tenemos que $p(x) = -1 \quad \wedge \quad g(x) = 2xe^{2x}$

Entonces: $e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1dx} = e^{-x}$

Reemplazando y resolviendo resulta:

$$y(x) = \frac{1}{e^{-x}}\left[\int 2xe^{2x}e^{-x}dx + C\right]$$
$$= e^{x}\left[2\int xe^{x}dx + C\right]$$

La integral que resulta se la encuentra integrando Por Partes.

Haciendo $\boxed{\begin{array}{l} u = x \rightarrow du = 1dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x \end{array}}$ resulta:

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx$$
$$= xe^{x} - e^{x}$$

Por lo tanto: $y(x) = e^{x}\left[2\left(xe^{x} - e^{x}\right) + C\right]$ es la SOLUCIÓN GENERAL.

Empleando la condición inicial $x = 0$ y $y = 1$, encontramos C

$$y(0) = e^{0}\left[2\left(0e^{0} - e^{0}\right) + C\right] = 1$$
$$-2 + C = 1$$
$$C = 3$$

Finalmente $y(x) = e^{x}\left[2\left(xe^{x} - e^{x}\right) + 3\right]$ es la SOLUCIÓN PARTICULAR.

Ejemplo 6

Encontrar la solución particular $y' + 2y = g(x) \quad ; \quad y(0) = 0$ para

a) $g(x) = 1$ y b) $g(x) = 0$

SOLUCIÓN:

a) Si $g(x) = 1$, entonces:

$$y' + 2y = 1$$
$$e^{\int 2dx} = e^{2x}$$
$$y_1 = \frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}(1)dx + C_1\right] = \frac{1}{e^{2x}}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right]$$
$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{C_1}{e^{2x}} \qquad \wedge \qquad y_1 = 0, x = 0$$
$$0 = \frac{1}{2} + C_1$$
$$C_1 = -\tfrac{1}{2}$$
$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{-\tfrac{1}{2}}{e^{2x}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^{2x}}$$

b) Si $g(x) = 0$, entonces:

$$y' + 2y = 0$$
$$e^{\int 2dx} = e^{2x}$$
$$y_2 = \frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}(0)dx + C_2\right]$$
$$y_2 = \frac{C_2}{e^{2x}}; \qquad y_2(1) = y_1(1)$$
$$y_1(1) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-2}$$
$$y_2(1) = \frac{C_2}{e^{2}}$$
$$\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}e^{-2} = C_2e^{-2}$$
$$C_2 = \frac{e^{2} - 1}{2}$$

Ejemplo 7

Encontrar la solución de $y' = \dfrac{1}{e^y + x}$

SOLUCIÓN:

La ecuación *dada* NO ES LINEAL con respecto a "x"

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y + x}$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y + x$$

$$\frac{dx}{dy} - x = e^y$$

Pero es lineal con respecto a "y", entonces:

$$e^{\int -1dy} = e^{-y}$$

$$x(y) = \frac{1}{e^{-y}}\left[\int e^y(e^{-y})dy + C\right] = \frac{1}{e^{-y}}\left[\int 1dy + C\right]$$

$$x(y) = e^y\left[y + C\right] =$$

Segundo Método:

Haciendo cambio de variable $\begin{cases} x \to y \\ y \to x \end{cases}$ resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y + x}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{e^x + y}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x + y$$

$$y' - y = e^x$$

La última es una ecuación lineal, por lo tanto:

$$y(x) = \frac{1}{e^{\int -1dx}}\left[\int e^x e^{-x}dx + C\right]$$

$$= e^x\left[\int dx + C\right]$$

$$y(x) = e^x\left[x + C\right]$$

Finalmente, regresando la variable:

$$x(y) = e^y\left[y + C\right]$$

Ejercicio Propuesto 1.1

Encuentre la solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales Lineales:

1. $y'-\frac{y}{x}=2+\sqrt{x}$	9. $2xy'-y=x^3-x$
2. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-2y}{x}$	10. $y'+\frac{2}{x}y=\frac{1}{x^2}$
3. $x\frac{dy}{dx}+2y=sen\,x \quad , \quad y(2)=1$	11. $\frac{dy}{dx}=e^{2x}+3y$
4. $x\frac{dy}{dx}+xy=1-y \quad , \quad y(1)=0$	12. $\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{1+e^x}$
5. $y'=e^{2x}+y-1$	13. $(2y+3x)dx=-xdy$
6. $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{x}$	14. $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{x+2}-\frac{2y}{x+1}$
7. $y'+\frac{y}{x+1}=x \quad ,y=0 \; cuando \; x=3$	15. $y'=\frac{1}{x-3y}$
8. $y'-2y=e^x$	16. $(e^y+x+3)y'=1$

1.3. ECUACIONES DE BERNOULLI

Existen Ecuaciones Diferenciales que no son lineales pero se pueden transformar en Lineales. Una de estas es la denominada Ecuación de Bernoulli.

Una Ecuación de Bernoulli tiene la forma $y'+p(x)y=g(x)y^n$ donde $n\neq 0 \wedge n\neq 1$. Para encontrar su solución, se siguen los siguientes pasos:

PASO 1: Dividir para y^n.

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)\frac{y}{y^n}=g(x)\frac{y^n}{y^n}$$

$$y'y^{-n}+p(x)y^{1-n}=g(x)$$

PASO 2: Cambiar de variable: $v=y^{1-n}$

Además, derivando la nueva variable con respecto a x, se obtiene:

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{1-n-1}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1-n)y^{-n}}\frac{dv}{dx} =$$
$$y' = \frac{y^n}{(1-n)}\frac{dv}{dx}$$

Al realizar las sustituciones necesarias y simplificando resulta:

$$y'y^{-n} + p(x)y^{1-n} = g(x)$$
$$\frac{y^n}{(1-n)}\frac{dv}{dx}y^{-n} + p(x)v = g(x)$$
$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + p(x)v = g(x)$$

La última ecuación es lineal con respecto a la nueva variable v,

Paso 3: Encontrar $v(x)$.

Paso 4: Encontrar $y(x)$, empleando el cambio de variable utilizado.

Ejemplo 1

Encontrar la solución general de $x^2y'+2xy = y^3$

SOLUCIÓN:

PASO 1:

$$x^2y'+2xy = y^3 \quad \longleftarrow \text{Dividiendo para } x^2$$
$$y' + \frac{2xy}{x^2} = \frac{y^3}{x^2}$$
$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}y^3 \quad \longleftarrow \text{Ecuación de Bernoulli}$$
$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}\frac{y}{y^3} = \frac{1}{x^2}\frac{y^3}{y^3} \quad \longleftarrow \text{Dividiendo para } y^3$$
$$y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

PASO 2:

Aquí el cambio de variable sería: $v = y^{-2}$, entonces $\boxed{\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}}$ o también $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y^{-3}}\frac{dv}{dx}}$

Reemplazando en $\boxed{y^{-3}y' + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^2}}$ se obtiene:

$$-\tfrac{1}{2}\frac{dv}{dx}+\frac{2}{x}v=\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{dv}{dx}-\frac{4}{x}v=-\frac{2}{x^2}$$

PASO 3: Encontrar v. La última ecuación es lineal con respecto a v, por tanto podemos encontrarla de la manera descrita anteriormente.

$$e^{\int -\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}e=e^{\ln\left(x^{-4}\right)}=x^{-4}$$

$$v=\frac{1}{x^{-4}}\left[\int x^{-4}(-2x^{-2})dx+C\right]=\frac{1}{x^{-4}}\left[\int -2x^{-6}dx+C\right]$$

$$v=x^4\left[\frac{2x^{-5}}{5}+c\right]=\frac{2}{5}x^{-1}+cx^4$$

PASO 4: Encontrar y

Como $v=y^{-2}$ entonces $y^{-2}=\frac{2}{5x}+cx^4$

Y al despejar, se obtiene:

$$y^2=\frac{1}{\frac{2}{5x}+cx^4}$$

$$\sqrt{y^2}=\pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2}{5x}+cx^4}}$$

$$y(x)=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{5x}+cx^4}}$$

Ejemplo 2

Encontrar la solución general de $y'=y(xy^3-1)$

SOLUCIÓN:

Paso 1: Primero la llevamos a la forma de Bernoulli

$$y'=y(xy^3-1)=xy^4-y$$

$$y'+y=xy^4$$

Dividiendo para y^4, se obtiene: $\boxed{\begin{array}{l}\frac{y'}{y^4}+\frac{y}{y^4}=\frac{xy^4}{y^4}\\ \frac{y'}{y^4}+y^{-3}=x\end{array}}$

Paso 2: El cambio de variable sería: $v=y^{-3}$.

Derivando se obtiene: $\frac{dv}{dx}=-3y^{-4}\frac{dy}{dx}$

Despejando se obtiene: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-3y^{-4}}\frac{dv}{dx}$

Reemplazando se obtiene:
$$\boxed{\begin{array}{l} y'y^{-4}+y^{-3}=x \\ \frac{1}{-3y^{-4}}\frac{dv}{dx}y^{-4}+v=x \\ \frac{dv}{dx}-3v=-3x \end{array}}$$

Paso 3: Encontrando v

$$e^{\int -3dx}=e^{-3x}$$

$$v=\frac{1}{e^{-3x}}\left[\int e^{-3x}(-3x)dx+C\right]$$

Integrando por partes:

$$v=\frac{1}{e^{-3x}}\left[-\frac{e^{-3x}(-3x)}{3}+\frac{3}{9}e^{-3x}+C\right]$$

$$v=x+\frac{3}{9}+Ce^{3x}$$

Paso 4. Encontrando y

Como $v=y^{-3}$ entonces
$$\boxed{\begin{array}{l} y^{-3}=x+\frac{1}{3}+Ce^{3x} \\ y^3=\dfrac{1}{x+\frac{1}{3}+Ce^{3x}} \\ y(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\frac{1}{3}+Ce^{3x}}} \end{array}}$$

Ejemplo 3

Encontrar la solución general de $y^2dx+\left(xy-x^3\right)dy=0$

SOLUCIÓN:

Paso 1: Primero tratemos de llevarla a la forma de Bernoulli

$$y^2\frac{dx}{dx}+\left(xy-x^3\right)\frac{dy}{dx}=0$$

$$y^2+\left(xy-x^3\right)y'=0$$

No es posible así tal como está. Cambiando de variable $\begin{cases} x\to y \\ y\to x\end{cases}$ se tiene:

$$x^2dy+\left(yx-y^3\right)dx=0$$

Ahora le damos la forma de Bernoulli.

$$x^2\frac{dy}{dx}+\left(yx-y^3\right)\frac{dx}{dx}=0$$

$$x^2y'+xy-y^3=0$$

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x^2}y^3$$

Dividiendo para y^3, se obtiene:
$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{y'}{y^3}+\frac{1}{x}\frac{y}{y^3}=\frac{1}{x^2}\frac{y^3}{y^3} \\ \frac{y'}{y^3}+\frac{1}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^2} \end{array}}$$

Paso 2: cambio de variable $v=y^{-2}$.

Derivando se obtiene: $\frac{dv}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

Despejando se obtiene: $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{-2y^{-3}}\frac{dv}{dx}$

Reemplazando se obtiene:
$$\boxed{\begin{array}{l} y'y^{-3}+\frac{1}{x}y^{-2}=\frac{1}{x^2} \\ \frac{1}{-2y^{-3}}\frac{dv}{dx}y^{-3}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x^2} \\ -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=\frac{1}{x^2} \\ \frac{dv}{dx}+\left(-\frac{2}{x}\right)v=-\frac{2}{x^2} \end{array}}$$

Paso 3: Encontrando v

$$e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln x}=e^{\ln x^{-2}}=x^{-2}$$

$$v(x)=\frac{1}{x^{-2}}\left[\int\left(-\frac{2}{x^2}\right)x^{-2}dx+C\right]=$$

$$v(x)=x^2\left[-2\int x^{-4}dx+C\right]$$

$$v(x)=x^2\left[\frac{2x^{-3}}{3}+C\right]$$

$$v(x)=\frac{2x^{-1}}{3}+Cx^2$$

Paso 4. Encontrando y

Como $v=y^{-2}$ entonces
$$\boxed{\begin{array}{l} v(x)=\frac{2x^{-1}}{3}+Cx^2 \\ y^{-2}=\frac{2x^{-1}}{3}+Cx^2 \\ y(x)=\pm\sqrt{\dfrac{1}{\frac{2x^{-1}}{3}+Cx^2}} \end{array}}$$

Finalmente, regresando a la variable original:

$$x(y)=\pm\sqrt{\frac{1}{\frac{2y^{-1}}{3}+Cy^2}}$$

Ejercicio Propuesto 1.2

Encuentre la solución de las siguientes Ecuaciones Bernoulli:

1. $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2y^2 \quad , \quad y(1) = 2$	3. $xdy - \left(y + xy^3(1+\ln x)\right)dx = 0$
2. $xy' - y - y^2e^{2x} = 0$	4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$

1.4 ECUACIONES SEPARABLES

Son Ecuaciones Diferenciales, lineales o no lineales, que se pueden expresar de la forma:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

Entonces, el método de solución será integrando, ambos miembros.

Ejemplo 1

Encontrar la solución general de $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$

SOLUCIÓN:

Despejando para obtener de un lado de la ecuación función de x y del otro lado función de y, y luego integrando. Resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$$

$$(1+y^2)dy = x^2dx$$

$$\int (1+y^2)dy = \int x^2dx$$

$$\left(y + \frac{y^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} + C$$

Ejemplo 2

Encontrar la solución particular de $y' = \frac{x^2+1}{2-y} \quad ; \qquad y(-3) = 4$

SOLUCIÓN:

Despejando para obtener de un lado de la ecuación función de x y del otro lado función de y, y luego integrando. Resulta:

$$y'=\frac{x^2+1}{2-y}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+1}{2-y}$$
$$(2-y)dy=(x^2+1)dx$$
$$\int(2-y)dy=\int(x^2+1)dx$$
$$2y-\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+x+C$$

Empleando la condición Inicial $\boxed{\begin{array}{l}x_0=-3\\ y_0=4\end{array}}$, encontramos C, es decir:

$$2y-\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+x+C$$
$$2(4)-\frac{(4)^2}{2}=\frac{(-3)^3}{3}+(-3)+C$$
$$C=12$$

Entonces la solución particular sería: $2y-\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}+x+12$

Existen ecuaciones diferenciable que con un cambio de variable se convierte en separable.

Ejemplo 3

Encontrar la solución particular de $y'=\frac{1}{2}tg^2(x+2y)$

SOLUCIÓN:

La ecuación dada no es lineal y tampoco es separable directa, pero haciendo el cambio de variable $u=x+2y$ se podrá separar las variables.

Derivando la expresión de la nueva variable se obtiene: $\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(x+2y)=1+2\frac{dy}{dx}$

Entonces $y'=\frac{u'-1}{2}$. Reemplazando y resolviendo, resulta:

$$y'=\frac{1}{2}tg^2(x+2y)$$
$$\frac{u'-1}{2}=\frac{\mathrm{tg}^2 u}{2}$$
$$u'-1=\mathrm{tg}^2 u$$
$$\frac{du}{dx}=1+\mathrm{tg}^2 u$$
$$\frac{du}{dx}=\sec^2 u$$

La última ecuación es separable, resolviendo tenemos:

$$\frac{du}{dx}=\sec^2 u$$
$$\frac{du}{\sec^2 u}=dx$$
$$\int \cos^2 u du=\int dx$$
$$\int \tfrac{1}{2}\left[1+\cos 2u\right]du=x+C$$
$$\tfrac{1}{2}\left[u+\frac{\operatorname{sen} 2u}{2}\right]=x+C$$

Y regresando de variable, queda:

$$\tfrac{1}{2}\left[(x+2y)+\frac{\operatorname{sen} 2(x+2y)}{2}\right]=x+C$$ SOLUCIÓN GENERAL

Ejercicio Propuesto 1.3

Encuentre la solución de las siguientes Ecuaciones Separables:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$	5. $y'=e^{x+y}$
	6. $(x^2y+xy-y)dx+(x^2y-2x^2)dy=0$
2. $\frac{dy}{dx}=x^3-3x^2+5$	7. $(2x+3)dx+(2y-2)dy=0$
3. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y}(x+1)^3}{\sqrt{x}(y+1)^3}$	8. $\frac{dy}{dx}=5x^4-3x^2-2$, $y(1)=4$
	9. $\frac{dy}{dx}=1-(x-y)^2$, $y(0)=1$
4. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-1}{y^2+1}$, $y(-1)=1$	10. $(\operatorname{tg}^2(x+y))dx-dy=0$
	11. $y''y'=1$, $y(0)=5$, $y'(0)=1$

1.5 ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Si una Ecuación Diferencial puede ser expresada de la forma $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$, se la denomina **Ecuación Diferencial Homogénea**.

Para encontrar su solución se realiza el cambio de variable $v=\frac{y}{x}$, para convertirla en una ecuación donde se pueda separar sus variables.

Para obtener $\frac{dy}{dx}$ se hace lo siguiente:

Despejando y tenemos: $\boxed{y=vx}$

Derivando con respecto a "x", se obtiene:
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dv}{dx}x+(1)v\\ y'&=x\frac{dv}{dx}+v\end{aligned}}$$

Ejemplo 1

Encontrar la solución general de $y' = \dfrac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$

SOLUCIÓN:

Como es una ecuación homogénea hacemos el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$ de donde $y' = x\frac{dv}{dx} + v$.

Reemplazando, y resolviendo resulta:

$$y' = \frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{1-v}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v-v(1+v)}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v-v-v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = \frac{dx}{x}$$

En la última ecuación están separadas sus variables y podemos proceder a integrar cada miembro:

$$\int \frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln(1-2v-v^2) = \ln(x) + C$$

Finalmente, debemos reemplazar $v = \frac{y}{x}$

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left(1-2\left(\tfrac{y}{x}\right)-\left(\tfrac{y}{x}\right)^2\right) = \ln(x) + C$$ SOLUCIÓN GENERAL

Ejemplo 2

Encontrar la solución general de $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}; \quad y(1) = 1$

SOLUCIÓN:

Hacemos el cambio de variable $v = \frac{y}{x}$ de donde $y' = x\frac{dv}{dx} + v$

Reemplazando, y resolviendo resulta:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} + v = v + v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = v^2$$

En la última ecuación se pueden separar las variables.

$$\frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{v^2}\,dv=\int \frac{1}{x}\,dx$$

$$-\frac{1}{v}=\ln x+C$$

Regresando de variable: $\boxed{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{\frac{y}{x}}=\ln x+C \\ -\dfrac{x}{y}=\ln x+C \end{array}}$

Empleando la condición inicial $x_0=1$ y $y_0=1$ resulta $\boxed{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{1}=\ln 1+C \\ C=-1 \end{array}}$

Finalmente: $-\dfrac{x}{y}=\ln x-1$ SOLUCIÓN PARTICULAR

Ejemplo 3

Encontrar la solución general de $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x};\quad y(1)=\frac{\pi}{4}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Hacemos el cambio de variable $v=\dfrac{y}{x}$ de donde $y'=x\dfrac{dv}{dx}+v$.

Reemplazando, y resolviendo resulta: $\boxed{\begin{array}{l} v+x\dfrac{dv}{dx}=v+\cos^2(v) \\ x\dfrac{dv}{dx}=\cos^2(v) \end{array}}$

Separando variables: $\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(v)}\,dv=\int \frac{dx}{x} \\ \operatorname{tg} v=\ln x+C \\ \operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln x+C \end{array}}$

Empleando la condición inicial dada: $\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\dfrac{\pi/4}{1}=\ln 1+C \\ C=1 \end{array}}$

Finalmente: $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}=\ln x+1$ SOLUCIÓN PARTICULAR

Ejercicio Propuesto 1.4

Encuentre la solución de las siguientes Ecuaciones Homogéneas:

1. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$	5. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right)dx - x^2 dy = 0$
2. $\left(3y^2 + 2xy\right)dx - \left(2xy + x^2\right)dy = 0$	6. $\left(1 + 2e^{x/y}\right)dx + 2e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$
3. $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$	7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y}$, $y(1) = 0$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+y)}{x(x-y)}$	

1.6 ECUACIONES EXACTAS

Sea la función $z = f(x,y)$. Su diferencial total es $\boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy}$

Si $f(x,y) = C$ entonces
$$\boxed{\begin{array}{c} df(x,y) = dc \\ \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \end{array}}$$

Suponga ahora que se tiene una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

que represente la diferencial total de una función desconocida $z = f(x,y)$. Entonces el asunto sería encontrar la función desconocida.

1.6.1 TEOREMA DE EXACTITUD

Una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es exacta si y sólo si $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Ejemplo 1

Encontrar la solución general de $\frac{dy}{dx} = -\frac{(y\cos x + 2xe^y)}{(\operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2)}$

SOLUCIÓN:

En este caso la forma diferencial de la ecuación es:

$$\underbrace{(y\cos x + 2xe^y)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{(\operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2)}_{N(x,y)}dy = 0$$

Veamos si que es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \cos x + 2xe^{y} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x + 2xe^{y}$$

Como las derivadas cruzadas son iguales, por tanto la ecuación diferencial si es exacta y procedemos a encontrar la función solución.

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx = \int \left(y\cos x + 2xe^{y}\right)dx = y\,\mathrm{sen}\,x + x^2e^{y} + C_1$$

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy = \int \left(\mathrm{sen}\,x + x^2e^{y} + 2\right)dy = ySenx + x^2e^{y} + 2y + C_2$$

$$ySenx + x^2e^{y} + 2y = C$$

Ejemplo 2

Encontrar la solución general de:

$$2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y(1) = -1$$

SOLUCIÓN:

La forma diferencial de la ecuación es:

$$\left(2xy^3\right)dx + \left(3x^2y^2\right)dy = 0$$

Veamos si que es exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x3y^2 = 6xy^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2\,(Si\ es\ exacta)$$

Encontrando la función potencial tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 \quad\rightarrow\quad f(x,y) = x^2y^3 + C_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 \quad\rightarrow\quad f(x,y) = \frac{3}{3}x^2y^3 = x^2y^3 + C_2$$

$$x^2y^3 = C$$

Empleando la condición inicial para encontrar C, resulta:

$$(1)^2(-1)^3 = C \rightarrow \quad C = -1$$

Por tanto la solución particular sería: $x^2y^3 = -1$

Ejercicio Propuesto 1.5

Encuentre la solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales Exactas:

1. $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3+3y^2-x}$, $y(0)=0$	5. $\left(2x-2y^3+y\right)dx+\left(x-6xy^2\right)dy=0$
2. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+y^2+1}{x^2+2xy}$	6. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0;\quad y(2)=3$
3. $\left(x^2+y\right)dx+\left(x+e^y\right)dy=0$	7. $\left(2xy^2+2y\right)+\left(2x^2y+2x\right)y'=0$
4. $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy+1}{x^2+2y}$	8. $y'=\frac{\cos y}{x\operatorname{sen} y-1}$
	9. $y'=\frac{y\left(y-e^x\right)}{e^x-2xy}$

1.7 FACTOR INTEGRANTE

En la ecuación diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, si $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$ a veces es posible transformarla en exacta si se la multiplica por una función $R(x,y)$; es decir:

$$R(x,y)\left[M(x,y)dx+N(x,y)dy\right]=0$$
$$RMdx+RNdy=0$$

Suponga que $R=R(x)$ entonces

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial(RM)}{\partial y}=\frac{\partial(RN)}{\partial x}\\&R\frac{\partial M}{\partial y}=R'N+R\frac{\partial N}{\partial x}\\&NR'+R\frac{\partial N}{\partial x}-R\frac{\partial M}{\partial y}=0\\&R'+\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)R=0\end{aligned}}$$

La última expresión es una ecuación diferencial lineal para $R(x)$

Por lo tanto

$$\boxed{\begin{aligned}&R(x)=\frac{1}{e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx}}\left[\int 0e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dx}dx+C\right]\\&R(x)=Ce^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}\end{aligned}}$$

Ejemplo

Encontrar la solución general de: $\frac{dy}{dx}=\frac{3x+xy^2}{y+x^2y}$

SOLUCIÓN:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x+xy^2}{y+x^2y}$$

$$(y+x^2y)dy=(3x+xy^2)dx$$

$$(3x+xy^2)dx-\left(y+x^2y\right)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2yx \qquad \neq \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=-2xy$$

Hallemos $R(x)$

$$R(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{-\left(y+x^2y\right)}\left(2yx-(-2xy)\right)dx}$$

$$=e^{\int\frac{4xy}{-y(1+x^2)}dx}=e^{\int\frac{4x}{-(1+x^2)}dx}=e^{-2\ln(1+x^2)}$$

$$=e^{\ln(1+x^2)^{-2}}=(1+x^2)^{-2}$$

Multiplicando la ecuación $\boxed{(3x+xy^2)dx-\left(y+x^2y\right)dy=0}$ por $\boxed{R(x)=(1+x^2)^{-2}}$ y resolviendo, resulta:

$$(1+x^2)^{-2}(3x+xy^2)dx-(1+x^2)^{-2}\left(y+x^2y\right)dy=0$$

$$\frac{x}{(1+x^2)^2}\left(3+y^2\right)dx-\frac{y}{\left(1+x^2\right)}dy=0$$

En este caso $\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{(1+x^2)^2}\left(3+y^2\right)\right]=\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{y}{\left(1+x^2\right)}\right]=\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\end{array}}$ si es exacta.

Calculando $f(x,y)$, resulta:

$$f(x,y)=\int\frac{x}{(1+x^2)^2}\left(3+y^2\right)dx=-\frac{\left(3+y^2\right)}{2(1+x^2)}=-\frac{3}{2\left(1+x^2\right)}-\frac{y^2}{2\left(1+x^2\right)}$$

$$f(x,y)=\int-\frac{y}{\left(1+x^2\right)}dy=-\frac{y^2}{2\left(1+x^2\right)}$$

Por tanto la solución general sería:

$$\frac{3}{2\left(1+x^2\right)}+\frac{y^2}{2\left(1+x^2\right)}=C$$

Si no existe $R=R(x)$, *suponga ahora que* $R=R(y)$ entonces:

$$\frac{\partial(RM)}{\partial y}=\frac{\partial(RN)}{\partial x}$$

$$R'M+R\frac{\partial M}{\partial y}=R\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$MR'+R\frac{\partial M}{\partial y}-R\frac{\partial N}{\partial x}=0$$

$$R'+\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)R=0$$

La última expresión es una ecuación diferencial lineal para $R(y)$

Por lo tanto

$$\boxed{\begin{aligned}R(y)&=\frac{1}{e^{\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}}\left[\int 0dx+C\right]\\ R(y)&=e^{\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}\end{aligned}}$$

Ejemplo

Encontrar la solución general de $ydx+(3+3x-y)dy=0$

SOLUCIÓN:

$$ydx+(3+3x-y)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=1 \neq \frac{\partial N}{\partial x}=3$$ no es exacta

Hallemos $R(x)$

$$R(x)=e^{\int\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}=e^{\int\frac{1}{3+3x-y}(1-3)dx}$$

No es función x, por tanto no existe. Encontremos, ahora $R(y)$

$$R(y)=e^{\int\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}=e^{\int\frac{1}{y}(3-1)dy}=e^{\int\frac{2}{y}dy}=e^{2\ln y}=e^{\ln y^2}=y^2$$

Multiplicando la ecuación $\boxed{ydx+(3+3x-y)dy=0}$ por $\boxed{R(y)=y^2}$ resulta:

$$y^3dx+(3y^2+3xy^2-y^3)dy=0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3y^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=3y^2$$

ya es exacta y se puede encontrar $f(x,y)$

$$f(x,y)=\int y^3dx=xy^3+C$$

$$f(x,y)=\int(3y^2+3xy^2-y^3)dy=\frac{3y^3}{3}+\frac{3xy^3}{3}-\frac{y^4}{4}+C$$

Por tanto la solución General sería:

$$y^3+xy^3-\frac{y^4}{4}=c$$

Ejercicio Propuesto 1.6

Encuentre la solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales:

1. $\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx+\left(x^2+y^2\right)dy=0$ 2. $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$	3. $\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2y+y^2}{2x^3+3xy}$, $y(1)=-2$

1.8 Estabilidad dinámica del equilibrio

Se trata ahora de establecer el comportamiento de una trayectoria intertemporal $y(t)$. Determinar que ocurre con $y(t)$ cuando ha transcurrido mucho tiempo $(t \to \infty)$.

Para esto existen dos métodos:

ANÁLISIS CUANTITATIVO.

Suponga que se conoce la regla de correspondencia $y(t)$. Entonces, si $\lim_{t\to\infty} y(t)$ existe se dirá que $y(t)$ es **DINÁMICAMENTE ESTABLE**, es decir se estabiliza o converge a un valor finito, al cual denotaremos como $\overline{y}$ y se le llamará el nivel de equilibrio intertemporal. Caso contrario, es decir si $\lim_{t\to\infty} y(t)=\infty$ se dirá que la trayectoria de $y(t)$ es **DINÁMICAMENTE INESTABLE** o también $y(t)$ diverge del nivel de equilibrio $\overline{y}$

ANÁLISIS CUALITATIVO.

Suponga que se tiene una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dt}=f(y)$

Entonces es posible determinar si $y(t)$ es dinámicamente estable o no, sin necesidad de encontrar la regla de correspondencia de $y(t)$. Esto se logra analizando el gráfico y' *vs* y, el cual lo vamos a llamar DIAGRAMA DE FASE.

Cuando $y'>0$ (positiva) entonces y es creciente; por tanto, **arriba del eje** y dibuje unas flechas sobre la curva de fase moviendose de **izquierda a derecha.** Y cuando $y'<0$ (negativa) entonces y es decreciente; por tanto, **debajo del eje** y dibuje unas flechas sobre la curva de fase moviendose de **derecha a izquierda**.

Una vez hecho esto, se concluirá si $y(t)$ se acerca o se aleja del nivel de equilibrio ($\overline{y}$) que ocurre cuando $y'=0$.

Ejemplo 1

Analizar la estabilidad dinámica de $y(t)$ en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = y - 7; \quad y(0) = 8$$

SOLUCIÓN:

ANALISIS CUANTITATIVO

Observe que la ecuación diferencial dada es lineal $\boxed{\begin{array}{l} y' = y - 7 \\ y' - y = -7 \end{array}}$ y por tanto es factible obtener su solución de manera rápida.

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{e^{\int -1\,dt}}\left[\int (-7)e^{\int -1\,dt}\,dt + C\right] \\ &= e^{t}\left[-7\left(-e^{-t}\right) + C\right] \end{aligned}$$

$$y(t) = 7 + Ce^{t}$$

Considerando la condición inicial, resulta:

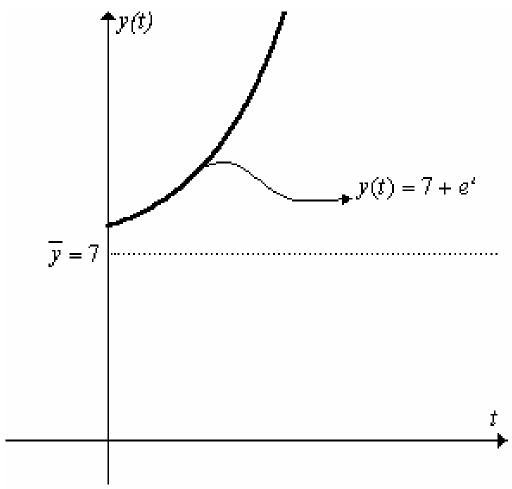
$$\begin{aligned} y(0) &= 7 + Ce^{0} \\ 8 &= 7 + C \\ 1 &= C \end{aligned}$$

Entonces: $y(t) = 7 + e^{t}$

Tomando límite al infinito tenemos: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(7 + e^{t}\right) = \infty$

Por tanto, se concluye que $y(t)$ no es estable dinámicamente.

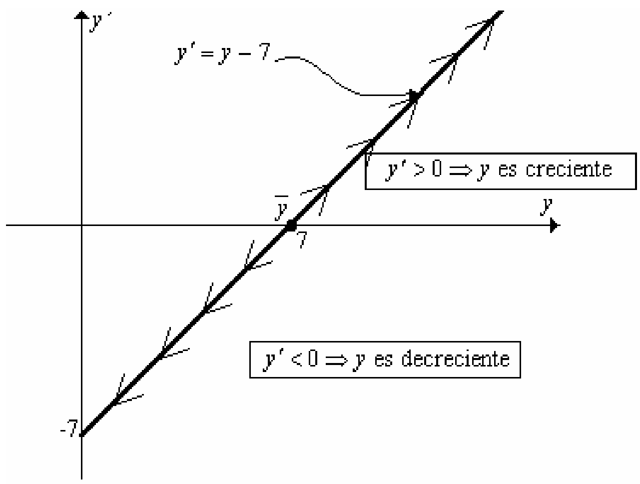
Además, al graficar $y(t) = 7 + e^{t}$ se observa este comportamiento.



Note que cuando ha transcurrido mucho tiempo la trayectoria se aleja (diverge) del nivel de equilibrio $\bar{y} = 7$

ANALISIS CUALITATIVO.

Graficando la curva de fase, tenemos:



Por tanto la trayectoria para $y(t)$ no es estable dinámicamente.

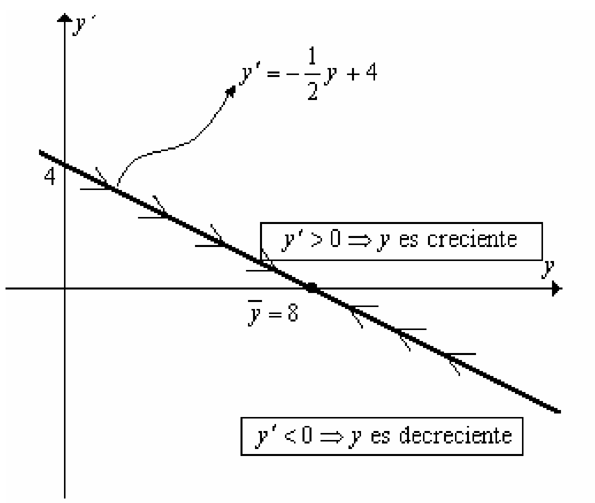
Ejemplo 2

Analizar la estabilidad dinámica de $y(t)$ en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 4 - \frac{y}{2}; \quad y(0) = 15$$

SOLUCIÓN:
Ahora empecemos con el análisis cualitativo para luego ir al análisis cuantitativo.

ANÁLISIS CUALITATIVO.
El diagrama de fase para la ecuación dada sería:



Por tanto se observa que $y(t)$ es estable dinámicamente y que tiende a estabilizarse en $\bar{y} = 8$

Note que la estabilidad no depende de la condición inicial ¿POR QUÉ?

ANÁLISIS CUANTITATIVO.
Obteniendo la solución para $y' + \frac{1}{2}y = 4$, resulta:

$$y(t) = \frac{1}{e^{\int \frac{1}{2}dt}}\left[\int 4e^{\frac{1}{2}t}\,dt + C\right]$$

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[4\frac{e^{\frac{1}{2}t}}{\frac{1}{2}} + C\right]$$

$$y(t) = 8 + Ce^{-\frac{1}{2}t}$$

Considerando la condición inicial tenemos:

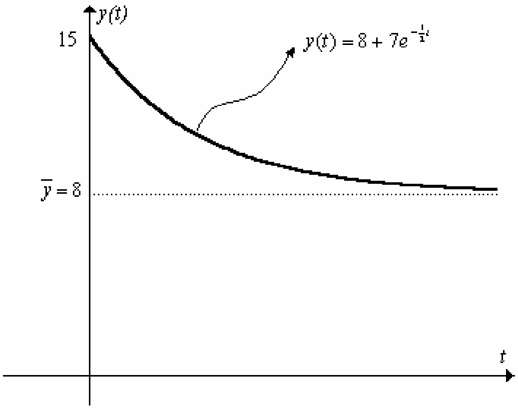
$$y(0) = 8 + Ce^{-\frac{1}{2}(0)}$$
$$15 = 8 + C$$
$$7 = C$$

Por tanto: $y(t) = 8 + 7e^{-\frac{1}{2}t}$

Tomando límite al infinito tenemos: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(8 + 7e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 8$

Por tanto, se concluye que $y(t)$ es dinámicamente estable.

Además, al graficar $y(t) = 8 + 7e^{-\frac{1}{2}t}$ se observa este comportamiento.



Ejemplo 3

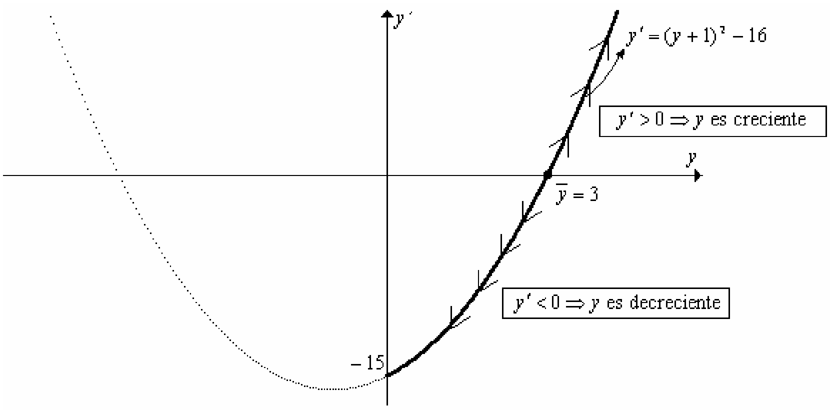
Analizar la estabilidad dinámica de $y(t)$ en la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = (y+1)^2 - 16\ ; \qquad y \geq 0$$

SOLUCIÓN:

Aquí lo más factible es realizar un análisis cualitativo. (¿Por qué?)

El gráfico de la curva de fase sería:



Por tanto , $y(t)$ no es estable dinámicamente.

Ejercicios Propuestos 1.7

Dibujar la curva de fase y determinar si $y(t)$ es estable dinámicamente o no.

1. $\dfrac{dy}{dt} = y - 3$
2. $\dfrac{dy}{dt} = 1 - 5y$
3. $\dfrac{dy}{dt} = 4 - \dfrac{y}{3}$
4. $\dfrac{dy}{dt} = 9y - 11$
5. $\dfrac{dy}{dt} = (y+2)^2 - 9 \quad ; y \geq 0$
6. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}y - y^2 \quad ; y \geq 0$
7. $\dfrac{dy}{dt} = y^2 - 8y + 15$

1.9 Aplicaciones de las Ecuaciones diferenciales de primer orden

Algunas situaciones problémicas conlleva a plantear ecuaciones diferenciales para llegar a su solución.

Ejemplo 1

(CURVA APRENDIZAJE) La razón a la que las personas oyen hablar acerca de un nuevo aumento en los impuestos prediales es proporcional al número de personas en el país que no ha oído hablar al respecto.

a) Plantee la ecuación diferencial que describe el modelo
b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial planteada.
c) Grafique la solución general obtenida y analice la estabilidad dinámica.

SOLUCIÓN:

Sea Q : Cantidad de personas que han oído hablar sobre el aumento

B : Población Total

$B - Q$: Cantidad de personas que no han oído hablar sobre el aumento

k : Constante de proporcionalidad

a) La ecuación para el modelo sería: $\dfrac{dQ}{dt} = k(B - Q)$

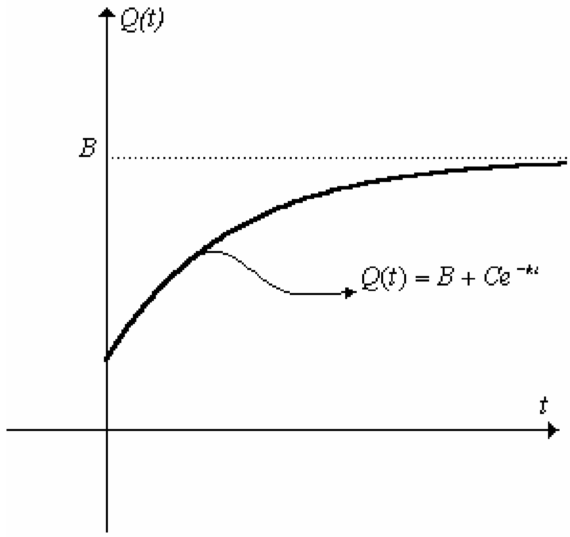
b) La ecuación $\dfrac{dQ}{dt} + kQ = kB$ es lineal, por tanto su solución sería:

$$Q(t) = \frac{1}{e^{\int kdt}}\left[\int kBe^{kt}\,dt + C\right]$$

$$Q(t) = e^{-kt}\left[kB\,\frac{e^{kt}}{k} + C\right]$$

$$Q(t) = B + Ce^{-kt}$$

c) la gráfica de la curva aprendizaje sería:



Se observa que cuando ha transcurrido mucho tiempo Q converge a B .

Ejemplo 2

CURVA LOGISTICA. El ritmo a que se propaga un rumor en un país es conjuntamente proporcional a la cantidad de personas que se han enterado del rumor y al número de personas que no se han enterado del rumor.
a) Plantee la ecuación diferencial que describe el modelo
b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial planteada.
c) Grafique la solución general obtenida y analice la estabilidad dinámica.
SOLUCIÓN:

Sea Q : Cantidad de personas enteradas del rumor
B : Población Total
$B-Q$: Cantidad de personas que no se han enterado del rumor
k : Constante de proporcionalidad

a) La ecuación para el modelo sería: $\frac{dQ}{dt} = kQ\left(B-Q\right)$

b) La ecuación $\frac{dQ}{dt} - kBQ = -kQ^2$ es de la forma de Bernoulli, por tanto su solución sería:

Dividiendo para Q^2:

$$\frac{Q'}{Q^2} - \frac{kBQ}{Q^2} = \frac{-kQ^2}{Q^2}$$

$$Q'Q^{-2} - kBQ^{-1} = -k$$

Haciendo cambio de variable $u = Q^{-1}$ entonces $\frac{du}{dx} = -Q^{-2}Q'$ resulta:

$$-u' - kBu = -k$$

$$u' + kBu = k$$

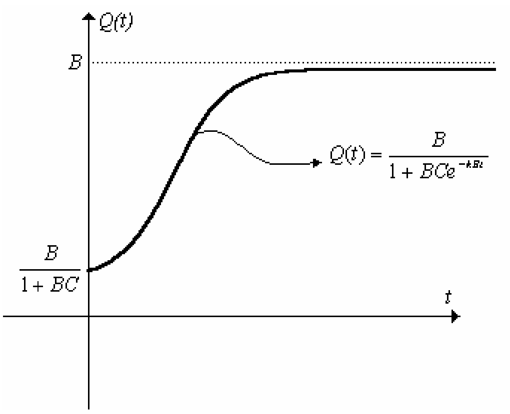
Encontrando $u(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{e^{\int kBdt}}\left[\int ke^{\int kBdt}dt + C\right] \\ &= \frac{1}{e^{kBt}}\left[\int ke^{kBt}dt + C\right] \\ &= \frac{1}{e^{kBt}}\left[\frac{ke^{kBt}}{kB} + C\right] \\ u(t) &= \frac{1}{B} + Ce^{-kBt} \end{aligned}$$

Encontrando $Q(t)$ tenemos:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{B} + Ce^{-kBt} \\ Q^{-1} &= \frac{1}{B} + Ce^{-kBt} \\ \frac{1}{Q} &= \frac{1+BCe^{-kBt}}{B} \\ Q(t) &= \frac{B}{1+BCe^{-kBt}} \end{aligned}$$

c) Su gráfica sería:



Observe que $Q(\infty) = \dfrac{B}{1+BCe^{-kB\infty}} = \dfrac{B}{1+0} = B$, por tanto es convergente

Ejemplo 3

(DINAMICA DE MERCADO). Suponga que el precio $p(t)$ de determinado artículo varía de modo que su razón de cambio con respecto al tiempo es proporcional a la escasez $D-S$ donde $D=8-2p$ y $S=2+p$ son las funciones de demanda y oferta.

a) Si el precio es $\$5$ cuando $t=0$ y $\$3$ cuando $t=2$, halle $p(t)$.

b) Determine lo que ocurre con $p(t)$ a largo plazo.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación del modelo es: $\dfrac{dp}{dt}=k(D-S)$.

Reemplazando tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{dp}{dt}=k(D-S)\\
&p'=k[(8-2p)-(2+p)]\\
&p'=k(6-3p)\\
&p'+3kp=6k
\end{aligned}$$

Ahora hallando $p(t)$

$$\begin{aligned}
p(t)&=\frac{1}{e^{\int 3kdt}}\left[\int 6ke^{\int 3kdt}dt+C\right]\\
&=\frac{1}{e^{3kt}}\left[\int 6ke^{3kt}dt+C\right]\\
&=\frac{1}{e^{3kt}}\left[\frac{6ke^{3kt}}{3k}+C\right]\\
p(t)&=2+Ce^{-3kt}
\end{aligned}$$

Como $p(0)=5$ entonces:

$$\begin{aligned}
p(0)&=2+Ce^{-3k(0)}\\
5&=2+C\\
C&=3
\end{aligned}$$

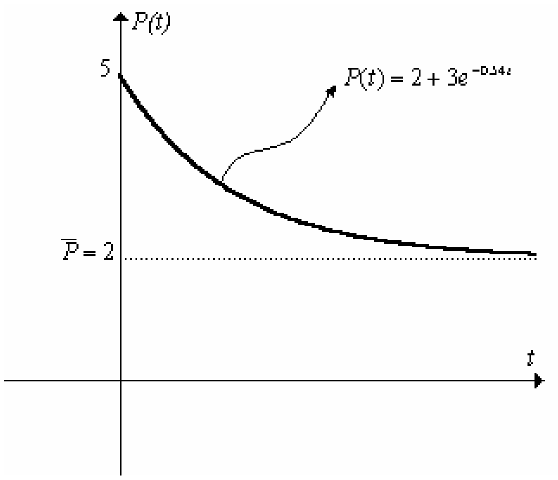
y como $p(2)=3$ entonces:

$$\begin{aligned}
p(2)&=2+3e^{-3k(2)}\\
3&=2+3e^{-6k}\\
1&=3e^{-6k}\\
e^{6k}&=3\\
\ln\left(e^{6k}\right)&=\ln 3\\
6k&=\ln 3\\
k&=0.18
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$p(t)=2+3e^{-3(0.18)t}=2+3e^{-0.54t}$$

Y su gráfica sería:



b) A largo plazo sería cuando ha transcurrido mucho tiempo, es decir:

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty}\left(2+3e^{-0.54t}\right) = 2$$

$p(t)$ se estabiliza en el precio de equilibrio $\bar{p} = 2$

Ejercicios Propuestos 1.8

1. El número de personas implicadas en cierto escándalo gubernamental aumenta a un ritmo conjuntamente proporcional al número de personas ya implicadas y al número de personas relacionadas con el caso que aún no han sido implicadas. Suponga que 7 personas fueron implicadas cuando un periódico hizo público el escándalo por primera vez, que 9 personas más resultaron implicadas en los 3 meses siguientes y otras 12 en los 3 meses posteriores. ¿Cuántas personas aproximadamente estaban involucradas en el escándalo?

2. El ritmo a que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional al número de residentes que han sido infectados y al número de residentes propensos a la enfermedad que no ha sido infectado. Exprese el número de residentes que han sido infectados como una función del tiempo (en semanas), si la comunidad tiene 2000 residentes propensos a la enfermedad, si 500 residentes tenían la enfermedad inicialmente y si 855 residentes habían sido infectados hacia finales de la primera semana.

3. Suponga que en el Ecuador, el ritmo al que se propaga la noticia del aumento del precio de la gasolina es conjuntamente proporcional al número de personas que se enteran del aumento y al número de personas que no se han enterado todavía. Si actualmente el 5% de los habitantes sabe la noticia y una semana más tarde el 15% se han enterado de dicha noticia:
   a) FORMULE una ecuación diferencial para determinar la cantidad de personas que se enteran de la noticia del aumento del precio de la gasolina en cualquier tiempo.
   b) RESUELVA la ecuación diferencial para encontrar la cantidad de personas que se enteran de la noticia en función del tiempo.
   c) ¿Qué porcentaje de personas se habrán enterado de la noticia 2, 3, 4 y 5 semanas más tarde?

4. Suponga que el precio *p(t)* de determinado artículo varía de modo que su razón de cambio $\frac{dp}{dt}$ es proporcional a la escasez *D - S* donde: $D = 7 - p$ y $S = 1 + p$ son las funciones de demanda y oferta del artículo.
   a) Si el precio es de $6 cuanto *t*=0 y $4 cuando *t*=4 . Halle *p(t)*.
   b) Demuestre que cuando *t* crece sin límite *p(t)* se aproxima al precio de equilibrio.

5. La oferta y la demanda de cierto bien están dadas en miles de unidades, respectivamente, por: $D = 120 + p(t) - 5p'(t)$, $S = 60 - 2p(t) - 3p'(t)$. En *t*=0 el precio del bien es de 5 unidades. Considerando el equlibrio del mercado.
   a) Encontrar el precio en cualquier tiempo posterior y obtener su gráfico.
   b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio.

6. La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades, respectivamente por: $D = 40 + 3p(t) + p'(t)$, $S = 160 - 5p(t) - 3p'(t)$. En t=0 el precio del bien es de 20 unidades. Considerando el equlibrio del mercado
   a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtener su gráfico.
   b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.

7. Para proteger sus ganancias, un productor decide que la tasa a la cual incrementará los precios debería ser numéricamente igual a 3 veces su inventario. Asumiendo que la oferta y la demanda están dadas en términos del precio p por: $S = 80 + 3p$, $D = 150 - 2p$ y que p=20 en t=0, encuentre el precio en cualquier tiempo.

8. La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades, respectivamente por: $D = 240 - 8p(t) - 2p'(t)$, $S = 24\left(2 - e^{-2t}\right) + 16p(t) + 10p'(t)$. En t=0 el precio del bien es de 12 unidades. Considerando el equlibrio del mercado
   a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtener su gráfico.
   b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.
9. En cierta zona del país el precio del pollo en la actualidad es \$3 por kilogramo, se estima que dentro de t semanas el precio crecerá a una razón de $3\sqrt{t+1}$ centavos por semana. ¿Cuánto costará el pollo dentro de 8 semanas?

10. Cierto pozo petrolífero que produce 600 barriles de petróleo crudo al mes se secará en 3 años. En la actualidad, el precio del petróleo crudo es \$ 24 por barril y se espera que aumente a una razón constante de 8 centavos mensuales por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el INGRESO FUTURO TOTAL obtenido del pozo?

11. El valor de reventa de cierta maquinaria industrial decrece a un ritmo proporcional a la diferencia entre su valor actual y su valor residual de \$ 5000. La maquinaria se compró nueva por \$ 40000 y valía \$ 30000 después de 4 años. ¿Cuánto valdrá la maquinaria cuando tenga 8 años?

12. Una persona tiene una fortuna invertida, que aumenta a una tasa proporcional al cuadrado de su capital actual. Si tenía \$ 1 millón hace un año, y ahora tiene \$ 2 millones. ¿Cuánto tendrá dentro de seis meses?

13. Supongamos que un fabricante calcula que un nuevo operario producirá A objetos el primer día de trabajo y que cuando va adquiriendo experiencia, producirá los objetos más rápidamente hasta que produzca un máximo de M objetos por día. Sea $Q(t)$ la cantidad de artículos producidos el día t para $t \geq 1$, y suponga que el ritmo de producción es proporcional a $M - Q(t)$.
   a) Obtenga una fórmula para $Q(t)$.
   b) Suponiendo que $M = 30$, $Q(1) = 5$ y $Q(2) = 8$, estime el número de objetos producidos en el vigésimo día.

Misceláneos

1. Encuentre la Solución de las siguientes Ecuaciones Diferenciales

1. $e^{2x}\frac{dy}{dx} = y - ye^{3x}$; $y(0)=1$	16. $y + (3+3x-y)\frac{dy}{dx} = 0$
2. $\frac{dy}{dx} - y - y^3e^{2x} = 0$	17. $y^2dx + \left(xy - x^3\right)dy = 0$
3. $\left(x^2+3xy+y^2\right)dx - x^2dy = 0$; $y(1)=1$	18. $\left(y^3+2e^xy\right)dx + \left(e^x+3y^2\right)dy = 0$
4. $\frac{dK}{dt} = 3e^{2t}K^2 - 5K$	19. $\left(x^2-xy-y^2\right)dx + x^2dy = 0$
5. $dx + \left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right)dy = 0$	20. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$; $y(1)=1$
6. $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}(1-2x)y^4 = 0$	21. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2\cot x + \operatorname{sen} x\cos x}{2y}$
7. $xydx + \left(x^2+y^2\right)dy = 0$	22. $\left(3xy+y^2\right) + \left(x^2+xy\right)\frac{dy}{dx} = 0$
8. $ydx + (3x - xy + 2)dy = 0$	23. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2+2xy}{x^2}$
9. $ydx - xdy + \ln xdx = 0$	24. $y^2dx + \left(xy - x^3\right)dy = 0$
10. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\cos x}{x}$	25. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x + y^3\operatorname{sen} 3y}$
11. $y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}$	26. $y' = \sqrt{y+x}$
12. $x\sqrt{1-y^2} + yy'\sqrt{1-x^2} = 0$	27. $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$
13. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - x}$	28. $\left(2x^3 - y\right)dx + xdy = 0$; $y(1)=2$
14. $dx + \left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right)dy = 0$	29. $\frac{dy}{dx} = xy^3\left(1+x^2\right)^{-1/2}$; $y(0)=1$
15. $\frac{dx}{dy} = \frac{x\sec^2 y}{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{tg} y}$; $y(\pi)=\frac{\pi}{4}$	30. $\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dx + \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dy = 0$

2. Suponga que una persona invierte en un banco una fortuna que aumenta a una tasa proporcional a la cantidad de dinero actualizada. Si tenía \$1000 hace un año y ahora tiene \$1200.
   a) Determine la ecuación diferencial que modele el problema.
   b) Resuélvala y determine cuanto tiempo tiene que pasar para que la cantidad que tenía hace un año se quintuplique.

3. La demanda y la oferta de un cierto bien están dadas en miles de unidades $D = 48 - 2p + 3p´$ y $S = 30 + p + 4p´$. Suponiendo que la tasa de cambio del precio es igual a 3 veces su excedente S-D, y que inicialmente el precio del bien es de \$10, determine la trayectoria temporal de p(t) y establezca si es dinámicamente estable o no.

4. La oferta y la demanda de un bien están dadas por las ecuaciones:
$$S = a_1p(t) + a_2p´(t) + a_3$$
$$D = b_1p(t) + b_2p´(t) + b_3$$
   a) Encuentre el precio en cualquier tiempo considerando el equilibrio de mercado.
   b) Establezca que condiciones deberán cumplir los coeficientes para que pueda existir una estabilidad dinámica de equilibrio en su solución.
   c) Si $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 30$; $b_1 = -2$; $b_2 = 3$; $b_3 = 48$, encuentre el precio en cualquier tiempo y el precio de estabilidad si existe.

5. Cierto negocio aumenta su valor a una razón proporcional a la raíz cuadrada de su valor actual. Si este negocio valía \$1 millón hace un año y en la actualidad vale \$1.44 millones. Determine:
   a) La ecuación diferencial para el modelo.
   b) ¿cuándo valdrá \$2 millones?

6. El PIB de cierto país aumenta en forma proporcional a su propia cantidad. Su tasa de proporcionalidad fue 6.4% durante el año pasado. Si continua aumentando a esa tasa.
   a) Modele la ecuación diferencial del problema.
   b) Resuélvala y determine en cuantos años el PIB se duplicará.
   c) Grafique la trayectoria.

7. La tasa de crecimiento del volumen de ventas V a medida que decrece el precio p, es directamente proporcional al volumen de ventas e inversamente al precio menos una constante A. Halle la relación entre dicho volumen de ventas y el precio, si $V = V_O$, cuando $p = p_O$.

2 Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Encuentre soluciones generales y/o particulares de Ecuaciones Diferenciales de segundo orden
- Determine Estabilidad dinámica cuantitativa y/o cualitativamente.

2.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.

Una ecuación diferencial de segundo orden es de la forma:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Si $g(x) = 0$ se llama ***Ecuación homogénea*** caso contrario; es decir, si $g(x) \neq 0$ se llama ***Ecuación no homogénea.***

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma:

$$ay'' + by' + cy = g(x) \text{ donde } a,\ b \text{ y } c \in IR \text{ y } a \neq 0$$

2.1.1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES HOMOGÉNEA

Una ecuación diferencial de Segundo Orden con coeficientes constantes homogénea es de la forma:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

La función "y", solución general de la ecuación diferencial anterior, es de la forma $y(x) = ke^{rx}$ (¿Por qué?). Donde "k" es una constante que da la generalidad de la solución.

Entonces el objetivo ahora será hallar el valor de r.

Bien, de la solución general tenemos: $\boxed{\begin{array}{l} y' = kre^{rx} \\ y'' = kr^2e^{rx} \end{array}}$

Reemplazando en $ay'' + by' + cy = 0$ tenemos:

$$akr^2e^{rx} + bkre^{rx} + cke^{rx} = 0$$
$$ke^{rx}\left[ar^2 + br + c\right] = 0$$

Ahora bien, $k \neq 0$ porque si no tuviéramos las solución trivial y como también $e^{rx} \neq 0$, entonces $ar^2 + br + c = 0$. A esta expresión se la denomina **Ecuación Auxiliar** y es útil para hallar r.

Observe que la ecuación auxiliar es una ecuación cuadrática cuyas raices se las puede determinar empleando la formula general

$$r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aquí se presentan tres casos.

Caso I

Discriminante positivo $\left[b^2 - 4ac > 0\right]$. Entonces r_1 y r_2 son raíces reales y diferentes. En este caso se dice que existen dos soluciones fundamentales

$$y_1(x) = k_1 e^{r_1 x}$$
$$y_2(x) = k_2 e^{r_2 x}$$

La solución General estaría dada por la combinación lineal de las soluciones fundamentales

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x}$$

Caso II

Discriminante cero $\left[b^2 - 4ac = 0\right]$. Entonces r_1 y r_2 son raíces reales e iguales.

En este caso la solución General sería: $y(x) = k_1 e^{rx} + k_2 x e^{rx}$

Caso III

Discriminante negativo $\left[b^2 - 4ac < 0\right]$. Entonces $r_1 = \lambda + \mu i$ y $r_2 = \lambda - \mu i$ son raíces complejas conjugadas

Reemplazando en $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ tenemos:

$$y(x) = C_1 e^{(\lambda + \mu i)x} + C_2 e^{(\lambda - \mu i)x}$$
$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} e^{\mu i x} + C_2 e^{\lambda x} e^{-\mu i x}$$
$$y(x) = e^{\lambda x}\left[C_1 e^{\mu i x} + C_2 e^{-\mu i x}\right]$$

Como $\boxed{e^{i\mu x} = \cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x}$ y $\boxed{e^{-i\mu x} = \cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x}$

Reemplazando tenemos:

$$y(x) = e^{\lambda x}\left[C_1(\cos \mu x + i \operatorname{sen} \mu x) + C_2(\cos \mu x - i \operatorname{sen} \mu x)\right]$$
$$y(x) = e^{\lambda x}\left[(C_1 + C_2)\cos \mu x + (C_1 i + C_2 i)\operatorname{sen} \mu x\right]$$

Por lo tanto la solución sería $y(x) = e^{\lambda x}\left[k_1 \operatorname{sen}(\mu x) + k_2 \cos(\mu x)\right]$

Ejemplo 1

Encuentre la solución general para $y'' - 4y' - 12y = 0$

<u>SOLUCIÓN</u>:

En este caso la ecuación auxiliar sería $r^2 - 4r - 12 = 0$

Hallando las raíces tenemos $\begin{array}{l}(r-6)(r+2)=0 \\ r=6 \quad r=-2\end{array}$

Por tanto:

$$y_1(x)=k_1e^{6x}$$
$$y_2(x)=k_2e^{-2x}$$
$$y(x)=k_1e^{6x}+k_2e^{-2x}$$

Podemos comprobar que efectivamente esta es la función que satisface la ecuación diferencial dada. Obtengamos la primera y la segunda derivada

$$y'=6k_1e^{6x}-2k_2e^{-2x}$$
$$y''=36k_1e^{6x}+4k_2e^{-2x}$$

Luego, reemplazando

$$36k_1e^{6x}+4k_2e^{-2x}-24k_1e^{6x}+8k_2e^{-2x}-12k_1e^{6x}-12k_2e^{-2x}=0$$
$$0=0$$

Ejemplo 2

Encuentre la solución general para $2y''-3y'+y=0$ **,** $y(0)=1 \quad y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

En este caso la ecuación auxiliar sería $2r^2-3r+1=0$

Hallando las raíces tenemos

$$r=\frac{3\pm\sqrt{9-4(2)(1)}}{4}$$
$$r=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}$$
$$r_1=1 \quad r_2=\frac{1}{2}$$

Por tanto, la **solución general** sería: $y(x)=k_1e^{x}+k_2e^{\frac{1}{2}x}$

Como las condiciones iniciales están dadas debemos encontrar las constantes k_1 y k_2

Como $y(0)=1$ entonces $\boxed{\begin{array}{l} y(x)=k_1e^{x}+k_2e^{\frac{1}{2}x} \\ y(0)=k_1e^{0}+k_2e^{\frac{1}{2}0} \\ \quad 1=k_1+k_2 \end{array}}$

Obteniendo la primera derivada:

$$y'(x)=k_1e^{x}+\frac{1}{2}k_2e^{\frac{1}{2}x}$$

Como $y'(0)=1$ entonces
$$\boxed{\begin{array}{l} y'(x)=k_1e^x+\frac{1}{2}k_2e^{\frac{1}{2}x} \\ y'(0)=k_1e^0+\frac{1}{2}k_2e^{\frac{1}{2}0} \\ 1=k_1+\frac{1}{2}k_2 \end{array}}$$

Resolviendo simultáneamente $\begin{cases} 1=k_1+k_2 \\ 1=k_1+\frac{1}{2}k_2 \end{cases}$ tenemos: $k_2=0$ y $k_1=1$

Por tanto, la **solución particular** es: $y(x)=e^x$

Ejemplo 3

Encuentre la solución general para $y''+4y'+4y=0$

SOLUCIÓN:

En este caso la ecuación auxiliar sería $r^2+4r+4=0$

Hallando las raíces tenemos
$$\boxed{\begin{array}{l} (r+2)(r+2)=0 \\ r_1=-2 \vee r_2=-2 \end{array}}$$

Por tanto, la solución general sería: $y(x)=k_1e^{-2x}+k_2xe^{-2x}$

Ejemplo 4

Encuentre la solución general para $y''+6y'+13y=0$; $y(0)=1$; $y'(0)=1$

SOLUCIÓN:

En este caso la ecuación auxiliar sería

Hallando las raíces tenemos:
$$\boxed{\begin{array}{l} r_1,r_2=\frac{-6\pm\sqrt{36-4(1)(13)}}{2} \\ r_1,r_2=\frac{-6\pm\sqrt{-16}}{2} \qquad \sqrt{-1}=i \\ r_1,r_2=\frac{-6\pm\sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} \\ r_1,r_2=\frac{-6\pm 4i}{2} \\ r_1=-3+2i \vee r_2=-3-2i \end{array}}$$

En este caso $\lambda=-3$ y $\mu=2$, por tanto la solución general sería:

$$y(x)=e^{-3x}\left[k_1\operatorname{sen}(2x)+k_2\cos(2x)\right]$$

Como $y(0)=1$ entonces
$$\boxed{\begin{array}{l} y(0)=e^{-3(0)}\left[k_1\operatorname{sen}(2(0))+k_2\cos(2(0))\right] \\ 1=(1)\left[k_1(0)+k_2(1)\right] \\ 1=k_2 \end{array}}$$

Como $y'(0)=1$ entonces
$$\boxed{\begin{array}{l} y'(x)=e^{-3x}\left[2k_1\cos(2x)-2k_2\,\mathrm{sen}(2x)\right]-3e^{-3x}\left[k_1\,\mathrm{sen}(2x)+k_2\cos(2x)\right] \\ y'(0)=e^{-3(0)}\left[2k_1\cos(0)-2k_2\,\mathrm{sen}(0)\right]-3e^{-3(0)}\left[k_1\,\mathrm{sen}(0)+k_2\cos(0)\right] \\ \quad 1=2k_1-3k_2 \end{array}}$$

Resolviendo simultáneamente
$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{1}{2}+\frac{3}{2}k_2=k_1 \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}(1)=k_1 \\ k_1=2 \end{array}}$$

Por tanto, la solución general sería $y(x)=e^{-3x}\left[2\,\mathrm{sen}(2x)+\cos(2x)\right]$

Ejercicios propuestos 2.1

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

1. $y''+4y=0$; $y(0)=1,\quad y'(0)=1$	7. $y''+y=0$; $y(0)=1,\quad y'(0)=1$
2. $y''-2y'+y=0$	8. $y''+y'=0$
3. $y''+9y=0$	9. $\frac{1}{2}y''+2y=0$
4. $y''+4y'+4y=0$; $y(0)=1,\quad y'(0)=1$	10. $y''-6y'+9y=0$
5. $y''-y=0$	
6. $y''-y'=0$; $y(0)=1,\quad y'(0)=1$	

2.1.1.1 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DINÁMICA

En el capítulo anterior se mencionó que la estabilidad dinámica de una trayectoria $y(t)$ se la determina con $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

Podemos ir analizando por casos.

Caso I, $y(t)=k_1e^{r_1t}+k_2e^{r_2t}$ Si las raíces son reales y diferentes, estas tienen que ser **negativas** para que la trayectoria sea dinámicamente estable.

Caso II, $y(t)=k_1e^{rt}+k_2te^{rt}$. Si las raíces son reales e iguales entonces r tiene que ser **negativa** $(r<0)$ para que la trayectoria sea dinámicamente estable

Caso III $y(t)=e^{\lambda t}\left[k_1\cos ut+k_2\,\mathrm{sen}\,ut\right]$ Si las raíces son complejas conjugadas entonces la **parte real** λ **tiene que ser negativa** $(\lambda<0)$ para que la trayectoria sea dinámicamente estable.

2.1.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTE CONSTANTE NO HOMOGÉNEAS

Una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientse constante y término $g(x)$ variable es de la forma:

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

La Solución General es una combinación lineal de dos tipos de soluciones, una solución complementaria y_C y una solución particular y_P.

$$y(x) = \underbrace{y_c(x)}_{\substack{SOL\\COMPL}} + \underbrace{y_p(x)}_{\substack{SOL\\PART}}$$

La **Solución complementaria** y_c satisface la ecuación homogénea

$$ay_c'' + by_c' + cy_c = 0$$

Por tanto, para determinarla se debe resolver de acuerdo a lo mencionado anteriormente.

La **Solución particular** y_p satisface la ecuación no homogénea

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = g(x)$$

Esta solución, si es de forma polinómica o exponencial o trigonométrica de senos y cosenos, se la puede determinar empleando el llamado **Método de los coeficientes indeterminados**.

En estos casos, de acuerdo a la forma de $g(x)$, la solución particular $y_p(x)$ es deducible. Observe el siguiente cuadro.

Si $g(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ entonces $y_p(x) = x^s\left[A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0\right]$

Si $g(x) = ae^{\alpha x}$ entonces $y_p(x) = x^s\left[Ae^{\alpha x}\right]$

Si $g(x) = a_1 \operatorname{sen}\beta x + a_2 \cos\beta x$ entonces $y_p(x) = x^s\left[A\operatorname{sen}\beta x + B\cos\beta x\right]$

Note que la solución particular aparece multiplicada por x^s, esto es para el caso de que existan soluciones particulares que no sean linealmente independientes de las soluciones complementarias. Es decir, a necesidad se puede utilizar $s = 0, 1, 2$

Ejemplo 1

Sea $y''+4y'+9y = x^2 + 3x$ Hallar la solución General

SOLUCIÓN:

La solución general es de la forma $y(t) = y_c + y_P$

Primero hallemos y_c.

La solución complementaria satisface la ecuación homogénea $y''_c + 4y'_c + 9y_c = 0$.

La ecuación auxiliar es $r^2 + 4r + 9 = 0$. Hallando las raíces tenemos

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(9)}}{2}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{-20}}{2}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{20}\sqrt{-1}}{2}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm \sqrt{(5)4}\sqrt{-1}}{2}$$

$$r_1, r_2 = \frac{-4 \pm 2\sqrt{5}i}{2}$$

$$r_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{5}i}{2} \Rightarrow r_1 = -2 + \sqrt{5}i$$

$$r_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{5}i}{2} \Rightarrow r_2 = -2 - \sqrt{5}i$$

Por tanto $y_c(x) = e^{-2x}\left[k_1 \operatorname{sen}(\sqrt{5}x) + k_2 \cos(\sqrt{5}x)\right]$

Segundo, hallemos y_P

Como $g(x) = x^2 + 3x$ (polinomio de grado 2) entonces la solución particular es de la forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$ (polinomio generalizado de grado 2). Luego debemos determinar los coeficientes A, B y C.

La solución particular debe satisfacer la ecuación no homogénea; es decir, $y_p''+4y_p'+9y_p = x^2 + 3x$

Hallemos la primera y la segunda derivada para $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

$$y_p' = 2Ax + b$$
$$y_p'' = 2A$$

Reemplazando y agrupando

$$2A + 8Ax + 4b + 9Ax^2 + bx + c = x^2 + 3x$$
$$9Ax^2 + (8A + 9b)x + (2A + 4b + 9c) = x^2 + 3x + 0$$

Si dos polinomios son iguales, sus coeficientes deben ser iguales

Entonces $\begin{cases} 9A = 1 \\ 8A + 9B = 3 \\ 2A + 4B + 9C = 0 \end{cases}$

Resolviendo el sistema simultáneo tenemos:

$$A = \frac{1}{9}\ ,\ B = \frac{19}{81}\ \text{y}\ c = -\frac{94}{729}$$

Por, tanto $y_p(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729}$

Finalmente la solución general sería:

$$y(x) = e^{-2x}\left[k_1 \operatorname{sen}(\sqrt{5}x) + k_2 \cos(\sqrt{5}x)\right] + \frac{1}{9}x^2 + \frac{19}{81}x - \frac{94}{729}$$

Ejemplo 2

Sea $y'' + 4y = 6\operatorname{sen} 3x$ Hallar la solución General

SOLUCIÓN:

Primero hallemos y_c.

La solución complementaria satisface la ecuación homogénea $y''_c + 4y_c = 0$.

La ecuación auxiliar es $r^2 + 4 = 0$. Hallando las raíces tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2} &= \sqrt{-4} \\ r &= \pm\sqrt{-4} \\ r &= \pm\sqrt{4}\sqrt{-1} \\ r_1 &= 0 + 2i \\ r_2 &= 0 - 2i \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} y_c(x) &= e^0\left[k_1 \operatorname{sen}(2x) + k_2 \cos(2x)\right] \\ y_c(x) &= k_1 \operatorname{sen}(2x) + k_2 \cos(2x) \end{aligned}$$

Segundo, hallemos y_P

Como $g(x) = 6\operatorname{sen} 3x$ entonces la solución particular es de la forma $y_p(x) = A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x$. Luego debemos determinar los coeficientes A y B.

La solución particular debe satisfacer la ecuación no homogénea; es decir $y''_P + 4y_P = 6\operatorname{sen} 3x$

Hallemos la primera y la segunda derivada

$$\begin{aligned} y_p' &= 3A\cos 3x - 3B\operatorname{sen} 3x \\ y_p'' &= -9A\operatorname{sen} 3x - 9B\cos 3x \end{aligned}$$

Reemplazando y agrupando

$$y_p''+4y_p = 6\operatorname{sen}3x$$
$$(-9A\operatorname{sen}3x - 9B\cos 3x) + 4(A\operatorname{sen}3x + B\cos 3x) = 6\operatorname{sen}3x + 0\cos 3x$$
$$(-5A)\operatorname{sen}3x + (-5B)\cos 3x = 6\operatorname{sen}3x + 0\cos 3x$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} -5A = 6 \\ -5B = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultáneo tenemos:

$$A = -\frac{6}{5} \text{ y } B = 0$$

Por, tanto $y_p(x) = -\frac{6}{5}\operatorname{sen}3x + 0\cos 3x$

Finalmente la solución general sería:

$$y(x) = k_1 \operatorname{sen}2x + k_2 \cos 2x - \frac{6}{5}\operatorname{sen}3x$$

Ejemplo 3

Hallar la solución para $y''+4y = x^2 + 3e^x; \quad y(0)=0, \quad y'(0)=2$.

SOLUCIÓN:

Primero hallemos y_c.

La solución complementaria satisface la ecuación homogénea $y''_c + 4y_c = 0$.

La ecuación auxiliar es $r^2 + 4 = 0$. Hallando las raíces tenemos:

$$\sqrt{r^2} = \sqrt{-4}$$
$$r = \pm\sqrt{-4}$$
$$r = \pm\sqrt{4}\sqrt{-1}$$
$$r_1 = 0 + 2i$$
$$r_2 = 0 - 2i$$

Por tanto

$$y_c(x) = e^0\left[k_1\operatorname{sen}(2x) + k_2\cos(2x)\right]$$
$$y_c(x) = k_1\operatorname{sen}(2x) + k_2\cos(2x)$$

Segundo, hallemos y_P

Como $g(x) = x^2 + 3e^x$ (combinación lineal de polinomio con exponencial) entonces la solución particular es de la forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C + De^x$. Luego debemos determinar los coeficientes A, B, C y D.

La solución particular debe satisfacer la ecuación no homogénea; es decir $y_p''+4y_p = x^2 + 3e^x$

Hallemos la primera y la segunda derivada

$$y_p' = 2Ax + B + De^x$$
$$y_p'' = 2A + De^x$$

Reemplazando y agrupando

$$2A + De^x + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + 4De^x = x^2 + 3e^x$$
$$4Ax^2 + 4Bx + (2A + 4C) + 5De^x = x^2 + 0x + 0 + 3e^x$$

Igualando coeficientes, tenemos:

$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \\ 2A + 4C = 0 \\ 5D = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultáneo tenemos:

$$A = \frac{1}{4}$$
$$B = 0$$
$$C = -\frac{1}{8}$$
$$D = \frac{3}{5}$$

Por, tanto $y_p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$

Finalmente la solución general sería:

$$y(x) = k_1 \operatorname{sen} 2x + k_2 \cos 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$$

Con $y(0) = 0$ tenemos $k_2 = -\frac{19}{40}$

Con $y'(0) = 2$ tenemos $k_1 = \frac{7}{10}$

Finalmente $y(x) = \frac{7}{10}\operatorname{sen} 2x - \frac{19}{40}\cos 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5}e^x$

Note que no es dinámicamente estable. ¿Por qué?

Ejercicios propuestos 2.2

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales de segundo orden

1. $y'' - y' - 2y = -2x^3 - 3x^2 + 8x + 1$
2. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + e^x$
3. $y'' + y' + y = 2\cos 2x - 3\operatorname{sen} 2x$
4. $y'' + y = 2^x$
5. $y'' + 2y' - 8y = x\,e^{-x} + e^{-x}$

6. $y'' + 4y' + 5y = e^{-x} - \operatorname{sen} 2x$
7. $y'' - 2y' - 35y = 13\operatorname{sen} x - e^{3x} + 1$
8. $y'' - y' - 2y = \cos x - \operatorname{sen} 2x; \quad y(0) = -\frac{7}{20} \quad y'(0) = \frac{1}{5}$
9. $y'' + y' - 12y = e^{x} + e^{2x} - 1; \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 3$
10. $y'' - y = \operatorname{sen} x - e^{2x}; \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$
11. $y'' - 7y' + 10y = x^2 - 4 + e^{x}; \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = -3$

2.2 ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior, si son lineales de coeficientes constantes, podemos pensar en procedimientos análogos.

Ejemplo

Hallar la solución para $y^{IV} + 6y''' + 14y'' + 16y' + 8y = 24$

SOLUCIÓN:

Primero, encontramos la solución complementaria y_c que satisface la ecuación homogénea

$$y_c^{IV} + 6y_c''' + 14y_c'' + 16y_c' + 8y_c = 0 .$$

La ecuación auxiliar sería $r^4 + 6r^3 + 14r^2 + 16r + 8 = 0$.

Encontramos las raíces por división sintética

$$\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 6 & 14 & 16 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & -8 & -12 & -8 & \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 0 & \end{array} \qquad r_1 = -2$$

$$r^3 + 4r^2 + 6r + 4 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 6 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & 0 & \end{array} \qquad r_2 = -2$$

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r_3, r_4 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2)}}{2}$$

$$r_3, r_4 = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$r_3 = -1 + i \qquad r_4 = -1 - i$$

Por tanto

$$y_c(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x} + e^{-x}\left[k_3 \operatorname{sen} + k_4 \cos x\right]$$

Segundo, la solución particular y_p es de la forma $y_p = A$ porque $g(x) = 24$.

Entonces $\boxed{\begin{array}{l} y_p' = 0 \\ y_p'' = 0 \\ y_p''' = 0 \\ y_p^{IV} = 0 \end{array}}$

Reemplazando y calculando $\boxed{\begin{array}{l} y^{IV}{}_p + 6y_p''' + 14y''_p + 16y'_p + 8y_p = 24 \\ 0 \quad + 6(0) + 14(0) + 16(0) + 8A = 24 \\ \qquad A = 3 \end{array}}$

Por tanto $y(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 x e^{-2x} + e^{-x}\left[k_3 \operatorname{sen} x + k_4 \cos x\right] + 3$

Observe que es dinámicamente estable, es decir que $y(t)$ converge al nivel de equilibrio $\overline{y} = 3$

Ejercicios propuestos 2.3

Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $y``` + 7y`` + 15y` + 9y = 0$
2. $y``` - 2y`` - y` + 2y = 4$
3. $y``` + 6y`` + 10y` + 8y = 8$

2.3 ANÁLISIS CUALITATIVO

Para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficentes constantes, podemos utilizar el siguiente análisis si se trata de determinar la estabilidad

2.3.1 Teorema de Routh

Sea la ecuación polinómica de grado n

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + a_3 r^{n-3} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0$$

La **parte real** de todas las raíces son **negativas** si y sólo sí los "n" primeros **determinantes** de la siguiente sucesión:

$$\left|a_1\right|; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}; \ldots$$

Son **todos positivos**

Nota: $a_m = 0$ Si $m > n$

Ya usted ha tenido la oportunidad de observar que para que una trayectoria $y(t)$, solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y término constante, sea dinámicamente estable se requiere que las raíces de la ecuación auxiliar o la parte real (en el caso de las raíces complejas) sean **todas negativas.** Entonces para determinar lo anterior basta con emplear el Teorema de Routh.

Ejemplo 1

Determine cualitativamente la estabilidad dinámica para

$$y^{IV}+6y'''+14y''+16y'+8y=0$$

SOLUCIÓN:

Empleando el Teorema de Routh. La ecuación auxiliar es $r^4+6r^3+14r^2+16r+8=0$

En este caso $n=4$ y además $\boxed{\begin{array}{l} a_0=1 \\ a_1=6 \\ a_2=14 \\ a_3=16 \\ a_4=8 \end{array}}$

Los cuatros determinantes serían:

$$|a_1|=6\ ; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 16 \\ 1 & 14 \end{vmatrix}=84-16=68\ ;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 1 & 14 & 8 \\ 0 & 6 & 16 \end{vmatrix}=800 \qquad \begin{vmatrix} 6 & 16 & 0 & 0 \\ 1 & 14 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 16 & 0 \\ 0 & 1 & 14 & 8 \end{vmatrix}=6400$$

Como todos los determinantes son positivos entonces todas las raíces son negativas; por tanto la solución es dinámicamente estable

Ejemplo 2

Determine cualitativamente la estabilidad dinámica para

$$y'''-10y''+27y'-18y=3$$

SOLUCIÓN:

Empleando el Teorema de Routh. La ecuación auxiliar es $r^3-10r^2+27r-18=0$

En este caso $n=3$ y además $\begin{array}{l} a_0=1 \\ a_1=-10 \\ a_2=27 \\ a_3=-18 \end{array}$

Los cuatros determinantes serían:

$$|a_1|=-10\ ; \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -10 & -18 \\ 1 & 27 \end{vmatrix}=-252\ ;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -18 & 0 \\ 1 & 27 & 0 \\ 0 & -10 & -18 \end{vmatrix} = 5184$$

Como los determinantes no todos son positivos entonces no todas las raíces son negativas; por tanto la solución es NO dinámicamente estable.

Ejercicios propuestos 2.4

Determine si las soluciones de las ecuaciones diferenciales son trayectorias temporales convergentes o no. Emplee el teorema de Routh

1. $y```-10y``+27y`-18y = 3$
2. $y```+11y``+34y`+24y = 5$
3. $y```+4y``+5y`-2y = -2$

Misceláneos

1. Hallar la serie de Taylor alrededor de la $x_0 = 0$ de la función $f(x) = x\cos x$
2. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales e indique si la solución complementaria converge o no.
   a) $y''+4y'+4y = (x+1)e^{-2x} + 10x$
   b) $y'''+3y''-y'-3y = 4x + 2 + 3\operatorname{sen} x$
   c) $y''+y'+y = t + e^{2t}$
   d) $y''+6y'+9y = 2e^{-3x} + x + 1 \quad ; \quad y(0) = -1, y'(0) = 1$

3. Un estudio de explotación de un recurso natural, utiliza la ecuación diferencial:
   $$\frac{dx^2}{dt^2} - \left(\frac{2-\beta}{1-\beta}\right)a\frac{dx}{dt} + \frac{a^2}{1-\beta}x = 3$$
   a) Probar que $x_1(t) = e^{at}$ y $x_2(t) = e^{at/1-\beta}$ donde $a \neq 0,\ \beta \neq 1$ son soluciones de la ecuación homogénea.
   b) Si $a = -5$ y $\beta = -9$ encuentre la solución general e indique si la solución converge a largo plazo.

Respuestas a los Ejercicios Propuestos

CAPITULO 1: Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Ejercicios Propuestos 1.1

1. $y(x)=2x\ln x+2x^{3/2}+Cx$
2. $y(x)=\frac{x^3}{5}+\frac{C}{x^2}$
3. $y(x)=\frac{1}{x^2}\left[-x\cos x+senx+5.96\right]$
4. $y(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{xe^x}$
5. $y(x)=e^{2x}+1+Ce^x$
6. $y(x)=\frac{e^x}{x}+\frac{C}{x}$
7. $y(x)=\frac{1}{x+1}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-\frac{27}{2}\right]$
8. $y(x)=-e^x+Ce^{2x}$
9. $y(x)=\frac{x^3}{5}-x+C\sqrt{x}$
10. $y(x)=\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}$
11. $y(x)=-e^{2x}+Ce^{3x}$
12. $y(x)=\frac{1}{e^x}\left[\ln\left|1+e^x\right|+C\right]$
13. $y(x)=-x+Cx^{-2}$
14. $y(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}+4\frac{\ln|x+2|}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^2}$
15. $x(y)=3y+3+Ce^y$
16. $x(y)=-3+ye^y+Ce^y$

Ejercicios Propuestos 1.2

1. $y(x)=\dfrac{1}{-\frac{2}{3}x^2+\frac{7}{6x}}$
2. $y(x)=\dfrac{1}{-\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{x}+\frac{C}{x}}$
3. $y(x)=\dfrac{1}{\pm\sqrt{\frac{C}{x^2}-\frac{4}{9}x-\frac{2}{3}x\ln x}}$
4. $y(x)=\dfrac{1}{-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}}$

Ejercicios Propuestos 1.3

1. $\frac{y^2}{2}=\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|+C$
2. $y=\frac{x^4}{4}-x^3+5x+C$
3. $\frac{2}{7}y^{7/2}+\frac{6}{5}y^{5/2}+2y^{3/2}+2y^{1/2}=\frac{2}{7}x^{7/2}+\frac{6}{5}x^{5/2}+2x^{3/2}+2x^{1/2}+C$

4. $\frac{y^3}{3}+y=\frac{x^3}{3}-x+\frac{2}{3}$
5. $-e^{-y}=e^x+C$
6. $-x-\ln x-\frac{1}{x}=y-2\ln y+C$
7. $x^2+3x=-y^2+2y+C$
8. $y=x^5-x^3-2x+6$
9. $-\frac{1}{x-y}=x+1$
10. $\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{4}sen2(x+y)=x+C$
11. $y(x)=\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}+\frac{14}{3}$

Ejercicios Propuestos 1.4

1. $\frac{y^2}{2x^2}=\ln|x|+C$
2. $\ln\left|\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1}\right|=\ln|x|+C$
3. $-\frac{1}{2}\ln\left|1+2\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right|=\ln|x|+C$
4. $\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{y}+\ln\left|\frac{y}{x}\right|\right)=\ln|x|+C$
5. $\ln|x|+C=-\frac{x}{y+x}$
6. $-\ln\left|\frac{x}{y}+2e^{\frac{x}{y}}\right|=\ln|x|+C$
7. $-\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|-2\frac{1}{\frac{y}{x}+1}=\ln|x|-2$

Ejercicios Propuestos 1.5

1. $xy-3y-y^3+x^2=0$
2. $x^2y+xy^2+x=C$
3. $\frac{x^3}{3}+xy+e^y=C$
4. $y^2+x^2y+x=C$
5. $x^2+xy-2xy^3=C$
6. $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=17$
7. $x^2y^2+2xy=C$
8. $x\cos y+y=C$
9. $xy^2-ye^x=C$

Ejercicios Propuestos 1.6

1. $e^{3x}x^2y+\frac{e^{3x}}{3}y^3=0$
2. $-\frac{1}{x}-\frac{y^2}{x^3}=C$
3. $x^3y^2+xy^3=-4$

Ejercicios Propuestos 1.7

1. No es estable. Diverge de 3
2. Si es estable. Converge a $1/5$
3. Si es estable. Converge a 12
4. No es estable. Diverge de $11/9$
5. Diverge de 1 y converge a -5
6. Converge a $1/2$ y diverge de 0
7. Converge a 3 y diverge de 5

Ejercicios Propuestos 1.8

1. $I(t)=\dfrac{B}{1+BCe^{-kBt}}$ 2. $I(t)=\dfrac{2000}{1+3e^{-0.806t}}$

3. $S(t)=\dfrac{N}{1+19e^{-1.21t}}$ 4. a) $p(t)=3+3e^{-0.27t}$ b) $\overline{p}=3$

5. a) $p(t)=-20+25e^{3/2\,t}$ b) Diverge 6. a) $p(t)=15+5e^{-2t}$ b) $\overline{p}=15$

7. a) $p(t)=14+6e^{15t}$ 8. a) $p(t)=\dfrac{2t}{e^{2t}}+8+4e^{-2t}$ b) $\overline{p}=8$

9. a) $p(t)=2\sqrt{(t+1)^3}+1$ b) $p(8)=55$

10. a) $I(t)=(24+0.08t)(600t)$ b) $I=580.608$

11. a) $Q(t)=5000+35000e^{-0.084t}$ b) $\$22857.14$

12. a) $Q(t)=\dfrac{2}{2-t}$ b) Dentro de seis meses tendrá \$4 millones

13 a) $Q(t)=30-25e^{-0.13(t-1)};\quad t\geq 1$ b) 28 objetos aproximadamente

Misceláneos

1. $-\dfrac{1}{2e^{2x}}-e^{x}=\ln y-\dfrac{3}{2}$
2. $y(x)=\pm\sqrt{\dfrac{1}{-\frac{1}{2}e^{2x}+Ce^{-2x}}}$
3. $\ln x=-\dfrac{x}{y+x}+\dfrac{1}{2}$
4. $K(t)=\dfrac{1}{-\frac{3}{7}e^{2t}+Ce^{-5t}}$
5. $x(y)=\dfrac{1}{y}\left[-y\cos y+\sin y+C\right]$
6. $y(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{-2x-1+Ce^{x}}}$
7. $\dfrac{x^2y^2}{2}+\dfrac{y^4}{4}=C$
8. $x=\dfrac{2}{y}+\dfrac{4}{y^2}+\dfrac{2}{y^3}+\dfrac{Ce^{y}}{y^3}$
9. $y=-\ln x-1+xC$
10. $y=x^{-1}\sin x+x^{-1}C$
11. $-e^{-y/x}=\ln x+C$
12. $-\left(1-y^2\right)^{1/2}=\left(1-x^2\right)^{1/2}+C$
13. $x=\frac{1}{2}e^{y}+e^{-y}C$
14. $\dfrac{\cos 2x}{2}+x\tan y=\dfrac{1}{2}+\pi$
15. $x=-1+\frac{1}{4}y+Cy^{-3}$
16. $e^{x}y^{3}+ye^{2x}=C$
17. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}-1\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}+1\right|=\ln x+C$
18. $-\dfrac{y^2}{\sin^3 x}-\dfrac{1}{\sin x}=C$
19. $x^3y+\dfrac{x^2y^2}{2}=C$

20. $\frac{y}{x+y} = Cx$ o $y = \frac{x^2}{C-x}$

21. $-xy^{-2} - \frac{\cos 3y}{3} = C$

22. $2\sqrt{y+x} - 2\ln\left(\sqrt{y+x}+1\right) = x + C$

23. $y(x) = -x^3 + Cx$

24. $-\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{3/2} - 1$

25. $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$

PARTE II. PROBLEMAS

2. a) $\frac{dQ}{dt} = kQ$; $Q(t) = 1000e^{0.18t}$ b) $t = 9$ años aproximadamente

3. $p(t) = 6 + 4e^{-\frac{9}{2}t}$

4. a) $p(t) = \frac{b_3 - a_3}{a_1 - b_1} + C\, e^{-\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2}t}$ b) $(a_1 > b_1) \wedge (a_2 > b_2)$ ó $(a_1 < b_1) \wedge (a_2 < b_2)$

   c) $p(t) = 6 + Ce^{-3t}$; $\overline{p} = \$6$

5. a) $Q(t) = \frac{(0.4t+2)^2}{4}$ b) $t = 5$ años

6. a) $\frac{dQ}{dt} = 0.064Q$ b) $t = 11$ aproximadamente

7. $V(p) = V_0\left(\frac{p - A}{p_0 - A}\right)^k$

CAPITULO 2: Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden

Ejercicios Propuestos 2.1

1. $y(x) = \cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$
2. $y(x) = k_1e^x + k_2xe^x$
3. $y(x) = k_1\sin 3x + k_2\cos 3x$
4. $y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x}$
5. $y(x) = k_1e^x + k_2e^{-x}$
6. $y(x) = e^x$
7. $y(x) = \cos x + \sin x$
8. $y(x) = k_1 + k_2e^{-x}$
9. $y(x) = k_1\sin 2x + k_2\cos 2x$
10. $y(x) = k_1e^{3x} + k_2xe^{3x}$

Ejercicios Propuestos 2.2

1. $\boldsymbol{y(x) = k_1e^{2x} + k_2e^{-x} + x^3 - x}$
2. $y(x) = k_1e^{3x} + k_2xe^{3x} + \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{2}{27} + \frac{1}{4}e^x$
3. $y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left[k_1\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x + k_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \sin 2x$
4. $y(x) = k_1\sin x + k_2\cos x + \frac{1}{2}e^{2x}$
5. $y(x) = k_1e^{-4x} + k_2e^{2x} - \frac{1}{9}xe^{-x} - \frac{1}{9}e^{-x}$

6. $y(x)=e^{-2x}\left[k_1 senx+k_2\cos x\right]+\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{65}\sin 2x+\frac{8}{65}\cos 2x$

7. $\boldsymbol{y(x)=k_1e^{7x}+k_2e^{-5x}-\frac{9}{25}\sin x+\frac{1}{50}\cos x+\frac{1}{32}e^{3x}-\frac{1}{35}}$

8. $y(x)=\frac{27}{80}e^{2x}-\frac{9}{20}e^{-x}-\frac{3}{10}\cos x-\frac{1}{10}\sin x+\frac{1}{20}\cos 2x-\frac{3}{20}\sin 2x$

9. $y(x)=\frac{1}{60}e^{-4x}+\frac{7}{6}e^{3x}-\frac{1}{10}e^{x}-\frac{1}{6}e^{2x}+\frac{1}{12}$

10. $y(x)=\frac{7}{12}e^{x}+\frac{3}{4}e^{-x}-\frac{1}{2}senx-\frac{1}{3}e^{2x}$

11. $y(x)=-\frac{1589}{500}e^{5x}+\frac{25}{4}e^{2x}+\frac{1}{10}x^2+\frac{7}{50}x-\frac{161}{500}+\frac{1}{4}e^{x}$

Ejercicios Propuestos 2.3

1. $y(x)=k_1e^{-3x}+k_2xe^{-3x}+k_3e^{-x}$
2. $y(x)=k_1e^{2x}+k_2e^{-x}+k_3e^{x}+2$
3. $y(x)=k_1e^{-4x}+e^{-x}\left[k_2 senx+k_3\cos x\right]$

Ejercicios Propuestos 2.4

1. No es estable dinámicamente 2. SI estable 3. No estable

Misceláneos

1. a) $y(x)=k_1e^{-2x}+k_2xe^{-2x}+\frac{1}{6}x^3e^{-2x}+\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+\frac{5}{2}x-\frac{5}{2}$

   b) $y(x)=k_1e^{-3x}+k_2e^{x}+k_3e^{-x}-\frac{4}{3}x-\frac{2}{9}-\frac{9}{20}\operatorname{sen}x+\frac{3}{20}\cos x$

   c) $y(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[k_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+k_2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]+t-1+\frac{1}{7}e^{2t}$

   d) $y(x)=-\frac{28}{27}e^{-3x}+4xe^{-3x}+x^2e^{-3x}-\frac{1}{9}x+\frac{1}{27}$

2. b) $x(t)=k_1e^{-5t}+k_2e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{6}{5}$ converge a $\bar{x}=\frac{6}{5}$

CAPITULO 3: Ecuaciones en Diferencias de Primer Orden

Ejercicios Propuestos 3.1

1. $y_t = 6(-3)^t + 1$
2. $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t + 6$
3. $y_t = -\left(\frac{1}{5}\right)^t + 5$
4. $y_t = \frac{1}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)^t + \frac{4}{5}$
5. $y_t = -\frac{16}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^t + \frac{21}{5}$

Ejercicios Propuestos 3.2

1. $y_t = \left(\frac{1}{2}\right)^t + 2t + 2$
2. $y_t = k(2)^t - \frac{1}{e^3 - 2}e^{3t}$
3. $y_t = -\frac{4e^t}{4-e} + \frac{4^{t+1}}{4-e}$
4. $y_t = -\frac{4}{5\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^t + \frac{2}{5\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}t\right) + \frac{4}{5\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$

Ejercicios Propuestos 3.3

1. Diverge
2. converge oscilantemente
3. Diverge oscilantemente
4. Converge

Ejercicios Propuestos 3.4

1. $p_t = k\left(-\frac{1}{3}\right)^t + 5$
2. $p_t = k\left(-\frac{5}{3}\right)^t + \frac{3}{2}$
3. $p(t) = k(-2)^t + 0.6$
4 $p_t = k(-2)^t + \frac{7}{3}$
5. $p_t = -0 - 05(-2)^t + 0.6$
6. $p_t = k(-1)^t + \frac{10}{3}$
7. $p_t = k(-1.4)^t + 3$

Misceláneos

1. a) $y_t = 1.37\left(\frac{2}{3}\right)^t - 0.37e^{2t}$ c) $y_t = k\left(\frac{1}{2}\right)^t - t + 3$
2. a) Diverge b)Converge
3. $p_t = k\left(-\frac{1}{5}\right)^t + \frac{22}{6}$, Oscilante convergente
4. $p_t = k(-2)^t + \frac{7}{3}$, Oscilante divergente
5. $p_t = k(21.5)^t + 0.8$ Divergente
6. $\pi_t = 10k_1(0.15)^t + 1.24k_2(-0.56)^t - 0.2527m$
   $U_t = k_1(0.15)^t + k_2(-0.56)^t + 0.0624 + 0.19m$
7. $p_t = k + 2$ constante

CAPITULO 4: Ecuaciones en Diferencias de Segundo Orden

Ejercicios Propuestos 4.1

1. $y_t = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{2}\right)^t + 4$

2. $y_t = \left(\sqrt{2}\right)^t\left[2\cos\frac{\pi}{4}t + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}t\right] + 1$

3. $y_t = -4\left(\frac{1}{2}\right)^t + 2t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 8$

4. $y_t = (4)^t\left[\frac{38}{13}\cos\frac{\pi}{3}t - \frac{25}{26\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}t\right] + \frac{1}{13}$

5. $y_t = k_1(2)^t + k_2(3)^t + \frac{5}{4}$

6. $y_t = k_1(-1)^t + k_2t(-1)^t + \frac{1}{16}3^t$

7. $y_t = k_1(6)^t + k_2(-1)^t + \frac{t}{21}(6)^t$

8. $y_t = \left(\sqrt{3}\right)^t\left[k_1\cos\frac{\pi}{2}t + k_2\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}t\right] + \frac{1}{19}(4)^t$

9. $y_t = \left(\sqrt{5}\right)^t\left[k_1\cos\left[(\operatorname{arctg}2)t\right] + k_2\operatorname{sen}\left[(\operatorname{arctg}2)t\right]\right] + \frac{1}{4}t$

10. $y_t = \left(\sqrt{5}\right)^t\left[k_1\cos\left[(\arctan 2)t\right] + k_2\operatorname{sen}\left[(\arctan 2)t\right]\right] + \frac{1}{2}t + 1$

11. $y_t = k_1\left(\frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)^t + k_2\left(\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)^t + t^2 - t + 2$

12 . $y_t = k_1(3)^t + k_2(2)^t + 3t(3)^t$

13. $y_t = k_1\cos\left(2\frac{\pi}{3}t\right) + k_2\sin\left(2\frac{\pi}{3}t\right) + t^2 - 2t + \frac{1}{3}$

14. $y_t = k_1(3)^t + k_2(2)^t + \frac{1}{2}(4)^t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 4$

15. $y_t = k_1 + k_2(2)^t + \frac{1}{4}(5)^t + \frac{3}{10}\cos\frac{\pi}{2}t + \frac{1}{10}\sin\frac{\pi}{2}t$

Ejercicios Propuestos 4.2

1. $y_t = k_1 + k_2(-1)^t + k_3\left(\frac{1}{2}\right)^t$

2. $y_t = k_1 + k_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + k_3t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 4t$

Ejercicios Propuestos 4.3

1. No Converge

2. Converge

Misceláneos

1. $y_t = k_1\left(\frac{1}{2}\right)^t + k_2t\left(\frac{1}{2}\right)^t + 32$

2. $y_t = k_1(1)^t + k_2\left(\frac{1}{2}\right)^t + k_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^t + 1$

CAPITULO 5: Sistemas de Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias

Ejercicios Propuestos 5.1

1. $Y(t)=\begin{pmatrix} -3e^{-3t}+4e^{-2t}+12 \\ e^{-3t}-e^{-2t}+4 \end{pmatrix}$

2. $Y(t)=\begin{pmatrix} 6e^{t}-5e^{-t}+7 \\ 2e^{t}-5e^{-t}+8 \end{pmatrix}$

3. $Y(t)=\begin{pmatrix} k_1e^{3t}+k_2e^{t}-\frac{10}{3} \\ -k_1e^{3t}+k_2e^{t}-\frac{11}{3} \end{pmatrix}$

Ejercicios Propuestos 5.2

1. $Y_t=\begin{pmatrix} -2\left(\frac{1}{2}\right)^t+\left(\frac{1}{3}\right)^t+6 \\ 3\left(\frac{1}{2}\right)^t-2\left(\frac{1}{3}\right)^t+3 \end{pmatrix}$

2. $Y_t=\begin{pmatrix} -\frac{5}{9}(-8)^t+\frac{2}{3}(-2)^t+\frac{8}{9} \\ -\frac{5}{9}(-8)^t-\frac{2}{3}(-2)^t+\frac{2}{9} \end{pmatrix}$

3. $Y_t=\begin{pmatrix} -2(3)^t+6(-2)^t+6 \\ 4(3)^t+3(-2)^t+2 \end{pmatrix}$

4. $Y_t=\begin{pmatrix} \frac{11}{4}(3)^t+\frac{3}{4}(-1)^t-\frac{3}{2} \\ \frac{11}{4}(3)^t-\frac{3}{4}(-1)^t-1 \end{pmatrix}$

Ejercicios Propuestos 5.3

1. a) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{6}{5}e^{3t}+\frac{1}{5}e^{-2t}+11 \\ \frac{12}{5}e^{3t}+\frac{1}{10}e^{-2t}+\frac{13}{2} \end{pmatrix}$ Punto de silla

2. a) Nodo convergente
   b) Nodo Divergente
   c) Punto de silla
   d) Punto de Silla

Ejercicios Propuestos 5.4

1. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1e^{2t}+k_2e^{-t}+1 \\ k_1´e^{2t}+k_2´e^{-t}+1 \end{pmatrix}$ Punto de silla

2. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1e^{t}+k_2e^{-t} \\ k_1´e^{t}+k_2´e^{-t} \end{pmatrix}$ Punto de silla

3. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k_1e^{t}+k_2e^{-t} \\ k_1´e^{t}+k_2´e^{-t} \end{pmatrix}$ Punto de Silla

Misceláneos

1.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{-\frac{5}{2}t}\left[k_1 sen\frac{\sqrt{7}}{2}t+k_2\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t\right]+2 \\ e^{-\frac{5}{2}t}\left[k_1´sen\frac{\sqrt{7}}{2}t+k_2´\cos\frac{\sqrt{7}}{2}t\right]+6 \end{pmatrix}$ Foco convergente

2.

$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 e^{\sqrt{12}t} + k_2 e^{-\sqrt{12}t} + \frac{1}{2} \\ k_1' e^{\sqrt{12}t} + k_2' e^{-\sqrt{12}t} + 1 \end{pmatrix}$	Punto de silla