CAPÍTULO 1

INTRODUCCION

Definición 1.1 . *Si una ecuación contiene las derivadas o las diferenciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (E.D.).*

Si la ecuación contiene derivadas ordinarias de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente entonces la ecuación se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (E.D.O.).

Ejemplo 1. $3\frac{dy}{dx} + 4y = 5$

Ejemplo 2. $(x^2 - y)dx + 5\operatorname{sen} y\, dy = 0$

Ejemplo 3. $u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = x$

Si la ecuación contiene derivadas parciales de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación en derivadas parciales.

Ejemplo 4. $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Ejemplo 5. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = y - x$

Definición 1.2 (Orden). *La derivada o la diferencial de más alto orden* *determina el orden de la E.D.*

Ejemplo 6. $\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = \ln x$, es de orden 3.

Ejemplo 7. $xdy - ydx = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$, la cual es de orden 1.

Definición 1.3 (E.D.O. lineal) *Una E.D. es lineal si tiene la forma:*

$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$

Es decir, la variable dependiente y y todas sus derivadas tienen exponente uno y cada coeficiente $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x), g(x)$, depende solo de x. Si no se cumple lo anterior se dice que la E.D. no es lineal.

Ejemplo 8. $x^2\frac{d^3y}{dx^3} + \cos x\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{sen} x\frac{dy}{dx} + x^2y = e^x$ es lineal de orden 3.

Ejemplo 9. $\operatorname{sen} x\,\frac{d^3y}{dx^3} + xy^2 = 0$ no es lineal.

Ejemplo 10. $y^2\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} + xy = x$ no es lineal.

Definición 1.4 . *Se dice que una función f con dominio en un intervalo I es solución a una E.D. en el intervalo I, si la función satisface la E.D. en el intervalo I.*

Ejemplo 11. $x = y\ln(cy)$ es solución de $y'(x+y) = y$

En efecto, derivando implícitamente: $1 = \frac{dy}{dx}\ln(cy) + y\frac{1}{cy}\,c\frac{dy}{dx}$

$1 = \frac{dy}{dx}(\ln(cy)+1)$, luego $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy)+1}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{y\ln(cy)+y}{\ln(cy)+1} = \frac{y(\ln(cy)+1)}{\ln(cy)+1} = y,$$

luego $y = y$
por tanto $x = y \ln(cy)$ es solución.

Una E.D. acompañada de unas condiciones iniciales se le llama un problema de valor inicial (P.V.I.). Con frecuencia es importante saber si un problema de valor inicial tiene solución y también deseamos saber si esta solución es única, aunque no podamos conseguir explcitamente la solución. El siguiente teorema nos responde las inquietudes que acabamos de plantear.Este teorema lo enunciamos y demostramos con más profundidad en el Apéndice al final del texto.

Teorema 1.1 ***(Picard)***

Sea R una región rectangular en el plano XY definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior. Si $f(x,y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R, entonces existe un intervalo I con centro en x_0 y una única función $y(x)$ definida en I que satisface el problema de valor inicial $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$.

Ejemplo 12. Para la E.D. $y' = x^2 + y^2$, se tiene que $f(x,y) = x^2 + y^2$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ son continuas en todo el plano XY, por lo tanto por cualquier punto (x_0, y_0) del plano XY pasa una y solo una solución de la E.D. anterior. Es importante anotar que para esta E.D. es imposible hallar una solución explcita; slo con métodos numéricos se puede hallar la solución.

Ejercicio 1. Demostrar que $y = c_1 \cos 5x$ es solución de $y'' + 25y = 0$.

Ejercicio 2. Demostrar que $y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt + c_1 e^{-x^2}$ es solución de $y' + 2xy = 1$.

Ejercicio 3. Demostrar que $y = x \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt$ es solución de
$xy' = y + x \operatorname{sen} x$.

Ejercicio 4. Demostrar que $y = e^{-\frac{x}{2}}$ es solución de $2y' + y = 0$, también $y = 0$ es solución.

Nota: si todas las soluciones de la E.D. $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ en un intervalo I pueden obtenerse de $G(x, y, C_1, \ldots, C_n)$ mediante valores apropiados de C_i, entonces a G se le llama **la solución general**; una solución que no contenga los parámetros C_i se le llama **la solución particular**; una solución

que no pueda obtenerse a partir de la solución general se le llama **solución singular**.
Veremos más adelante que la solución general a una E.D. lineal de orden n tiene n parámetros. En las E.D. no lineales a veces no es posible obtener explcitamente una solución general.

Ejemplo 13. $y = Cx^4$ es solución general de $xy' - 4y = 0$.
Con $C = 1$ entonces la solución particular es $y = x^4$.

También
$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \geq 0 \\ -x^4 & x < 0 \end{cases}$$

es una solución singular, porque no se puede obtener a partir de la solución general.

Ejercicio 5. Si $y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$, demostrar

a). $y = (\frac{x^2}{4} + C)^2$ es solución general.

b). Si $C = 0$ mostrar que $y = \frac{x^4}{16}$ es solución particular.

c). Explicar porqu $y = 0$ es solución singular.

Ejercicio 6. Si $y' = y^2 - 1$, demostrar

a). $y = \frac{1+Ce^{2x}}{1-Ce^{2x}}$ es solución general.

b). Explicar porqu $y = -1$ es solución singular.

Ejercicio 7. Si $xy' + 1 = e^y$, comprobar que $e^{-y} - Cx = 1$ es solución general.

Ejercicio 8. Si $2xy\,dx + (x^2 + 2y)\,dy = 0$, comprobar que $x^2y + y^2 = C_1$ es solución general.

Ejercicio 9. Si $(x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - xy)\,dy = 0$, comprobar que $C_1(x + y)^2 = xe^{\frac{y}{x}}$, es solución general.

Ejercicio 10. Si $xy' + 1 = e^y$, comprobar que $e^{-y} - Cx = 1$ es solución general.

1.1. CAMPO DE DIRECCIONES

Dada la E.D. $y' = f(x, y)$ y sabiendo que la primera derivada representa una dirección en el plano XY, podemos por lo tanto asociar a cada punto (x, y) una dirección. A este conjunto de direcciones lo llamamos el campo de direcciones o campo pendiente de la E.D. $y' = f(x, y)$. Este campo de direcciones nos permite inferir propiedades cualitativas de las soluciones, como por ejemplo si son asintóticas a una recta, si son cerradas o abiertas, etc.. Con el paquete Maple haremos un ejemplo.

Ejemplo 14. Hallar el campo de direcciones de la E.D. $y' = -2x^2 + y^2$ y cuatro curvas solución de la E.D. que pasan por los puntos $(0, 2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ respectivamente.

```
> with(DEtools):
DEplot (diff(y(x),x)=-2*x^2+y(x)^2,y(x),x=-2..2,color=black,
{[0,2],[0,0],[0,1],[0,-1]},y=-2..2,linecolor=black);
```


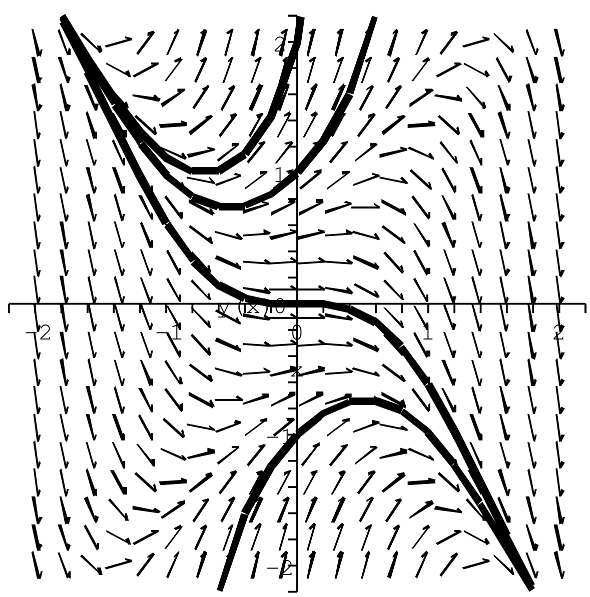

Figura 1.1

1.2. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para finalizar este Capítulo, es importante hacer un corto comentario sobre la ecuación de continuidad; con ella se construyen modelos de fenómenos en diferentes áreas del conocimiento que dependen del tiempo, dando como resultado una o varias Ecuaciones Diferenciales. La ecuación de continuidad nos dice que la tasa de acumulación de una variable x en un recipiente (el cual puede ser un tanque, un órgano humano, una persona, una ciudad, un banco, una universidad, un sistema ecológico, etc.) es igual a su tasa de entrada menos su tasa de salida; tanto la tasa de entrada como la tasa de salida pueden ser constantes o variables.

Si la variable es x y la tasa de entrada es $E(t)$ y la tasa de salida es $S(t)$ entonces la tasa de acumulación es

$$\frac{dx}{dt} = E(t) - S(t).$$

Ejemplo 15. La concentración de glucosa en la sangre aumenta por ingesta de comidas ricas en azucares, si se suministra glucosa a una razón constante R (en mg/minuto). Al mismo tiempo, la glucosa se transforma y se elimina a una tasa proporcional a la concentración presente de glucosa. Si $C(t)$ representa la concentración de glucosa en un instante t, entonces $E(t) = R$ y $S(t) = kC(t)$, entonces por la ecuación de continuidad, la Ecuación Diferencial que rige este fenómeno es

$$\frac{dC(t)}{dt} = E(t) - S(t) = R - kC(t).$$

CAPÍTULO 2

MÉTODOS DE SOLUCIÓN

2.1. VARIABLES SEPARABLES

Definición 2.1 . *Se dice que una E.D. de la forma:* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ *es separable o de variables separables.*

La anterior ecuación se puede escribir como $h(y)\,dy = g(x)\,dx$ e integrando:

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C,$$

obteniéndose así una familia uniparamétrica de soluciones.

Nota: la constante o parámetro C, a veces es conveniente escribirla de otra manera, por ejemplo, múltiplos de constantes o logaritmos de constantes o exponenciales de constantes o si aparecen varias constantes reunirlas en una sola constante.

Ejemplo 1. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
Solución:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y} = e^{3x}e^{2y}$$

separando variables

$$\frac{dy}{e^{2y}} = e^{3x}dx$$

e integrando

$$-\frac{1}{2}e^{-2y} + C = \frac{e^{3x}}{3}$$

la solución general es

$$\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{-2y}}{2} = C$$

Ejemplo 2. $\frac{dy}{dx} = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, con $y(0) = 1$

Solución: separando variables

$$y^{-3}dy = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \quad \left\{\text{haciendo} \begin{array}{lcl} u & = & 1+x^2 \\ du & = & 2xdx \end{array}\right.$$

obtenemos

$$= \frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}}$$

$$\text{e integrando} \quad \frac{y^{-2}}{-2} = \frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

solución general

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Cuando $x = 0,\ y = 1$

$$-\frac{1}{2 \times 1} = \sqrt{1+0^2} + C$$

luego $C = \frac{-3}{2}$
La solución particular es

$$\frac{-1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}$$

Resolver los siguientes ejercicios por el método de separación de variables:

Ejercicio 1. $(4y + yx^2)\,dy - (2x + xy^2)\,dx = 0$
(**Rta.** $2 + y^2 = C(4 + x^2)$)

Ejercicio 2. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
(**Rta.** $y = -\frac{1}{\cos x + c}$)

Ejercicio 3. $3e^x \tan y\,dx + (2 - e^x)\sec^2 y\,dy = 0$
(**Rta.** $(2 - e^x)^3 = C\tan y$)

Ejercicio 4. $y' \operatorname{sen} x = y \ln y$, si $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
(**Rta.** $\ln y = \csc x - \cot x$)

Ejercicio 5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$
(**Rta.** $(\frac{y+3}{x+4})^5 = Ce^{y-x}$)

Ejercicio 6. $x^2 y' = y - xy$, si $y(-1) = -1$
(**Rta.** $\ln|y| = -\frac{1}{x} - \ln|x| - 1$)

Ejercicio 7. $\frac{dy}{dx} - y^2 = -9$ que pase por los puntos:
a) $(0, 0)$, b) $(0, 3)$, c) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$
(**Rta.** a) $\frac{y-3}{y+3} = -e^{6x}$, b) $y = 3$, c) $\frac{y-3}{y+3} = -\frac{1}{2}e^{-2}e^{6x}$)

Ejercicio 8. Se suministran bacterias como alimento a una población de protozoarios a una razón constante μ. Se ha observado que las bacterias son devoradas a una tasa proporcional al cuadrado de su cantidad. Si $c(t)$ es la cantidad de bacterias en el instante t, hallar la E.D.; determinar $c(t)$ en función de $c(0)$; cuál es la concentración de equilibrio de las bacterias, es decir, cuando $c'(t) = 0$?
(**Rta.:** $\frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(t)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(t)} = \frac{\sqrt{\mu}+\sqrt{k}c(0)}{\sqrt{\mu}-\sqrt{k}c(0)} e^{2\sqrt{k\mu}t}$; concentración de equilibrio $c = \sqrt{\frac{\mu}{k}}$)

Ejercicio 9. Resolver por variables separables: $a\left[x\frac{dy}{dx}+2y\right]=xy\frac{dy}{dx}$ en $y=a$ y $x=2a$.
(**Rta.:** $yx^2=\frac{4a^3}{e}e^{\frac{y}{a}}$)

2.2. ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Definición 2.2 *: $f(x,y)$ es homogénea de grado n si existe un real n tal que para todo t: $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.*

Ejemplo 3. $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ es homogénea de grado dos.

Definición 2.3 *.Si una ecuación en la forma diferencial :*

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

tiene la propiedad que $M(tx,ty)=t^nM(x,y)$ y $N(tx,ty)=t^nN(x,y)$, entonces decimos que es de coeficientes homogéneos o que es una E.D. homogénea.

Siempre que se tenga una E.D. homogénea podrá ser reducida por medio de una sustitución adecuada a una ecuación en variables separables.

Método de solución: dada la ecuación

$$M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$$

donde $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado; mediante la sustitución $y=ux$ ó $x=yv$ (donde u ó v son nuevas variables dependientes), puede transformarse en un ecuación en variables separables.

Nota: si la estructura algebraica de N es más sencilla que la de M, entonces es conveniente usar las sustitución $y=ux$.
Si la estructura algebraica de M es más sencilla que la de N, es conveniente usar la sustitución $x=vy$.

Ejemplo 4. Resolver por el método de las homogéneas, la siguiente E.D.: $(x+ye^{\frac{y}{x}})\,dx-xe^{\frac{y}{x}}\,dy=0$, con $y(1)=0$.

Solución:
$(x + ye^{\frac{y}{x}})\,dx - xe^{\frac{y}{x}}\,dy = 0$ donde

$$\overbrace{M(x,y) = x + ye^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de orden 1}} \qquad \text{y} \qquad \overbrace{N(x,y) = -xe^{\frac{y}{x}}}^{\text{homogénea de orden 1}}$$

La sustitución más sencilla es: $y = ux$, por tanto $dy = u\,dx + x\,du$
Sustituyendo en la E.D.

$$(x + uxe^{\frac{ux}{x}})\,dx - xe^{\frac{ux}{x}}(u\,dx + x\,du) = 0$$

o sea que

$$x\,dx - x^2e^u\,du = 0$$

luego $x\,dx = x^2e^u\,du$, separando variables y considerando $x \neq 0$, obtenemos,

$$\frac{dx}{x} = e^u\,du \Rightarrow \ln x = e^u + C$$

Por lo tanto la solución general es

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} + C$$

Para hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = 0$, sustituimos en la solución general y obtenemos:

$$\ln 1 = e^{\frac{0}{1}} + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 + C \text{ de donde } C = -1$$

Por lo tanto,

$$\ln x = e^{\frac{y}{x}} - 1$$

es la solución particular

Ejemplo 5. $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ (ayuda: hacer $y = z^\alpha$ y calcular α para convertirla en homogénea)
Solución:
No es homogénea; hagamos $y = z^\alpha$ y hallemos α de tal manera que la E.D.O. se vuelva homogénea:

$$dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$$

$$(x^2z^{2\alpha}-1)\alpha z^{\alpha-1}dz+2xz^{3\alpha}dx=0$$
$$\alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0 \tag{2.1}$$

suma de exponentes en los términos: $2+3\alpha-1$, $\alpha-1$ y $1+3\alpha$ respectivamente.

Análisis de exponentes para que se cumpla la homogeneidad:

$1+3\alpha=2+3\alpha-1=\alpha-1$, se concluye $\alpha=-1$

Sustituyo en la E.D. (2.1): $(-1)(x^2z^{-2}-1)z^{-2}\,dz+2xz^{-3}\,dx=0$

$$(-x^2z^{-4}+z^{-2})\,dz+2xz^{-3}\,dx=0$$

Es homogénea de orden -2.

La sustitución más sencilla es $x=uz \Rightarrow dx=u\,dz+z\,du$.

$$(-u^2z^2z^{-4}+z^{-2})\,dz+2uzz^{-3}(u\,dz+z\,du)=0$$

$$(-u^2z^{-2}+z^{-2}+2u^2z^{-2})\,dz+(2uz^{-1})\,du=0$$

$$(u^2z^{-2}+z^{-2})\,dz+2uz^{-1}\,du=0$$

$$z^{-2}(u^2+1)\,dz+2uz^{-1}\,du=0$$

$$\frac{z^{-2}dz}{z^{-1}}+\frac{2u}{u^2+1}\,du=0$$

$$\frac{dz}{z}+\frac{2u}{u^2+1}\,du=0$$

Integrando: $\ln|z|+\ln(u^2+1)=\ln C$

$$\ln|z(u^2+1)|=\ln C \Rightarrow z(u^2+1)=C$$

reemplazo $u=\frac{x}{z}$ y tenemos, tomando $z\neq 0$

$$\frac{x^2}{z} + z = C$$

Como $y = z^{-1}$ o sea que $z = y^{-1}$, entonces $\frac{x^2}{y^{-1}} + y^{-1} = C$
luego

$$x^2y^2 + 1 = Cy,$$

es la solución general.

Resolver los siguientes ejercicios por el método de las homogéneas, ó convertirla en homogénea y resolverla según el caso:

Ejercicio 1. $\left(y + x\cot\frac{y}{x}\right)\,dx - x\,dy = 0.$
(**Rta.:** $C = x\cos\frac{y}{x}$)

Ejercicio 2. $(x + \sqrt{y^2 - xy})\frac{dy}{dx} = y$, con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $\ln^2|y| = 4(\frac{y-x}{y})$)

Ejercicio 3. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)\,dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln|x| + \operatorname{sen}\frac{y}{x} = C$)

Ejercicio 4. $(x^2 - 2y^2)\,dx + xy\,dy = 0.$
(**Rta.:** $x^4 = C(x^2 - y^2)$)

Ejercicio 5. $xy' = y + 2xe^{\frac{-y}{x}}.$
(**Rta.:** $\ln x = \frac{1}{2}e^{\frac{y}{x}+c}$)

Ejercicio 6. $(x + y^3)\,dx + (3y^5 - 3y^2x)\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $x = z^\alpha$).
(**Rta.:** $\ln|C(x^2 + y^6)| = 2\arctan\frac{y^3}{x}$)

Ejercicio 7. $2(x^2y + \sqrt{1 + x^4y^2})\,dx + x^3\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $y = z^\alpha$).
(**Rta.:** $x^4(1 + 2Cy) = C^2$)

Ejercicio 8. $y\cos x\,dx + (2y - \operatorname{sen} x)\,dy = 0$, (Ayuda: hacer $u = \operatorname{sen} x$).
(**Rta.:** $y^2 = Ce^{-\frac{\operatorname{sen} x}{y}}$)

Ejercicio 9. $y(\ln\frac{y}{x} + 1)\,dx - x\ln\frac{y}{x}\,dy = 0.$
(**Rta.:** $\ln|x| - \frac{1}{2}\ln^2|\frac{y}{x}| = C$)

Ejercicio 10. $\frac{dy}{dx} = \cos(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x}$.
(**Rta.:** $\sec(\frac{y}{x}) + \tan(\frac{y}{x}) = Cx$)

Ejercicio 11. Hallar la solución particular de la E.D.

$$yx^2dx - (x^3 + y^3)dy = 0,$$

donde $y(0) = 1$
(**Rta.:** $\ln|y| = \frac{1}{3}(\frac{x}{y})^3$)

Ejercicio 12. Hallar la solución particular de la E.D.

$$xy^2dy - (x^3 + y^3)dx = 0,$$

donde $y(1) = 0$
(**Rta.:** $\ln|x| = \frac{1}{3}(\frac{y}{x})^3$)

Ejercicio 13. $(y + \sqrt{xy})dx - 2xdy = 0$
(**Rta.:** $x(1 - \sqrt{\frac{y}{x}})^4 = C$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y(\ln y - \ln x - 1)dx + xdy = 0,$$

donde $y(e) = 1$
(**Rta.:** $x \ln|\frac{y}{x}| = -e$)

2.3. E.D. DE COEFICIENTES LINEALES: $(ax + by + c)\,dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)\,dy = 0$

Se presentan dos casos:

1. Si (h, k) es el punto de intersección entre las rectas:

$$ax + by + c = 0 \text{ y } \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

entonces se hace la sustitución: $x = u + h$ y $y = v + k$ y se consigue la ecuación homogénea de grado 1:

$$(au + bv)du + (\alpha u + \beta v)dv = 0$$

2. Si las dos rectas no se intersectan (o sea son paralelas), entonces

$$\alpha x + \beta y = n(ax + by)$$

y por tanto se hace la sustitución $z = ax + by$, lo cual quiere decir que $\alpha x + \beta y = nz$, esta sustitución convierte la E.D. en una E.D. de variables separables.

Ejercicios: resolver por el método anterior:

1. $(x - y + 1)\,dx + (x + 2y - 5)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = Ce^{\sqrt{2}\arctan\frac{x-1}{\sqrt{2}(y-2)}}$)

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4}$
(**Rta.:** $(x + y + 1)^3 = C^2(y - x + 3)$)

3. $(x - 2y + 4)\,dx + (2x - y + 2)\,dy = 0$
(**Rta.:** $(x + y - 2)^3 = C^2(x - y + 2)$)

4. $(x + y + 1)^2\,dx + (x + y - 1)^2\,dy = 0$
(**Rta.:** $4x = -\frac{1}{2}(x + y)^2 + 2(x + y) - \ln|x + y| + C$)

5. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $4 - x - 2y = 3\ln|2 - x - y| + C$)

6. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0$
(**Rta.:** $C^{-2} = 2(x + 1)(y - 3) + (x + 1)^2 - (y - 3)^2$)

7. $(x - y - 5)\,dx - (x + y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $C^{-2} = (x - 3)^2 - 2(y + 2)(x - 3) - (y + 2)^2$)

8. $(2x + y)\,dx - (4x + 2y - 1)\,dy = 0$
(**Rta.:** $x = \frac{2}{5}(2x + y) - \frac{4}{25} - \ln|5(2x + y) - 2| + C$)

2.4. ECUACIONES EXACTAS

Si $z = f(x, y)$, entonces

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

es la diferencial total de f; pero si $z = c = f(x, y)$ (familia de curvas uniparamétricas en el plano XY), entonces

$$dz = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

.

Definición 2.4 *.La forma diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una diferencial exacta en una región R del plano XY si corresponde a la diferencial total de alguna función $f(x, y)$.*

La ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$, es exacta si es la diferencial total de alguna función $f(x, y) = c$.

Teorema 2.1 (Criterio para E.D. exactas) .

Si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en una región R del plano XY, entonces la condición necesaria y suficiente para que la forma diferencial

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$$

sea una diferencial exacta es que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración: Como $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es una diferencial exacta, entonces existe una función $f(x, y)$ tal que:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = d\,f(x, y)$$

luego

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

y

$$N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}$$

por tanto,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La igualdad entre las derivadas cruzadas se produce porque M y N son continuas con derivadas de primer orden continuas.

Método. Dada la ecuación $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$, hallar una función $f(x,y)=C$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

i) Comprobar que es exacta, es decir, verificar que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

ii) Suponer que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ y luego integrar con respecto a x dejando a y constante:

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y) \tag{2.2}$$

iii) Derivar con respecto a y la ecuación (2.2)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

despejar

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \tag{2.3}$$

Esta expresión es independiente de x, en efecto:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$$
$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = 0$$

iv) Integrar la expresión (2.3) con respecto a y y sustituir en (2.2) e igualar a C.

Nota: en ii) se pudo haber comenzado por $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

Ejemplo 6. Resolver la siguiente E.D.:
$(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + e^x - 1)\,dy = 0$
Solución:
paso i)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 4xy + e^x\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 4xy + e^x\end{aligned}\right\}\ \text{de donde}\ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

paso ii)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int N(x, y)\,dy + h(x) = \int (2x^2y + e^x - 1)\,dy + h(x)\\ &= x^2y^2 + ye^x - y + h(x)\end{aligned}$$

paso iii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} = M &= 2xy^2 + ye^x\\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy^2 + ye^x + h'(x) \Rightarrow h'(x) = 0\end{aligned}$$

paso iv) $h(x) = C$
paso v) sustituyo $h(x)$ en el paso ii):

$$\begin{aligned} x^2y^2 + ye^x - y + C_1 &= C\\ x^2y^2 + ye^x - y &= C_2 \quad \text{Solución general}\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Hallar el valor de b para que sea exacta la E.D.:

$$(xy^2 + bx^2y)\,dx + (x + y)x^2\,dy = 0.$$

Solución:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= 2xy + bx^2\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= 3x^2 + 2xy \Rightarrow b = 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= xy^2+3x^2y \qquad (2.4)\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x^3+x^2y \qquad (2.5)\\
\text{integramos (2,4) : } f(x,y) &= \int (xy^2+3x^2y)\,dx + g(y)\\
f(x,y) &= y^2\frac{x^2}{2}+x^3y+g(y) \qquad (2.6)\\
\text{derivamos (2,6) con respecto a } y &\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= yx^2+x^3+g'(y) \qquad (2.7)\\
\text{igualamos (2,5) y (2,7)} &\\
x^3+x^2y &= yx^2+x^3+g'(y)\\
K &= g(y)
\end{aligned}$$

reemplazamos $g(y)$ en (2,6)

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y^2\frac{x^2}{2}+x^3y+K=C_1\\
&= \frac{y^2x^2}{2}+x^3y=C
\end{aligned}$$

que es la solución general.

Ejercicio 1. Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas :

$$(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x\cos y\,dy = 0.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x \operatorname{sen} y - \ln|\cos x| = C$)

Ejercicio 2. Resolver la siguiente E.D. por el método de las exactas:

$$(y^2\cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y\operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\,dy = 0, \text{ con } y(0)=e.$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y^2\operatorname{sen} x - x^3y - x^2 + y(\ln y - 1) = 0$)

Ejercicio 3. Determinar la función $M(x,y)$ de tal manera que la siguiente E.D.O sea exacta:

$$M(x,y)\,dx + \left(xe^xy + 2xy + \frac{1}{x}\right)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $M(x,y) = \frac{1}{2}y^2e^x(x+1) + y^2 - \frac{y}{x^2} + g(x)$)

Ejercicio 4. Determinar la función $N(x,y)$ para que la siguiente E.D. sea exacta:

$$\left(y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{x^2+y}\right)dx + N(x,y)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $N(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y)^{-1} + g(y)$)

Ejercicio 5. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2xy^2 + ye^x)\,dx + (2x^2y + e^x - 1)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = y(x^2y + e^x - 1) = C$)

Ejercicio 6. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(2x - y\operatorname{sen} xy - 5y^4)\,dx - (20xy^3 + x\operatorname{sen} xy)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = x^2 + \cos(xy) - 5y^4x = C$)

Ejercicio 7. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(\operatorname{sen} xy + xy\cos xy)\,dx + (x^2\cos xy)\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = x\operatorname{sen}(xy) = C$)

Ejercicio 8. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(ye^{xy} + 4y^3)\,dx + (xe^{xy} + 12xy^2 - 2y)\,dy = 0,\ \text{con } y(0) = 2$$

(**Rta.:** $f(x,y) = e^{xy} + 4xy^3 - y^2 = -3$)

Ejercicio 9. Resolver por el método de las exactas la siguiente E.D.:

$$(1 - \operatorname{sen} x\tan y)\,dx + \cos x\sec^2 y\,dy = 0$$

(**Rta.:** $f(x,y) = \cos x\tan y + x = C$)

2.5. FACTORES DE INTEGRACIÓN

Definición 2.5 (Factor Integrante F.I.) . *Sea la E.D.*

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0.$$

Si $\mu(x,y)$ es tal que

$$\mu(x,y)\,M(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,N(x,y)\,dy = 0$$

es una E.D. exacta, entonces decimos que $\mu(x,y)$ es un factor integrante (F.I.).

Ejemplos de algunas formas diferenciales que son exactas.
Ejemplo: $x\,dx + y\,dy$ es la diferencial de $\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ ya que $d\left(\frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\right) = x\,dx + y\,dy$.

Anlogamente: para $x\,dy + y\,dx = d(xy)$.

Pero $py\,dx + qx\,dy$ no es exacta, la expresión $\mu(x,y) = x^{p-1}y^{q-1}$ es un factor integrante.

Para $y\,dx - x\,dy$, las expresiones:

$$\mu = \frac{1}{y^2}\ ;\ \mu = \frac{1}{x^2}\ ;\ \mu = \frac{1}{xy}\ ;\ \mu = \frac{1}{x^2+y^2}\ ;\ \mu = \frac{1}{ax^2+bxy+cy^2}$$

son factores integrantes.

Teorema 2.2 (Teorema del Factor Integrante) *:*

Sea $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy = 0$ una E.D. y $\mu(x,y)$ un factor integrante, con M, N y μ continuas y con primeras derivadas parciales continuas , entonces

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

Demostración: Si μ es tal que $\mu M\,dx + \mu N\,dy = 0$ es exacta y $\mu,\ M,\ N$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

o sea que

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

luego

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = N\left[\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{M}{N}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right]$$

como $\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$, entonces:

$$\mu\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = N\left[\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right] = N\frac{d\mu}{dx} = -M\frac{d\mu}{dy}$$

ya que si $\mu = \mu(x, y)$ y $\quad y = y(x)$ entonces:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \mu}{\partial y}\,dy$$

y por tanto

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

Nota.

1. Si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$,
   entonces $\mu f(x) = \frac{d\mu}{dx}$ y por tanto $f(x)dx = \frac{d\mu}{\mu}$,
   luego $\mu = ke^{\int f(x)dx}$; tomando $k = 1$ se tiene $\mu = e^{\int f(x)dx}$.

2. Similarmente, si $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = g(y)$, entonces $\mu = e^{\int g(y)dy}$.

Ejemplo 8. $(2xy^2 - 2y)\,dx + (3x^2y - 4x)\,dy = 0$.
Solución:

$$M(x, y) = 2xy^2 - 2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy - 2$$

$$N(x, y) = 3x^2y - 4x \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy - 4$$

luego
$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2xy + 2$$
por tanto
$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{-2xy+2}{-2xy^2+2y} = \frac{2(-xy+1)}{2y(-xy+1)}$$
luego
$$g(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow F.I. = \mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = e^{\ln|y|} = y$$
multiplico la E.D. original por y: $(2xy^3 - 2y^2)\,dx + (3x^2y^2 - 4xy)\,dy = 0$

el nuevo $M(x,y) = 2xy^3 - 2y^2$ y el nuevo $N(x,y) = 3x^2y^2 - 4xy$

Paso 1.
$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 - 4y$$
y
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2 - 4y$$
luego es exacta.

Paso 2.
$$f(x,y) = \int (2xy^3 - 2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2xy^2 + g(y)$$

Paso 3. Derivando con respecto a y:
$$N = 3x^2y^2 - 4xy = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4xy + g'(y)$$
luego $g'(y) = 0$

Paso 4. $g(y) = k$

Paso 5. Reemplazo en el paso 2.
$$f(x,y) = x^2y^3 - 2xy^2 + k = c$$
luego $x^2y^3 - 2xy^2 = k_1$ que es la solución general.

Ejemplo 9. $x\,dy - y\,dx = (6x^2 - 5xy + y^2)\,dx$
Solución:

como $d(\frac{y}{x}) = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}$

entonces dividimos a ambos lados de la E.D. por x^2, luego

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \left(\frac{6x^2 - 5xy + y^2}{x^2}\right) dx$$

luego

$$d(\frac{y}{x}) = \left(6 - 5(\frac{y}{x}) + (\frac{y}{x})^2\right) dx,$$

hagamos $u = \frac{y}{x} \Rightarrow du = (6 - 5u + u^2)dx$

luego $\dfrac{du}{6 - 5u + u^2} = dx \Rightarrow \dfrac{du}{(u-3)(u-2)} = dx$

pero por fracciones parciales $\dfrac{1}{(u-3)(u-2)} = \dfrac{A}{u-3} + \dfrac{B}{u-2}$

o sea que $A = 1$ y $B = -1$, por tanto

$$\int \frac{du}{(u-3)(u-2)} = \int dx \Rightarrow \int \frac{du}{u-3} - \int \frac{du}{u-2} = \ln|u-3| - \ln|u-2| + \ln c = x$$

luego

$$c\frac{(u-3)}{(u-2)} = e^x, \text{ si } x \neq 0 \Rightarrow c\frac{(y-3x)}{(y-2x)} = e^x$$

Obsrvese que $x = 0$ es también solución y es singular porque no se desprende de la solución general.

En los siguientes ejercicios, hallar el factor integrante y resolver por el método de las exactas:

Ejercicio 1. $(\cos(2y) - \operatorname{sen} x)\,dx - 2\tan x \operatorname{sen}(2y)\,dy = 0$.
(**Rta.:** $\operatorname{sen} x \cos(2y) + \frac{1}{2}\cos^2 x = C$)

Ejercicio 2. $(3xy^3 + 4y)\,dx + (3x^2y^2 + 2x)\,dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = x^3y^3 + 2x^2y = C$)

Ejercicio 3. $2xy\ln y\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\,dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = x^2\ln y + \frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}} = C$)

Ejercicio 4. $(2wz^2 - 2z)\,dw + (3w^2z - 4w)\,dz = 0$.
(**Rta.:** $w^2z^3 - 2z^2w = C$)

Ejercicio 5. $e^x dx + (e^x\cot y + 2y\csc y)dy = 0$
(**Rta.:** $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 = C$)

Ejercicio 6. $x\,dy + y\,dx = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)(dx + dy)$.
(**Rta.:** $xy = \frac{1}{4}(x+y)^4 + C$)

Ejercicio 7. $x\,dy - y\,dx = (2x^2 + 3y^2)^3(2xdx + 3ydy)$.
(**Rta.:** $\sqrt{\frac{2}{3}}\tan^{-1}(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{y}{x}) = \frac{1}{3}(2x^2+3y^2)^3 + C$)

Ejercicio 8. $y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0$.
(**Rta.:** $y^2x - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = C$)

Ejercicio 9. $(xy-1)dx + (x^2 - xy)dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = xy - \ln|x| - \frac{y^2}{2} = C$)

Ejercicio 10. $ydx + (x^2y - x)dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = C$)

Ejercicio 11. $(2xy - e^{-2x})dx + xdy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = ye^{2x} - \ln|x| = C$)

Ejercicio 12. $ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = xe^{2y} - \ln|y| = C$)

Ejercicio 13. $(x+y)dx + x\ln x dy = 0$.
(**Rta.:** $f(x,y) = x + y\ln x = C$)

Ejercicio 14. Hallar la solución particular que pasa por el punto $y(1) = -2$, de la E.D.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}$$

(**Rta.:** $x^3y^2 + y^3x = -4$)

Ejercicio 15. $x\,dx + y\,dy = 3\sqrt{x^2+y^2}\; y^2\,dy$.
(**Rta.:** $\sqrt{x^2+y^2} = y^3 + C$)

Ejercicio 16. $4y\,dx + x\,dy = xy^2\,dx$.
(**Rta.:** $\frac{1}{yx^4} - \frac{1}{3x^3} = C$)

Ejercicio 17. Si
$$\frac{M_y - N_x}{yN - xM} = R(xy),$$
entonces $\mu = F.I. = e^{\int^t R(s)\,ds}$, donde $t = xy$

Ejercicio 18. Bajo que condiciones $Mdx + Ndy = 0$ tendrá un F.I.$=\mu(x+y)$

Ejercicio 19. Si $Mdx + Ndy = 0$ es homogénea, entonces $\mu(x,y) = \frac{1}{xM+yN}$

2.6. E.D. LINEAL DE PRIMER ORDEN

Definición 2.6 . *Una E.D. de la forma:*
$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = h(x),$$
donde $a_1(x) \neq 0$, *en* I *y* $a_1(x), a_0(x), h(x)$ *son continuas en* I*, se le llama E.D. lineal en* y *de primer orden.*

Dividiendo por $a_1(x)$, se obtiene la llamada ecuación en forma canónica ó forma estandar:
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x),$$
donde $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ y $Q(x) = \dfrac{h(x)}{a_1(x)}$.

Teorema 2.3 (Teorema de la E.D. lineal de primer orden) *:*

La solución general de la E.D. lineal en y, de primer orden:

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

es :

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int e^{\int p(x)\,dx} Q(x)\,dx + C.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + p(x)y &= Q(x) \qquad (2.8) \\ &\Rightarrow p(x)y\,dx + dy = Q(x)\,dx \end{aligned}$$

o sea que $(p(x)y - Q(x))\,dx + dy = 0$, como $\frac{\partial M}{\partial y} = p(x)$ y $\frac{\partial N}{\partial x} = 0$, entonces

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = p(x)$$

y por tanto $\mu = e^{\int p(x)\,dx} = F.I.$; multiplicando (2.8) por el $F.I.$:

$$e^{\int p(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + p(x)ye^{\int p(x)\,dx} = Q(x)e^{\int p(x)\,dx}$$

o sea $\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)\,dx}) = Q(x)e^{\int p(x)\,dx}$ e integrando con respecto a x se tiene:

$$ye^{\int p(x)\,dx} = \int Q(x)e^{\int p(x)\,dx}dx + C$$

Obsrvese que la expresión anterior es lo mismo que:

$$y\,F.I. = \int Q(x)\,F.I.\,dx + C$$

Ejemplo 10. Hallar la solución general de la E.D.:$(6 - 2\mu\nu)\frac{d\nu}{d\mu} + \nu^2 = 0$

Solución:

$$\frac{d\nu}{d\mu} = -\frac{\nu^2}{6 - 2\mu\nu}$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} = -\frac{6}{\nu^2} + \frac{2\mu}{\nu}$$

$$\frac{d\mu}{d\nu} - \frac{2\mu}{\nu} = -\frac{6}{\nu^2}$$

que es lineal en μ con

$$p(\nu) = -\frac{2}{\nu}, \; Q(\nu) = -\frac{6}{\nu^2}$$

$$F.I. = e^{\int p(\nu) d\nu} = e^{\int -\frac{2}{\nu} d\nu} = e^{-2\ln|\nu|} = e^{\ln|\nu|^{-2}} = \nu^{-2} = \frac{1}{\nu^2}$$

La solución general es

$$\frac{1}{\nu^2}\mu = \int \frac{1}{\nu^2}(-\frac{6}{\nu^2}) d\nu + C$$

$$\frac{1}{\nu^2}\mu = -6 \int \nu^{-4} d\nu + C = -6\frac{\nu^{-3}}{-3} + C$$

$$\frac{\mu}{\nu^2} = \frac{2}{\nu^3} + C \Rightarrow \mu = \frac{2}{\nu} + C\nu^2$$

que es la solución general.

Ejemplo 11. Hallar una solución continua de la E.D.: $\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x\;, & 0 \leq x < 1 \\ 0\;, & x \geq 1 \end{cases}$

y $y(0) = 2$

Solución:

$$F.I. : e^{\int 2x dx} = e^{x^2} \Rightarrow e^{x^2} y = \int e^{x^2} f(x) dx + C$$

a). si $0 \leq x < 1 : e^{x^2} y = \int e^{x^2} x \, dx + C$

$e^{x^2} y = \frac{1}{2} \int e^{x^2} 2x \, dx + C$

$e^{x^2} y = \frac{1}{2} e^{x^2} + C,$ solución general

$y(0) = 2 \Rightarrow e^{0^2}2 = \frac{1}{2}e^{0^2} + C$

$2 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{3}{2}$

$y = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$, solución particular

b). si $x \geq 1 : F.I.y = \int F.I.\,0\,dx + C$

$e^{x^2}y = 0 + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Solución: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2} & 0 \leq x < 1 \\ Ce^{-x^2} & x \geq 1 \end{cases}$

Busquemos C, de tal manera que la función $f(x)$ sea continua en $x = 1$. Por tanto

$$\lim_{x \to 1}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}) = f(1) = y(1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1} = Ce^{-1}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-1}}{e^{-1}} = \frac{1}{2}\,e + \frac{3}{2}$$

Ejemplo 12. Con un cambio de variable adecuado trasformar la E.D.:

$$y' + x \operatorname{sen} 2y = xe^{-x^2} \cos^2 y$$

en una E.D. lineal de primer orden y luego resolverla.
Solución. Lo trabajamos mediante cambios de variable.
Dividiendo por $\cos^2 y$:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + \frac{x(2 \operatorname{sen} y \cos y)}{\cos^2 y} = xe^{-x^2}$$

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = xe^{-x^2}$$

hagamos el siguiente cambio de variable: $t = \tan y$, por lo tanto

$$\frac{dt}{dx} = \sec^2 y \frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo

$$\frac{dt}{dx} + 2xt = xe^{-x^2}, \quad \text{es lineal en t con}$$

$$p(x) = 2x, \qquad Q(x) = xe^{-x^2}$$

$$F.I. = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$$

Resolviéndola

$$t\,F.I. = \int F.I.Q(x)\,dx + C$$

$$te^{x^2} = \int e^{x^2}(xe^{-x^2})\,dx + C$$

$$\Rightarrow \tan y\, e^{x^2} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ejercicio 1. Hallar una solución continua de la E.D.:

$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

donde $f(x) = \begin{cases} x\,, & 0 \le x < 1 \\ -x\,, & x \ge 1 \end{cases}$

con $y(0) = 0$.

(**Rta.:** $y(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2(1+x^2)}, & \text{si } 0 \le x < 1 \\ -\frac{x^2}{2(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2}, & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$)

Ejercicio 2. Hallar la solución de la E.D.: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}$ con $y(5) = 2$
(**Rta.:** $xy = \frac{y^2}{2} + 8$)

Ejercicio 3. Resolver para $\varphi(x)$ la ecuación $\int_0^1 \varphi(\alpha x)\,d\alpha = n\varphi(x)$
(Ayuda: con un cambio de variable adecuado transforme la ecuación en una E.D. lineal de primer orden.)
(**Rta.:** $\varphi(x) = Cx^{(\frac{1-n}{n})}$)

Ejercicio 4. Hallar la solución de la E.D.: $y' - 2xy = \cos x - 2x \operatorname{sen} x$ donde y es acotada cuando $x \to \infty$.

(**Rta.:** $y = \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 5. Hallar la solución de la E.D.: $2\sqrt{x}\, y' - y = -\operatorname{sen}\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}$ donde y es acotada cuando $x \to \infty$.
(**Rta.:** $y = \cos\sqrt{x}$)

Ejercicio 6. Resolver la E.D.: $(x+2)^2\,\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$.
(**Rta.:** $y(2+x)^4 = \frac{5}{3}(2+x)^3 + C$)

Ejercicio 7. Resolver la E.D.: $y - x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}\, y^2 e^y$.
(**Rta.:** $\frac{x}{y} - xy = C$)

Ejercicio 8. El suministro de glucosa al torrente sanguíneo es una técnica importante para detectar la diabetes en una persona. Para estudiar este proceso, definimos $G(t)$ como la cantidad de glucosa presente en la sangre de un paciente en el tiempo t. Suponga que la glucosa se suministra al sistema sanguíneo a una tasa constante $k\frac{gr.}{min.}$. Al mismo tiempo la glucosa se transforma y se separa de la sangre a una tasa proporcional a la cantidad de glucosa presente. Construir la E.D. y resolverla. Hallar $G(t)$ cuando $t \to \infty$.

Ejercicio 9. Hallar la solución general en términos de $f(x)$, de la E.D.:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{f'(x)}{f(x)}\, y = f'(x)$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{3}f(x) + \frac{C}{[f(x)]^2}$)

Ejercicio 10. Hallar $y(x)$ en función de $f(x)$ si

$$\frac{dy}{dx} + f(x)\, y = f(x)y^2$$

(**Rta.:** $y = \frac{1}{(1 - Ce^{\int f(x)\, dx})}$)

Ejercicio 11. Hallar la solución general de la E.D.

$$(x+1)y' + (2x-1)y = e^{-2x}$$

(**Rta.:** $y = -\frac{1}{3}e^{2x} + Ce^{-2x}(x+1)^3$)

Ejercicio 12. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y' + y = 2xe^{-x} + x^2 \text{si } \ y(0) = 5$$

(**Rta.:** $y = x^2e^{-x} + x^2 - 2x + 2 + 3e^{-x}$)

Ejercicio 13. Hallar la solución particular de la E.D.

$$(1 - 2xy^2)dy = y^3dx$$

si $y(0) = 1$
(**Rta.:** $xy^2 = \ln y$)

2.7. ECUACION DIFERENCIAL DE BERNOULLI

Definición 2.7 . *Una E.D. de la forma* $\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)y^n$ *con* $n \neq 0$ *y* $n \neq 1$*, se le llama una E.D. de Bernoulli. Obsrvese que es una E.D. no lineal.*

La sustitución $w = y^{1-n}$ convierte la E.D. de Bernoulli en una E.D. lineal en w de primer orden:

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)p(x)w = (1-n)\,Q(x).$$

Ejemplo 13. $xy(1 + xy^2)\frac{dy}{dx} = 1$ con $y(1) = 0$.
Solución:
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy\,(1+xy^2)} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{dy} = xy\,(1 + xy^2) = xy + x^2y^3$

$$\frac{dx}{dy} - xy = x^2y^3 \tag{2.9}$$

tiene la forma de Bernoulli con variable dependiente x, con $n = 2$
Hagamos $w = x^{1-2} = x^{-1} \Rightarrow x = w^{-1}$

$$\frac{dx}{dy} = -w^{-2}\frac{dw}{dy}$$

sustituimos en (2.9): $-w^{-2}\frac{dw}{dy} - yw^{-1} = y^3w^{-2}$
multiplicamos por $-w^{-2}$: $\frac{dw}{dy} + yw = -y^3$, lineal en w de primer orden.
luego $p(y) = y;\ Q(y) = -y^3$

$$F.I. = e^{\int P(y)\,dy} = e^{\int y\,dy} = e^{\frac{y^2}{2}}$$

$$w\,F.I. = \int F.I.\,Q(y)\,dy + C$$

$$w\,e^{\frac{y^2}{2}} = \int e^{\frac{y^2}{2}}(-y^3)\,dy + C$$

hagamos: $u = \frac{y^2}{2} \Rightarrow du = y\,dy$, $y^2 = 2u$

$$w\,e^{\frac{y^2}{2}} = -\int y^3 e^{\frac{y^2}{2}}\,dy + C = -2\int ue^u\,du + C$$

e integrando por partes, obtenemos: $w\,e^{\frac{y^2}{2}} = -2u\,e^u + 2e^u + C$

$$x^{-1}e^{\frac{y^2}{2}} = -y^2e^{\frac{y^2}{2}} + 2e^{\frac{y^2}{2}} + C \Rightarrow \frac{1}{x} = -y^2 + 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$$

Como $y(1) = 0$ entonces $C = -1$, por lo tanto la solución particular es:

$$\frac{1}{x} = -y^2 + 2 - e^{-\frac{y^2}{2}}$$

Resolver las E.D. de los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $2\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}$ con $y(1) = 1$.
(**Rta.:** $y^3x^{-\frac{3}{2}} = -3x^{\frac{1}{2}} + 4$)

Ejercicio 2. $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$.
(**Rta.:** $x^3 = -y - 2 + Ce^y$)

Ejercicio 3. $tx^2\frac{dx}{dt} + x^3 = t\cos t$.
(**Rta.:** $x^3t^3 = 3(3(t^2-2)\cos t + t(t^2-6)\operatorname{sen} t) + C$)

Ejercicio 4. $y' = \frac{x}{x^2y+y^3}$.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 + 1 = Ce^{y^2}$)

Ejercicio 5. $xy' + y = x^4y^3$.
(**Rta.:** $y^{-2} = -x^4 + cx^2$)

Ejercicio 6. $xy^2y' + y^3 = \frac{\cos x}{x}$.
(**Rta.:** $x^3y^3 = 3x \operatorname{sen} x + 3\cos x + C$)

Ejercicio 7. $x^2y' - y^3 + 2xy = 0$.
(**Rta.:** $y^{-2} = \frac{2}{5x} + Cx^4$)

Ejercicio 8. Hallar la solución particular de la E.D.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = \sqrt{y}(\frac{x}{y^2})^{\frac{3}{2}}$$

tal que $y(1) = 1$
(**Rta.:** $y^3 = x$)

Ejercicio 9. Hallar la solución particular de la E.D.

$$(1 - 2xy^2)dy = y^3dx$$

tal que $y(0) = 1$
(**Rta.:** $xy^2 = \ln|y|$)

2.8. E.D. NO LINEALES DE PRIMER ORDEN

Sea

$$(y')^n + a_1(x,y)(y')^{n-1} + a_2(x,y)(y')^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x,y)y' + a_n(x,y) = 0,$$

donde $a_i(x,y)$ para $i = 1 \ldots n$ son funciones reales y continuas en una región R del plano XY.

Casos:

i) Se puede despejar y'.

ii) Se puede despejar y.

iii) Se puede despejar x.

Caso i). Si hacemos $p = \frac{dy}{dx} = y'$, entonces

$$p^n + a_1(x,y)p^{n-1} + a_2(x,y)p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(x,y)p + a_n(x,y) = 0.$$

En caso que sea posible que la ecuación anterior se pueda factorizar en factores lineales de p, se obtiene lo siguiente:

$$(p - f_1(x,y))(p - f_2(x,y)) \ldots (p - f_n(x,y)) = 0,$$

donde $f_i(x,y)$ para $i = 1, \ldots, n$ son funciones reales e integrables en una región R del plano XY.

Si cada factor tiene una solución $\varphi_i(x,y,c) = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. entonces la solución general es $\prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x,y,c) = 0$.

Ejemplo 14. $(y' - \operatorname{sen} x)((y')^2 + (2x - \ln x)y' - 2x \ln x) = 0.$
<u>Solución:</u>

$$(p - \operatorname{sen} x)(p^2 + (2x - \ln x)p - 2x \ln x) = 0$$

$$(p - \operatorname{sen} x)(p + 2x)(p - \ln x) = 0$$

Para el factor $p - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow dy = \operatorname{sen} x \, dx \Rightarrow$ $y = -\cos x + C$

$$\phi_1(x,y,C) = 0 = y + \cos x - C$$

Para el factor $p + 2x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow dy = -2x \, dx$

$$\Rightarrow y = -x^2 + C \Rightarrow \phi_2(x,y,C) = 0 = y + x^2 - C$$

Para el factor $p - \ln x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \ln x \Rightarrow dy = \ln x \, dx$

$$y = \int \ln x \, dx + C,$$

e integrando por partes:

$$y = \int \ln x\, dx + C = x \ln x - \int x \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x + C$$

$$\phi_3(x, y, C) = 0 = y - x \ln x + x - C$$

La solución general es: $\prod_{i=1}^{3} \phi_i(x, y, C) = 0$

$$(y + \cos x - C)(y + x^2 - C)(y - x \ln x + x - C) = 0$$

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $p\,(p^2 - 2xp - 3x^2) = 0$.
(**Rta.:** $(y - c)(2y - 3x^2 + c)(2y + x^2 + c) = 0$)

Ejercicio 2. $6\mu^2 \left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)^2 - 13\mu\nu\frac{d\nu}{d\mu} - 5\nu^2 = 0$.
(**Rta.:** $(\nu\mu^{\frac{1}{3}} - c)(\nu\mu^{-\frac{5}{2}} - c) = 0$)

Ejercicio 3. $(y')^3 - y(y')^2 - x^2y' + x^2y = 0$.
(**Rta.:** $(x - \ln|y| + c)(y + \frac{x^2}{2} - c)(y - \frac{x^2}{2} - c) = 0$)

Ejercicio 4. $n^2p^2 - x^{2n} = 0$, con $n \neq 0$ y $\frac{dy}{dx} = p = y'$.
(**Rta.:** $(y + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - c)(y - \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} - c) = 0$)

Ejercicio 5. Denotando por P cualquier punto sobre una curva C y T el punto de intersección de la tangente con el eje Y. Hallar la ecuación de C si $\overline{PT} = k$.
(**Rta.:**$(y + c)^2 = \left[\sqrt{k^2 - x^2} + k \ln\left|\frac{\sqrt{k^2-x^2}-k}{x}\right|\right]^2$, con $|x| \leq k, k > 0$.)

Caso ii). Son ecuaciones de la forma $F(x, y, p) = 0$ y de la cual puede despejarse y, es decir: $y = f(x, p)$, donde x y p se consideran como variables independientes, la diferencial total es:

$$dy = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp$$

luego

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$$

o sea que

$$0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = g(x,p,p'),\ \text{donde } p' = \frac{dp}{dx}$$

y por tanto

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right)\, dx + \frac{\partial f}{\partial p}\, dp = 0$$

es una E.D. de primer orden en x y p. Generalmente (teniendo buena suerte)

$$g(x,p,p') = 0$$

se puede factorizar, quedando así: $g(x,p,p') = h(x,p,p')\,\phi\,(x,p) = 0$.

a) Con el factor $h(x,p,p') = 0$ se obtiene una solución $h_1(x,p,c) = 0$, se elimina p entre $h_1(x,p,c) = 0$ y $F(x,y,p) = 0$ y se obtiene la solución general.

b) Con $\phi(x,p) = 0$ se obtiene una solución singular, al eliminar p entre $\phi(x,p) = 0$ y $F(x,y,p) = 0$.

Ejemplo 15. $y = f(x,p) = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$, donde $p = \frac{dy}{dx}$

<u>Solución</u>: $\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}$
si $x \neq 0$

$$p = (p+2x)\ln x + (px+x^2)\frac{1}{x} + 2(px+x^2)(p+2x) - x + [x\ln x + 2(px+x^2)x]\frac{dp}{dx}$$

$$p = (p+2x)\ln x + p + x + 2x(p+x)(p+2x) - x + [x\ln x + 2x^2(p+x)]\tfrac{dp}{dx}$$

$$0 = (p+2x)\ln x + 2x(p+x)(p+2x) + [x\ln x + 2x^2(p+x)]\tfrac{dp}{dx}$$

$$0 = (p+2x)[\ln x + 2x(p+x)] + x[\ln x + 2x(p+x)]\tfrac{dp}{dx}$$

$$0 = [\ln x + 2x(p+x)]\left[p + 2x + x\tfrac{dp}{dx}\right]$$

$$0 = h(x,p), \Phi(x,p,p')$$

1) Con el factor $\Phi(x,p,p') = p + 2x + x\frac{dp}{dx} = 0$

$\Rightarrow x\frac{dp}{dx} + p = -2x \stackrel{x\neq 0}{\Rightarrow} \frac{dp}{dx} + \frac{p}{x} = -2$ (dividimos por x)

E.D.lineal en p, $P(x) = \frac{1}{x}$, $Q(x) = -2$

$F.I. = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = e^{\ln|x|} = x$

$p\,F.I. = \int F.I. Q(x)\,dx + C$

$px = \int x(-2)\,dx + C = -\frac{2x^2}{2} + C = -x^2 + C$

$p = -x + \frac{C}{x}$ (dividimos por x)

luego sustituimos en la E.D. original:

$$y = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = (-x^2 + C + x^2)\ln x + (-x^2 + C + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

solución general

$$y = C\ln x + C^2 - \frac{x^2}{2}$$

2) $h(x,p) = \ln x + 2x(p + x) = 0$

$$0 = \ln x + 2xp + 2x^2$$

$$2xp = -\ln x - 2x^2$$

luego $p = -\frac{\ln x - 2x^2}{2x} \Rightarrow px = -\frac{\ln x + 2x^2}{2}$

sustituyo en la E.D. original:

$$y = (px + x^2)\ln x + (px + x^2)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = \left(-\frac{\ln x + 2x^2}{2} + x^2\right)\ln x + \left(-\frac{\ln x + 2x^2}{2} + x^2\right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = \left(\frac{-\ln x - 2x^2 + 2x^2}{2}\right)\ln x + \left(\frac{-\ln x - 2x^2 + 2x^2}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{2}$$

$$y = -\frac{\ln^2 x}{2} + \frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{2}$$

luego la solución singular es

$$y = -\frac{\ln^2 x}{4} - \frac{x^2}{2}$$

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios, donde $p = \frac{dy}{dx}$:

Ejercicio 1. $xp^2 - 2yp + 3x = 0$.
(**Rta.:** $2cy = c^2x^2 + 3, \quad y^2 = 3x^2$)

Ejercicio 2. $y = px\ln x + p^2x^2$.
(**Rta.:** $y = c\ln x + c^2, \quad y = -\frac{1}{4}\ln^2 x$)

Ejercicio 3. $y = 5xp + 5x^2 + p^2$.
(**Rta.:** $y = cx - x^2 + c^2, \quad 4y + 5x^2 = 0$)

Ejercicio 4. $p^2x^4 = y + px$.
(**Rta.:** $y = c^2 - cx^{-1}, \quad y = -\frac{1}{4x^2}$)

Ejercicio 5. $2y = 8xp + 4x^2 + 3p^2$.
(**Rta.:** $2y = 3(c-x)^2 + 8(c-x)x + 4x^2, \quad y = -\frac{2x^2}{3}$)

Ejercicio 6. $y = xp - \frac{1}{3}p^3$.
(**Rta.:** $y = cx - \frac{1}{3}c^3, \quad y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$)

Caso iii). Si en la ecuación $F(x, y, p) = 0$, se puede despejar $x = g(y, p)$ con y y p como variables independientes; hacemos $\frac{dy}{dx} = p$, o sea que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p}$ y como

$$dx = \frac{\partial g}{\partial y}\,dy + \frac{\partial g}{\partial p}\,dp$$

luego

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial p}\frac{dp}{dy}$$

por tanto

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{1}{p}\right)+\frac{\partial g}{\partial p}\,\frac{dp}{dy}=0=h(y,p,p')$$

donde $p'=\frac{dp}{dy}$.

Ejemplo 16. $\cos^2\beta\left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3-2\alpha\frac{d\beta}{d\alpha}+2\tan\beta=0$

Solución: con $p=\frac{d\beta}{d\alpha}$, se tiene:

$$\alpha=\frac{\cos^2\beta\,p^3+2\tan\beta}{2p}$$

$$\alpha=\frac{\cos^2\beta\,p^2}{2}+\frac{\tan\beta}{p}=g(\beta,p)$$

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial g}{\partial\beta}+\frac{\partial g}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial\beta}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{p}=-\cos\beta\operatorname{sen}\beta\,p^2+\frac{\sec^2\beta}{p}+\left[p\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

Teniendo en cuenta la identidad: $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$;

$$\frac{1}{p}=-\cos\beta\operatorname{sen}\beta\,p^2+\frac{1}{p}+\frac{\tan^2\beta}{p}+\left[p\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0=-\cos\beta\operatorname{sen}\beta\,p^2+\frac{\tan^2\beta}{p}+\left[p\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p^2}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0=-\operatorname{sen}\beta\cos\beta\,p^2+\frac{\tan^2\beta}{p}+\frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0=\tan\beta\left[\frac{-\operatorname{sen}\beta\cos\beta\,p^2}{\tan\beta}+\frac{\tan\beta}{p}\right]+\frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0=-\tan\beta\left[\cos^2\beta\,p^2-\frac{\tan\beta}{p}\right]+\frac{1}{p}\left[p^2\cos^2\beta-\frac{\tan\beta}{p}\right]\frac{dp}{d\beta}$$

$$0=\left[\cos^2\beta\,p^2-\frac{\tan\beta}{p}\right]\left[-\tan\beta+\frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta}\right]$$

$$0=h(\beta,p)\ \phi(\beta,p,p'),\qquad\text{donde }\ p=\frac{d\beta}{d\alpha}\ \text{ y }\ p'=\frac{dp}{d\beta}$$

$$① : \; \phi(\beta, p, p') = -\tan\beta + \frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}\frac{dp}{d\beta} = \tan\beta \Rightarrow \frac{dp}{p} = \tan\beta\, d\beta$$

$$\Rightarrow \ln|p| = -\ln|\cos\beta| + \ln|C|$$

$$\ln|p| = \ln\frac{|c|}{|\cos\beta|} \Rightarrow p = \frac{c}{\cos\beta}, \quad \text{donde } \cos\beta \neq 0$$

Sustituyendo en el la E.D. original:

$$\cos^2\beta\, p^3 - 2\alpha\, p + 2\tan\beta = 0$$

$$\cos^2\beta\,\frac{c^3}{\cos^3\beta} - 2\alpha\,\frac{c}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\frac{c^3}{\cos\beta} - 2\alpha\,\frac{c}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\frac{c^3}{\cos\beta} + 2\tan\beta}{2\,\frac{c}{\cos\beta}} = \frac{\frac{c^3}{\cos\beta} + \frac{2\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}}{2\,\frac{c}{\cos\beta}}$$

La solución general es :

$$= \frac{c^3 + 2\,\mathrm{sen}\,\beta}{2c} = \frac{c^2}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,\beta}{c}; \quad c \neq 0$$

$$② : \; h(\beta, p) = 0 = \cos^2\beta\, p^2 - \frac{\tan\beta}{p}$$

$$\cos^2\beta\, p^2 = \frac{\tan\beta}{p} \Rightarrow p^3 = \frac{\tan\beta}{\cos^2\beta}$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{\tan\beta}{\cos^2\beta}} = \sqrt[3]{\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{\cos^3\beta}}$$

$$p = \frac{1}{\cos\beta}\sqrt[3]{\mathrm{sen}\,\beta} \Rightarrow p = \frac{\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}$$

Y sustituyo en la E.D.O. original:

$$\cos^2\beta\left(\frac{\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}\right)^3 - 2\alpha\,\frac{\mathrm{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\cos^2\beta\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos^3\beta} - 2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\tan\beta - 2\alpha\,\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta} + 2\tan\beta = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3\tan\beta}{\frac{2\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}} = \frac{3}{2}\frac{\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}}{\frac{\operatorname{sen}^{\frac{1}{3}}\beta}{\cos\beta}} = \frac{3}{2}\operatorname{sen}^{\frac{2}{3}}\beta$$

Siendo esta última la solución singular.

Resolver por el método anterior los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $x = y + \ln p$
(**Rta.:** $x = y + \ln|1 + \frac{C}{e^y}|$)

Ejercicio 2. $4p^2 = 25x$
(**Rta.:** $(3y + c)^2 = 25x^3$)

Ejercicio 3. $2px = 2\tan y + p^3\cos^2 y$
(**Rta.:** $x = \frac{\operatorname{sen} y}{c} + \frac{c^2}{2}, \quad 8x^3 = 27\operatorname{sen}^2 y$)

Ejercicio 4. $4px - 2y = p^3y^2$
(**Rta.:** $4c\frac{x}{y} - 2y = \frac{c^3}{y};\ 4x = 3y^{\frac{4}{3}}$)

Ecuación de Clairaut: $y = xy' + f(y')$
Por el método del caso ii) se muestra que su solución general es de la forma: $y = cx + f(c)$
Y su solución singular se consigue eliminando p entre las ecuaciones $x + f'(p) = 0$ y $y = xp + f(p)$

Ejercicio 5. $y = xy' - \frac{(y')^3}{3}$
(**Rta.:** $y = cx - \frac{1}{3}c^3, \quad y = \pm\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$)

Ejercicio 6. $y = xy' + 1 - \ln y'$
(**Rta.:** $y = cx + 1 - \ln c, \quad y = 2 + \ln x$)

Ejercicio 7. $xy' - y = e^{y'}$
(**Rta.:** $y = cx - e^c, \quad y = x\ln x - x$)

Ejercicio 8. $(y - px)^2 = 4p$

2.9. OTRAS SUSTITUCIONES

Ejemplo 17. $y\,dx + (1 + ye^x)\,dy = 0$
Solución:
Hagamos

$$u = 1 + ye^x \Rightarrow y = \frac{u-1}{e^x}, \quad du = ye^x\,dx + e^x\,dy = e^x(y\,dx + dy),$$

$$\Rightarrow du = (u-1)\,dx + e^x\,dy$$

$$\Rightarrow dy = \frac{du - (u-1)\,dx}{e^x}$$

Reemplazando en la ecuación original:

$$\frac{u-1}{e^x}dx + u\left(\frac{du - (u-1)\,dx}{e^x}\right) \overset{e^x \geq 0}{=} 0$$

$$(u - 1 - u(u-1))\,dx + u\,du = 0$$

$$(u-1)(1-u)\,dx + u\,du = 0$$

$$-(u-1)^2\,dx + u\,du = 0$$

$$dx = \frac{u}{(u-1)^2}\,du$$

$$x = \int \frac{u}{(u-1)^2}\,du + C$$

Utilicemos fracciones parciales para resolver la integral

$$\frac{u}{(u-1)^2} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{(u-1)^2}$$

$$u = A(u-1) + B$$

$$\text{si} \;\; u = 1 \Rightarrow B = 1$$

$$\text{si} \;\; u = 0 \Rightarrow 0 = -A + 1 \Rightarrow A = 1$$

$$x = \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} \right) du$$

$$x = \ln|u-1| + \int \frac{dv}{v^2}, \;\; \text{haciendo} \;\; v = u - 1 \Rightarrow dv = du$$

$$\text{entonces} \;\; x = \ln|u-1| - \frac{1}{v} + C$$

$$x = \ln|ye^x| - \frac{1}{ye^x} + C, \;\; \text{es la solución general}$$

Ejemplo 18. $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

<u>Solución</u>:

$$\text{Hagamos} \;\; p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad \Rightarrow p' = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$p' + 2yp^3 = 0$$

$$\frac{dp}{dx} + 2yp^3 = 0$$

Por la regla de la cadena sabemos que: $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p = p\frac{dp}{dy}$, entonces

$$p\,\frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0, \;\; \text{con} \;\; p \neq 0$$

$$\frac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0$$

$$\frac{dp}{dy} = -2yp^2 \Rightarrow p^{-2}dp = -2y\,dy$$

$$\Rightarrow -p^{-1} = -y^2 + C$$

$$p^{-1} = y^2 + C_1 \Rightarrow p = \frac{1}{y^2 + C_1} = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow dx = (y^2 + C_1)\, dy$$

$$x = \frac{y^3}{3} + C_1 y + C_2$$

Hacer una sustitución adecuada para resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $xe^{2y}\frac{dy}{dx} + e^{2y} = \frac{\ln x}{x}$
(**Rta.:** $x^2 e^{2y} = 2x\ln x - 2x + c$)

Ejercicio 2. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4}{x}y = 2x^5 e^{\frac{y}{x^4}}$
(**Rta.:** $-e^{-\frac{y}{x^4}} = x^2 + c$)

Ejercicio 3. $2yy' + x^2 + y^2 + x = 0$
(**Rta.:** $x^2 + y^2 = x - 1 + ce^{-x}$)

Ejercicio 4. $y^2 y'' = y'$
(**Rta.:**$\frac{y}{c} + \frac{1}{c^2}\ln|cy - 1| = x + c_1, y = k$)

Ejercicio 5. $2x\csc 2y\frac{dy}{dx} = 2x - \ln(\tan y)$
(**Rta.:** $\ln(\tan y) = x + cx^{-1}$)

Ejercicio 6. $y'' + (\tan x)y' = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2$)

Ejercicio 7. $y' + 1 = e^{-(x+y)}\operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $e^y = -e^{-x}\cos x + ce^{-x}$)

Ejercicio 8. $\frac{dy}{dx} + xy^3 \sec\frac{1}{y^2} = 0$
(**Rta.:** $x^2 - \operatorname{sen}\frac{1}{y^2} = c$)

Ejercicio 9. $dy - y\operatorname{sen} x\; dx = y\ln(ye^{\cos x})\; dx$
(**Rta.:** $\ln(\ln|ye^{\cos x}|) = x + C$)

Ejercicio 10. $yy' + xy^2 - x = 0$
(**Rta.:** $y^2 = 1 + Ce^{-x^2}$)

Ejercicio 11. $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$
(**Rta.:** $\ln|Cx| = -e^{-\frac{y}{x}}$)

Ejercicio 12. $x^2y'' - 2xy' - (y')^2 = 0$
(**Rta.:** $\frac{x^2}{2} + Cx + C^2 \ln|C - x| = -y + C_1$)

Ejercicio 13. $yy'' - y^2y' - (y')^2 = 0$
(**Rta.:** $\frac{1}{C} \ln|\frac{y}{y+C}| = x + C_1$)

Ejercicio 14. $\frac{dy}{dx} + e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
(**Rta.:** $e^{-\frac{y}{x}} = \ln|Cx|$)

Ejercicio 15. $\frac{dy}{dx} = \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$
(**Rta.:** $\sec\frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} = Cx$)

2.10. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Como con el paquete matemático Maple se pueden resolver Ecuaciones Diferenciales, expondremos a continuación varios ejemplos, los cuales solucionaremos utilizándo dicho paquete. Las instrucciones en Maple terminan con punto y coma, después de la cual se da "enter" para efectuar la operación que se busca.

Ejemplo 19. Hallar general de la E.D. $\frac{dy}{dx} = 3\frac{y}{x}$

```
>int(1/y,y)=int(3/x,x)+C;
                         ln(y) = 3 ln(x) + C
>solve(ln(y) = 3*ln(x)+C,y);

                                       2
                              exp(C) x
```

Ejemplo 20. Hallar la solución particular de la E.D. $\frac{dy}{dx} = xy(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, con la condición inicial $y(1) = 1$

```
> restart;

> diff_eq1 := D(y)(x)=x*y(x)^3*(1+x^2)^(-1/2);
```

diff_eq1 $:= D(y)(x) = \frac{xy(x)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}$

```
> init_con := y(0)=1;
```

init_con $:= y(0) = 1$

```
> dsolve( {diff_eq1, init_con} , {y(x)} );
```

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{-2\sqrt{1+x^2}+3}}$$

Ejemplo 21. Mostrar que la E.D. $(2xy^2+ye^x)dx+(2x^2y+e^x-1)dy=0$ es exacta y hallar la solución general.

```
> M:=2*x*y^2+y*exp(x);
```

M$:= 4xy + e^x$

```
> N:=2*x^2*y+exp(x)-1;
```

N:=$2x^2y + e^x - 1$

```
> diff_E1:=2*x*(y^2)(x)+y(x)*exp(x)+(2*x^2*y(x)+exp(x)-1)*D(y)(x)=0;
```

diff_E1 := $2xy(x)^2 + y(x)e^x + (2x^2y(x) + e^x - 1)D(y)(x) = 0$

```
> dsolve(diff_E1,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{1-e^x-\sqrt{(e^x)^2-2e^x+1-4x^2C1}}{x^2},$$

$$y(x) = \frac{1}{2}\frac{1-e^x+\sqrt{(e^x)^2-2e^x+1-4x^2C1}}{x^2}$$

CAPÍTULO 3

APLICACIONES DE LAS E.D. DE PRIMER ORDEN

3.1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS

3.1.1. Trayectorias Isogonales y Ortogonales

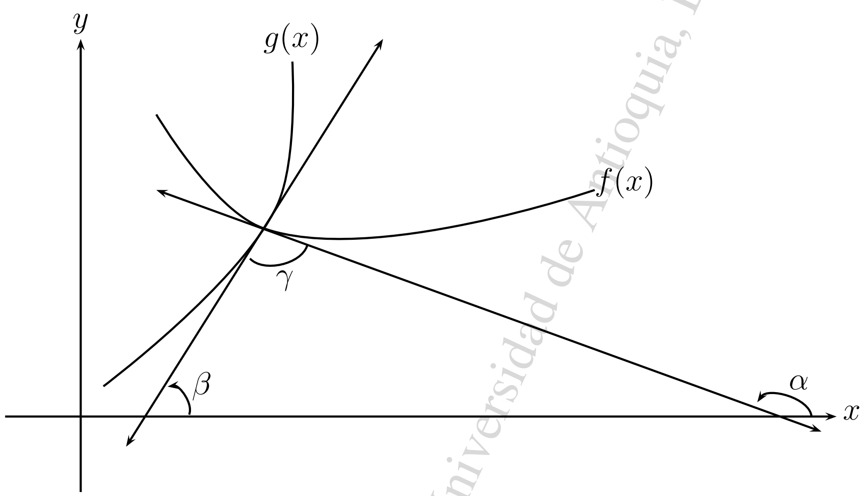

Figura 3.1

En la figura 3.1 se tiene que $\alpha = \beta + \gamma$, luego $\gamma = \alpha - \beta$, donde γ es el ángulo formado por las tangentes en el punto de intersección.

Definición 3.1 (trayectorias isogonales) .

a). *Dada una familia de curvas $f(x,y,c) = 0$, existe otra familia $g(x,y,c) = 0$ que corta a la familia f bajo un mismo ángulo γ. A la familia g se le llama la familia de trayectorias isogonales de f y $g(x,y,c) = 0$ es solución de la E.D.:*

$$\tan\gamma = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{f'(x)-g'(x)}{1+f'(x)g'(x)} = \frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'}$$

b). *En particular, cuando $\gamma = 90^0$, a g se le llama la familia de trayectorias ortogonales de f y en este caso g es solución de la E.D.:*

$$\tan\alpha\tan\beta = f'(x)g'(x) = -1 = f'(x)y'$$

Ejemplo 1. Hallar las trayectorias isogonales a 45^o de la familia $y(x+c) = 1$.
Solución:

$$\tan 45^0 = \frac{f'(x)-y'}{1+f'(x)y'} = 1$$

por derivación implícita:

$$\frac{d}{dx}\left(y(x+c)\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$y + (x+c)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x+c}$$

En la E.D.:

$$1 = \frac{-\frac{y}{x+c} - y'}{1+\left(-\frac{y}{x+c}\right)y'} = \frac{\frac{-y}{\frac{1}{y}} - y'}{1+\left(-\frac{y}{\frac{1}{y}}\right)y'} = \frac{-y^2-y'}{1-y^2y'}$$

$$1 - y^2y' = -y^2 - y' \Rightarrow y'(y^2-1) = 1+y^2$$

$$y' = \frac{y^2+1}{y^2-1} \Rightarrow \frac{y^2-1}{y^2+1}\,dy = dx$$

$$\left(1 - \frac{2}{1+y^2}\right) dy = dx$$

$$y - 2\tan^{-1} y = x + K$$

$$g(x, y, K) = 0 = y - 2\tan^{-1} y - x - K$$

Ejercicio 1. Hallar las trayectorias isogonales a 45^o de la familia $y = ce^{ax}$, donde c y a son constantes.
(**Rta.:** $y + \frac{2}{a} \ln |ay - 1| = x + c$)

Ejercicio 2. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia $y^2 = cx^3$.
(**Rta.:** $2x^2 + 3y^2 = C_2$)

Ejercicio 3. Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de hiprbolas equiláteras $xy = c$.
(**Rta.:** $x^2 - y^2 = C$)

Ejercicio 4. Determinar la curva que pasa por $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ y corta a cada miembro de la familia $x^2 + y^2 = c^2$ formando un ángulo de 60^o.
(**Rta.:** $\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{x}{y} = \pm\frac{1}{2} \ln |x^2 + y^2| + \sqrt{3} \tan^{-1} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$)

Ejercicio 5. Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = C_1x^2$.
(**Rta.:** $\frac{x^2}{2} + y^2 = C$)

Ejercicio 6. Hallar la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $y = C_1e^{-x}$.
(**Rta.:** $\frac{y^2}{2} = x + C$)

Ejercicio 7. Encuentre la curva que pertenece a la familia de trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x + y = C_1e^y$ que pasa por $(0, 5)$.
(**Rta.:** $y = 2 - x + 3e^{-x}$)

3.1.2. Problemas de Persecución:

Ejemplo 2. Un esquiador acuático P localizado en el punto $(a, 0)$ es remolcado por un bote de motor Q localizado en el orígen y viaja hacia arriba a lo largo del eje Y. Hallar la trayectoria del esquiador si este se dirige en todo momento hacia el bote.

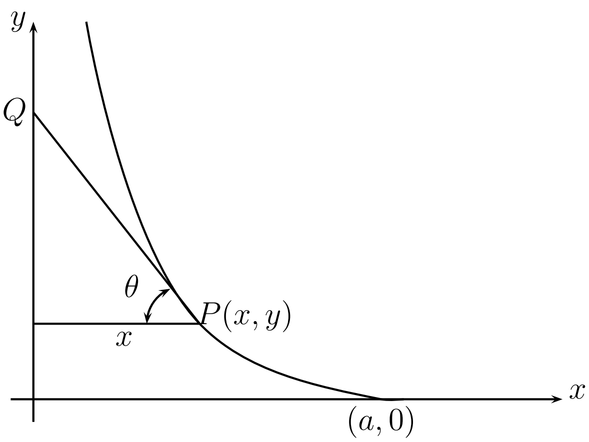

Figura 3.2

Solución: del concepto geométrico de derivada se tiene que:

$$y' = \tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1},$$

pero de la figura 3.2 se tiene que

$$\sec\theta = -\frac{a}{x}$$

por lo tanto,

$$y' = -\sqrt{\sec^2 - 1} = -\sqrt{\frac{a^2}{x^2} - 1} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}, \quad \text{donde} \quad x > 0,$$

separando variables:

$$dy = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx,$$

por medio de la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen}\alpha$ en el lado derecho de la E.D., se llega a que:

$$y = a\ln\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right] - \sqrt{a^2 - x^2} + C;$$

como el esquiador arranca desde el punto $(a, 0)$, entonces las condiciones iniciales son $x = a,\ y = 0$; sustituyendo en la solución general, se obtiene que $C = 0$.
Luego la solución particular es:

$$y = a \ln\left[\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right] - \sqrt{a^2 - x^2}$$

Ejercicio 1. Suponga que un halcón P situado en $(a, 0)$ descubre una paloma Q en el orígen, la cual vuela a lo largo del eje Y a una velocidad v; el halcón emprende vuelo inmediatamente hacia la paloma con velocidad w. ¿Cual es el camino seguido por el halcón en su vuelo persecutorio?
(**Rta.:** $y = \frac{a}{2}\left[\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1+\frac{v}{w}}}{1+\frac{v}{w}} - \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\frac{v}{w}}}{1-\frac{v}{w}} + c\right]$, donde $c = \frac{avw}{w^2-v^2}$)

Ejercicio 2. Un destructor est en medio de una niebla muy densa que se levanta por un momento y deja ver un submarino enemigo en la superficie a cuatro kilómetros de distancia. Suponga:
i) que el submarino se sumerge inmediatamente y avanza a toda máquina en una dirección desconocida.
ii) que el destructor viaja tres kilómetros en línea recta hacia el submarino. Qu trayectoria debera seguir el destructor para estar seguro que pasará directamente sobre el submarino, si su velocidad v es tres veces la del submarino?
(**Rta.:** $r = e^{\frac{\theta}{\sqrt{8}}}$)

Ejercicio 3. Suponga que el eje Y y la recta $x = b$ forman las orillas de un río cuya corriente tiene una velocidad v (en la dirección negativa del eje Y). Un hombre esta en el origen y su perro esta en el punto $(b, 0)$. Cuando el hombre llama al perro, éste se lanza al río y nada hacia el hombre a una velocidad constante w $(w > v)$. Cual es la trayectoria seguida por el perro?
(**Rta.:** $y = \frac{x}{2}[(\frac{x}{b})^{\frac{v}{w}} - (\frac{b}{x})^{\frac{v}{w}}]$)

Ejercicio 4. Demuestre que el perro del Ej. anterior nunca tocará la otra orilla si $w < v$.

Suponga ahora que el hombre camina río abajo a la velocidad v mientras llama a su perro. Podrá esta vez el perro tocar la otra orilla?
(**Rta.:** S, en el punto $(0, -\frac{bv}{w})$)

Ejercicio 5. Cuatro caracoles situados en las esquinas de un cuadrado $[0, a] \times [0, a]$ comienzan a moverse con la misma velocidad, dirigiéndose cada uno hacia el caracol situado a su derecha. Qué distancia recorrerán los caracoles al encontrarse?
(**Rta.:** a unidades)

3.1.3. Aplicaciones a la geometría analítica

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad de que el punto de tangencia es punto medio del segmento tangente entre los ejes coordenados.

<u>Solución</u>:

$\tan\alpha = f'(x) = -\frac{2y}{2x}$

$y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c|$

$\ln|y| = -\ln\left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{c}{x} \Rightarrow xy = c$

Ejercicio 1. Empleando coordenadas rectangulares hallar la forma del espejo curvado tal que la luz de una fuente situada en el origen se refleje en él como un haz de rayos paralelos al eje X.
(**Rta.:** $y^2 = 2cx + c^2$)

Ejercicio 2. Una curva pasa por el origen en el plano XY, al primer cuadrante. El área bajo la curva de $(0, 0)$ a (x, y) es un tercio del área del rectángulo que tiene esos puntos como vértices opuestos. Encuentre la ecuación de la curva.
(**Rta.:** $y = cx^2$)

Ejercicio 3. Encontrar las curvas para las cuales la tangente en un punto $P(x, y)$ tiene interceptos sobre los ejes X y Y cuya suma es $2(x + y)$
(**Rta.:** $xy = c$)

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de todas las curvas que tienen la propiedad

de que la distancia de cualquier punto al origen, es igual a la longitud del segmento de normal entre el punto y el intercepto con el eje X.
(**Rta.:** $y^2 = \pm x^2 + c$)

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que el triángulo formado por la tangente a la curva, el eje X y la recta vertical que pasa por el punto de tangencia siempre tiene un área igual a la suma de los cuadrados de las coordenadas del punto de tangencia.
(**Rta.:** $\ln|y| = \frac{2}{\sqrt{15}}\tan^{-1}(\frac{4y+x}{\sqrt{15}x})$)

Ejercicio 6. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que la porción de la tangente entre (x, y) y el eje X queda partida por la mitad por el eje Y.
(**Rta.:** $y^2 = Cx$)

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que la longitud de la perpendicular bajada del origen de coordenadas a la tangente es igual a la abscisa del punto de contacto.
(**Rta.:** $x^2 + y^2 = Cx$)

Ejercicio 8. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY que tienen la propiedad de que la razón del segmento interceptado por la tangente en el eje OY al radio vector, es una cantidad constante k.
(**Rta.:** $y = \frac{1}{2}(Cx^{1-k} - \frac{1}{C}x^{1+k})$)

Ejercicio 9. Hallar la ecuación de todas las curvas del plano XY para las cuales la longitud del segmento interceptado en el eje Y por la normal a cualquiera de sus puntos es igual a la distancia desde este punto al origen de coordenadas.
(**Rta.:** $y = \frac{1}{2}(Cx^2 - \frac{1}{C})$)

3.2. CRECIMIENTO Y DESCOMPOSICIÓN

Existen en el mundo físico, en biología, medicina, demografía, economía, etc. cantidades cuya rapidez de crecimiento o descomposición varía en forma proporcional a la cantidad presente, es decir, $\frac{dx}{dt} = kx$ con $x(t_0) = x_0$, o sea que

$$\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

que es una E.D. en variables separables o lineal en x de primer orden y cuya solución es $x = Ce^{kt}$

Como $x(t_0) = x_0 = Ce^{kt_0} \Rightarrow C = x_0 e^{-kt_0}$

Por lo tanto la solución particular es $x = x_0 e^{-kt_0} e^{kt} = x_0 e^{k(t-t_0)}$

En particular cuando $t_0 = 0$, entonces $x = x_0 e^{kt}$

3.2.1. Desintegración radioactiva

Si Q es la cantidad de material radioactivo presente en el instante t, entonces la E.D. es $\frac{dQ}{dt} = -kQ$, donde k es la constante de desintegración.

Se llama tiempo de vida media de un material radioactivo al tiempo necesario para que una cantidad Q_0 se trasforme en $\frac{Q_0}{2}$.

Ejercicio 1. Si T es el tiempo de vida media, mostrar que $Q = Q_0(\frac{1}{2})^{\frac{t}{T}}$.

Ejercicio 2. Suponga que un elemento radioactivo A se descompone en un segundo elemento radioactivo B y este a su vez se descompone en un tercer elemento radioactivo C. Si la cantidad de A presente inicialmente es x_0 y las cantidades de A y B son x e y respectivamente en el instante t y si k_1 y k_2 son las constantes de rapidez de descomposición, hallar y en función de t.
(**Rta.:** Si $k_1 \neq k_2$, entonces: $y = \frac{k_1 x_0}{k_2 - k_1}(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$
si $k_1 = k_2$, entonces $y = k_1 x_0 t e^{-k_1 t}$)

Ejercicio 3. Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene $\frac{1}{1000}$ de la cantidad original de C_{14}. Determinar la edad del fósil, sabiendo que el tiempo de vida media del C_{14} es 5600 años.
(**Rta.:** $t \approx 55{,}800$ años)

3.2.2. Ley de enfriamiento de Newton

Si se tiene un cuerpo a una temperatura T, sumergido en un medio de tamaño infinito de temperatura T_m (T_m no varía apreciablemente con el tiempo), el enfriamiento de este cuerpo se comporta de acuerdo a la siguiente E.D.: $\frac{d\theta}{dt} = -k\theta$ donde $\theta = T - T_m$.

Ejercicio 3. Un cuerpo se calienta a $110^0\,C$ y se expone al aire libre a una temperatura de $10^0\,C$. Si al cabo de una hora su temperatura es de $60^0\,C$. Cunto tiempo adicional debe transcurrir para que se enfre a $30^0\,C$?
(**Rta.:** $t = \frac{\ln 5}{\ln 2}$)

3.2.3. Ley de absorción de Lambert

Esta ley dice que la tasa de absorción de luz con respecto a una profundidad x de un material translúcido es proporcional a la intensidad de la luz a una profundidad x; es decir, si I es la intensidad de la luz a una profundidad x, entonces $\frac{dI}{dx} = -kI$.

Ejemplo 4. En agua limpia la intensidad I a 3 pies bajo la superficie es de un 25 % de la intensidad I_0 en la superficie. ¿Cuál es la intensidad del rayo a 15 pies bajo la superficie?

Solución:

$$x = 0 \Rightarrow I = I_0$$

$$\frac{dI}{dx} = -kI \quad \Rightarrow \quad I = Ce^{-kx}$$

Cuando $x = 0$, $I = I_0 = C$

Luego

$$I = I_0\, e^{-kx}$$

Cuando

$$x = 3 \Rightarrow I = 0{,}25\, I_0$$

luego,

$$0{,}25\, I_0 = I_0\, e^{-3k}$$

$$\Rightarrow e^{-k} = (0{,}25)^{\frac{1}{3}}$$

$$I = I_0(e^{-k})^x = I_0((0{,}25)^{\frac{1}{3}})^x = I_0(0{,}25)^{\frac{x}{3}}$$

para

$$x = 15 \Rightarrow I = I_0(0{,}25)^{\frac{15}{3}}$$

por tanto

$$I = I_0(0{,}25)^5$$

Ejercicio 4. Si I a una profundidad de 30 pies es $\frac{4}{9}$ de la intensidad en la superficie; encontrar la intensidad a 60 pies y a 120 pies.

3.2.4. Crecimiento de Cultivos de Bacterias o Crecimientos poblacionales

La razón de crecimiento depende de la población presente en periodo de procrear, considerando las tasas de natalidad y de muerte, el modelo que representa dicha situación es:

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

donde $Q(t)$: población en el instante t.

Ejercicio 5. Si en un análisis de una botella de leche se encuentran 500 organismos (bacterias), un día después de haber sido embotelladas y al segundo día se encuentran 8000 organismos. ¿Cual es el número de organismos en el momento de embotellar la leche?

Ejercicio 6. En un modelo de evolución de una comunidad se supone que la población $P(t)$ se rige por la E.D $\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$, donde $\frac{dB}{dt}$ es la rapidez con que nace la gente y $\frac{dD}{dt}$ es la rapidez con que la gente muere.
Hallar: a) $P(t)$ si $\frac{dB}{dt} = k_1P$ y $\frac{dD}{dt} = k_2P$

b) Analizar los casos en que $k_1 > k_2$, $k_1 = k_2$ y $k_1 < k_2$

Ejercicio 7. Una persona de un pueblo de 1000 habitantes regresó con gripa. Si se supone que la gripa se propaga con una rapidez directamente proporcional al número de agripados como también al número de no agripados. Determinar el número de agripados cinco días después, si se observa que el número de agripados el primer día es 100.

Ejercicio 8. Cuando se produce cierto alimento, se estima en N el número de organismos de una cierta clase presentes en el paquete. Al cabo de 60 dias el número N ha aumentado a $1000N$. Sinembargo, el número $200N$ es considerado como el límite saludable. A los cuantos dias, después de elaborado, vence el alimento.
(**Rta.:** 46.02 dias)

Observación: un modelo más preciso para el crecimiento poblacional es suponer que la tasa per cpita de crecimiento, es decir $\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ es igual a la tasa promedio de nacimientos, la cual supondremos constante, menos la tasa promedio de defunciones, la cual supondremos proporcional a la población, por lo tanto la E.D. sería:

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = b - aP$$

donde a y b son constantes positivas. Esta E.D. se le llama **ecuación logística**
Resolviendo ésta E.D. por variables separables se obtiene

$$|\frac{P}{b-aP}| = e^c e^{bt}$$

Si en $t = 0$ se tiene $P = P_0$ entonces la solución particular es

$$P(t) = \frac{bP_0e^{bt}}{b - aP_0 + aP_0e^{bt}}$$

Por la regla de l'Hôpital se puede mostrar que

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{b}{a}$$

3.3. PROBLEMAS DE DILUCIÓN

Una solución es una mezcla de un soluto (que puede ser líquido, sólido o gaseoso), en un solvente que puede ser líquido o gaseoso.

Tipos de mezclas o soluciones :

i) Soluciones líquidas cuando disolvemos un sólido o un líquido en un líquido.

ii) Soluciones gaseosas cuando se disuelve un gas en un gas.

Ecuación de Continuidad:

Tasa de acumulación = Tasa de entrada − Tasa de salida.

Caso 1. Una Salmuera (solución de sal en agua), entra en un tanque a una velocidad v_1 galones de salmuera/minuto y con una concentración de c_1 libras de sal por galón de salmuera (lib. sal/gal. salmuera).
Inicialmente el tanque tiene Q galones de salmuera con P libras de sal disueltas. La mezcla bien homogenizada abandona el tanque a una velocidad de v_2 galones de salmuera/min.
Encontrar una ecuación para determinar las libras de sal que hay en el tanque en cualquier instante t.(Ver figura 3.3)

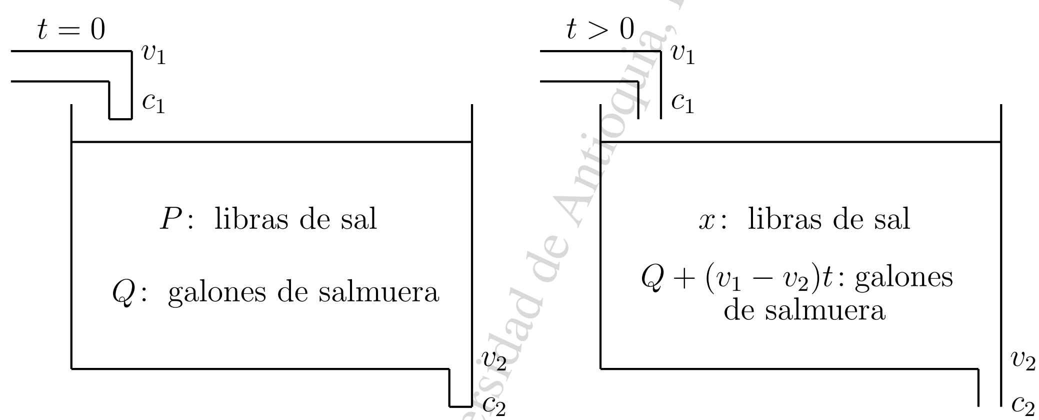

Figura 3.3

Sea $x(t)$ las libras de sal en el instante t.

$\frac{dx}{dt}$ = Tasa de acumulación = Tasa de entrada del soluto − Tasa de salida del soluto.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_1\,(\text{gal.sol./min})\ c_1\,(\text{lib.sal/gal.sol.})\\ &\quad -v_2\,(\text{gal.sol./min})\ c_2(\text{lib.sal/gal.sol.})\\ &= v_1c_1 - v_2\frac{x}{Q+(v_1-v_2)t}\end{aligned}$$

y obtenemos la E.D. lineal en x de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} + \overbrace{\frac{v_2}{Q+(v_1-v_2)t}}^{p(t)}x = \underbrace{v_1c_1}_{q(t)}$$

condiciones iniciales: $t = 0, \quad x = P$

$$p(t) = \frac{v_2}{Q+(v_1-v_2)t}; \quad q(t) = v_1c_1$$

$$\begin{aligned}F.I. &= e^{\int p(t)\,dt} = e^{\int v_2 \frac{1}{Q+(v_1-v_2)t}} =\\ &= e^{\frac{v_2}{v_1-v_2}\ln|Q+(v_1-v_2)t|}\end{aligned}$$

$$F.I. = [Q+(v_1-v_2)t]^{\frac{v_2}{v_1-v_2}}$$

luego

$$x\ F.I. = \int F.I.\ q(t)\,dt + C$$

con las condiciones iniciales $x(0) = P$, hallamos C y se concluye que $x = f(t)$

Ejercicio 1: resolver la anterior E.D. con $v_1 = v_2$

Caso 2. Un colorante sólido disuelto en un líquido no voltil, entra a un tanque a una velocidad v_1 galones de solución/minuto y con una concentración de c_1 libras de colorante/galón de solución. La solución bien homogenizada sale del tanque a una velocidad de v_2 galones de solución/min. y entra a un segundo tanque del cual sale posteriormente a una velocidad de v_3 galones de solución/min.
Inicialmente el primer tanque tenía P_1 libras de colorante disueltas en Q_1 galones de solución y el segundo tanque P_2 libras de colorante disueltas en

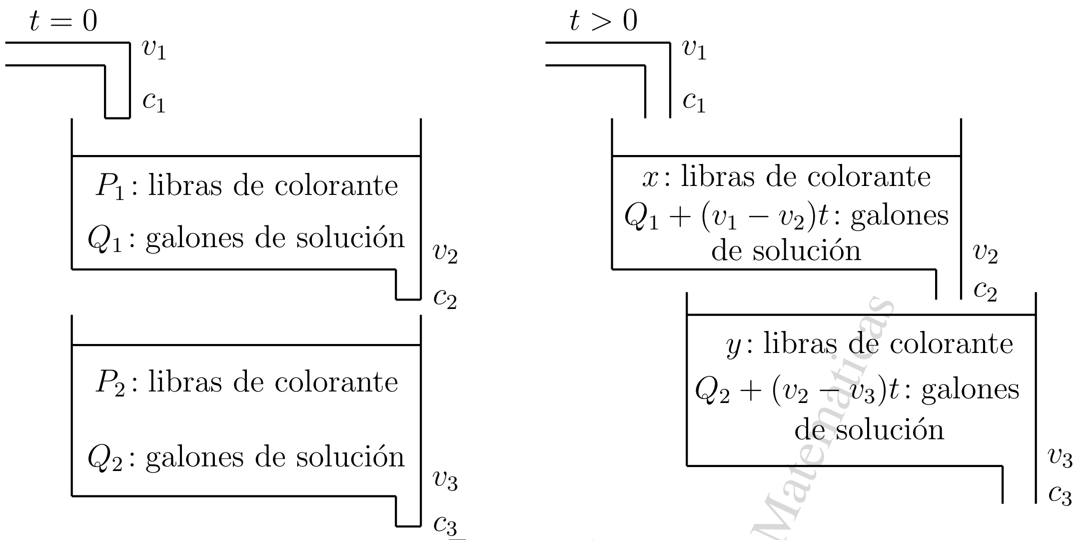

Figura 3.4

Q_2 galones de solución. Encontrar dos ecuaciones que determinen las libras de colorante presentes en cada tanque en cualquier tiempo t.(Ver figura 3.4)

$x =$ libras de colorante en el primer tanque en el instante t.
$y =$ libras de colorante en el segundo tanque en el instante t.

E.D. para el primer tanque:

$\frac{dx}{dt} = v_1c_1 - v_2c_2 = v_1c_1 - v_2\frac{x}{Q_1+(v_1-v_2)t}$

$\frac{dx}{dt} + v_2\frac{x}{Q_1+(v_1-v_2)t} = v_1c_1$, con la condición inicial $t = 0$, $x = P_1$

La solución es: $x = f(t) = c_1[Q_1 + (v_1 - v_2)t] + C[Q_1 + (v_1 - v_2)t]^{-\frac{v_2}{v_1-v_2}}$.

E.D. para el segundo tanque:

$\frac{dy}{dt} = v_2c_2 - v_3c_3 = v_2\frac{x}{Q_1+(v_1-v_2)t} - v_3\frac{y}{Q_2+(v_2-v_3)t}$

$\frac{dy}{dt} + \frac{v_3}{Q_2+(v_2-v_3)t}\,y = \frac{v_2}{Q_1+(v_1-v_2)t}\,x = \frac{v_2}{Q_1+(v_1-v_2)t}\,f(t), \quad t = 0,\ y = P_2$

$F.I. = [Q_2 + (v_2 - v_3)t]^{\frac{v_3}{v_2-v_3}}$ para $v_2 \neq v_3$.

Si $v_2 = v_3$ ¿Cual sería su factor integrante?

Ejercicio 2. Resolver el caso dos cuando $v_1 = v_2 = v_3 = v$ y $Q_1 = Q_2 = Q$.

Caso 3. Una solución líquida de alcohol en agua, está constantemente circulando entre dos tanques a velocidades v_2 y v_3 galones/minuto. Si al primer tanque también entra una solución a una velocidad de v_1 galones /minuto y de concentración c_1 galones de alcohol/galón de solución y las cantidades iniciales en los tanques son P_1 y P_2 galones de alcohol en Q_1 y Q_2 galones de agua respectivamente. Encontrar dos ecuaciones para determinar los galones de alcohol presentes en cualquier tiempo en cada tanque (Ver figura 3.5).

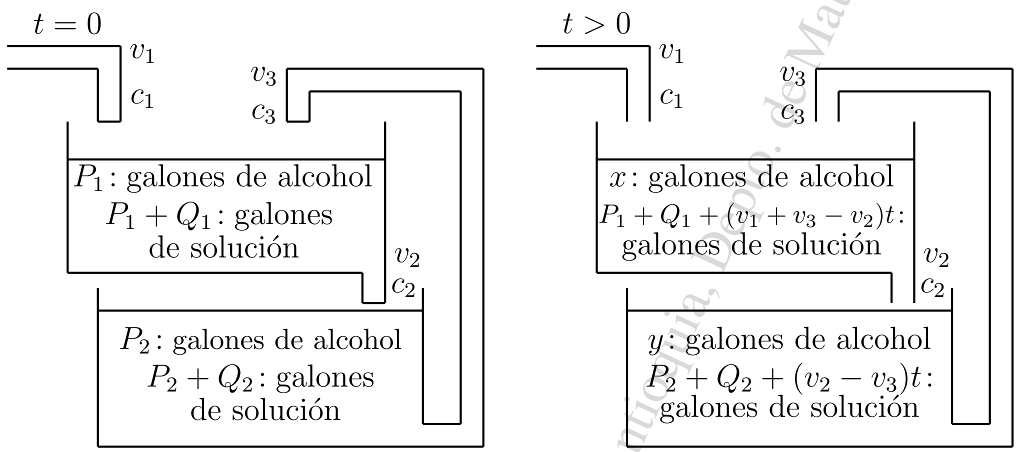

Figura 3.5

x = galones de alcohol en el primer tanque en el instante t.
y = galones de alcohol en el segundo tanque en el instante t.

E.D. para el primer tanque:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_1c_1 + v_3c_3 - v_2c_2\\ &= v_1c_1 + v_3\frac{y}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t} - v_2\frac{x}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t}\end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} + \frac{v_2}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t}\, x = \frac{v_3}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t}\, y + v_1 c_1 \tag{3.1}$$

E.D. para el segundo tanque:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= v_2 c_2 - v_3 c_3 \\ &= \frac{v_2}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t} x - \frac{v_3}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t} y \end{aligned} \tag{3.2}$$

<u>Balance total</u>: galones de alcohol presentes en los dos tanques en el instante t:

Bal.tot.= $x + y = P_1 + P_2 + v_1\,(\text{gal.sol./min})\; c_1\; (\text{gal.alcohol/gal.sol.})\, t$

$$x + y = P_1 + P_2 + v_1 c_1 t$$

luego

$$y = P_1 + P_2 + v_1 c_1 t - x \tag{3.3}$$

(3.3) en (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \frac{v_2}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t} x &= \\ &\frac{v_3}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t}(P_1 + P_2 + v_1 c_1 t - x) + v_1 c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + \left(\frac{v_2}{Q_1 + P_1 + (v_1 + v_3 - v_2)t} + \frac{v_3}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t} \right) x &= \\ &\frac{(P_1 + P_2 + v_1 c_1 t) v_3}{Q_2 + P_2 + (v_2 - v_3)t} + v_1 c_1 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Con la condición inicial: $t = 0,\ x = P_1$

Nota: no hay necesidad de resolver la ecuación diferencial (2) porque $y = P_1 + P_2 + v_1 c_1 t - x$.

Caso 4. Un teatro de dimensiones $10 \times 30 \times 50\,\text{mt.}^3$, contiene al salir el público 0,1 % por volumen de CO_2. Se sopla aire fresco a razón de 500 mt.^3 por minuto y el sistema de aire acondicionado lo extrae a la misma velocidad. Si el aire atmosférico tiene un contenido de CO_2 del 0,04 % por volumen y el límite saludable es de 0,05 % por volumen. ¿ En que tiempo podrá entrar el público? (Ver figura 3.6)

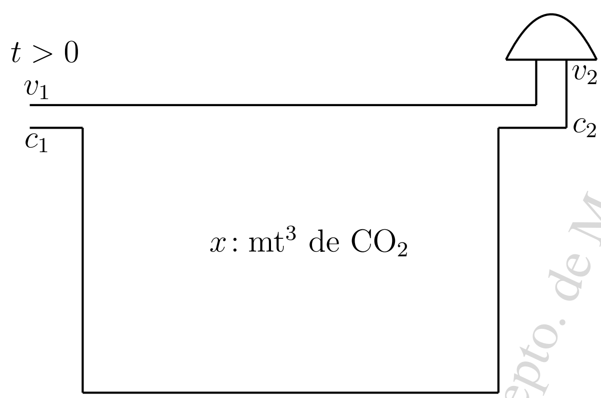

Figura 3.6

Sea $x = \text{mt.}^3$ de CO_2 presentes en el teatro en el instante t.

Cantidad de CO_2 en el teatro en $t = 0$:

$$0{,}001 \frac{\text{mt.}^3 \text{de} CO_2}{\text{mt.}^3\, \text{de aire}} \times 10 \times 30 \times 50 \text{mt.}^3 = 15 \text{mt.}^3$$

$$\frac{dx}{dt} = v_1 c_1 - v_2 c_2$$

$= 500\text{mt.}^3\,\text{aire/min.} \times \frac{0{,}04}{100}\text{mt.}^3\, CO_2/\text{mt.}^3\,\text{aire} -$
$- 500\text{mt.}^3\,\text{aire/min.} \times \frac{x\,\text{mt.}^3 CO_2}{10\times30\times50\,\text{mt.}^3\,\text{aire}} = 0{,}2 - \frac{x}{30}$
por tanto, $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{30} = 0{,}2$, E.D. lineal de primer orden con $p(t) = \frac{1}{30}$ y $Q(t) = 0{,}2$

Solución general: $x = 6 + Ce^{-\frac{t}{30}}$.
Condiciones iniciales: en $t = 0$ se tiene que $x = 15$,
por tanto la solución particular es:

$$x = 6 + 9e^{-\frac{t}{30}}.$$

La cantidad de CO_2 en el límite saludable es:

$$x = \frac{0{,}05}{100} \times 10 \times 30 \times 50 = 7{,}5,$$

por tanto $7{,}5 = 6 + 9e^{-\frac{t}{30}}$ y despejando t se tiene que $t = 30 \ln 6 = 53{,}75$min.

Ejercicio 1. En un tiempo $t = 0$ un tanque A contiene 300 galones de salmuera en el cual hay 50 libras de sal y un tanque B con 200 galones de agua pura. Al tanque A le entran 5 galones de agua/min. y la salmuera sale a la misma velocidad para entrar al tanque B y de este pasa nuevamente al tanque A, a una velocidad de 3 gal/min.
Calcular las cantidades de sal en ambos tanques en un tiempo $t = 1$hora $=$ 60min..
(**Rta.:** tanque $A = 29{,}62$ libras, tanque $B = 20{,}31$ libras)

Ejercicio 2. Un tanque tiene inicialmente 100 galones de agua pura. Una salmuera que contiene $\frac{1}{2}$ libra de sal/galón de salmuera fluye al interior del tanque a una rapidez de 2 galones/min. y la mezcla bien homogenizada sale del tanque con la misma velocidad. Después de 10 minutos el proceso se detiene y se introduce al tanque agua pura con una rapidez de 2 galones/min, abandonando el tanque a la misma velocidad.
Determinar la cantidad de sal en el tanque cuando han pasado un total de 20 minutos.
(**Rta.:** 7,34 libras)

Ejercicio 3. Un tanque contiene 100 galones de salmuera; 3 galones de salmuera la cual contiene 2 libras de sal/galón de salmuera entran al tanque cada minuto.
La mezcla asumida uniforme sale a una velocidad de 2 gal/min. Si la concentración es de 1,8 libras de sal/galón de salmuera al de cabo de 1 hora, Calcular las libras de sal que habían inicialmente en el tanque.
(**Rta.:** 118,08 libras)

Ejercicio 4. Un depósito contiene 50 galones de salmuera en las que están disueltas 25 libras de sal. Comenzando en el tiempo $t = 0$, entra agua al depósito a razón de 2 gal./min. y la mezcla sale al mismo ritmo para entrar a un segundo depósito que contenía inicialmente 50 galones de agua pura.La salmuera sale de este depósito a la misma velocidad.Cuándo contendrá el segundo depósito la mayor cantidad de sal?
(**Rta.:** cuando $t \geq 25$ minutos)

Ejercicio 5. Un tanque contiene inicialmente agua pura. Salmuera que contiene 2 libras de sal/gal. entra al tanque a una velocidad de 4 gal./min. Asumiendo la mezcla uniforme, la salmuera sale a una velocidad de 3 gal./min. Si la concentración alcanza el 90 % de su valor máximo en 30 minutos, calcular los galones de agua que habían inicialmente en el tanque.
(**Rta.:** $Q = \frac{30}{\sqrt[4]{10}-1}$)

Ejercicio 6. El aire de un teatro de dimensiones $12 \times 8 \times 4$ mt.^{3} contiene 0,12 % de su volumen de CO_2. Se desea renovar en 10 minutos el aire, de modo que llegue a contener solamente el 0,06 % de CO_2. Calcular el número de mt.^{3} por minuto que deben renovarse, suponiendo que el aire exterior contiene 0,04 % de CO_2.
(**Rta.:** 53,23 mt.^{3} de aire/minuto)

Ejercicio 7. Aire que contiene 30 % de oxígeno puro pasa a través de un frasco que contiene inicialmente 3 galones de oxígeno puro. Suponiendo que la velocidad de entrada es igual a la de salida; hallar la cantidad de oxígeno existente después de que 6 galones de aire han pasado por el frasco.
(**Rta.:** 1,18 galones)

Ejercicio 8. Un tanque contiene 50 litros de agua. Al tanque entra salmuera que contiene k gramos de sal por litro, a razón de 1.5 litros por minuto. La mezcla bien homogenizada, sale del tanque a razón de un litro por minuto. Si la concentración es 20 gr/litro al cabo de 20 minutos. Hallar el valor de k.
(**Rta.:** $k = 47{,}47$)

Ejercicio 9. Un tanque contiene 500 galones de salmuera. Al tanque fluye salmuera que contiene 2 libras de sal por galón, a razón de 5 galones por minuto y la mezcla bien homogenizada, sale a razón de 10 galones por

minuto. Si la cantidad máxima de sal en el tanque se obtiene a los 20 minutos. Cual era la cantidad de sal inicial en el tanque?
(**Rta.:** 375 libras)

Ejercicio 10. Un tanque contiene 200 litros de una solución de colorante con una concentración de 1 gr/litro. El tanque debe enjuagarse con agua limpia que entra a razón de 2 litros/min. y la solución bien homogénizada sale con la misma rapidez. Encuentre el tiempo que trascurrirá hasta que la concentración del colorante en el tanque alcance el 1 % de su valor original.
(**Rta.:** 460.5 min.)

3.4. VACIADO DE TANQUES

Un tanque de una cierta forma geométrica está inicialmente lleno de agua hasta una altura H. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área es A pie^2. Se abre el orificio y el líquido cae libremente. La razón volumétrica de salida $\frac{dQ}{dt}$ es proporcional a la velocidad de salida y al área del orificio, es decir,

$$\frac{dQ}{dt} = -kAv,$$

aplicando la ecuación de energía: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$, por lo tanto,

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

donde $g = 32$ pie/seg$^2 = 9{,}81$ mt./seg.^{2}

La constante k depende de la forma del orificio:

- Si el orificio es de forma rectangular, la constante $k = 0{,}8$.
- Si el orificio es de forma triangular, la constante $0{,}65 \leq k \leq 0{,}75$.
- Si el orificio es de forma circular, la constante $k = 0{,}6$.

Caso 1. Cilíndro circular de altura H_0 pie y radio r pie, dispuesto en forma vertical y con un orificio circular de diámetro ϕ'' (pulgadas) (Ver figura 3.7).

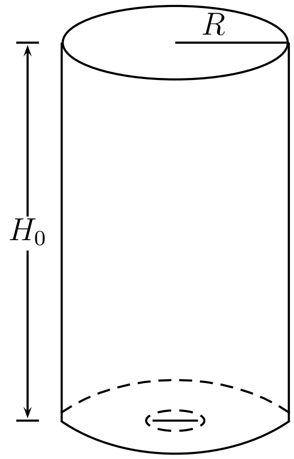

Figura 3.7

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -0{,}6\pi\left(\frac{\phi}{24}\right)^2\sqrt{2\times 32\times h} = -4{,}8\pi\frac{\phi^2}{576}\sqrt{h} \qquad (3.5)$$

pero

$$dQ = \pi r^2\,dh \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \pi r^2\,\frac{dh}{dt} \qquad (3.6)$$

Como (3.5)= (3.6): $\pi r^2\frac{dh}{dt} = -\frac{4{,}8\pi}{576}\,\phi^2\sqrt{h}$

y separando variables:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{4{,}8}{576r^2}\,\phi^2\,dt$$

$$h^{-\frac{1}{2}}\,dh = -\frac{4{,}8}{576r^2}\,\phi^2\,dt$$

e integrando: $2\sqrt{h} = -\frac{4{,}8}{576r^2}\phi^2\,t + C.$

Con las condiciones iniciales: $t = 0,\ h = H_0$, hallamos la constante C.

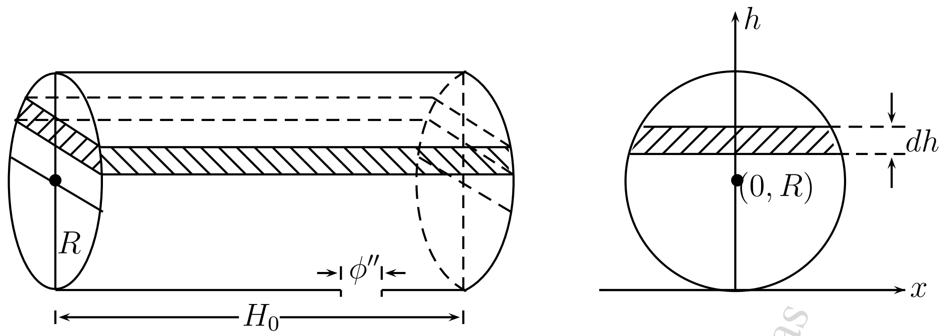

Figura 3.8

El tiempo de vaciado (t_v): se obtiene cuando $h = 0$. Hallar t_v

Caso 2. El mismo cilíndro anterior pero dispuesto horizontalmente y con el orificio en el fondo (Ver figura 3.8).

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \tag{3.7}$$

pero de la figura 3.8, tenemos:

$$dQ = 2x \times H_0 \times dh$$

y también

$$(x-0)^2 + (h-r)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + h^2 - 2rh + r^2 = r^2$$

luego

$$x = \sqrt{2rh - h^2}$$

sustituyendo

$$dQ = 2\sqrt{2rh - h^2}\, H_0\, dh$$

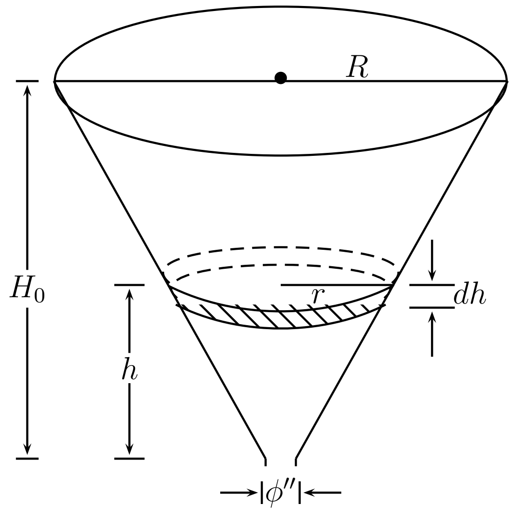

Figura 3.9

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 2H_0\sqrt{2rh-h^2}\,\frac{dh}{dt} \tag{3.8}$$

(3.8) = (3.7):

$$\begin{aligned}
2H_0\sqrt{2rh-h^2}\,\frac{dh}{dt} &= -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}\\
2H_0\sqrt{h}\sqrt{2r-h}\,\frac{dh}{dt} &= -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}, \quad \text{donde } \; h \neq 0\\
\sqrt{2r-h}\,dh &= -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{2\times 576\,H_0}dt
\end{aligned}$$

condiciones iniciales:
en $t_0 = 0 \quad h = 2r$, con ella hallo constante de integración.

El tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$. Hallar t_v.

Caso 3. Un cono circular recto de altura H_0 y radio R dispuesto verticalmente con orificio circular en el fondo de diámetro ϕ'' (Ver figura 3.9).

$$\frac{dQ}{dt} = -kA\sqrt{2gh} = -0{,}6\pi\left(\frac{\phi''}{24}\right)^2\sqrt{2\times 32h}$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h} \tag{3.9}$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{R}{r} = \frac{H_0}{h} \Rightarrow r = \frac{Rh}{H_0} \tag{3.10}$$

y como $dQ = \pi r^2 dh$ entonces, sustituyendo (3.10): $dQ = \pi\frac{R^2h^2}{H_0^2}\,dh$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{\pi R^2}{H_0^2}\,h^2\,\frac{dh}{dt} \tag{3.11}$$

(3.9) = (3.11): $\frac{\pi R^2}{H_0^2}\,h^2\,\frac{dh}{dt} = -\frac{4{,}8\pi\phi^2}{576}\sqrt{h}$

$\Rightarrow h^{\frac{3}{2}}\frac{dh}{dt} = -\frac{4{,}8\phi^2\,H_0^2}{576R^2}$

Condiciones iniciales: cuando $t = 0, \quad h = H_0$

El tiempo de vaciado t_v se produce cuando $h = 0$. Hallar t_v.

Ejercicio 1. Un tanque semiesférico tiene un radio de 1 pie; el tanque está inicialmente lleno de agua y en el fondo tiene un orificio de 1 pulg. de diámetro. Calcular el tiempo de vaciado.
(**Rta.:** 112 seg.)

Ejercicio 2. Un cono circular recto de radio R y altura H tiene su vértice hacia abajo. El tanque tiene un orificio en el fondo cuya área A es controlada por una válvula y es proporcional a la altura del agua en cada instante. Suponiendo que el tanque está lleno de agua, calcular el tiempo de vaciado. Del tiempo de vaciado, qu porcentaje es requerido para vaciar la mitad del volumen?
(**Rta.:** el porcentaje requerido para bajar la mitad del volumen es 29,3 %)

Ejercicio 3. Un tanque cúbico de lado 4 pies, está lleno de agua, la cual sale por una hendidura vertical de $\frac{1}{8}$ pulg. de ancho y de 4 pies de alto. Encontrar el tiempo para que la superficie baje 3 pies. (Ayuda: encontrar el número de pies cúbicos por segundo de agua que salen de la hendidura cuando el agua tiene h pies de profundidad).

(**Rta.:** 360 segundos.)

Ejercicio 4. Encontrar el tiempo requerido para llenar un tanque cúbico de lado 3 pies si tiene un orificio circular de 1 pulg. de diámetro en la base y si entra agua al tanque a razón de π pies^3/min.
(**Rta.:** $26\ \text{min}, 14\ \text{seg.}$)

Ejercicio 5. Un tanque rectangular vaco de base B^2 pies^2, tiene un agujero circular de área A en el fondo. En el instante $t = 0$, empieza a llenarse a razón de E pies cúbicos por segundo. Hallar t en función de h. Mostrar que si el tanque tiene una altura H, nunca se llenaría a menos que $E > 4{,}8\, A\,\sqrt{H}$.
(**Rta.:** $t = \frac{2}{a}\left[b\,\ln\frac{h}{b-1{,}8\,\sqrt{h}} - 1{,}8\sqrt{h}\right] = \frac{2}{a}\left[b\,\ln\frac{b}{\sqrt{h}-b} - \sqrt{h}\right]$
donde, $a = \frac{4{,}8\,A}{B^2}, \quad b = \frac{E}{4{,}8\,A}$.)

Ejercicio 6. Un embudo de 10 pies de diámetro en la parte superior y 2 pies de diámetro en la parte inferior tiene una altura de 24 pies. Si se llena de agua, hallar el tiempo que tarda en vaciarse.
(**Rta.:** 14,016 seg.)

Ejercicio 7. Un tanque con una cierta forma geométrica esta lleno de agua. El agua sale por un orificio situado en la base a una rata proporcional a la raíz cuadrada del volumen restante en el tanque en todo tiempo t. Si el tanque contiene inicialmente 64 galones de agua y 15 galones salen el primer día, calcular el tiempo en el cual hay 25 galones en el tanque.
(**Rta.:** 72 horas)

Ejercicio 8. Un embudo de 5 pies de radio en la parte superior y 1 pie de radio en la parte inferior tiene una altura de H pies. Si se llena de agua: a) Hallar el tiempo de vaciado; b) Del tiempo de vaciado qu porcentaje es necesario para que el nivel baje a $\frac{H}{4}$?
(**Rta.:** a) $2{,}86\sqrt{H}$; b) 86.41 %)

3.5. APLICACIONES A LA FISICA

Caso 1. Cada libre. (Ver figura 3.10)
Por la segunda ley de Newton (ver textos de Física), se llega a que:

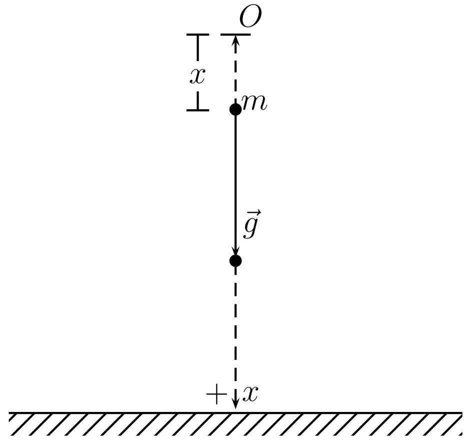

Figura 3.10

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g \Rightarrow v = gt + C_1$$

condiciones iniciales:

$$t = 0 \quad v = v_0 \Rightarrow v = gt + v_0$$

por lo tanto, $\frac{dx}{dt} = gt + v_0$, e integrando, obtenemos:

$$x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + C_2$$

y como las condiciones iniciales son: $t = 0 \quad x = x_0$

$$\Rightarrow x = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + x_0$$

Caso 2. Cada con resistencia del aire.
Por la segunda ley de Newton (ver textos de Física), se llega a que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv$$

dividiendo por m

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= g-\frac{k}{m}v\\ \frac{dv}{dt} &= g-\frac{k}{m}v\end{aligned}$$

obtenemos la E.D. lineal en v

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v = g.$$

Hallemos el F.I.

$$\text{F.I.} = e^{\int \frac{k}{m}\,dt} = e^{\frac{k}{m}t}$$

resolviéndola

$$\begin{aligned}ve^{\frac{k}{m}\,t} &= \int e^{\frac{k}{m}t}\,(g)\,dt+C\\ ve^{\frac{k}{m}\,t} &= \frac{m}{k}\,g\,e^{\frac{k}{m}\,t}+C\\ v &= \frac{m}{k}g+Ce^{-\frac{k}{m}t}.\end{aligned}$$

Supongamos que las condiciones iniciales son: $t=0,\quad v=0$ (es decir, parte del reposo), entonces

$$0=\frac{mg}{k}+C\ \Rightarrow\qquad C=-\frac{mg}{k}$$

$$v=\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}\,e^{-\frac{k}{m}\,t}=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right);$$

obsrvese que cuando $\quad t\to\infty\Rightarrow v\to\frac{mg}{k}$.

Resolviendo para x y teniendo como condiciones iniciales $t=0$ y $x=0$ se llega a que:

$$x=\frac{mg}{k}\,t-\frac{m^2g}{k^2}\,(1-e^{-\frac{k}{m}\,t})$$

Caso 3. Cuerpos con masa variable.

Por la segunda ley de Newton para masa variable (ver textos de Física), se llega a que:

$$F = \frac{d}{dt}(mv) \Rightarrow \frac{d}{dt}(mv) = \sum F + (v+\omega)\frac{dm}{dt}$$

donde, $\sum F$: Fuerzas que actan sobre el cuerpo,
ω: velocidad en relación a m de las partculas que se desprenden del cuerpo.

$$m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt} = \sum F + v\frac{dm}{dt} + \omega\frac{dm}{dt}$$

por tanto,

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F + \omega\frac{dm}{dt}$$

Ejemplo 5. Un cohete con masa estructural m_1, contiene combustible de masa inicial m_2; se dispara en línea recta hacia arriba, desde la superficie de la tierra, quemando combustible a un índice constante a (es decir, $\frac{dm}{dt} = -a$, donde m es la masa variable total del cohete) y expulsando los productos de escape hacia atrás, a una velocidad constante b en relación al cohete. Si se desprecian todas las fuerzas exteriores excepto la fuerza gravitacional mg, donde g la suponemos constante; encontrar la velocidad y la altura alcanzada en el momento de agotarse el combustible (velocidad de altura y apagado).

<u>Solución</u>:

Como $\frac{dm}{dt} = -a \Rightarrow m = -at + C_1$

En $t = 0$, $\quad m = m_1 + m_2$ luego $m_1 + m_2 = -a\,0 + C_1$ por tanto,

$$C_1 = m_1 + m_2, \quad \Rightarrow \quad m = m_1 + m_2 - at$$

Como $\omega = -b$ entonces,

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - b\frac{dm}{dt} \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -mg - b(-a)$$

o sea que, $m\frac{dv}{dt} = -mg + ab$

Reemplazo m: $(m_1 + m_2 - at)\frac{dv}{dt} = -(m_1 + m_2 - at)g + ab$
dividiendo por $m_1 + m_2 - at$: $\frac{dv}{dt} = -g + \frac{ab}{m_1+m_2-at}$
luego

$$v = -gt - \frac{ab}{a}\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2 = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + C_2$$

Condiciones iniciales: en $t = 0$, $\quad v = 0 \Rightarrow 0 = 0 - b\ln|m_1 + m_2| + C_2$
por tanto $C_2 = b\ln|m_1 + m_2|$

$$v = -gt - b\ln|m_1 + m_2 - at| + b\ln|m_1 + m_2| = -gt + b\ln\left|\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 - at}\right|$$

Pero teníamos que $m = m_1+m_2-at$ y como el tiempo de apagado se produce cuando $m = m_1$ ya que no hay combustible, es decir, $m_1 = m_1 + m_2 - at$. Por tanto $at = m_2 \Rightarrow t = \frac{m_2}{a}$ o sea que cuando $t = \frac{m_2}{a} \Rightarrow v =$ velocidad de apagado.

Sustituyendo, queda que

$$v = -\frac{gm_2}{a} + b\ln\left|\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 - a\frac{m_2}{a}}\right|$$

luego $v = -\frac{m_2 g}{a} + b\ln\left[\frac{m_1+m_2}{m_1}\right]$

De la misma manera se encuentra que $h_a =$ altura alcanzada al acabarse el combustible $= -\dfrac{m_2^2 g}{2a^2} + \dfrac{bm_2}{a} + \dfrac{bm_1}{a}\ln\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$

Caso 4. Cuerpos en campo gravitacional variable. (Ver figura 3.11) Por la ley de Gravitación Universal de Newton (ver textos de Física):

$$F = \frac{GMm}{(x + R)^2}$$

donde,
x: la distancia del cuerpo a la superficie de la tierra.
M: la masa de la tierra.
m: la masa del cuerpo.
R: el radio de la tierra.
G: la constante de gravitación universal.

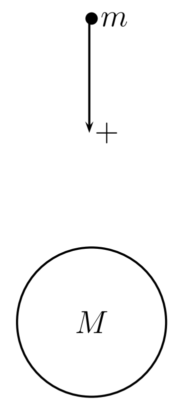

Figura 3.11

Se define el peso de un cuerpo como $w(x) = \frac{k_1 m}{(x+R)^2}$, donde $k_1 = GM$. Si $x = 0$, entonces el peso del cuerpo de masa m en la superficie de la tierra es: $w(0) = mg = \frac{k_1 m}{R^2}$, entonces $k_1 = gR^2$, por lo tanto el peso de un cuerpo a una distancia x de la superficie de la tierra es: $w(x) = \frac{mgR^2}{(x+R)^2}$.

Ejemplo 6. Se lanza un cuerpo de masa m hacia arriba de la tierra con velocidad inicial v_0. Suponiendo que no hay resistencia del aire, pero tomando en cuenta la variación del campo gravitacional con la altura, encontrar la menor velocidad inicial v_0 que necesita el cuerpo para que no regrese a la tierra. Esta velocidad inicial v_0 se le llama velocidad de escape (Ver figura 3.12).

Solución:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -w(x) = -\frac{mgR^2}{(x+R)^2}$$

donde el signo menos indica que la dirección de la fuerza es hacia el centro de la tierra.

Cancelando m, y resolviendo la ecuación diferencial resultante y poniendo como condiciones iniciales, en $t = 0$, $x = 0$ y $v = v_0$, se llega a que:

$$v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{x+R} \geq 0$$

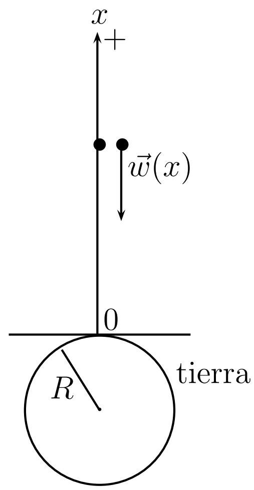

Figura 3.12

Por lo tanto, $v_0^2 \geq 2gR$
de aquí concluímos que la velocidad de escape $v_0 = \sqrt{2gR}$

Ejercicio 1. Un torpedo se desplaza a una velocidad de 60 millas/hora en el momento de agotarse el combustible; si el agua se opone al movimiento con una fuerza proporcional a su velocidad y si en una milla de recorrido reduce su velocidad a 30 millas/hora. ¿A que distancia se detendrá?
(**Rta.:** 2 millas)

Ejercicio 2. En el interior de la tierra la fuerza de gravedad es proporcional a la distancia del centro, si se perfora un orificio que atraviese la tierra de polo a polo y se lanza una piedra en el orificio con velocidad v_0, con que velocidad llegará al centro?
(**Rta.:** $v = \sqrt{gR + v_0^2}$, donde R es el radio de la tierra.)

Ejercicio 3. Una bala se introduce en una tabla de $h = 10$ cm. de espesor con una velocidad $v_0 = 200$ mt/seg, traspasándola con $v_1 = 80$ mt/seg. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad. Hallar el tiempo que demora la bala en atravesar la tabla.
(**Rta.:** $t = \frac{h_0(v_1 - v_0)}{v_0 v_1 \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right)} = \frac{3}{4000 \ln 2{,}5}$ seg.)

Ejercicio 4. Una cadena de 4 pies de longitud tiene 1 pie de longitud colgando del borde de una mesa. Despreciando el rozamiento, hallar el tiempo que tarda la cadena en deslizarse fuera de la mesa.
(**Rta.:** $t = \sqrt{\frac{4}{g}} \ln(4 + \sqrt{15})$ seg.)

Ejercicio 5. Un punto material de masa un gramo se mueve en línea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo calculado desde el instante $t = 0$ e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10$ seg., la $v = 50$cm/seg y la $f = 4$ dinas. Qué velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto desde el comienzo del movimiento?
(**Rta.:** $v = \sqrt{72500}$ cm./seg.= 269,3 cm/seg.)

Ejercicio 6. Un barco retrasa su movimiento por acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es 10 mt/seg, después de 5 seg. su velocidad será 8 mt/seg. Después de cuanto tiempo la velocidad será 1 mt/seg ?
(**Rta.:** $t = -5\frac{\ln 10}{\ln 0{,}8}$ seg.)

Ejercicio 7. Un cuerpo de masa M se deja caer desde el reposo en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la magnitud de la velocidad. Encuentre el tiempo que transcurre hasta que la velocidad del cuerpo alcance el 80 % de su velocidad límite.
(**Rta.:** $t = -\frac{M}{k} \ln 0{,}2$)

CAPÍTULO 4

TEORIA DE LAS E.D.O. LINEALES

4.1. INTRODUCCION

Utilizando algebra lineal, estudiaremos la E.D.O. lineal de orden n con coeficientes constantes.

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = h(x),$$

donde $h(x)$ es una función continua en $I = [a, b]$ y $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ son constantes y $a_n \neq 0$.

Notación y conceptos:

i) $\frac{d}{dx} = D_x$

Si no hay ambigedad con respecto a la variable independiente, tomaremos: $D_x = D$.

$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = D_x D_x = D_x^2 = D^2$

en general, $\frac{d^m}{dx^m} = D_x^m = D^m = D_x(D_x^{m-1})$

ii) $I = [a, b]$

iii) $C[a, b] = C(I)$: clase de todas las funciones continuas en el intervalo I

$C'[a, b] = C'(I)$: clase de todas las funciones que tienen primera derivada continua en I (o funciones continuamente diferenciables en I).

$C'(I) \subset C(I)$ ya que toda función que es derivable en I es continua en I.

$C^2(I) = C^2[a, b]$: la clase de todas las funciones que tienen segunda derivada continua en I.

En general, $C^n(I) = C^n[a, b]$: clase de todas las funciones que tienen derivada de orden n continua en I.

Obsrvese que: $C(I) \supset C'(I) \supset C^2(I) \supset \ldots \supset C^n(I) \supset \ldots$

Si $f, g \in C(I)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos:

a) $\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in C(I)$

b) $\forall x \in I : (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in C(I)$

En general, si

$$f, g \in C^n(I) \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \in C^n(I) \tag{4.1}$$

$$\forall x \in I : (\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in C^n(I) \tag{4.2}$$

Con las operaciones definidas en a) y b) podemos probar que $C(I)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Y de (4.1) y (4.2) podemos concluir que $C^n(I)$ es un subespacio vectorial de $C(I)$ para $n \geq 1$.

En general, si $n \geq m$, entonces $C^n(I)$ es subespacio vectorial de $C^m(I)$.

Nota: estos espacios son de dimensión infinita.

iv) Como $\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

es lo mismo que $D(f+g)(x) = D(f(x)+g(x)) = Df(x) + Dg(x)$

y también $D(\alpha f)(x) = D(\alpha f(x)) = \alpha Df(x)$,

por tanto, podemos decir que $D : C'(I) \to C(I)$ es una transformación lineal .

Anlogamente, $D^2 : C^2(I) \to C(I)$ es una transformación lineal.

En general, $D^n : C^n(I) \to C(I)$ es una transformación lineal.

Por definición $D^0 : C(I) \to C(I)$ es la transformación identidad, es decir, $f \mapsto D^0 f = f$.

En el algebra lineal se tiene que si $T_1 : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ y $T_2 : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ son transformaciones lineales, entonces,

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 : \mathbf{U} &\to \mathbf{V} \\ x &\mapsto (T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha T_1 : \mathbf{U} &\to \mathbf{V} \\ x &\mapsto (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x) \end{aligned}$$

son también transformaciones lineales. Por ejemplo: $D + D^2$ es una Transformacin Lineal, definida por:

$$D + D^2 : C^2(I) \to C(I)$$

En general:

$$a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)D^0 : C^n(I) \to C(I)$$

es una Transformacin Lineal.

Esta Transformacin Lineal se le denomina **operador diferencial** lineal de orden n, donde $a_n(x), \ldots, a_0(x)$ son funciones continuas en I y $a_n(x) \neq 0$ en I.

Este operador diferencial se denota por:

$$L(D) = \underbrace{a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)D^0}_{\text{operador diferencial de orden } n \text{ con coeficientes variables}}$$

Si $y \in C^n(I) \Rightarrow L(D)y \in C(I)$

Ejemplo 1. Si $L(D) = D + p(x) = D + 2x$ y $f(x) = x^2$. Aplicar $L(D)$ a la función $f(x)$
Solución:

$$\begin{aligned} y &= x^2 \in C'(I) \\ L(D)(x^2) &= (D + 2xD^0)(x^2) \\ &= D(x^2) + 2xD^0(x^2) = 2x + 2xx^2 \\ &= 2x + 2x^3 \in C(I) \end{aligned}$$

Observación: Resolver la E.D. $L(D)y = 0$ es lo mismo que hallar el núcleo del operador diferencial $L(D)$.

Ejemplo 2. Hallar el núcleo del operador $L(D) = D + 2xD^0$
Solución:

$(D + 2xD^0)y = 0 \Rightarrow Dy + 2xy = 0$ (E.D lineal en y con $p(x) = 2x$ y $Q(x) = 0$)

$F.I. = e^{\int 2x\,dx} \Rightarrow F.I. = e^{x^2}$

$ye^{x^2} = \int e^{x^2} \times 0\,dx + C \Rightarrow y = Ce^{-x^2}$

Núcleo $L(D) = \{Ce^{-x^2}/C \in \mathbb{R}\}$

como e^{-x^2} genera todo el núcleo $\Rightarrow$ dim núcleo $= 1$.

Teorema 4.1 (Principio de superposición) .

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pertenecen al núcleo de $L(D)$, entonces la combinación lineal: $\sum_{i=1}^{n} C_i\, y_i$ y $n \geq 1$ está en el núcleo de $L(D)$

Demostración: Sea $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, veamos que y esta en el núcleo, es decir, veamos que $L(D)y = 0$.
Como $y_1, y_2, \ldots, y_n$ estn en el núcleo de $L(D)$, entonces $L(D)y_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$
Como $L(D)$ es un operador lineal, entonces

$$L(D)y = L(D)(\sum_{i=1}^{n} C_iy_i) = \sum_{i=1}^{n} L(D)(C_iy_i) = \sum_{i=1}^{n} C_iL(D)y_i = 0$$

luego y esta en el núcleo de $L(D)$

Producto de Operadores Diferenciales:

Analicemos esta operación con un ejemplo, sean:

$$L_1(D) = D + 2D^0, \qquad L_2(D) = D^2 + 3D^0$$

$$L_1(D)L_2(D) : C^3(I) \to C(I)$$

es una Transformacin Lineal

$$L_1(D)L_2(D)y = \overbrace{(D + 2D^0)}^{\text{operador}}\overbrace{(D^2 + 3D^0)}^{\text{operador}}\,y$$

donde y es una función

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{(D + 2D^0)}_{\text{operador}}\underbrace{(D^2y + 3D^0y)}_{\text{función}}\\
&= D(D^2y) + D(3D^0y) + 2D^0(D^2y) + 2D^0(3D^0y)\\
&= D^3y + 3Dy + 2D^2y + 6D^0y
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (D^3 + 2D^2 + 3D + 6D^0)y \\
L_1(D)L_2(D) &= D^3 + 2D^2 + 3D + 6D^0
\end{aligned}
$$

De la misma manera se calcula $L_2(D)L_1(D)$, con el siguiente resultando:

$$L_2(D)L_1(D) = D^3 + 2D^2 + 3D + 6D^0 = L_1(D)L_2(D)$$

lo cual nos permite decir que el producto es conmutativo siempre y cuando los coeficientes sean constantes.

Cuando $L_1(D)$ y $L_2(D)$ tienen coeficientes variables, entonces, en general $L_1(D)L_2(D) \neq L_2(D)L_1(D)$.

Ejemplo 3. $L_1(D) = D + xD^0, \qquad L_2(D) = xD^2 + D + xD^0$

Primero hallemos $L_1(D)\,L_2(D)$, para ello calculemos

$$
\begin{aligned}
L_1(D)\,L_2(D)y &= (D + xD^0)(xD^2 + D + xD^0)y \\
&= (D + xD^0)(xD^2y + Dy + xD^0y) \\
&= D(xD^2y) + D^2y + D(xy) + xD^0(xD^2y) + (xD^0)Dy + \\
&+ (xD^0)(xD^0y) \\
&= xD^3y + D^2y + D^2y + xDy + y + x^2D^2y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + (2 + x^2)(D^2y) + 2xDy + (1 + x^2)y
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$L_1(D)\,L_2(D) = xD^3 + (2 + x^2)D^2 + 2xD + (1 + x^2)D^0$$

Ahora hallemos $L_2(D)\,L_1(D)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
&L_2(D)\,L_1(D)y = (xD^2 + D + xD^0)(D + xD^0)y \\
&= (xD^2 + D + xD^0)(Dy + xD^0y) \\
&= (xD^2 + D + xD^0)(Dy + xy) \\
&= xD^2(Dy + xy) + D(Dy + xy) + xD^0(Dy + xy) \\
&= xD^2(Dy) + xD^2(xy) + D(Dy) + D(xy) + x(Dy + xy) \\
&= xD^3y + xDD(xy) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + xD(xDy + y) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= xD^3y + x(D(xDy) + Dy) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x(xD^2y + Dy + Dy) + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x(xD^2y + 2Dy) + D^2y + Dy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + x^2D^2y + 2xDy + D^2y + xDy + y + xDy + x^2y \\
&= xD^3y + (x^2+1)D^2y + (3x+1)Dy + (x^2+1)y \\
&= (xD^3 + (x^2+1)D^2 + (3x+1)D + (x^2+1)D^0)y
\end{aligned}
$$

Luego $L_2(D)L_1(D) = xD^3 + (x^2+1)D^2 + (3x+1)D + (x^2+1)D^0 \neq L_1(D)\,L_2(D)$

Definición 4.1 (Condición inicial) *Es una o varias condiciones que se le colocan a una E.D.O. en un punto.*

Ejemplo 4. $y'' + k^2y = 0$, con las condiciones iniciales: $y(0) = 1, y'(0) = 1$

Definición 4.2 (Condición de Frontera) *Es una o varias condiciones que se le colocan a una E.D.O. en varios puntos.*

Ejemplo 5. $y'' + k^2y = 0$, con las condiciones de frontera: $y(0) = 1, \quad y'(1) = 1$

Los teoremas que se enuncian a continuación son teoremas de existencia y unicidad que se demuestran en el Apéndice A.

Teorema 4.2 (de Picard) .

Si f, $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en un rectángulo $R : |x| \leq a$ y $|y| \leq b$, entonces existe un intervalo $|x| \leq h \leq a$ en el cual existe una solución única $y = \phi(x)$ del problema de valor inicial (P.V.I.): $y' = f(x, y)$ con $y(0) = 0$.

Nota:

a) La condición inicial $y(0) = 0$ también puede ser cambiada por la condición inicial $y(a) = b$ con (a, b) en el rectángulo R

b) Es importante anotar que este es un teorema de validez local, es decir, se cumple en un intervalo que contiene al punto donde se da la condición inicial, por fuera de este intervalo puede ocurrir que la solución no sea única; pero cuando el operador diferencial es lineal y todos los coeficientes $a_i(x)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ son continuos en $\mathbb{R}$ y $a_n \neq 0$ en $\mathbb{R}$ (en particular cuando los $a_i(x)$ son constantes para $i = 0, 1, \ldots, n$), entonces la solución es continua y global, es decir, se cumple en todo $\mathbb{R}$, como se demuestra en el corolario A.1 del Apéndice.

Teorema 4.3 :

Sea $L(D)$ un operador diferencial lineal de primer orden en el intervalo I y sea $x_0 \in I$, entonces $\forall\, y_0$ el P.V.I.: $L(D)y = Q(x)$ con $y(x_0) = y_0$ tiene una solución única.

Teorema 4.4 :

Sea $L(D)$ un operador diferencial lineal de orden n en I y sea x_0 un elemento de ese intervalo ($x_0 \in I$), entonces $\forall\, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ reales cualesquiera el P.V.I.: $L(D)y = h(x)$, con

$$y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1,\; y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

tiene una única solución.

Ejemplo 6. Teniendo en cuenta el Teorema de Picard, analizar la E.D.

$$xy' = 2y, \qquad y(-2) = 4$$

Solución: obsrvese que esta E.D. es lineal, con $a_1(x) = x$ y por tanto $a_1(0) = 0$ (es decir, $a_1(x)$ no es diferente de cero $\forall x \in \mathbb{R}$), lo que indica que la solución no es global, como lo veremos a continuación.

Separando variables, obtenemos la siguiente solución general

$$y = Cx^2,$$

y para la condición inicial $y(-2) = 4$ se tiene que $C = 1$. De la E.D. tenemos que $y' = f(x, y) = 2\frac{y}{x}$. Por lo tanto $f(x, y) = 2\frac{y}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ son discontinuas en $x = 0$, como la condición esta dada en $x = -2$, entonces estas funciones son continuas en este punto y por el Teorema de Picard existe un intervalo, en este caso $(-\infty, 0)$, para el cual la solución es única y es $y = x^2$, por fuera de este intervalo, por ejemplo en $\mathbb{R}$, puede no ser única, por ejemplo

$$y = x^2, \qquad y = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -x^2, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad y = \begin{cases} x^2, & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

son soluciones en $\mathbb{R}$ y todas tres pasan por el punto $(-2, 4)$ como lo vemos en la figura 4.1

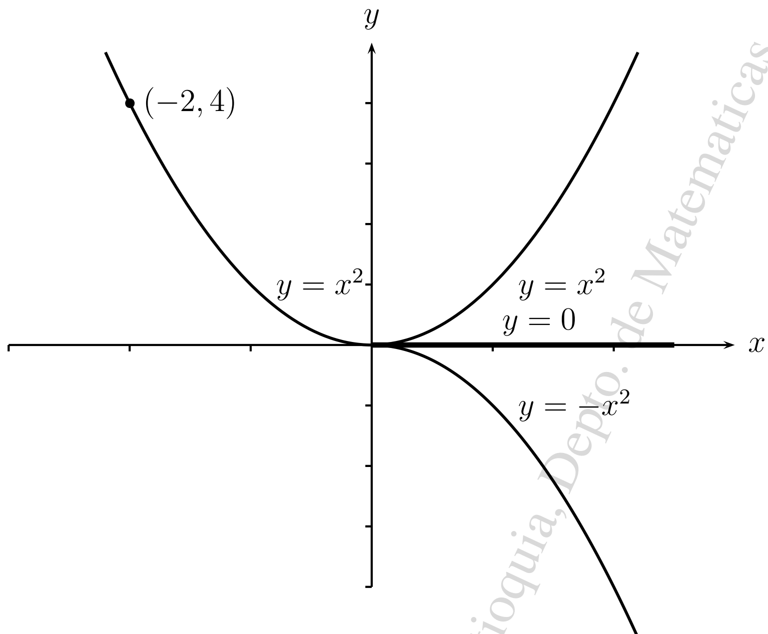

Figura 4.1

Ejemplo 7. Dada las condiciones iniciales $y(-2) = 1, \quad y'(-2) = 1$ y la solución general $y = C_1 + C_2 \ln|x|$ de la E.D. $xy'' + y' = 0$, hallar C_1 y C_2 .
Solución:

Solución general (como lo veremos más adelante) es: $y = C_1 + C_2 \ln|x|$

$y' = \frac{C_2}{x}$

$y = 1 = C_1 + C_2 \ln|-2|$

$y' = 1 = \frac{C_2}{-2} \Rightarrow C_2 = -2 \Rightarrow 1 = C_1 + (-2)\ln 2$

$\Rightarrow C_1 = 1 + 2\ln 2$

luego $y = 1 + 2\ln 2 - 2\ln|x|$ esta es la solución única en $(-\infty, 0)$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

4.2. DIMENSIN DEL ESPACIO VECTORIAL SOLUCIÓN DE UNA E.D.O.

Dijimos que $C^n(I)$ tiene dimensión infinita, pero el espacio solución de la E.D.O. $L(D)y = 0$ (con $L(D)$ un operador diferencial lineal de orden n), es el núcleo de $L(D)$, el cual tiene dimensión n, como lo veremos en los teoremas que expondremos a continuación.

Definición 4.3 .

a) *Decimos que las n funciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son* **linealmente dependientes** *en un intervalo I si existen constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ no todas nulas tales que*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) = 0$$

para todo x en I.

b) *Si para todo x en I*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) = 0$$

implica que $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$, entonces decimos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son **linealmente independientes***en el intervalo I.*

Nota: demostrar que n funciones son linealmente independientes es a veces complicado, pero cuando las n funciones son soluciones de una E.D. lineal homogénea el problema se vuelve más sencillo, utilizando el Wronskiano.

Definición 4.4 (Wronskiano) *Sean $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ en $C^{n-1}(I)$, el determinante:*

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

con $x \in I$, se le llama el Wronskiano de $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Obsérvese que el Wronskiano depende de la variable x.

En particular cuando $n = 2$, el Wronskiano tiene la siguiente propiedad.

Observación (Fórmula de Abel): para $n = 2$

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Consideremos la E.D.O. lineal, homogénea de orden dos:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0,$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son continuas en I y sean y_1, y_2 soluciones de esta E.D., luego

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = 0 \tag{4.3}$$
$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = 0 \tag{4.4}$$

$$(4,3) \times y_2 : y_1''y_2 + a(x)y_1'y_2 + b(x)y_1y_2 = 0 \tag{4.5}$$
$$(4,4) \times y_1 : y_2''y_1 + a(x)y_2'y_1 + b(x)y_1y_2 = 0 \tag{4.6}$$

$$(4,6) - (4,5) : y_2''y_1 - y_1''y_2 + a(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0 \tag{4.7}$$

como

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= y_1y_2' - y_2y_1' \\ W'(y_1, y_2) &= y_1y_2'' + y_1'y_2' - y_2y_1'' - y_2'y_1' \\ &= y_1y_2'' - y_2y_1'' \end{aligned}$$

Luego en (4.7): $W' + a(x)W = 0$, lineal en W de primer orden .

Su solución es $We^{\int a(x)dx} = C$, luego la solución general es

$$W = C\,\overbrace{e^{-\int a(x)dx}}^{>0}$$

Esta solución general es llamada Fórmula de Abel.

Obsrvese que cuando $\quad C = 0 \Rightarrow W = 0 \quad$ y si $\quad C \neq 0 \Rightarrow W \neq 0$

Lema 4.1 :
El Wronskiano de n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linealmente dependientes es idénticamene cero.

Demostracin: supongamos que para todo x en I

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = 0$$

donde algunas de los $C_i \neq 0$.

Derivando $n-1$ veces, obtenemos

$$\begin{array}{ll}
C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) & = 0 \\
C_1y_1'(x) + C_2y_2'(x) + \ldots + C_ny_n'(x) & = 0 \\
C_1y_1''(x) + C_2y_2''(x) + \ldots + C_ny_n''(x) & = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
C_1y_1^{(n-1)}(x) + C_2y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x) & = 0
\end{array}$$

que se cumplen para todo x en I. Este sistema homogéneo de n ecuaciones con n incgnitas tiene solución distinta de la trivial si y solo si el determinante del sistema (o sea el Wronskiano) se anula en I, es decir si y solo si $W(x) = 0$ para todo x en I.

Teorema 4.5 *:*

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de la E.D. lineal homogénea de orden n

$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

en el intervalo I y en éste intervalo las funciones $a_i(x)$ son continuas en I. Entonces

a) Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes, entonces el Wronskiano $W(x) \equiv 0$ en I.

b) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes, si y solo si el Wronskiano $W(x) \neq 0$ para todo x en I.

Demostracin: la parte a) ya se demostró en el Lema anterior.
b)$\Rightarrow$) Hagamos la demostración por el contra-recproco, es decir, supongamos que existe a en I tal $W(a) = 0$ y veamos que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes.

Como $W(a)$ es el determinante del sistema:

$$C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + \ldots + C_ny_n(a) = 0$$

$$C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) + \ldots + C_ny_n'(a) = 0$$

$$C_1y_1''(a) + C_2y_2''(a) + \ldots + C_ny_n''(a) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_1y_1^{(n-1)}(a) + C_2y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(a) = 0$$

donde los C_i son las incgnitas y como $W(a) = 0$ (determinante de los coeficientes del sistema) y por lo que sabemos del algebra lineal, este tiene una solución distinta de la trivial, es decir existen $C_i \neq 0$.
Con esta solución no trivial definamos la siguiente función

$$Y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$

y evaluemos esta nueva función y sus derivadas hasta de orden $n-1$ en a

$$Y(a) = C_1y_1(a) + C_2y_2(a) + \ldots + C_ny_n(a) = 0$$

$$Y'(a) = C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) + \ldots + C_ny_n'(a) = 0$$
$$Y''(a) = C_1y_1''(a) + C_2y_2''(a) + \ldots + C_ny_n''(a) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y^{(n-1)}(a) = C_1y_1^{(n-1)}(a) + C_2y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(a) = 0$$

en conclusión
$$Y(a) = Y'(a) = \ldots = Y^{(n-1)}(a) = 0$$
por otro lado sabemos que la función nula $H(x) \equiv 0$ es también una solución de la E.D.
$$a_n(x)y^{(n)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$
la cual satisface las condiciones iniciales anteriores y por el teorema de existencia y unicidad, podemos afirmar que
$$Y(x) = H(x) = 0 = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x)$$
y como algunos de estos C_i son diferentes de cero, entonces $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes.

$\Leftarrow$) Supongamos que $W(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ y veamos que
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$
son linealmente independientes.
Supongamos que
$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$
son linealmente dependientes, por lo tanto (por la parte a)) $W(x) \equiv 0$ (Absurdo!)

Teorema 4.6 :

Sea $L(D)y = a_n(x)D^ny + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \ldots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = 0$ una E.D.O. lineal de orden n con coeficientes continuos definida en el intervalo I, entonces el espacio solución de $L(D)$ (o sea el núcleo de $L(D)$), tiene dimensión n.

Demostracin: sea $Y(x)$ una solución de la E.D. y sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n soluciones linealmente independientes de la E.D. Veamos que $Y(x)$ se puede expresar como una combinación lineal de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Sea a un punto de I y consideremos el siguiente sistema:

$$Y(a) = C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + \ldots + C_n y_n(a)$$

$$Y'(a) = C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a) + \ldots + C_n y_n'(a)$$

$$Y''(a) = C_1 y_1''(a) + C_2 y_2''(a) + \ldots + C_n y_n''(a)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y^{(n-1)}(a) = C_1 y_1^{(n-1)}(a) + C_2 y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(a)$$

el determinante de los coeficientes del sistema es el Wronskiano evaluado en a, es decir, $W(a)$ y como $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes entonces $W(a) \neq 0$, esto quiere decir que existe al menos un $C_i \neq 0$.
Con los $C_1, C_2, \ldots, C_n$ (al menos uno de ellos es diferente de cero) definimos la función

$$G(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

luego

$$G(a) = C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) + \ldots + C_n y_n(a) = Y(a)$$

$$G'(a) = C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a) + \ldots + C_n y_n'(a) = Y'(a)$$

$$G''(a) = C_1 y_1''(a) + C_2 y_2''(a) + \ldots + C_n y_n''(a) = Y''(a)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$G^{(n-1)}(a) = C_1 y_1^{(n-1)}(a) + C_2 y_2^{(n-1)}(a) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(a) = Y^{(n-1)}(a)$$

Es decir, las funciones G y Y coinciden en la condición inicial, por tanto por el teorema de existencia y unicidad, $G(x) = Y(x)$ para todo x en I.
Luego

$$G(x) = Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

Nota:

i. Lo que dice este teorema es que para resolver una E.D. lineal homogénea de orden n, se debe encontrar n soluciones linealmente independientes y la solución general es la combinación lineal de las n soluciones.

ii. Si las n-tuplas

$$\begin{array}{c}(y_1(x_0), y_1'(x_0), \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0))\\(y_2(x_0), y_2'(x_0), \ldots, y_2^{(n-1)}(x_0))\\\vdots\\(y_n(x_0), y_n'(x_0), \ldots, y_n^{(n-1)}(x_0))\end{array}$$

son linealmente independientes, entonces las funciones

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

son linealmente independientes en I.

Ejemplo 8. Si $y_1 = e^{m_1x}$, $y_2 = e^{m_2x}$ con $m_1 \neq m_2$, mostrar que y_1 y y_2 son linealmente independientes.

<u>Solución</u>: más adelante veremos que y_1, y_2 son soluciones de una E.D. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} \end{vmatrix} \\ &= m_2e^{(m_1+m_2)x} - m_1e^{(m_1+m_2)x} \\ &= \underbrace{(m_1 - m_2)}_{\neq 0}\underbrace{e^{(m_1+m_2)x}}_{>0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \neq 0$ por tanto y_1, y_2 son linealmente independientes.

Ejemplo 9. $y_1 = e^{mx}$, $y_2 = xe^{mx}$. Hallar $W(y_1, y_2)$.

<u>Solución</u>: más adelante veremos que y_1, y_2 son soluciones de una E.D. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{mx} & xe^{mx} \\ me^{mx} & mxe^{mx} + e^{mx} \end{vmatrix} \\ &= mxe^{2mx} + e^{2mx} - mxe^{2mx} \\ &= e^{2mx} > 0 \\ &\Rightarrow y_1, y_2 \quad \text{son} \quad \text{linealmente independientes.} \end{aligned}$$

Ejemplo 10. $y_1 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ y_2 = e^{\alpha x}\cos\beta x$. Hallar $W(y_1, y_2)$

Solución: más adelante veremos que $y_1,\ \ y_2$ son soluciones de una E.D. lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x & e^{\alpha x}\cos\beta x \\ \beta e^{\alpha x}\cos\beta x + \alpha e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x & -\beta e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= -\beta e^{2\alpha x}\operatorname{sen}^2\beta x + \alpha e^{2\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\cos\beta x - \beta e^{2\alpha x}\cos^2\beta x - \alpha e^{2\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\cos\beta x \\
&= -\beta e^{2\alpha x}(\operatorname{sen}^2\beta x + \cos^2\beta x) \\
&= -\beta \underbrace{e^{2\alpha x}}_{>0} \neq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ y_1, y_2$ son linealmente independientes.

4.3. MÉTODO DE REDUCCIÓN DE ORDEN

FÓRMULA DE D'ALEMBERT (Construcción de una segunda Solución a partir de una solución conocida).

Dada la E.D.O.: $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ con $a_2(x) \neq 0$ en I y $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ continuas en I; dividiendo en la E.D.O. original por $a_2(x)$ y haciendo $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$, se tiene:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \text{ forma canónica} \tag{4.8}$$

Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la E.D. en I y $y_1(x) \neq 0$ en I.

Supongamos $y(x) = u(x)y_1(x)$ y hallemos u tal que $y(x)$ sea una solución.

Derivando dos veces , $y' = uy_1' + u'y_1$ y $\quad y'' = uy_1'' + u'y_1' + u'y_1' + u''y_1$ y sustituyendo en la ecuación diferencial (4.8):

$$uy_1'' + 2u'y_1' + u''y_1 + P(x)(uy_1' + u'y_1) + Q(x)uy_1 = 0$$

$$u[\,y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + u''y_1 + u'[\,2y_1' + P(x)y_1] = 0$$

Luego, $u''y_1 + u'[\,2y_1' + P(x)y_1] = 0$

Hagamos $W = u'$ (éste cambio de variable reduce el orden)

$$y_1W' + W(2y_1' + P(x)y_1) = 0$$

$$W' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right)W = 0, \quad \text{(lineal en } W \text{de primer orden)}$$

Su F.I.$= e^{\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+P(x)\right)\,dx} = e^{\ln y_1^2}e^{\int P(x)\,dx} = y_1^2e^{\int P(x)\,dx}$, luego

$$Wy_1^2e^{\int P(x)\,dx} = C$$

De donde

$$W = C\frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} = u' = \frac{du}{dx}$$

e integrando

$$u = C\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_1$$

Por lo tanto $y = uy_1 = \underbrace{Cy_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx + C_1y_1}_{\text{combinación lineal de } y_1 \text{ y } y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx}$

Luego la segunda solución es $y_2 = y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx$ con $y_1 \neq 0$ en I

Veamos que y_1 y y_2 son linealmente independientes:

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_1\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} \\ y_1' & y_1\frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2} + y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \end{vmatrix} \\ &= e^{-\int P(x)\,dx} + y_1y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx - y_1y_1'\int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \\ &= e^{-\int P(x)\,dx} > 0 \end{aligned}$$

Luego y_1, y_2 son soluciones linealmente independientes de la E.D.

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

En conclusión, si y_1 es una solución, con $y_1 \neq 0$ en I, entonces

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx \text{ (Fórmula de D'Alembert)}$$

Nota: el método es aplicable también para E.D. no homogéneas:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

en este caso se supone $y(x) = u(x)y_1(x) = uy_1$ y se llega a la E.D. lineal en W de primer orden:

$$W' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P(x)\right)W = \frac{f(x)}{y_1}$$

y se continua de la misma manera anterior.

Ejemplo 11. Sea $x^2y'' - xy' + 2y = 0$, (E.D. de Cauchy), sabiendo que $y_1 = x\operatorname{sen}(\ln x)$ es una solución de la E.D. Hallar y_2

<u>**Solución**</u>. Dividiendo por x^2 se tiene:

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

Veremos más adelante que $y_1 = x\operatorname{sen}(\ln x)$ es una solución de la ecuación de Cauchy, entonces la segunda solución es:

$$y_2 = x\operatorname{sen}(\ln x)\int \frac{e^{-\int -\frac{1}{x}\,dx}}{x^2\operatorname{sen}^2(\ln x)}\,dx = x\operatorname{sen}(\ln x)\int \frac{e^{\ln(x)}}{x^2\operatorname{sen}(\ln x)}\,dx$$

$$\begin{aligned}
&= x\operatorname{sen}(\ln x)\int \frac{x}{x^2\operatorname{sen}(\ln x)}\,dx \\
&= x\operatorname{sen}(\ln x)\int \frac{dx}{x\operatorname{sen}^2(\ln x)}\,dx \qquad \begin{cases} u &= \ln x \\ du &= \frac{dx}{x}\end{cases} \\
&= x\operatorname{sen}(\ln x)\int \frac{du}{\operatorname{sen}^2 u}
\end{aligned}$$

$$= \quad x \operatorname{sen}(\ln x) \int \csc^2 u \, du = -x \operatorname{sen}(\ln x) \cot u = -x \operatorname{sen}(\ln x) \cot(\ln x)$$
$$= \quad -x \cos(\ln x)$$

La solución general es : $y = C_1 y_1 + c_2 y_2$

$$y = C_1 x \operatorname{sen}(\ln x) + C_2(-x \cos(\ln x))$$

$$y = C_1 x \operatorname{sen}(\ln x) + C_3 x \cos(\ln x)$$

Utilizando el método de reducción de orden resolver los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0 \quad y_1 = x^4$ es una solución. Hallar y_2
(**Rta.:** $y_2 = x^4 \ln|x|$)

Ejercicio 2. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0 \; y_1 = x^2$ es una solución. Hallar y_2
(**Rta.:** $y_2 = -\frac{1}{5x^3}$)

Ejercicio 3. $xy'' + y' = 0, \; y_1 = \ln x$ es una solución. Hallar y_2
(**Rta.:** $y = -1$)

Ejercicio 4. $x^2y'' - xy' + 2y = 0, \; y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$ es una solución. Hallar y_2
(**Rta.:** $y_2 = -x \cos(\ln x)$)

Ejercicio 5. Hallar la solución general de $xy'' - xf(x)y' + f(x)y = 0$.
(**Rta.:** $y = c_1 x + c_2 x \int x^{-2} e^{\int f(x)\, dx}\, dx$)

Ejercicio 6. Hallar la solución general de $y'' - f(x)y' + (f(x) - 1)y = 0$
(**Rta.:** $y = c_1 e^x + c_2 e^x \int e^{[-2x + \int f(x)\, dx]}\, dx$)

Ejercicio 7. a) Si n es un entero positivo, hallar dos soluciones linealmente independientes de

$$xy'' - (x+n)y' + ny = 0$$

b)Hallar la solución general de la E.D. de la parte a) cuando $n = 1, 2, 3$
(**Rta.:** a) $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \int x^n e^{-x}\, dx$, b) $y = c_1 e^x + c_2(x+1)$, $y = c_1 e^x + c_2(x^2 + 2x + 2), y = c_1 e^x + c_2(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$.)

Ejercicio 8: Utilizando el método de reducción de D'Alembert resolver la E.D. lineal no homogénea: $(x-1)y'' - xy' + y = 1$ sabiendo que $y_1 = e^x$ es una solución a la homogénea asociada. Obsrvese que obtenemos una segunda solución y una solución particular.
(**Rta.:** $y = 1 + C_1 x + C_2 e^x$)

4.4. E.D.O. LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sabemos que $\frac{dy}{dx} + ay = 0$ es lineal de primer orden, donde $p(x) = a$. luego el $F.I. = e^{\int a\, dx} = e^{ax}$ y su solución es

$$ye^{ax} = C \Rightarrow y = Ce^{-ax}$$

Por similitud con la E.D.O. de primer orden y coeficientes constantes, vamos a suponer que la E.D. lineal de segundo orden y coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{4.9}$$

tiene por solución una función exponencial de la forma: $y = e^{mx}$, derivando dos veces se tiene

$$y' = me^{mx}, \qquad y'' = m^2 e^{mx}$$

y sustituyendo en la E.D. (4.9): $am^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$
luego

$$e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0$$

o sea que

$$am^2 + bm + c = 0,$$

la cual llamamos ecuación característica o ecuación auxiliar de la E.D.:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Con las races de la ecuación característica suceden tres casos:

1. Que tenga races reales y diferentes.

2. Que tenga races reales e iguales.

3. Que tenga races complejas conjugadas.

Caso 1. **Races reales y diferentes**

Si las races son m_1 y m_2, con $m_1 \neq m_2$, luego $y_1 = e^{m_1 x}$ y $y_2 = e^{m_2 x}$ son linealmente independientes y por tanto la solución general es

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}.$$

Ejemplo 12 Hallar la solución general de $2y'' - 5y' - 3y = 0$
Solución:

Ecuación característica: $2m^2 - 5m - 3 = 0$

$$m = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{5 \pm 7}{4}$$

$$m_1 = 3\ ,\ m_2 = -\frac{1}{2}$$

La solución general es $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$

Caso 2. **Races reales e iguales:** en este caso las races son de multiplicidad dos.

Sea m (con multiplicidad 2) $\Rightarrow y_1 = e^{mx}$ es una solución.
Utilicemos el método de D'Alembert para hallar la segunda sulución de

$$ay'' + by' + cy = 0$$

dividiendo por a para conseguir la forma canónica, se tiene

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)\,dx}}{y_1^2}\,dx = e^{mx} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}\,dx}}{e^{2mx}}\,dx$$

como $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow am^2 + bm + c = 0$ (ecuación característica)
y sus races son $m_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; pero como las races son iguales, entonces el discriminante $b^2 - 4ac = 0$, por lo tanto $m_{1,2} = m = -\frac{b}{2a}$, luego:

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{mx}\int \frac{e^{\frac{-b}{a}x}}{e^{\left(2\frac{-b}{2a}x\right)}}\,dx \\ &= e^{mx}\int dx = xe^{mx} \end{aligned}$$

luego la solución general es: $y = C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$
Ejemplo 13. $4y'' - 4y' + y = 0$ Hallar la solución general.
Solución:

Ecuación característica: $4m^2 - 4m + 1 = 0 = (2m-1)^2 = 0$ por lo tanto $m = \frac{1}{2}$ (con multiplicidad 2)

La solución general es: $y = C_1e^{\frac{x}{2}} + C_2xe^{\frac{x}{2}}$

Caso 3. **Races complejas y conjugadas**

Supongamos que $m_1 = \alpha + \beta i$ es una raíz de la ecuación auxiliar y por tanto su conjugada $m_2 = \alpha - \beta i$ es la otra raíz, donde α es la parte real y β es la parte imaginaria; recordando que $e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ (Fórmula de Euler) entonces la solución general es

$$\begin{aligned} y &= C_1e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2e^{(\alpha-\beta i)} = C_1e^{\alpha x}e^{\beta ix} + C_2e^{\alpha x}e^{-\beta ix} \\ &= e^{\alpha x}(C_1e^{\beta ix} + C_2e^{-\beta ix}) = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen}\beta x] \\ &= e^{\alpha x}[K_1\cos\beta x + K_2\operatorname{sen}\beta x] \end{aligned}$$

En resumen:
$y = K_1e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2\,e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ es la solución general.

Ejemplo 14. $y'' - 2y' + 3y = 0$
Solución:

Ecuación característica: $m^2 - 2m + 3 = 0$

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(3)}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$$

sus races son $m_{1,2} = \frac{2\pm 2\sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}i$

o sea que $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$.
La solución general es

$$y = K_1 e^x \cos\sqrt{2}x + K_2 e^x \operatorname{sen}\sqrt{2}x$$

Nota: (i): observe que si $[D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]y = 0$

entonces la ecuación característica es: $m^2 - 2\alpha m + \alpha^2 + \beta^2 = 0$

y las races son:

$$m = \frac{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4(\alpha^2 + \beta^2)}}{2} = \frac{2\alpha \pm 2\beta i}{2} = \alpha \pm \beta i$$

luego, la solución general es: $y = K_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + K_2\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$

(ii) Para la E.D.: $(D - a)y = 0$ la ecuación característica es

$$m - a = 0 \Rightarrow m = a$$

por lo tanto $y = Ce^{ax}$ es solución de $(D - a)y = 0$ y recprocamente una solución de $(D - a)y = 0$ es $y = Ce^{ax}$

Ejercicios. Hallar la solución general o la solución particular de los siguientes ejercicios:

1. $(D^2 + 2D - 3)y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$)

2. $D^2 - 2D - 3)y = 0$ con $y(0) = 0,\;\; y'(0) = -4$
(**Rta.:** $y = e^{-x} - e^{3x}$)

3. $(D^2 - 6D + 9)y = 0$
(**Rta.:** $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}$)

4. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ con $y(0) = 1,\;\; y'(0) = -1$
(**Rta.:** $y = (1 + x)e^{-2x}$)

5. $(D^2 - 2D + 2)y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \operatorname{sen} x$)

6. $\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$, $k > b > 0$ con $x(0) = 0$, $x'(0) = v_0$
(**Rta.:** $x = (\frac{v_0}{a})e^{-bt}\operatorname{sen} at$, donde $a = \sqrt{k^2 - b^2}$)

7. $y'' + 2iy' - 10y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1e^{3x}\cos x + C_2e^{-3x}\cos x - i(C_1e^{3x}\operatorname{sen} x + C_2e^{-3x}\operatorname{sen} x)$)

8. $y'' + iy' + 2y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1\cos x + C_2\cos 2x + i(C_1\operatorname{sen} x - C_2\operatorname{sen} 2x)$)

4.5. E.D. LINEALES DE ORDEN MAYOR QUE DOS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Sea
$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0$$
donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son constantes, entonces su polinomio característico es:
$$a_nm^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1m + a_0 = 0 = P_n(m)$$

Supongamos por ejemplo que este polinomio lo podemos factorizar así:

$P_n(m) = (m-m_1)(m-m_2)(m-m_3)^3(m^2-2\alpha_1m+\alpha_1^2+\beta_1^2)(m^2-2\alpha_2^2m+\alpha_2^2+\beta_2^2)^2$

entonces la solución general esta dada por

$$\begin{aligned} y = {} & C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + C_3e^{m_3x} + C_4xe^{m_3x} + C_5x^2e^{m_3x} + \\ & C_6e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x + C_7e^{\alpha_1x}\operatorname{sen}\beta_1x + C_8e^{\alpha_2x}\cos\beta_2x + \\ & C_9e^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x + C_{10}xe^{\alpha_2x}\cos\beta_2x + C_{11}xe^{\alpha_2x}\operatorname{sen}\beta_2x \end{aligned}$$

Ejemplo 15. $2\frac{d^5y}{dx^5} - 7\frac{d^4y}{dx^4} + 12\frac{d^3y}{dx^3} + 8\frac{d^2y}{dx^2} = 0$
Solución:

En la E.D. reemplazo en cada $\frac{d^iy}{dx^i}$ por m^i y obtengo la ecuación característica:
$$2m^5 - 7m^4 + 12m^3 + 8m^2 = 0$$

$$m^2(2m^3 - 7m^2 + 12m + 8) = m^2(2m+1)(m^2 - 4m + 8) = 0$$

luego las races son $m_1 = 0$ con multiplicidad 2, $\quad m_2 = -\frac{1}{2}$

$$m_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2 \pm 2i \Rightarrow \alpha = 2, \beta = 2$$

Para el factor m^2, como el grado es 2, empezamos con la solución básica e^{0x} y luego multiplicamos por x y así sucesivamente. O sea que las soluciones serían: $e^{0x} = 1, \quad xe^{0x} = x$

Para el factor $2m+1$ la solución sería: $e^{-\frac{x}{2}}$

Para el factor $m^2 - 4m + 8$ las soluciones serían: $e^{2x}\cos 2x, \quad e^{2x}\operatorname{sen} 2x$.

Solucin general: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-\frac{x}{2}} + C_4 e^{2x}\cos(2x) + C_5 e^{2x}\operatorname{sen}(2x)$

Hallar la solución general o la solución particular según el caso en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y''' - 10y'' + y' + 5y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 e^{-5x}$)

Ejercicio 2. $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 x\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 x \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$)

Ejercicio 3. $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x$)

Ejercicio 4. $\frac{d^4y}{dx^4} - 7\frac{d^2y}{dx^2} - 18y = 0$
(**Rta.:** $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \operatorname{sen}\sqrt{2}x$)

Ejercicio 5. $\frac{d^4y}{dx^4} + y = 0$, (Ayuda: Completar cuadrados).
(**Rta.:** $y = C_1 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_2 e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_3 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}x + C_4 e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{2}x$)

Ejercicio 6. $(D^2 + 4D + 4)y = 0$ tal que tenga una solución que pase por los puntos $(0,2), \ (2,0)$
(**Rta.:** $y = (2-x)e^{-2x}$)

Ejercicio 7. $(D^3 + D^2 - D - 1)y = 0$ con las siguientes condiciones: $y(0) = 1$, $y(2) = 0$ y $\lim y(x)_{x\to\infty} = 0$
(**Rta.:** $y = (1 - \frac{1}{2}x)e^{-x}$)

Ejercicio 8. Hallar el núcleo del siguiente operador diferencial: $L(D) = D^4 + D^3 + D^2$. (**Rta.:** $NucL(D) = \langle 1, x, e^{-\frac{x}{2}}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x), e^{-\frac{x}{2}}\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\rangle$)

4.6. OPERADOR ANULADOR

Definición 4.5 *.Si $y = f(x)$ una función que tiene n derivadas y $L(D)$ es un operador diferencial lineal con coeficientes constantes, tal que*

$$L(D)y = L(D)f(x) = 0,$$

entonces decimos que el operador $L(D)$ es el anulador de $y = f(x)$.

Observaciones:

1. a) Si $y = k$ constante, entonces $\frac{dk}{dx} = 0 \Rightarrow D = \frac{d}{dx}$ es el anulador de k.

   b) Si $y = x$, entonces $\frac{d^2x}{dx^2} = 0 \Rightarrow D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ es el anulador de x y de k.

   c) Si $y = x^2$, entonces $\frac{d^3}{dx^3}(x^2) = 0 \Rightarrow D^3 = \frac{d^3}{dx^3}$ es el anulador de x^2, x, k.

   d) Si $y = x^n$, entonces $\frac{d^{n+1}x^n}{dx^{n+1}} = 0 \Rightarrow D^{n+1} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ es el anulador de $x^n, x^{n-1}, \cdots, x^2, x^1, k$ con $n \in \mathbf{N}$.

   Nota: Observemos que $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}$ anula la combinación lineal

   $$C_1k + C_2x + \cdots + C_{n+1}x^n$$

   que es un polinomio de grado n.

2. $(D - a)^n$ es el anulador de las siguientes funciones:

   $$e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}, \cdots, x^{n-1}e^{ax}$$

   y también el anulador de la combinación lineal siguiente:

   $$C_1e^{ax} + C_2xe^{ax} + C_3x^2e^{ax} + \cdots + C_nx^{n-1}e^{ax} = P_{n-1}(x)e^{\alpha x}$$

3. $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^n$ es el anulador de las funciones:
$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$$
$$e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,\ \ldots, x^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$$
y también anula la combinación lineal siguiente:
$$\begin{aligned}&C_1e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2xe^{\alpha x}\cos\beta x + \cdots + C_nx^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x +\\ &\quad + k_1e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + k_2xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \cdots + k_nx^{n-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\\ &\quad = P_{n-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{n-1}(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\end{aligned}$$

donde $P_{n-1}(x)$ y $Q_{n-1}(x)$ son polinomios de grado $n-1$.
Si $\alpha = 0$, entonces $(D^2 + \beta^2)^n$ es el anulador de:
$$\cos\beta x, x\cos\beta x, x^2\cos\beta x, \cdots, x^{n-1}\cos\beta x$$
$$\operatorname{sen}\beta x, x\operatorname{sen}\beta x, x^2\operatorname{sen}\beta x, \cdots, x^{n-1}\operatorname{sen}\beta x$$
y de sus combinaciones lineales:
$$\begin{aligned}&C_1\cos\beta x + C_2x\cos\beta x + \cdots + C_nx^{n-1}\cos\beta x +\\ &\quad k_1\operatorname{sen}\beta x + k_2x\operatorname{sen}\beta x + \cdots + k_nx^{n-1}\operatorname{sen}\beta x\\ &\quad = P_{n-1}(x)\cos\beta x + Q_{n-1}(x)\operatorname{sen}\beta x\end{aligned}$$
Si $n = 1$ y $\alpha = 0$, entonces $D^2 + \beta^2$ es el anulador de: $\cos\beta x$, $\operatorname{sen}\beta x$ o su combinación lineal: $C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x$.

Ejemplo 16. Hallar el operador anulador de: $e^x + 2xe^x - x^2e^x$
Solución:

Anulador de $e^x : D - 1$.
Anulador de $xe^x : (D-1)^2$.
Anulador de $x^2e^x : (D-1)^3$.

Por lo tanto el anulador de toda la expresión es: $(D-1)^3$

Obsrvese que para hallar el anulador no interesan las constantes $1, 2, -1$ de la expresión original.

Ejemplo 17. Hallar el operador anulador de: $3 + e^x\cos 2x$
Solución:

Anulador de 3: D.
Anulador de $e^x \cos 2x$: $D^2 - 2D + 1 + 4 = D^2 - 2D + 5$, en este caso $\alpha = 1$ y $\beta = 2$.

Anulador de toda la expresión: $D(D^2 - 2D + 5)$.

Ejemplo 18. Hallar el operador anulador de: $13x + 9x^2 - \operatorname{sen} 4x$
Solución:

Anulador de x: D^2.
Anulador de x^2: D^3.
Anulador de $\operatorname{sen} 4x$: $D^2 + 16$ en este caso $\alpha = 0$ y $\beta = 4$.
Anulador de toda la expresión: $D^3(D^2 + 16)$.

Ejemplo 19. Hallar el operador anulador de: $(2 - e^x)^2$
Solución:

Como $(2 - e^x)^2 = 4 - 4e^x + e^{2x}$, entonces
Anulador de 4: D.
Anulador de e^x: $D - 1$.
Anulador de e^{2x}: $D - 2$.

El anulador de toda la expresión es: $D(D - 1)(D - 2)$

Ejercicio 1. Encontrar el operador anulador de $8x - \operatorname{sen} x + 10 \cos 5x$
(**Rta.:** $D^2(D^2 + 1)(D^2 + 25)$)

Ejercicio 2. Encontrar el operador anulador de $3 + e^x \cos 2x$
(**Rta.:** $D(D^2 - 2D + 5)$)

Ejercicio 3. Encontrar el operador anulador de $x^3(1 - 5x)$
(**Rta.:** D^5)

Ejercicio 4. Encontrar el operador anulador de $e^{-x} \operatorname{sen} x - e^{2x} \cos x$
(**Rta.:** $(D^2 + 2D + 2)(D^2 - 4D + 5)$)

Ejercicio 5. Encontrar el operador anulador de $x^2 e^x + \operatorname{sen} 2x + 5$
(**Rta.:** $D(D - 1)^3(D^2 + 4)$)

Observación: la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea, $L(D)y = f(x) \neq 0$ consta de la suma de dos soluciones que son:

i) La solución a la homogénea asociada, es decir, la solución de $L(D)y = 0$.

ii) La solución particular de la no homogénea.

La suma de las dos soluciones es la solución general, es decir, si y_h es la solución de la homogénea asociada $L(D)y = 0$ y y_p es la solución particular de $L(D)y = f(x)$, entonces la solución general es:

$$y = y_h + y_p$$

En efecto,

$$L(D)(y_h + y_p) = L(D)y_h + L(D)y_p = 0 + f(x) = f(x)$$

Las siguientes secciones las dedicaremos a desarrollar tres métodos para hallar la solución particular de E.D. no homogéneas.

4.7. MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Este método se aplica a E.D. lineales, con coeficientes constantes, no homogéneas.

Sea $L(D)y = f(x)$ una E.D. lineal, no homogénea, de coeficientes constantes y de orden n. Si $f(x)$ tiene una de las siguientes formas:
a) $f(x) = k$, k constante
b) $f(x) =$ polinomio en x
c) $f(x) =$ exponencial de la forma $e^{\alpha x}$
d) $f(x) = \cos\beta x$, $f(x) = \operatorname{sen}\beta x$
e) $f(x) =$ a sumas finitas de productos finitos de las expresiones anteriores,

es posible encontrar un operador $L_1(D)$ que anule a $f(x)$ y si esto sucede, entonces aplicamos $L_1(D)$ a la ecuación diferencial original, es decir:

$$L_1(D)L(D)y = L_1(D)f(x) = 0$$

Por lo tanto la expresión anterior es una E.D. lineal, homogénea de coeficientes constantes, le aplicamos a esta ecuación el método de las homogéneas y hallamos su solución general, de esta solución general descartamos la parte correspondiente a la homogénea asociada a la E.D. original, la parte restante corresponde a la solución particular que estamos buscando. Ilustremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 20. Hallar la solución particular y la solución general de la E.D. $y'' + 25y = 20\operatorname{sen} 5x$.
Solución:

El anulador de $\operatorname{sen} 5x$: $D^2 + 25 = L_1(D)$
Aplicamos este anulador a ambos lados de la E.D. original:

$$\begin{aligned} y'' + 25y &= 20\operatorname{sen} 5x \\ L_1(D)(y'' + 25y) &= L_1(D)(20\operatorname{sen} 5x) \\ (D^2 + 25)(y'' + 25y) &= (D^2 + 25)(20\operatorname{sen} 5x) \\ (D^2 + 25)^2 y &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación característica: $(m^2 + 25)^2 = 0$ cuyas races son $m = \pm 5i$ con multiplicidad 2 y por lo tanto $\alpha = 0$ y $\beta = 5$; en consecuencia la solución general es:

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x + C_3\, x \cos 5x + C_4 x \operatorname{sen} 5x \tag{4.10}$$

La ecuación diferencial homogénea asociada es

$$(D^2 + 25)y = 0$$

y su ecuación característica es

$$m^2 + 25 = 0,$$

o sea que $m = \pm 5i$ (con $\alpha = 0$ y $\beta = 5$) y su solución es

$$y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x;$$

y por tanto en (4.10) descartamos esta expresión y nos queda la forma de la solución particular:

$$y = C_3 x \cos 5x + C_4 x \operatorname{sen} 5x = y_p$$

Como aparecen las constantes C_3 y C_4, las hallamos de la siguiente manera: derivamos dos veces y_p y la sustituimos en la E.D. original:

$$\begin{aligned}
y_p' &= C_3(-5x\,\text{sen}\,5x+\cos 5x)+C_4(5x\cos 5x+\,\text{sen}\,5x)\\
y_p'' &= C_3(-25x\cos 5x-5\,\text{sen}\,5x-5\,\text{sen}\,5x)+\\
&\quad +C_4(-25x\,\text{sen}\,5x+5\cos 5x+5\cos 5x)\\
&= C_3(-25x\cos 5x-10\,\text{sen}\,5x)+\\
&\quad +C_4(-25x\,\text{sen}\,5x+10\cos 5x)\\
y_p''+25y_p &= 20\,\text{sen}\,5x
\end{aligned}$$

$C_3(-25x\cos 5x-10\,\text{sen}\,5x)+C_4(-25x\,\text{sen}\,5x+10\cos 5x)+$
$+\,25(C_3x\cos 5x+C_4x\,\text{sen}\,5x)=20\,\text{sen}\,5x$
Análisis de coeficientes:

en $x\cos 5x: -25C_3+25C_3=0$

en $\text{sen}\,5x: -10C_3=20\Rightarrow C_3=-2$

en $x\,\text{sen}\,5x: -25C_4+25C_4=0$

en $\cos 5x: 10C_4=0\Rightarrow C_4=0$

Por lo tanto la solución particular es $y_p=-2x\cos 5x$

y la solución general es:

$$\begin{aligned}
y &= y_h+y_p\\
&= C_1\cos 5x+C_2\,\text{sen}\,5x+C_3x\cos 5x\\
&= C_1\cos 5x+C_2\,\text{sen}\,5x-2x\cos 5x
\end{aligned}$$

Hallar la solución general en los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. $y''+2y'+y=x^2e^{-x}$
(**Rta:** $y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+\frac{1}{12}x^4e^{-x}$)

Ejercicio 2. $y''-y=x^2e^x+5$
(**Rta:** $y=C_2e^x+C_6e^{-x}-5+\frac{1}{4}xe^x-\frac{1}{4}x^2e^x+\frac{1}{6}x^3e^x$)

Ejercicio 3. $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\operatorname{sen} 3x - \cos 3x)$

Ejercicio 4. $y'' + 4y = \cos^2 x$
(**Rta:** $y = \frac{1}{8} + C_2 \cos 2x + C_3 \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} x \operatorname{sen} 2x$)

Ejercicio 5. $y'' + y' + y = x \operatorname{sen} x$
(**Rta:** $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x - x\cos x + 2\cos x + \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 6. $y'' - y = 3xe^x \cos 2x$

Ejercicio 7. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$
(**Rta:** $y = C_1 \cos 5x + C_2 \operatorname{sen} 5x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$)

Ejercicio 8. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$
(**Rta:** $y = C_1 e^x \cos 2x + C_2 e^x \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} e^x \operatorname{sen} x$)

4.8. VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Sea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = h(x)$$

con $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$, continuas en I y $a_2(x) \neq 0$ en I.
La escribimos en forma canónica

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$$

Donde

$$p(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \qquad g(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \qquad \text{y} \qquad f(x) = \frac{h(x)}{a_2(x)},$$

suponemos que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, es decir,

$$\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1 &= 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2 &= 0 \\ \text{y} \qquad y_h &= C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{aligned}$$

Variemos los parámetros C_1 y C_2, es decir,

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = u_1y_1 + u_2y_2$$

y hallemos u_1 y u_2
Luego $y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + y_2'u_2$

Supongamos (en aras de disminuir el trabajo operativo):

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0, \qquad \text{(primera condición).}$$

Luego,

$$\begin{aligned} y_p' &= u_1y_1' + u_2y_2' \\ y_p'' &= u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$y_p'' + p(x)y_p' + g(x)y_p = f(x)$$

$$u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + p(x)[u_1y_1' + u_2y_2'] + g(x)[u_1y_1 + u_2y_2] = f(x)$$

$$u_1[y_1'' + p(x)y_1' + g(x)y_1] + u_2[y_2'' + p(x)y_2' + g(x)y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$$

Luego,

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x)$$

En resumen,

$$\begin{aligned} y_1u_1' + y_2u_2' &= 0 \quad \text{(primera condición)} \\ y_1'u_1' + y_2'u_2' &= f(x) \quad \text{(segunda condición)} \end{aligned}$$

que es un sistema de dos ecuaciones con dos incgnitas: u_1' y u_2'.

Por la regla de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} o & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x)' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}$$

Donde $W(y_1, y_2) \neq 0$, ya que (y_1 y y_2) son dos soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada. Para conseguir u_1 y u_2, integramos (no es necesario constantes de integración, porqué?) a u_1' y u_2' respectivamente.

Luego, la $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$,
y la solución general es

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2$$

Pasos para resolver la E.D. (en forma canónica):
$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x)$

1. Hallamos y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada:
$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$$
2. Hallamos $W(y_1, y_2)$
3. Hallamos
$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\ u_2' &= \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \end{aligned}$$
4. Integramos $u_1 = \int u_1'\,dx$ y $u_2 = \int u_2'\,dx$
5. La solución particular $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$
6. La solución general $y = y_h + y_p = C_1y_1 + C_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2$

Ejemplo 21. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$
Solución:

1. Solución de $y'' + 3y' + 2y = 0$

   $m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m + 2)(m + 1) = 0 \Rightarrow m = -2,\ m = -1$

   $y_h = C_1 \underbrace{e^{-2x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$

3.
$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{-x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x) \\ u_2' &= \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = e^x\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1'\,dx \\ &= \int -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)\,dx \text{ y haciendo} \begin{cases} z &= e^x \\ dz &= e^x\,dx \\ dx &= \frac{dz}{z} \end{cases} \\ &= -\int z^2 \operatorname{sen}(z)\,\frac{dz}{z} \\ &= -\int z\operatorname{sen}(z)\,dz \quad \begin{cases} & \text{integrando por partes} \\ v &= z \Rightarrow dv = dz \\ dw &= -\operatorname{sen} z dz \Rightarrow w = \cos z \end{cases} \\ &= z\cos z - \int \cos z\,dz \\ &= z\cos z - \operatorname{sen} z = e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int u_2'\,dx = \int e^x\operatorname{sen}(e^x)\,dx = \int z\operatorname{sen} z\frac{dz}{z} = \int \operatorname{sen} z\,dz \\ &= -\cos z = -\cos(e^x) \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= [e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)]\,e^{-2x} - e^{-x}\cos(e^x) \\ &= -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_h \\ &= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

Ejemplo 22. Si $y_1 = x$ y $y_2 = x \ln x$ son soluciones linealmente independientes de la E.D. $x^2y'' - xy' + y = 0$. Hallar la solución general de la E.D. de Cauchy.

$$x^2y'' - xy' + y = 4x \ln x$$

<u>Solución.</u> Coloquemos la E.D. en forma canónica

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 4\frac{\ln x}{x}, \; x \neq 0$$

1. $y_1 = x, \quad y_2 = x \ln x$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x & x\ln x \\ 1 & \ln x + 1 \end{vmatrix} = x \ln x + x - x \ln x = x \neq 0$

3.
$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{-x \ln x \left(\frac{4 \ln x}{x}\right)}{x} = -\frac{4\ln^2 x}{x}$$
$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1,y_2)} = \frac{x \left(\frac{4 \ln x}{x}\right)}{x} = \frac{4 \ln x}{x}$$

4.
$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1'\,dx \\ &= -\int \frac{4\ln^2 x}{x}\,dx \quad \text{y haciendo} \begin{cases} z &= \ln x \\ dz &= \frac{dx}{x} \end{cases} \\ &= -\frac{4}{3}\ln^3 x \\ u_2 &= \int u_2'\,dx \\ &= \int \frac{4 \ln x}{x}\,dx \quad \text{y haciendo} \begin{cases} z &= \ln x \\ dz &= \frac{dx}{x} \end{cases} \\ &= 2\ln^2 x \end{aligned}$$

5.
$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(-\frac{4}{3}\ln^3 x\right)x + (2\ln^2 x)x\ln x \\
&= -\frac{4}{3}x\ln^3 x + 2x\ln^3 x = \frac{2}{3}x\ln^3 x
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
y &= y_h + y_p \\
&= C_1 x + C_2 x\ln x + \frac{2}{3}x\ln^3 x
\end{aligned}
$$

Ejemplo 23. Utilizar el método de variación de parámetros para resolver la siguiente E.D.

$$y'' - y = \sec^3 x - \sec x$$

Solución:

1. $y'' - y = 0$ (homogénea asociada)
   $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$
   $y_h = C_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x(e^{-x}) = -1 - 1 = -2$

$$
\begin{aligned}
u_1' &= -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\
&= -\frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = \frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2' &= \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\
&= \frac{e^x(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = -\frac{e^x}{2}(\sec^3 x - \sec x)
\end{aligned}
$$

3.

$$u_1 = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x\tan^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec x\tan x)\tan x\,dx$$

Integremos por partes, haciendo:

$$u = e^{-x}\tan x, \quad dv = \tan x\sec x\,dx,$$

luego

$$du = (-e^{-x}\tan x + e^{-x}\sec^2 x)\,dx, \qquad v = \sec x$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x\sec x - \int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - \tan x)\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x\sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + \int e^{-x}\sec x\tan x\,dx\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x\sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + e^{-x}\sec x + \int e^{-x}\sec x\,dx\right]\\
&= \frac{e^{-x}}{2}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{2}\sec x - \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx,
\end{aligned}$$

despejando la integral :

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx &= \frac{e^{-x}}{2}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{2}\sec x\\
u_1 = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx &= \frac{e^{-x}}{4}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x
\end{aligned}$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = -\frac{1}{2}\int e^{x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx$$

hagamos: $z = -x\,, dz = -dx$

$$\begin{aligned}
u_2 &= -\frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3(-z) - \sec(-z))\,d(-z) = \frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3 z - \sec z)\,dz\\
&= \frac{e^{-z}}{4}\tan z\sec z + \frac{e^{-z}}{4}\sec z = \frac{e^{x}}{4}\tan(-x)\sec(-x) + \frac{e^{x}}{4}\sec(-x)\\
&= -\frac{e^{x}}{4}\tan x\sec x + \frac{e^{x}}{4}\sec x
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= (\frac{e^{-x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x)e^x + (-\frac{e^x}{4}\tan x \sec x + \frac{e^x}{4}\sec x)e^{-x} \\ &= \frac{\sec x}{2} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^x + c_2e^{-x} + \frac{\sec x}{2} \quad \text{solucion general} \end{aligned}$$

Ejercicio 1. Hallar la solucin general de
$(D^2 + 1)y = -x^{-2}\operatorname{sen} x + 2x^{-1}\cos x$
(**Rta.:** $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + \ln|x|\operatorname{sen} x$)

Ejercicio 2. Hallar la solución general de
$(D^2 + 5D + 6)y = e^{-2x}\sec^2 x(1 + 2\tan x)$
(**Rta.:** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + e^{-2x}\tan x$)

Ejercicio 3. Hallar la solución general de
$y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$
(**Rta.:** $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$)

Ejercicio 4. Si $y_1 = x^{-\frac{1}{2}}\cos x$, $y_2 = x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$. Hallar la solución general para $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{\frac{3}{2}}$.
(**Rta.:** $y = C_1x^{-\frac{1}{2}}\cos x + C_2x^{-\frac{1}{2}}\operatorname{sen} x + x^{-\frac{1}{2}}$)

Ejercicio 5. Si $y_1 = x$, $y_2 = e^x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de la homogénea asociada de la E.D.

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 2(x - 1)^2e^{-x}, \quad 0 < x < 1.$$

Hallar la solución general.
(**Rta.:** $y = C_1x + C_2e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - xe^{-x}$)

Ejercicio 6. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2+16)y = \csc 4x$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{4}x\cos x + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 4x \ln|\operatorname{sen} 4x|$)

Ejercicio 7. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2+1)y = \sec x$
(**Rta.:** $y = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x - x \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x|$)

Ejercicio 8. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2+2D+5)y = e^{-x}\sec 2x$
(**Rta.:** $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + e^{-x}(\frac{1}{2}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \ln|\cos 2x|)$)

Ejercicio 9. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2-1)y = e^{-x}\operatorname{sen}(e^{-x}) + \cos(e^{-x})$$

(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - e^x \operatorname{sen}(e^{-x})$)

Ejercicio 10. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2+1)y = \sec^3 x$
(**Rta.:** $y = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\sec x$)

Ejercicio 11. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2-9D+18)y = e^{e^{-3x}}$$

(**Rta.:** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{6x} + \frac{1}{9}e^{6x}e^{e^{-3x}}$)

Ejercicio 12. Hallar la solución general de la E.D. $(D^2-2D+D)y = x^{-5}e^x$
(**Rta.:** $y = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{12}x^{-3}e^x$)

Ejercicio 13. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2+2D-8)y = (6x^{-1}-x^{-2})e^{2x}$$

(**Rta.:** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-4x} + e^{2x}\ln|x|$)

Ejercicio 14. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D^2+3D+2)y = \operatorname{sen}(e^x)$$

(**Rta.:** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)$)

4.8.1. GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Dada la E.D. en forma canónica:

$$D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \ldots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = f(x)$$

efectuamos los siguientes pasos:

1. Hallamos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, o sea que $y_h = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$

2. Hallamos $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$

3. Hallamos $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ por el método de Cramer del sistema:

$$\begin{array}{l} u_1'y_1 + u_2'y_2 + \ldots + u_n'y_n = 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' + \ldots + u_n'y_n' = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ u_1'y_1^{n-1} + u_2'y_2^{n-1} + \ldots + u_n'y_n^{n-1} = f(x) \end{array}$$

4. Integramos $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ (sin constantes de integración) para hallar $u_1, u_2, \ldots, u_n$

5. Hallamos la solución particular

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + \ldots + u_ny_n$$

6. Halamos la solución general

$$y = y_h + y_p = C_1y_1 + \ldots + C_ny_n + u_1y_1 + \ldots + u_ny_n$$

Ejemplo 24. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}$

Solución:

1.

$$
\begin{aligned}
y''' - 2y'' - y' + 2y &= 0\\
m^3 - 2m^2 - m + 2 &= 0\\
m^2(m-2) - (m-2) &= 0\\
(m-2)(m^2-1) &= (m-2)(m+1)(m-1) = 0
\end{aligned}
$$

$m = 2, \quad m = -1, \quad m = 1$
$y_h = \; C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x}$

2.

$$
\begin{aligned}
W(y_1, y_2, y_3) &= \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & e^{x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}\\
&= e^{2x}(-1-1) - e^{-x}(2e^{3x} - 4e^{3x}) + e^{x}(2e^{x} + 4e^{x})\\
&= -2e^{2x} + 2e^{2x} + 6e^{2x} = 6e^{2x}
\end{aligned}
$$

3.

$$
u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} & e^{x} \\ 0 & -e^{-x} & e^{x} \\ e^{3x} & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix}}{6e^{2x}} \quad = \frac{e^{3x}(1+1)}{6e^{2x}} = \frac{2e^{3x}}{6e^{2x}} = \frac{e^{x}}{3}
$$

$$
u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 & e^{x} \\ 2e^{2x} & 0 & e^{x} \\ 4e^{2x} & e^{3x} & e^{x} \end{vmatrix}}{6e^{2x}} \quad = -\frac{e^{3x}(e^{3x} - 2e^{3x})}{6e^{2x}} = \frac{e^{6x}}{6e^{2x}} = \frac{e^{4x}}{6}
$$

$$
u_3' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & 0 \\ 4e^{2x} & e^{-x} & e^{3x} \end{vmatrix}}{6e^{2x}} \quad = \frac{e^{3x}(-e^{x} - 2e^{x})}{6e^{2x}} = -\frac{3e^{4x}}{6e^{2x}} = -\frac{e^{2x}}{2}
$$

4. Integramos u_1', u_2', u_3'

$$
u_1 \;=\; \int u_1'\,dx = \int \frac{e^{x}}{3}\,dx = \frac{e^{x}}{3}
$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \int u_2'\,dx = \int \frac{e^{4x}}{6}\,dx = \frac{e^{4x}}{24} \\ u_3 &= \int u_3'\,dx = \int -\frac{e^{2x}}{2}\,dx = -\frac{e^{4x}}{4} \end{aligned}$$

5. Solución particular:

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 \\ &= \frac{e^x}{3}e^{2x} + \frac{e^{4x}}{24}e^{-x} - \frac{e^{2x}}{4}e^x = \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{3x}}{24} - \frac{e^{3x}}{4} = \frac{3e^{3x}}{24} = \frac{e^{3x}}{8} \end{aligned}$$

6. Solución general:

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + C_3e^x + \frac{e^{3x}}{8} \end{aligned}$$

Resolver, utilizando el método de variación de parámetros, los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. $y''' - 5y'' + 6y' = 2\,\mathrm{sen}\,x + 8$

Ejercicio 2. $y''' - y' = \mathrm{sen}\,x$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-x} + \frac{1}{2}\cos x$)

Ejercicio 3. $y''' - y' = x\,e^x$
Sugerencia: $\left(\frac{d}{dx}\right)(y'' - y) = y''' - y'$; integre y después use variación de parámetros.

Ejercicio 4. $y''' + 4y' = \mathrm{sen}\,x\cos x$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2\cos 2x + C_3\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{16}x\cos 2x$)

Ejercicio 5. Hallar la solución general de la E.D.

$$(D+1)^3y = 16(2x+3)^{-1}e^{-x}$$

(**Rta.:** $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + C_3x^2) + e^{-x}(2x+3)^2\ln(2x+3)$)

4.9. OPERADORES

Lema 4.2 .

Si $f \in C^n(I)$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces:

1. $D^n(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(D+a)^n f(x)$
2. $D^n(e^{ax}) = e^{ax} \underbrace{a^n}_{\#Real}$

Demostración .

Veamos 1. Por inducción:

$$n = 1 \quad D(e^{ax}f(x)) = e^{ax}Df(x) + f(x)ae^{ax} = e^{ax}(D+a)f(x)$$

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$D^k(e^{ax}f(x)) = e^{ax}(D+a)^k f(x)$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto, teniendo en cuenta las hipótesis de inducción para $n = 1$ y para $n = k$, se tiene

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^{ax}f(x)) &= D^k D(e^{ax}f(x)) = D^k(e^{ax}(D+a)f(x)) \\ &= e^{ax}(D+a)^k(D+a)f(x) = e^{ax}(D+a)^{k+1}f(x) \end{aligned}$$

Veamos 2. Por inducción:

$$n = 1 \quad D(e^{ax}) = ae^{ax}$$

Supongamos que se cumple para $n = k$:

$$D^k(e^{ax}) = a^k e^{ax}$$

y veamos que se cumple para $n = k+1$. En efecto, teniendo en cuenta las hipótesis de inducción para $n = 1$ y para $n = k$, se tiene

$$\begin{aligned} D^{k+1}(e^{ax}) &= D^k D(e^{ax}) = D^k(ae^{ax}) \\ &= a(D^k e^{ax}) = a(a^k e^{ax}) = a^{k+1}e^{ax} \end{aligned}$$

El siguiente Teorema, llamado teorema bsico de los operadores, nos permite sacar una exponencial que est dentro de un operador.

Teorema 4.7 (Teorema Básico de Operadores) .

1. *Si $f \in C^n(I)$ y $L(D)$ es un operador diferencial lineal y $a \in \mathbb{R}$, entonces:* $L(D)(e^{ax}f(x)) = e^{ax}L(D+a)f(x)$

2. $L(D)e^{ax} = L(a)e^{ax}$

Demostración 1:

$$L(D)(e^{ax}f(x)) = (a_n(x)D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)D^0)(e^{ax}f(x)) =$$
$$= a_n(x)D^n(e^{ax}f(x)) + a_{n-1}(x)D^{n-1}(e^{ax}f(x)) + \ldots + a_1(x)D(e^{ax}f(x)) + a_0(x)e^{ax}f(x)$$
$$= a_n(x)e^{ax}(D+a)^nf(x) + a_{n-1}(x)e^{ax}(D+a)^{n-1}f(x) + \ldots + a_1(x)e^{ax}(D+a)f(x)$$
$$+ a_0(x)e^{ax}f(x)$$
$$= e^{ax}(a_n(x)(D+a)^n + a_{n-1}(x)(D+a)^{n-1} + \ldots + a_1(x)(D+a) + a_0(x))f(x)$$
$$= e^{ax}L(D+a)f(x)$$

Nota: para entrar una expresión exponencial dentro de un operador, utilizamos la siguiente expresión,

$$e^{ax}L(D)f(x) = L(D-a)(e^{ax}f(x)) \tag{4.11}$$

Ejemplo 25. Comprobar que $(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = 0$
<u>Solución</u>:

$$(D+2)(D-2)^3(x^2e^{2x}) = e^{2x}(D+2+2)(D+2-2)^3x^2 = e^{2x}(D+4)D^3x^2 = 0$$

Ejemplo 26. Comprobar que $(D-3)^n(e^{3x}\,x^n) = n!e^{3x}$
<u>Solución</u>:

$$(D-3)^n(e^{3x}x^n) = e^{3x}(D+3-3)^nx^n = e^{3x}D^nx^n = n!e^{3x}$$

Ejemplo 27. Entrar la exponencial dentro del operador: $e^{-3x}(D-1)(D-3)x$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned} e^{-3x}(D-1)(D-3)x &= (D-(-3)-1)(D-(-3)-3)(e^{-3x}x) \\ &= (D+2)D(e^{-3x}x) \end{aligned}$$

4.10. MÉTODO DE LOS OPERADORES INVERSOS

Dada la E.D. $L(D)y = f(x)$, donde $L(D)$ es un operador diferencial lineal de coeficientes constantes y $f(x)$ es un polinomio o exponencial o seno o coseno o sumas finitas de productos finitos de las anteriores, es conveniente resolver la E.D. por el método de los operadores inversos (este método es sustituto del método de coeficientes indeterminados), éste método también sirve para resolver integrales.

Definición 4.6 *Dada la E.D. $L(D)y = f(x)$ de coeficientes constantes, definimos el operador inverso $L^{-1}(D) = \frac{1}{L(D)}$, como el operador tal que: $L^{-1}(D)f(x)$ es una solución particular de la E.D., es decir, $y_p = L^{-1}(D)f(x)$.*

Nota:

1. $L(D)L^{-1}(D) =$ operador identidad y $L^{-1}(D)L(D) =$ operador identidad.

2. Solución general: $y = y_h + y_p = y_h + L^{-1}(D)f(x)$

Teorema 4.8 .

Si y_1 y y_2 son soluciones particulares de la E.D. $L(D)y = f(x)$, entonces estas dos soluciones difieren en una solución que está en el núcleo de $L(D)$.

Demostración: sea $y = y_1 - y_2$, veamos que y pertenece al núcleo de $L(D)$.
En efecto

$$L(D)y = L(D)(y_1 - y_2) = L(D)y_1 - L(D)y_2 = f(x) - f(x) = 0$$

luego y pertenece al núcleo de $L(D)$

Teorema 4.9 .

Si $L(D) = D^n$ y $h(x)$ es una función continua, entonces una solución particular de la ecuación diferencial:
$D^n y = h(x)$ *es* $y_p = \underbrace{\int\int\ldots\int}_{n \text{ veces}} h(x) \underbrace{dx\,dx\ldots dx}_{n \text{ veces}}$

Demostración. Por inducción:
$n = 1 : Dy = h(x)$, su homogénea asociada es $Dy = 0$ y su ecuación característica es $m = 0$

$$\Rightarrow y_h = Ce^{0x} = C \times 1 = C$$

e integrando la E.D. original, se tiene

$$y = \underbrace{\int h(x)\,dx}_{y_p} + \underbrace{C}_{y_h} = y_p + y_h$$

$n = 2 : D^2y = h(x)$, su homogénea asociada es $D^2y = 0$

$$\Rightarrow y_h = C_1x + C_2$$

y como

$DDy = h(x)$ e integrando $Dy = \displaystyle\int h(x)dx + C_1$, y volviendo a integrar,

$$y = \underbrace{\int\int h(x)\,dx\,dx}_{y_p} + \underbrace{C_1x + C_2}_{y_h} = y_p + y_h,$$

luego

$$y_p = \int\int h(x)\,dx\,dx$$

Teorema 4.10 .
Dado $L(D)y = e^{ax}f(x)$ donde $f \in C^n(I)$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces una solución particular de la E.D. es $y_p = e^{ax}\frac{1}{L(D+a)}f(x)$.

Demostración: utilizando (4.11) en la página 122 se tiene

$$\begin{aligned}
L(D)y &= e^{ax}f(x)\\
e^{-ax}L(D)y &= f(x)\\
L(D-(-a))(e^{-ax}y) &= f(x)\\
L(D+a)(e^{-ax}y) &= f(x)
\end{aligned}$$

Como $Y_p = e^{-ax}y_p$ es una solución particular, entonces satisface la anterior expresión, luego $L(D+a)\underbrace{(e^{-ax}y_p)}_{Y_p} = f(x)$; por la definición de operador inverso

$$Y_p = e^{-ax}y_p = \frac{1}{L(D+a)}f(x)$$

luego

$$y_p = e^{ax}\,\frac{1}{L(D+a)}f(x)$$

Ejemplo 28. Hallar la solución general de $(D-3)^2y = 48xe^{3x}$
Solución:

Ecuación característica de la homogénea asociada:

$$(m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3 \quad \text{(con multiplicidad dos)}$$

$$\begin{aligned}
y_h &= C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}\\
y_p &= \frac{1}{L(D)}\,f(x) = \frac{1}{(D-3)^2}(48xe^{3x}) = 48e^{3x}\frac{1}{(D+3-3)^2}\,x =\\
&= 48e^{3x}\frac{1}{D^2}\,x = 48e^{3x}\int\!\!\int x\,dx\,dx = 48e^{3x}\int\frac{x^2}{2}\,dx =\\
&= 48e^{3x}\frac{x^3}{6} = 8x^3e^{3x}\\
y &= y_h + y_p\\
&= C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + 8x^3e^{3x} \quad \text{Sol. general}
\end{aligned}$$

Nota: como

$$L(D) = a_nD^n + \ldots + a_1D + a_0$$

entonces su polinomio característico es

$$P_n(m) = a_nm^n + \ldots + a_1m + a_0$$

Por lo anterior podemos afirmar que el espacio de los operadores lineales de coeficientes constantes es isomorfo al espacio de los polinomios de coeficientes reales y constantes.

Teorema 4.11 (Para polinomios) .

Si $L(D) = D + a, a \neq 0$ y $h(x)$ un polinomio de grado n, entonces

$$\frac{1}{D+a}\,h(x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n\frac{D^n}{a^n}\right]h(x).$$

Demostración. Por la Nota anterior, el operador $D + a$ es equivalente al polinomio $m + a$ y por tanto las expresiones racionales $\frac{1}{D+a}$ y $\frac{1}{m+a}$ son equivalentes

Por división sintética se tiene que:

$$\frac{1}{m+a} = \frac{1}{a+m} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2} - \frac{m^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n\frac{m^n}{a^n} + \cdots\right]$$

Luego,

$$\frac{1}{D+a} = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n\frac{D^n}{a^n} + \cdots\right]$$

Como $h(x)$ es un polinomio de grado n, sus anuladores son D^{n+1}, $D^{n+2}, \ldots$, es decir, $D^{n+k}h(x) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots$
Luego,

$$\frac{1}{D+a}\,h(x) = \frac{1}{a}\left[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - \frac{D^3}{a^3} + \cdots + (-1)^n\frac{D^n}{a^n}\right]h(x)$$

Ejemplo 29. Resolver la siguiente integral $\int x^4 e^{2x}\,dx$

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}\int x^4 e^{2x}\,dx &= \frac{1}{D}x^4 e^{2x} = e^{2x}\frac{1}{D+2}x^4 = e^{2x}\frac{1}{2}\left[1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} - \frac{D^3}{8} + \frac{D^4}{16}\right]x^4\\ &= \frac{e^{2x}}{2}\left[x^4 - \frac{4x^3}{2} + \frac{12x^2}{4} - \frac{24x}{8} + \frac{24}{16}\right] + C\end{aligned}$$

Teorema 4.12 (Para polinomios) .

Si $L(D)$ es un operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y $h(x)$ es un **polinomio** *de grado r, entonces una solución particular de la E.D. $L(D)y = h(x)$ es de la forma*

$$y_p = \frac{1}{L(D)}h(x) = (b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_r D^r)h(x),$$

donde $b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_r D^r$ es el resultado de dividir

$$\frac{1}{L(D)} = \frac{1}{a_0 + a_1 D + \ldots + a_n D^n} = b_0 + b_1 D + b_2 D^2 + \ldots + b_r D^r + \ldots.$$

Ejemplo 30. Hallar la solución general de $y''' - y = xe^x$
Solución:

Ecuacin característica: $m^3 - 1 = (m-1)(m^2 + m + 1) = 0$
y sus races son $m = 1, \quad m = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
Luego la solución homogénea y particular son

$$\begin{aligned}
y_h &= C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \\
y_p &= \frac{1}{D^3 - 1} x e^x = e^x \frac{1}{(D+1)^3 - 1} x \\
&= e^x \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 3D + 1 - 1} x = e^x \frac{1}{D(D^2 + 3D + 3)} x \\
&= e^x \frac{1}{(D^2 + 3D + 3)} \int x\,dx = \frac{e^x}{2} \frac{1}{D^2 + 3D + 3} x^2 \\
&= \frac{e^x}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{D}{3} + \frac{2}{9} D^2 \right] x^2 = \frac{e^x}{6} \left[x^2 - 2x + \frac{2}{3} 2 \right] \\
&= \frac{e^x}{6} \left[x^2 - 2x + \frac{4}{3} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_p \\
&= C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{e^x}{6} \left[x^2 - 2x + \frac{4}{3} \right]
\end{aligned}$$

Nota: el operador diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes se puede escribir así:

$$L(D) = L_1(D^2) + DL_2(D^2).$$

En efecto,

$$L(D) = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \ldots + a_n D^n$$

$$L(D) = (a_0 + a_2 D^2 + a_4 D^4 + \ldots) + D(a_1 + a_3 D^2 + a_5 D^4 + \ldots)$$

$$L(D) = L_1(D^2) + DL_2(D^2)$$

Los teoremas siguientes también son válidos para la función coseno.

Teorema 4.13 .

Si a, $L(-a^2)$ y $\frac{1}{L(-a^2)}$ son reales, entonces:

1. $L(D^2)\operatorname{sen} ax = L(-a^2)\operatorname{sen} ax$
2. $\frac{1}{L(D^2)}\operatorname{sen} ax = \frac{1}{L(-a^2)}\operatorname{sen} ax$, *si* $L(-a^2) \neq 0$

Demostración. Por inducción sobre n.
Caso 1.

$$\begin{aligned} D(\operatorname{sen} ax) &= a\cos ax \\ D^2(\operatorname{sen} ax) &= -a^2 \operatorname{sen} ax \\ D^3(\operatorname{sen} ax) &= -a^3 \cos ax \\ D^4(\operatorname{sen} ax) &= a^4 \operatorname{sen} ax \\ &\vdots \end{aligned}$$

Generalizando para las expresiones de orden par:

$$D^{2n}(\operatorname{sen} ax) = (-a^2)^n \operatorname{sen} ax$$
$$L(D^2)\operatorname{sen} ax = \underbrace{(a_0 + a_2 D^2 + a_4 D^4 + \ldots + a_{2n} D^{2n})}_{L(D^2)} \operatorname{sen} ax$$

$$= a_0 \operatorname{sen} ax + a_2 D^2 \operatorname{sen} ax + a_4 D^4 \operatorname{sen} ax + \ldots + a_{2n} D^{2n} \operatorname{sen} ax$$
$$= a_0 \operatorname{sen} ax + a_2(-a^2) \operatorname{sen} ax + a_4(-a^2)^2 \operatorname{sen} ax$$
$$+ \ldots + a_{2n}(-a^2)^n \operatorname{sen} ax$$
$$= [a_0 + a_2(-a^2) + a_4(-a^2)^2 + \ldots + a_{2n}(-a^2)^n] \operatorname{sen} ax$$
$$= L(-a^2) \operatorname{sen} ax$$

Caso 2. Por la demostración 1, $L(D^2) \operatorname{sen} ax = L(-a^2) \operatorname{sen} ax$, aplicamos $L^{-1}(D^2)$ a ambos lados:

$$L^{-1}(D^2)L(D^2) \operatorname{sen} ax = L(-a^2)L^{-1}(D^2) \operatorname{sen} ax$$

Luego,

$$\frac{1}{L(D^2)} \operatorname{sen} ax = \frac{1}{L(-a^2)} \operatorname{sen} ax \quad \text{con} \quad L(-a^2) \neq 0.$$

Ejemplo 31. Hallar la solución particular de $(D^4 - 5D^2 + 4)y = \operatorname{sen} 3x$.
Solución:

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^4 - 5D^2 + 4} \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{(D^2)^2 - 5D^2 + 4} \operatorname{sen} 3x \\ &= \frac{1}{(-3^2)^2 - 5(-3^2) + 4} \operatorname{sen} 3x = \frac{1}{81 + 45 + 4} \operatorname{sen} 3x \\ &= \frac{1}{130} \operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

Teorema 4.14 .

Si a, $L(-a^2)$ y $\frac{1}{L(-a^2)}$ son reales, entonces:

1. $L(D) \operatorname{sen} ax = L_1(-a^2) \operatorname{sen} ax + DL_2(-a^2) \operatorname{sen} ax$

2.
$$\begin{aligned} \frac{1}{L(D)} \operatorname{sen} ax &= \frac{1}{L_1(D^2) + DL_2(D^2)} \operatorname{sen} ax \\ &= \frac{1}{L_1(-a^2) + DL_2(-a^2)} \operatorname{sen} ax \end{aligned}$$

Demostracin. Por la nota anterior y por la parte dos del teorema 4.13., tenemos que:

$L(D) = L_1(D^2)\operatorname{sen} ax + DL_2(D^2)\operatorname{sen} ax = L_1(-a^2)\operatorname{sen} ax + DL_2(-a^2)\operatorname{sen} ax = L_1(-a^2)\operatorname{sen} ax + L_2(-a^2)a\cos ax$

Ejemplo 32. Hallar la solución particular para $(D^2+2D+2)y = e^x \cos 2x$
Solución:

$$
\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2+2D+2}\, e^x \cos 2x = e^x \frac{1}{(D+1)^2+2(D+1)+2}\, \cos 2x \\
&= e^x \frac{1}{D^2+2D+1+2D+2+2}\, \cos 2x = e^x \frac{1}{D^2+4D+5} \cos 2x \\
&= e^x \frac{1}{(-2^2)+4D+5}\, \cos 2x = e^x \frac{1}{4D+1}\, \cos 2x \\
&= e^x \frac{4D-1}{(4D-1)(4D+1)}\, \cos 2x = e^x \frac{4D-1}{16D^2-1}\, \cos 2x \\
&= e^x \frac{4D-1}{16(-2^2)-1}\, \cos 2x = e^x \frac{4D-1}{-64-1}\, \cos 2x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^x}{-65}(4D-1)\, \cos 2x = -\frac{e^x}{65}\,(-8\operatorname{sen} 2x - \cos 2x) \\
&= \frac{e^x}{65}\,(8\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)
\end{aligned}
$$

Teorema 4.15 .

Sean $L(D)y = h_1(x) + ih_2(x)$ y $y_p = y_{p_1} + iy_{p_2}$ es una solución particular de la E.D. anterior, entonces y_{p_1} es la solución particular de la E.D. $L(D)y = h_1(x)$ y y_{p_2} es una solución particular de la E.D. $L(D)y = h_2(x)$.

Demostración. En efecto, como $y_p = y_{p_1} + iy_{p_2}$ es una solución particular, entonces satisface la E.D.: $L(D)y = h_1(x) + ih_2(x)$
es decir,

$$
\begin{aligned}
L(D)y_p &= h_1(x) + ih_2(x) \\
L(D)(y_{p_1} + iy_{p_2}) &= h_1(x) + ih_2(x) \\
L(D)y_{p_1} + iL(D)y_{p_2} &= h_1(x) + ih_2(x)
\end{aligned}
$$

igualando la parte real tenemos

$$L(D)y_{p_1} = h_1(x)$$

es decir, y_{p_1} es solución particular de $L(D)y = h_1(x)$

e igualando la parte imaginaria tenemos

$$L(D)y_{p_2} = h_2(x)$$

es decir, y_{p_2} es solución particular de $L(D)y = h_2(x)$

Ejemplo 33. Aplicando el teorema 4.15, hallar una solución particular de la E.D. $(D^2 + a^2)y = e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$

<u>Solución</u>: obsrvese que como $L(D) = D^2 + a^2 \Rightarrow L(-a^2) = -a^2 + a^2 = 0$, entonces no podemos usar el Teorema 4.13 parte 2. y más bien utilizamos el Teorema 4.15

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{1}{D^2 + a^2}(\cos ax + i \operatorname{sen} ax) = \frac{1}{D^2 + a^2}\, e^{iax} \\ &= e^{iax} \frac{1}{(D + ia)^2 + a^2}\,(1) = e^{iax} \frac{1}{D^2 + 2iaD + a^2 - a^2}\,(1) \\ &= e^{iax} \frac{1}{(D + 2ia)D}\,(1) = e^{iax} \frac{1}{2ia + D}\, x = e^{iax} \frac{1}{2ia}\left[1 - \frac{D}{2ia}\right] x \end{aligned}$$

$$= e^{iax} \frac{1}{2ia}\left[x - \frac{1}{2ia}\right] = \frac{e^{iax}}{2a}\left[-ix + \frac{1}{2a}\right] = \frac{1}{2a}(\cos ax + i \operatorname{sen} ax)\left(\frac{1}{2a} - ix\right)$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2a}\cos ax}^{\text{se descarta}} + x \operatorname{sen} ax}_{y_{p_1}} + i\left(\underbrace{\overbrace{\frac{1}{2a}\operatorname{sen} ax}^{\text{se descarta}} - x \cos ax}_{y_{p_2}}\right)\right]$$

Los dos términos señalados en la expresión anterior no se tienen en cuenta porque

$$y_h = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax$$

y y_h absorbe los términos descartados , por lo tanto:

$$y_p = \frac{1}{2a} x \operatorname{sen} ax - i \frac{1}{2a} x \cos ax$$

Del Teorema 4.15 concluimos que

$$y_{p_1} = \frac{1}{2a} x \operatorname{sen} ax$$

es solución particular de la E.D.

$$(D^2 + a^2)y = \cos ax$$

y

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2a} x \cos ax$$

es solución particular de la E.D.

$$(D^2 + a^2)y = \operatorname{sen} ax$$

Ejemplo 34. Hallar la solución particular de $(D^2 + a^2)y = \cos ax$
Solución: como $\cos ax =$ parte real de $e^{ax} = \mathbf{R_e} e^{iax}$, entonces

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2 + a^2}\,\mathbf{R}_e(e^{iax}) = \mathbf{R}_e\left(\frac{1}{D^2+a^2}\,e^{iax}\right)\\
&= \mathbf{R}_e\left(e^{iax}\frac{1}{(D+ia)^2+a^2}\,(1)\right) = \mathbf{R}_e\left(e^{iax}\frac{1}{(D+2ia)D}\,(1)\right)\\
&= \mathbf{R}_e\left(\frac{1}{2a}x\operatorname{sen} ax - i\frac{1}{2a}x\cos ax\right) = \frac{1}{2a}x\operatorname{sen} ax
\end{aligned}$$

Ejemplo 35. Hallar la solución particular de $(D^2+a^2)y = \operatorname{sen} ax =$ parte imaginaria de $(e^{iax}) = \mathbf{I}_m(e^{iax})$
Solución: como $\operatorname{sen} ax =$ parte imaginaria de $e^{ax} = \mathbf{I_m} e^{iax}$, entonces

$$\begin{aligned}
y_p &= \frac{1}{D^2 + a^2}\,\mathbf{I}_m(e^{iax}) = \mathbf{I}_m\left(\frac{1}{D^2+a^2}e^{iax}\right)\\
&= \mathbf{I}_m\left(\frac{1}{2a}x\operatorname{sen} ax - i\frac{1}{2a}x\cos ax\right) = -\frac{1}{2a}x\cos ax
\end{aligned}$$

Nota: el anterior método también se aplica para las E.D. de la forma $L(D)y = q(x)\operatorname{sen} ax$ o $L(D)y = q(x)\cos ax$, donde $q(x)$ es un polinomio o exponencial o producto de polinomio por exponencial.

Ejemplo 36. Hallar la solución particular de $(D^2-2D+2)y = 4e^x x \operatorname{sen} x$
Solución:

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 2D + 2}\,4e^x x\operatorname{sen} x = 4e^x\frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 2}\,x\operatorname{sen} x$$

$$
\begin{aligned}
&= 4e^x \frac{1}{D^2+2D+1-2D-2+2}\, x \operatorname{sen} x = 4e^x \frac{1}{D^2+1}\, x \operatorname{sen} x\\
&= 4e^x \frac{1}{D^2+1}\, x \mathbf{I}_m(e^{ix}) = 4e^x \mathbf{I}_m \left(\frac{1}{D^2+1}\, x e^{ix} \right)\\
&= 4e^x \mathbf{I}_m \left(e^{ix} \frac{1}{(D+i)^2+1}\, x \right) = 4e^x \mathbf{I}_m \left(e^{ix} \frac{1}{D^2+2iD-1+1}\, x \right)\\
&= 4e^x \mathbf{I}_m \left(e^{ix} \frac{1}{(D+2i)D}\, x \right) = 4e^x \mathbf{I}_m \left(e^{ix} \frac{1}{D+2i} \left(\frac{x^2}{2} \right) \right)\\
&= \frac{4}{2}\, e^x \mathbf{I}_m \left(e^{ix} \frac{1}{2i} \left[1 - \frac{D}{2i} + \frac{D^2}{(2i)^2} \right] x^2 \right)\\
&= \frac{2}{2}\, e^x \mathbf{I}_m \left[e^{ix}(-i) \left(x^2 - \frac{2x}{2i} + \frac{2}{-4} \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= e^x \mathbf{I}_m(\cos x + i \operatorname{sen} x) \left(-ix^2 + x + \frac{i}{2} \right)\\
&= e^x \left(-x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x + \frac{\cos x}{2} \right)
\end{aligned}
$$

La homogénea asociada:

$$(D^2 - 2D + 2)y = 0$$

tiene por cuación característica

$$m^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \operatorname{sen} x$$

y como $\frac{\cos x}{2}$ aparece en y_h, entonces descartamos esta expresión de y_p, por lo tanto la y_p queda de la siguiente forma:

$$y_p = e^x \left(-x^2 \cos x + x \operatorname{sen} x \right)$$

Ejemplo 37. Utilizando el método de los operadores inversos resolver la siguiente integral: $\int x^2 \cos x \, dx$

Solución:

$$\int x^2 \cos x \, dx = \frac{1}{D} x^2 \cos x = \frac{1}{D} x^2 \mathbf{R}_e e^{ix} = \mathbf{R}_e \frac{1}{D}\, x^2 e^{ix}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{R}_e e^{ix}\frac{1}{D+i}\,x^2 = \mathbf{R}_e e^{ix}\frac{1}{i}\left[1-\frac{D}{i}+\frac{D^2}{i^2}\right]x^2\\
&= \mathbf{R}_e e^{ix}(-i)\left[x^2-\frac{2x}{i}+\frac{2}{-1}\right] = \mathbf{R}_e e^{ix}(-ix^2+2x+2i)\\
&= \mathbf{R}_e(\cos x + i\operatorname{sen} x)(-ix^2+2x+2i)\\
&= (2x\cos x - 2\operatorname{sen} x + x^2\operatorname{sen} x) + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 38. Usando el método de los operadores inversos, calcular la siguiente integral: $\int e^{3x}\operatorname{sen} 2x\,dx$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\int e^{3x}\operatorname{sen} 2x\,dx &= \frac{1}{D}\,e^{3x}\operatorname{sen} 2x = e^{3x}\frac{1}{D+3}\,\operatorname{sen} 2x\\
&= e^{3x}\frac{D-3}{D^2-9}\operatorname{sen} 2x = e^{3x}\frac{D-3}{-2^2-9}\,\operatorname{sen} 2x\\
&= -\frac{e^{3x}}{13}\,(D-3)\operatorname{sen} 2x = -\frac{e^{3x}}{13}(2\cos 2x - 3\operatorname{sen} 2x) + C
\end{aligned}$$

Para los siguientes ejercicios hallar la solución particular, utilizándo el método de los operadores inversos:

Ejercicio 1. $(D^2+16)y = x\cos 4x$
(**Rta.:** $y_p = \frac{1}{64}x\cos 4x + \frac{x^2}{16}\operatorname{sen} 4x$)

Ejercicio 2. $(D^2+4)y = xe^x\operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $y_p = e^x\left[(\frac{1}{50}-\frac{x}{10})\cos x + (\frac{-7}{50}+\frac{x}{5})\operatorname{sen} x\right]$)

Ejercicio 3. $(D^2+4)y = 64x\operatorname{sen} 2x + 32\cos 2x$
(**Rta.:** $y_p = 12x\operatorname{sen} 2x - 8x^2\cos 2x$)

Ejercicio 4. $y''' - 5y'' + 6y' = 2\operatorname{sen} x + 8$
(**Rta.:** $y_p = -\frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} x + \frac{4}{3}x$)

Ejercicio 5. $(D^2+9)y = 36\operatorname{sen} 3x$
(**Rta.:** $y_p = -6x\cos 3x$)

Ejercicio 6. $(D^3+1)y = \cos 2x + 2\operatorname{sen} 3x$
(**Rta.:** $y_p = \frac{1}{65}(\cos 2x - 8\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{365}(\cos 3x + 27\operatorname{sen} 3x)$)

Ejercicio 7. $(D^2+2D+2)y = e^x \operatorname{sen} x$
(**Rta.:** $y_p = -\frac{e^x}{8}(\cos x - \operatorname{sen} x)$)

Ejercicio 8. Calcular, utilizando el método de los operadores inversos, $\int x^3 e^{2x}\ dx$.
(**Rta.:** $\frac{e^{2x}}{2}(x^3 - \frac{3x^2}{2} + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}) + C$)

Ejercicio 9. Calcular, $\int e^{-pt}t^n\ dt$, utilizando operadores inversos.
(**Rta.:** $-\frac{e^{-pt}}{p}\left[t^n - \frac{nt^{n-1}}{(-p)} + \frac{n(n-1)t^{n-2}}{(-p)^2} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{(-p)^n}\right] + C$)

Ejercicio 10. Calcular, $\int xe^x \cos 2x\ dt$, utilizando operadores inversos.
(**Rta.:** $\frac{e^x}{5}\left[x\cos 2x + \frac{3}{5}\cos 2x + 2x\operatorname{sen} 2x - \frac{4}{5}\operatorname{sen} x\right] + C$)

4.11. E.D.O. DE EULER - CAUCHY

Definición 4.7 . *La E.D.O. lineal*

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, $a_n \neq 0$ y $f(x)$ es continua, se le llama **E.D.O. de Euler-Cauchy**.

Con la sustitución $z = \ln x$ o $x = e^z$, convertimos la E.D. de Euler-Cauchy (que es de coeficientes variables) en una E.D. con coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} z = \ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} \\ &= \frac{dy}{dz}\frac{1}{x} \\ \Rightarrow \quad x\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \end{aligned} \tag{4.12}$$

derivando con respecto a x (4.12):

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{d^2y}{dz^2}\frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx} &= \frac{d^2y}{dz^2}\\ \text{luego}\quad x^2\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}=D_z^2\,y-D_z\,y=D_z(D_z-1)y \end{aligned}$$

Similarmente,

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}=D_z(D_z-1)(D_z-2)y$$

y en general,

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}=D_z(D_z-1)(D_z-2)\ldots(D_z-(n-1))y \tag{4.13}$$

donde $z=\ln x$

Ejemplo 39. Resolver la siguiente ecuación de Euler-Cauchy

$$x^2y''+xy'+y=\sec(\ln x)$$

Solución:

$$\begin{gathered} z=\ln x\Rightarrow D_z(D_z-1)y+D_zy+y=\sec z\\ D_z^2y-D_zy+D_zy+y=\sec z\\ D_z^2y+y=\sec z\Rightarrow(D_z^2+1)y=\sec z \end{gathered}$$

Ecuacin característica:

$$m^2+1=0\Rightarrow m=\pm i$$

1. $y_h=C_1\cos z+C_2\operatorname{sen} z$
   Para hallar y_p solo podemos aplicar el método de variación de parámetros, ya que los otros dos métodos no sirven para trabajar con las función secante.
   La solución particular, por el método de varicación de parámetros, es de la forma
   $$y_p=u_1y_1+u_2y_2$$
   con $y_1=\cos z$ y $y_2=\operatorname{sen} z$

2.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos z & \operatorname{sen} z \\ -\operatorname{sen} z & \cos z \end{vmatrix} \\ &= \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{f(z)y_2}{W(y_1, y_2)} = -\frac{\sec z \operatorname{sen} z}{1} = -\tan z \\ u_2' &= \frac{f(z)y_1}{W(y_1, y_2)} = \frac{\sec z \cos z}{1} = 1 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1'\, dz = \ln|\cos z| \\ u_2 &= \int u_2'\, dz = z \end{aligned}$$

5. $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (\ln|\cos z|)\cos z + z \operatorname{sen} z$

6. $y = y_h + y_p = C_1 \cos z + c_2 \operatorname{sen} z + \cos z \ln|\cos z| + z \operatorname{sen} z$

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x) + \cos(\ln x) \ln|\cos(\ln x)| + \ln x \operatorname{sen}(\ln x)$$

Resolver las siguientes E.D. de Euler-Cauchy.

Ejercicio 1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + 2y = x \ln x$
(**Rta.:** $y = C_1 x \cos(\ln x) + C_2 x \operatorname{sen}(\ln x) + x \ln x$)

Ejercicio 2. $(x-1)^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 2(x-1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 4(x-1) \frac{dy}{dx} + 4y = 4\ln(x-1)$
(**Rta.:** $y = C_1(x-1) + C_2(x-1)^{-2} + C_3(x-1)^2 + \ln(x-1) + 1$)

Ejercicio 3. $x^2 y'' - xy' + y = x \ln^3 x$
(**Rta.:** $y = C_1 x + C_2 x \ln x + \frac{1}{20} x \ln^5 x$)

Ejercicio 4. $x^3 D^3 y + 3x^2 D^2 y + 4x Dy = \operatorname{sen}(\sqrt{3} \ln x)$
(**Rta.:**$y = C_1 + C_2 \cos(\sqrt{3}\ln x) + C_3 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\ln x) - \frac{\ln x \operatorname{sen}(\sqrt{3}\ln x)}{6}$)

Ejercicio 5. $x^3D^3y + 3x^2D^2y + xDy = x^3$
(**Rta.:** $y = C_1 + C_2 \ln|x| + C_3 \ln^2|x| + \frac{1}{27}x^3$)

Ejercicio 6. $x^2D^2y - 4xDy + 6y = \ln x^2$
(**Rta.:** $y = C_1x^3 + C_2x^2 + \frac{1}{3}\ln x + \frac{5}{18}$)

Ejercicio 7. $x^2D^2y + xDy + 9y = \cos(\ln x^3)$
(**Rta.:** $y = C_1\cos(\ln x^3) + C_2 \operatorname{sen}(\ln x^3) + \frac{1}{6}\ln x \operatorname{sen}(\ln x^3)$)

Ejercicio 8. $y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = \frac{x}{1+x}$
(**Rta.:** $y = C_1x^2 + C_2x + x^2\ln|1+x| + x\ln|1+x|$)

Ejercicio 9. Hallar una base para el núcleo del operador diferencial definido por:

$$L(D) = x^2D^2 - xD + 5 : \ C^2(I) \longrightarrow C(I)$$

(**Rta.:** $\langle x\cos(\ln x^2), x \operatorname{sen}(\ln x^2)\rangle$)

4.12. APLICACIONES DE LA E.D. DE SEGUNDO ORDEN: OSCILADORES

4.12.1. MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Supongamos que tenemos un resorte dispuesto en forma vertical, con el extremo superior fijado a una superficie horizontal y el otro extremo libre al cual se le fija una carga de masa m, la fuerza de recuperación del resorte esta dada por la Ley de Hooke:

$$F = ks$$

donde
s: elongación del resorte.
k: constante elástica del resorte.

Deduzcamos la E.D. que rige el movimiento de la masa sujeta al resorte (ver figura 4.2)
Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dx^2} = -F + mg = -k(x+s) + mg$$

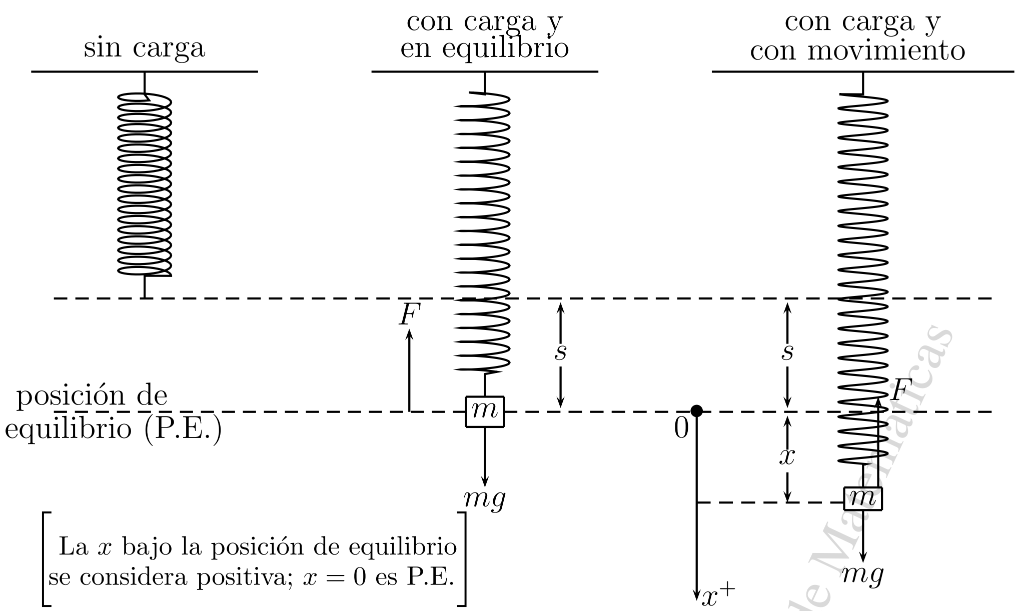

Figura 4.2

$$\Rightarrow -F + mg = -kx \underbrace{-ks + mg}_{=0:\text{ en reposo}}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

llamemos

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}_{\text{E.D. segundo orden con coeficientes ctes.}}$$

Ecuacin característica

$$m^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{-\omega^2} = \pm\omega i$$

Sol. general

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \operatorname{sen}\omega t$$

Condiciones iniciales:

$$x(0) = \alpha$$

Si $\alpha > 0$: el cuerpo está por debajo de la P.E. (Posición de Equilibrio).

Si $\alpha < 0$: el cuerpo está por encima de la P.E.

Si $\alpha = 0$: el cuerpo está en la P.E.

$$x'(0) = \beta$$

Si $\beta > 0$ el cuerpo inicia su movimiento con velocidad hacia abajo.

Si $\beta < 0$ el cuerpo inicia su movimiento con velocidad hacia arriba.

Si $\beta = 0$ el cuerpo inicia su movimiento desde el reposo.

Llamemos

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$$

y si hacemos

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{C_1}{A}, \quad \cos\phi = \frac{C_2}{A}$$

o sea que

$$\tan\phi = \frac{C_1}{C_2}$$

Donde A es llamada la amplitud del Movimiento Armónico Simple (M.A.S.).

El ángulo ϕ se le llama ángulo de Fase.

Como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{A(C_1\cos\omega t + C_2\operatorname{sen}\omega t)}{A} = A\left(\frac{C_1}{A}\cos\omega t + \frac{C_2}{A}\operatorname{sen}\omega t\right) \\ &= A(\operatorname{sen}\phi\cos\omega t + \cos\phi\operatorname{sen}\omega t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Periodo de Vibraciones Libres:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

4.12.2. MOVIMIENTO AMORTIGUADO

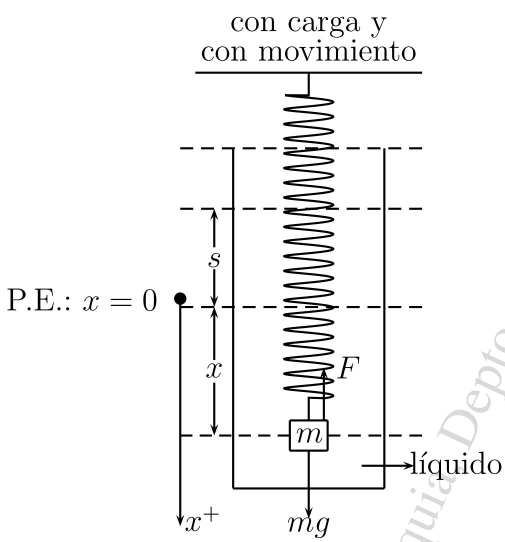

Figura 4.3

Cuando el cuerpo sujeto al resorte se mueve en un medio que produce fricción sobre el cuerpo, entonces decimos que el movimiento se efecta con amortiguamiento (ver figura 4.3). Por la segunda ley de Newton tenemos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+s) + mg - \beta\frac{dx}{dt}$$

donde β constante de fricción o constante de amortiguamiento.

Estamos suponiendo que el amortiguamiento es directamente proporcional a la velocidad.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Dividiendo por m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

Donde, $2\lambda = \frac{\beta}{m} > 0$ y $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Ecuacin característica:

$$p^2 + 2\lambda p + \omega^2 = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega^2}}{2} = \frac{-2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$$

- Cuando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, entonces a este movimiento se le llama **sobreamortiguado** (Ver figura 4.4), en este caso p_1 y p_2 son negativos. Y como

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} = C_1 e^{(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t} + C_2 e^{(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2})t}$$

por lo tanto

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

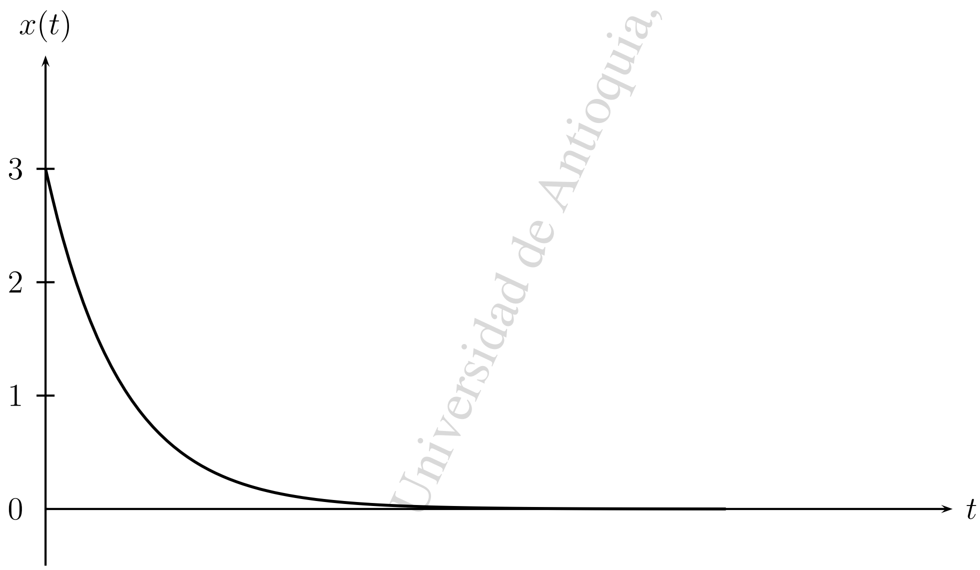

Figura 4.4 Sobreamortiguado

- Cuando $\lambda^2 - \omega^2 = 0$, a este movimiento se le llama **críticamente amortiguado** (Ver figura 4.5).

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t} + C_2 t e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t),$$

por lo tanto $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$

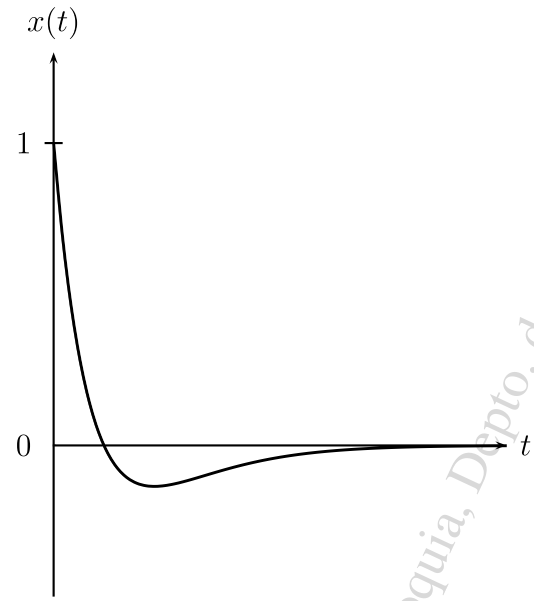

Figura 4.5 Críticamente amortiguado

- Cuando $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ o lo que es lo mismo $\omega^2 - \lambda^2 > 0$, a este movimiento se le llama **subamortiguado** (Ver figura 4.6).
$x(t) = C_1 e^{-\lambda t} \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + C_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t$

Llamemos $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$ y $\frac{C_1}{A} = \operatorname{sen}\phi$ y $\frac{C_2}{A} = \cos\phi$, entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= A \frac{C_1 e^{-\lambda t} \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + C_2 e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t}{A} \\ &= A e^{-\lambda t} \left(\frac{C_1}{A} \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \frac{C_2}{A} \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t \right) \\ &= A e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi\right) \end{aligned}$$

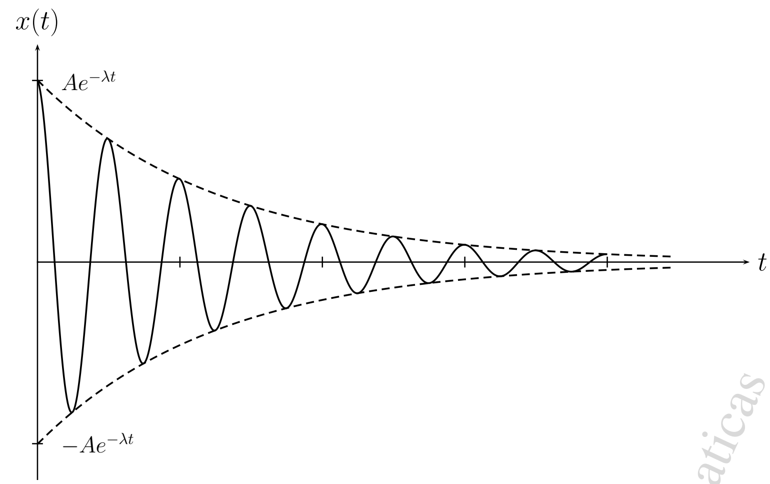

Figura 4.6 Subamortiguado

Donde ϕ se le llama el ángulo de fase.

Nota: respecto al movimiento sobreamortiguado y críticamente amortiguado debemos anotar que no son movimientos oscilatorios y cruzan a lo sumo una vez la posición de equilibrio como se ve en las gráficas 4.4 y 4.5

4.12.3. MOVIMIENTO FORZADO.

Ahora supongamos que el cuerpo sujeto al resorte esta en un medio que produce fricción y también hay una fuerza exterior $F(t)$ que acta sobre el cuerpo (ver figura 4.7). Por la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x+s) + mg - \beta\frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - ks + mg - \beta\frac{dx}{dt} + F(t)$$

$$\underbrace{m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = F(t)}_{\text{E.D. segundo orden de coef. ctes, no homogénea}}$$

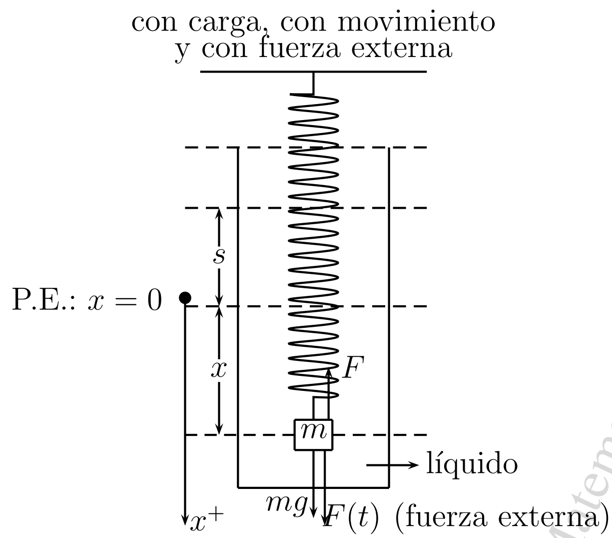

Figura 4.7

Ejemplo 40. (Sin Amortiguación) Este problema se le llama de Amplitud Modulada (A.M.).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t,$$

donde $F_0 =$ constante, $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$.
Solución:
Ecuación característica:

$$m^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \omega i$$

Por lo tanto la solución homogénea y particular son

$$\begin{aligned} x_h(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \\ x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + \omega^2} F_0 \cos \gamma t = F_0 \frac{1}{-\gamma^2 + \omega^2} \cos \gamma t \\ &= \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t \end{aligned}$$

Solución general:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \cos \gamma t$$

Si elegimos como condiciones iniciales:

$$x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

entonces

$$C_1 = -\frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2},\ \ C_2 = 0$$

luego

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}(-\cos\omega t+\cos\gamma t) = \frac{F_0}{\omega^2-\gamma^2}(\cos\gamma t-\cos\omega t)\\ &= \frac{2F_0}{\omega^2-\gamma^2}\,\text{sen}\left(\frac{\omega-\gamma}{2}\right)t\ \text{sen}\left(\frac{\omega+\gamma}{2}\right)t \end{aligned}$$

Periódo de $\text{sen}\left(\frac{\omega-\gamma}{2}\right)$ se calcula así:

$$\left(\frac{\omega-\gamma}{2}\right)T_1 = 2\pi \Rightarrow T_1 = \frac{4\pi}{\omega-\gamma}$$

Periódo de $\text{sen}\left(\frac{\omega+\gamma}{2}\right)$ se calcula así:

$$\left(\frac{\omega+\gamma}{2}\right)T_2 = 2\pi \Rightarrow T_2 = \frac{4\pi}{\omega+\gamma}$$

$$\Rightarrow T_1 > T_2\ \ \text{(Ver figura 4.8)}$$

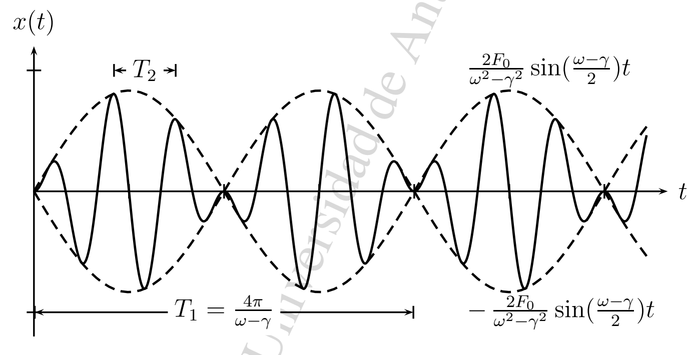

Figura 4.8 Pulsos

Ejemplo 41. (Sin Amortiguamiento) Este problema se le llama de resonancia, ya que la velocidad angular (o frecuencia angular) de la fuerza exterior esta en resonancia con la velocidad angular (o frecuencia angular) del cuerpo, es decir, $\omega = \gamma$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t,$$

donde $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}
x_h(t) &= C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t \\
x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + \omega^2} F_0 \operatorname{sen} \omega t = \frac{1}{D^2 + \omega^2} F_0(\mathbf{I}_m e^{i\omega t}) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(\frac{1}{D^2 + \omega^2} e^{i\omega t} \right)) = F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{(D + \omega i)^2 + \omega^2} 1 \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{D^2 + 2i\omega D - \omega^2 + \omega^2} 1 \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{(D + 2i\omega) D} 1 \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{D + 2i\omega} t \right)) = F_0(\mathbf{I}_m \left(e^{i\omega t} \frac{1}{2i\omega} \left[1 - \frac{D}{2i\omega} \right] t \right)) \\
&= F_0(\mathbf{I}_m (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \frac{1}{2i\omega} \left(t - \frac{1}{2i\omega} \right)) \\
&= \frac{F_0}{2\omega} (-t \cos \omega t + \frac{1}{2\omega} \operatorname{sen} \omega t)
\end{aligned}$$

descartamos el término $\frac{F_0}{(2\omega)^2} \operatorname{sen} \omega t$ ya que esta en x_h; la solución general es $x(t) = x_h + x_p = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t$. Con las condiciones iniciales hallamos C_1 y C_2 y obtenemos (ver figura 4.9):

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_h(t) + x_p(t) = \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\omega^2} - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t \\
|x(t)| &= \left| \frac{F_0 \operatorname{sen} \omega t}{2\omega^2} - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t \right| \xrightarrow{t \to \infty} \infty
\end{aligned}$$

NOTA: la E.D. del movimiento vibratorio de los resortes también se aplica en:

a). Circuitos en serie, en este caso, la E.D. es

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t)$$

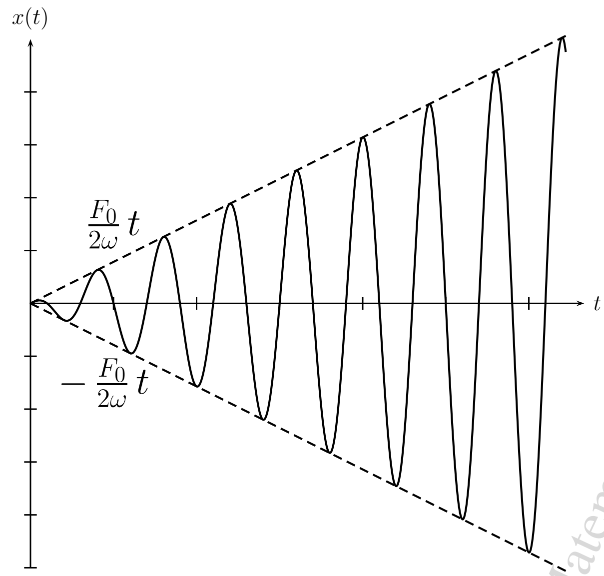

Figura 4.9 Resonancia

Donde (ver figura 4.10)

- $q(t)$ es la carga instantánea
- $E(t)$ es el voltaje o fuerza electromotriz suministrada
- L es la inductancia
- R es la resistencia
- C es la capacitancia

b). Barra de torsión.
La E.D. que rige el movimiento de torsión de un cuerpo suspendido del extremo de un eje elástico es (ver figura 4.11)

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + k\theta = T(t)$$

donde

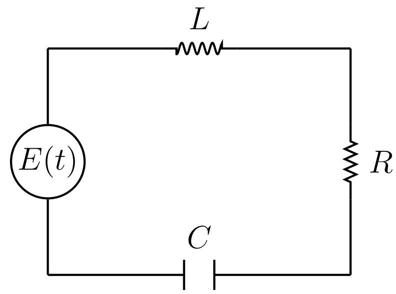

Figura 4.10

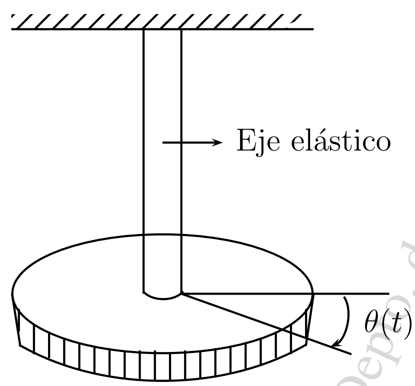

Figura 4.11

- I es el momento de inercia del cuerpo suspendido
- c es la constante de amortiguación
- k es la constante elástica del eje
- $T(t)$ es la fuerza de torsión exterior suministrada al cuerpo

c). Movimiento pendular; un péndulo es una masa m atada al extremo de una cuerda de longitud a y de masa despreciable y el otro extremo fijo. Hallemos la E.D. que rige su movimiento sin fricción.

Por la segunda ley de Newton y teniendo en cuenta que la componente

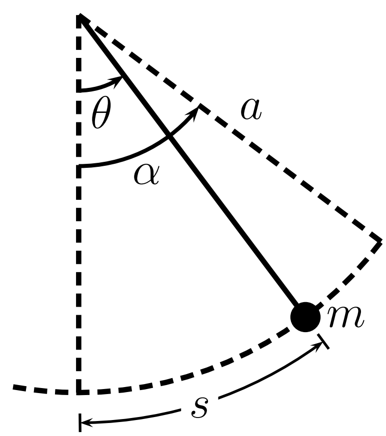

Figura 4.12

del peso en la dirección tangencial es $mg\operatorname{sen}\theta$, se tiene que

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg\operatorname{sen}\theta, \tag{4.14}$$

pero $s = a\theta$, luego $\frac{d^2s}{dt^2} = a\frac{d^2\theta}{dt^2}$ y sustituyendo en 4.14 se obtiene

$$a\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\operatorname{sen}\theta \tag{4.15}$$

de la cual obtenemos la E.D. no lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4.16}$$

Para valores pequeños de θ, se tiene que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ y por tanto

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\theta = 0 \tag{4.17}$$

que es una E.D. lineal. El proceso anterior lo llamamos linealización de una E.D. no lineal.

En forma similar obtenemos la E.D. para el péndulo amortiguado

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{4.18}$$

donde c es la constante de amortiguamiento. Linealizando 4.18

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{a}\theta = 0 \qquad (4.19)$$

Ejemplo 42. Un cilindro homogéneo de radio r pies y peso W libras y momento de inercia $I_g = \frac{W}{g}\frac{r^2}{2}$ (con respecto a su eje g), tiene una cuerda flexible enrollada alrededor de su eje central. Cuando el cuerpo cae la resistencia del aire es $\frac{W}{170}$ veces su velocidad instantánea. Si arranca desde el reposo, hallar la distancia y de cada, en función del tiempo t, la velocidad límite y el porcentaje de velocidad límite adquirido en 20 seg. (Ver figura 4.13)

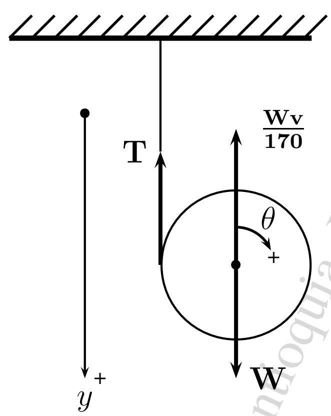

Figura 4.13: yo-yo

Solución. Si θ es el ángulo de giro alrededor del eje g en sentido horario (ver figura 4.13), entonces $y = r\theta$ y por tanto

$$v = \frac{dy}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \text{ y } \quad a = \frac{d^2y}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Por la segunda ley de Newton:

$$\sum \text{ de fuerzas en la dirección del eje } y = m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad (4.20)$$

luego

$$-T+W-\frac{W}{170}\frac{dy}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.21}$$

$$\circlearrowright: \sum \text{de torques alrededor del eje}\, g=I_g\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$Tr=\frac{W}{g}\frac{r^2}{2}\frac{1}{r}\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{Wr}{2g}\frac{d^2y}{dt^2} \tag{4.22}$$

despejando T en (4.22) y sustituyendo en (4.21), se tiene

$$-\frac{W}{2g}\frac{d^2y}{dt^2}+W-\frac{W}{170}\frac{dy}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{3}{2}\frac{W}{g}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{W}{170}\frac{dy}{dt}=W$$

luego

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{g}{255}\frac{dy}{dt}=\frac{2g}{3}$$

las condiciones iniciales son $y(0)=0$ y $y'(0)=0$.

La solución general es

$$y=C_1+C_2e^{-\frac{g}{255}t}+190(t-\frac{255}{g})$$

y la solución particular es

$$y=\frac{190\times 255}{g}e^{-\frac{g}{255}t}+190(t-\frac{255}{g})$$

la velocidad es

$$y'=-190e^{-\frac{g}{255}t}+190$$

la velocidad límite

$$\lim_{t\to\infty}y'=190=v_l$$

el porcentaje de velocidad límite

$$\frac{y'(20)}{v_l}100=[\frac{-190e^{-\frac{g}{255}20}+190}{190}]100=(1-e^{-\frac{g}{255}20})100$$

Resolver los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1. Un peso de 8 libras sujeto a un resorte, está sometido a un movimiento armónico simple. Determinar la ecuación del movimiento si la constante del resorte es 1 libra/pie y si el peso se suelta desde un punto que está 6 pulg. bajo la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de $\frac{3}{2}$ pie/seg. Hallar la solución utilizando el ángulo de fase.
(**Rta.:** $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t = \frac{\sqrt{13}}{4}\operatorname{sen}(2t + 0{,}5880)$)

Ejercicio 2. Un peso de 24 libras sujeto al extremo de un resorte lo estira 4 pulg. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso, en reposo, se suelta desde un punto que está 3 pulg. sobre la posición de equilibrio.
(**Rta.:** $x(t) = -\frac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$)

Ejercicio 3. Un extremo de una banda elástica está sujeto a un punto A. Una masa de 1 kg. atada al otro extremo, estira la banda verticalmente hasta un punto B, de tal manera que la longitud AB es 16 cm. mayor que la longitud natural de la banda. Si la masa se estira más, hasta una posición de 8 cm. debajo de B y se suelta; cual será su velocidad (despreciando la resistencia), al pasar por B?
(**Rta.:** $\pm\frac{\sqrt{g}}{5}$ mts./seg.)

Ejercicio 4. Un resorte, cuya constante es $k = 2$, esta suspendido y sumergido en un líquido que opone una fuerza de amortiguación númericamente igual a 4 veces la velocidad instantánea . Si una masa m se suspende del resorte, determinar los valores de m para los cuales el movimiento posterior no sea oscilatorio.
(**Rta.:** $0 < m \leq 2$

Ejercicio 5. Un peso de 32 libras estira un resorte 6 pulgadas. El peso se mueve en un medio que opone una fuerza de amortiguación númericamente igual a β veces la velocidad instantánea. Determinar los valores de β para los cuales el sistema mostrará un movimiento oscilatorio.
(**Rta.:** $0 < \beta < 16$)

Ejercicio 6. Un bloque cúbico de madera cuyo lado mide 1 pie se hunde hasta que su cara superior está a nivel de la superficie del agua y luego se suelta. Se encuentra que el periodo es 1 seg.. Despreciando la resistencia, hal-

lar la E.D. del movimiento del bloque y hallar el peso P del bloque?(Ayuda: la fuerza hacia arriba ejercida sobre el bloque es igual al peso del agua desalojada por el bloque; densidad de peso del agua: $62{,}4 lb/pie^2$)
(**Rta.:** $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{62{,}4g}{P}x=0, \quad \frac{62{,}4\,g}{4\pi^2}$)

Ejercicio 7. Un bloque cilíndrico de madera, de radio y altura 1 pie y cuya masa es 12,48 libras, flota en el agua (densidad del agua 62,4 libras/pie^3), manteniendo su eje vertical. Si se hunde de tal manera que la superficie del agua quede tangente al bloque y luego se suelta. Cúal será el período de vibración y la ecuación de su movimiento? Desprecie la resistencia.
Ayuda: La fuerza hacia arriba ejercida sobre el bloque es igual al peso del agua desplazada por el bloque.
(**Rta.:** $\frac{2\pi}{\sqrt{5\pi g}}$ seg., $x=(\frac{1}{5\pi}-1)\cos\sqrt{5\pi g}t$mts.)

Ejercicio 8. Un peso de 10 libras sujeto a un resorte lo estira en 2 pies. El peso se sujeta a un mecanismo de amortiguación que ofrece una resistencia numérica igual a β veces la velocidad instantánea ($\beta>0$). Determinar los valores de la constante de amortiguación β de modo que el movimiento sea: a sobreamortiguado, b crííticamente amortiguado, c subamortiguado.
(**Rta.:** a $\beta>\frac{5}{2}$, b $\beta=\frac{5}{2}$, c $0<\beta<\frac{5}{2}$)

Ejercicio 9. Después que un peso de 5 libras se sujeta a un resorte de 5 pies de largo, el resorte mide 6 pies. Se saca el peso de 5 libras y se lo reemplaza por un peso de 8 libras; el sistema completo se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea; a) Encuentre la ecuación del movimiento si el peso se suelta desde un punto que está a $\frac{1}{2}$ pie bajo la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 3 pie/seg. b) Ecuación con ángulo de fase. c) Encuentre los instantes en los que el peso pasa por la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.
(**Rta.:** a) $x=\frac{1}{2}e^{-2t}\cos 4t-\frac{1}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}4t$; b) $x=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-2t}\operatorname{sen}(4t+\frac{3\pi}{4})$; c) $t=\frac{n\pi}{4}-\frac{3}{16}\pi, \quad n=1,3,5,\ldots$)

Ejercicio 10. Una fuerza de 2 libras estira un resorte en un pie. Manteniendo fijo un extremo, se sujeta un peso de 8 libras al otro extremo; el sistema está sobre una mesa que opone una fuerza de roce numéricamente igual a $\frac{3}{2}$ veces la velocidad instantánea. Inicialmente el peso está desplazado 4 pulg. de la posición de equilibrio con el resorte comprimido y se le suelta

desde el reposo. Encuentre la ecuación del movimiento si se realiza a lo largo de una recta horizontal, la cual se elige como eje X.
(**Rta.:** $x(t) = -\frac{2}{3}\, e^{-2t} + \frac{1}{3}\, e^{-4t}$)

Ejercicio 11. Un peso de 24 libras estira un resorte en 4 pies. El movimiento subsiguiente se realiza en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a β veces la velocidad instantánea ($\beta > 0$). Si el peso parte de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 2 pies/seg., y si $\beta > 3\sqrt{2}$, comprobar que,

$$x(t) = -\frac{3}{\sqrt{\beta^2 - 18}}\, e^{-\frac{2}{3}\beta t} \operatorname{senh} \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}\, t$$

Ejercicio 12. Una masa de una libra sujeta a un resorte cuya constante es 9 libras/pie. El medio ofrece una resistencia al movimiento numéricamente igual a 6 veces la velocidad instantánea. La masa se suelta desde un punto que está 8 pulg. sobre la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de v_0 pies/seg.. Determinar los valores de v_0 de modo que posteriormente la masa pase por la posición de equilibrio.
(**Rta.:** $v_0 > 2$ pies/seg.)

Ejercicio 13. Un peso de 16 libras estira un resorte en $\frac{8}{3}$ pies. Inicialmente el peso parte del reposo desde un punto que está a 2 pies bajo la posición de equilibrio y el movimiento posterior se realiza en un medio que opone una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a $\frac{1}{2}$ de la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación del movimiento si el peso es impulsado por una fuerza exterior igual a $f(t) = 10\cos 3t$.
(**Rta.:** $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}[-\frac{4}{3}\cos\frac{\sqrt{47}}{2}t - \frac{64}{3\sqrt{47}}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{47}}{2}t] + \frac{10}{3}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$)

Ejercicio 14. Un peso de 4 libras esta suspendido de un resorte cuya constante es 3lbs/pie. El sistema completo se sumerge en un líquido que opone una fuerza de amortiguación numricamente igual a la velocidad instantnea. A partir de $t = 0$, se aplica sobre el sistema una fuerza exterior $f(t) = e^{-t}$. Determinar la ecuación del movimiento, si el peso se suelta a partir del reposo, desde un punto que esta 2 pies bajo la posición de equilibrio.
(**Rta.:** $x = \frac{26}{17}e^{-4t}\cos 2\sqrt{2}t + \frac{28}{17}\sqrt{2}e^{-4t}\operatorname{sen} 2\sqrt{2}t + \frac{8}{17}e^{-t}$)

Ejercicio 15. Al sujetar una masa de 2 kilogramos a un resorte cuya constante es 32Nw/m, éste queda en reposo en la posición de equilibrio. A

partir de $t = 0$, una fuerza $f(t) = 68e^{-2t}\cos(4t)$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación del movimiento en ausencia de amortiguación.
(**Rta.:** $x = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{9}{4}\operatorname{sen} 4t + \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos 4t - 4\operatorname{sen} 4t)$)

Ejercicio 16. Al sujetar una masa de un slug a un resorte, ste se estira 2 pies y luego queda en reposo en la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ una fuerza exterior $f(t) = 8\operatorname{sen} 4t$ se aplica al sistema. Hallar la ecuación del movimiento, si el medio que rodea al sistema opone una fuerza de amortiguación igual a 8 veces la velocidad instantánea.
(**Rta.:** $x = \frac{1}{4}e^{-4t} + te^{-4t} - \frac{1}{4}\cos 4t$)

Ejercicio 17. Hallar las E.D. del sistema de resortes acoplados con constantes k_1 y k_2 y masas m_1 y m_2 respectivamente, como se muestra en la figura 4.14
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y - x)$, $m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y - x)$)

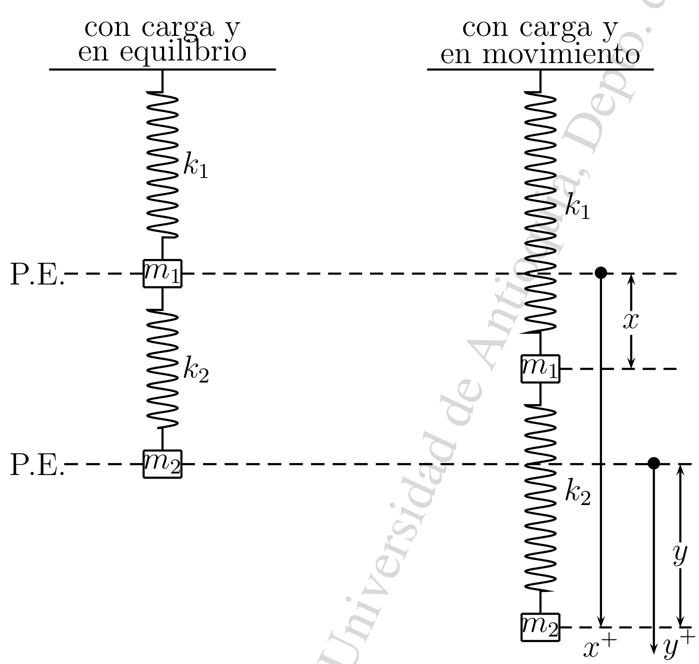

Figura 4.14

Ejercicio 18. Hallar las E.D. del sistema de tres resortes acoplados con constantes k_1, k_2, k_3 y masas m_1 y m_2 respectivamente, como se muestra

en la figura 4.15
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y-x)$, $m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y-x) - k_3y$)

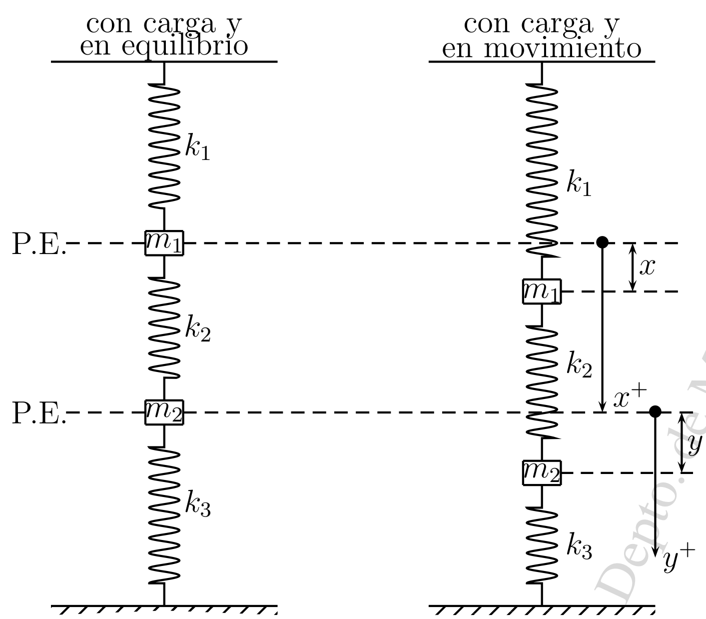

Figura 4.15

Ejercicio 19. Un peso de 4 libras estira un resorte una pulgada. Si un peso de 12 libras se coloca en un extremo del resorte y el otro extremo se mueve de acuerdo a $y = \operatorname{sen}\sqrt{3g}t$. Encontrar la E.D. del movimiento del peso y resolverla.
(**Rta.:** $\frac{1}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -4(x-y)$, $x = -2\sqrt{3}\operatorname{sen} 2\sqrt{g}\ t + 4\operatorname{sen}\sqrt{3g}\ t$)

Ejercicio 20. Dos pesos de 96 libras y 64 libras se mueven horizontalmente en una superficie lisa, cada resorte tiene $k = k_1 = k_2 = 600$. En $t = 0$ los resortes estn sin estirar y el de peso 96 tiene una velocidad de 600 pies/seg. alejándose del muro y el otro esta en reposo. Encontrar las E.D. del movimiento . (Ver figura 4.16)
(**Rta.:** $m_1\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1x + k_2(y-x)$, $m_2\frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y-x)$)

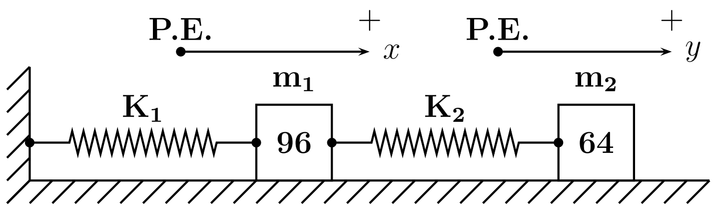

Figura 4.16

Ejercicio 21. El resorte de la figura 4.17 tiene una longitud l cuando esta sin estirar; el collar situado en un extremo del resorte tiene un peso W y se desliza por la varilla horizontal sin fricción. Expresar la aceleración en función de x; hallar la velocidad cuando pasa por C, si se suelta desde el reposo a una distancia $x = x_0$.
(**Rta.:** $v = \sqrt{\frac{gk}{W}}(\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)$)

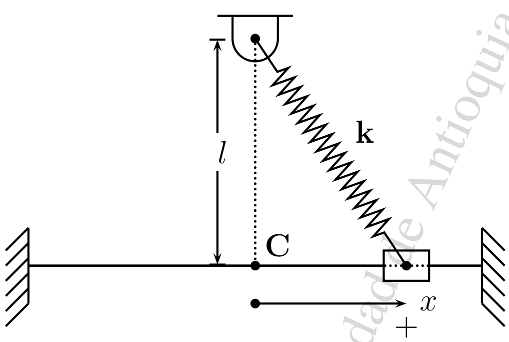

Figura 4.17

Ejercicio 22. En la figura 4.18 el cilindro de radio r esta suspendido de una cuerda y un resorte como lo indica la figura, el resorte tiene una constante k. Hallar el periodo y la frecuencia de vibración del cilindro.
(**Rta.:** $T = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}}$, $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$, donde m es la masa del cilindro.)

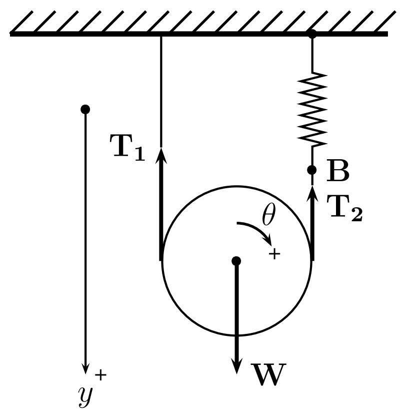

Figura 4.18

4.13. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 42. Hallar con el paquete Maple las races del polinomio característico de la E.D. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - 2y^{(3)} - 10y'' + y' + 5y = 0$
Solución: la ecuacióm característica de esta E.D. es

$$m^5 + 5m^4 - 2m^3 - 10m^2 + m + 5 = 0$$

Efectuamos los siguientes comandos:

```
>eq := m^5+5*m^4-2*m^3-10*m^2+m+5=0;
```

$$eq := m^5 + 5 * m^4 - 2 * m^3 - 10 * m^2 + m + 5 = 0$$

```
>solve(eq,m);
```

$$-5, -1, -1, 1, 1$$

```
>sols := [solve(eq,m)];
```

$$sols := [-5, -1, -1, 1, 1]$$

Ejemplo 43. Hallar la solución general y la particular de la E.D.

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 3$, graficar la solución particular

```
> restart;
> DE(tools):diff(y(x),x,x,x)-3*diff(y(x),x,x)+9*diff(y(x),x)+13*y(x)=0;
```

$$\frac{d^3}{dx^3}y(x) - 3\frac{d^2}{dx^2}y(x) + 9\frac{d}{dx}y(x) + 13y(x) = 0$$

```
> dsolve({%,y(0)=1,D(y)(0)=2,D(D(y))(0)=3},y(x));
```

$$y(x) = \frac{4}{9}e^{(-x)}\frac{4}{9}e^{(2x)}\operatorname{sen}(3x) + \frac{5}{9}e^{(2x)}\cos(3x)$$


```
>plot(rhs(%
```

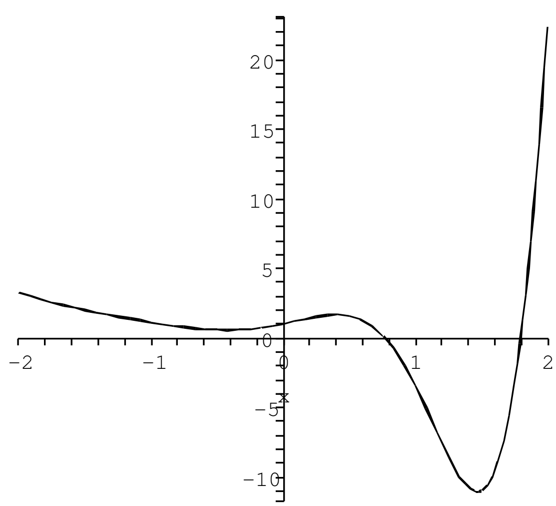

Figura 4.19

Ejemplo 44. Resolver con el paquete Maple la E.D. $y''+25y=20\operatorname{sen}5x$

Solución:

```
>restart;
>y(x):=C*x*cos(5*x)+F*x*sin(5*x);
```

$$y(x):=Cxcos(5x)+Fxsin(5x)$$

```
>yp:=diff(y(x),x);
```

$$yp:=Ccos(5x)-5Cxsin(5x)+Fsin(5x)+5Fxcos(5x)$$

```
>ypp:=diff(yp,x);
```

$$ypp:=-10Csin(5x)-25Cxcos(5x)+10Fcos(5x)-25Fxsin(5x)$$

```
>ypp+25*y(x)-20*sin(5*x)=0;
```

$$-10Csin(5x)+10Fcos(5x)-20sin(5x)=0$$

```
> collect(%,[cos(5*x),sin(5*x)]);
```

$$10Fcos(5x)+(-10C-20)sin(5x)=0$$

```
> solve({10*F=0,-10*C-20=0},{F,C});
```

$$F=0, C=-2$$

Ejemplo 45. Resolver con el paquete Maple la E.D. por el método de variación de parámetros $y''+y=\sec x\tan x$

```
>with(linalg):y1:=cos(x);y2:=sin(x);fx:=sec(x)*tan(x);
```

$$y1 := \cos(x)$$
$$y2 := \operatorname{sen}(x)$$
$$fx := \sec(x)\tan(x)$$

```
>y:=vector([y1,y2]);
```

$$y := [\cos(x), \operatorname{sen}(x)]$$

```
>M:=wronskian(y,x);
```

$$M := \begin{bmatrix} \cos(x) & \operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

```
>ApBp:=linsolve(M,[0,fx]);
```

$$ApBp := [-\frac{\operatorname{sen}(x)\sec(x)\tan(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2+(\cos(x))^2}, \frac{\cos(x)\sec(x)\tan(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2+(\cos(x))^2}]$$

```
>A:=int(simplify(ApBp[1]),x);
```

$$A := -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + x$$

```
>B:=int(simplify(ApBp[2]),x);
```

$$B := -\ln(\cos(x))$$

```
>SolGen:=C1*y1+C2*y2+A*y1+B*y2;
```

$$SolGen := C1\ \cos(x) + C2\ \operatorname{sen}(x) + \left(-\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} + x\right)\cos(x) - \ln(\cos(x))\ \operatorname{sen}(x)$$

```
>simplify((SolGen),trig);
```

$$C1\ \cos(x) + C2\ \text{sen}\ (x) - \text{sen}\ (x) + x\cos(x) - \ln(\cos(x))\ \text{sen}\ (x)$$

observese que en la solución general anterior la expresión $-\operatorname{sen}(x)$ es absorbida por $C2\operatorname{sen}(x)$, quedando como solución general:

$$C1\ \cos(x) + C2\ \text{sen}\ (x) + x\cos(x) - \ln(\cos(x))\ \text{sen}\ (x)$$

CAPÍTULO 5

SOLUCIONES POR SERIES

5.1. INTRODUCCION

- Una serie de potencias en $(x-a)$, es una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n\,(x-a)^n.$$

- Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia que consiste de todos los puntos para los cuales la serie es convergente.

- Una serie de potencias converge absolutamente en un número x si,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|\,|x-a|^n$$

  es convergente .

- Todo intervalo de convergencia tiene un radio de convergencia R.

- Una serie de potencias converge absolutamente para $|x-a|<R$ y diverge para $|x-a|>R$. Cuando $R=0$, la serie sólo converge en $x=a$. Cuando $R=\infty$, la serie converge para todo x.

- El radio de convergencia se obtiene mediante el criterio de la razón, en efecto, si
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right||x-a|=L$$
y como la serie es convergente cuando $L<1$, entonces el radio de convergencia es $R=\frac{1}{L}$.

- Si $R\neq 0$ ó $R\neq\infty$, el intervalo de convergencia puede o no incluir los extremos $a-R$, $a+R$ de dicho intervalo.

- Una serie de potencias representa una función continua en el interior de su intervalo de convergencia.

- Una serie de potencias puede ser derivada término a término en el interior de su intervalo de convergencia.

- Una serie de potencias puede ser integrada término a término en el interior de su intervalo de convergencia.

- Dos series de potencias pueden ser sumadas término a término si tienen un intervalo común de convergencia.

EXPANSIÓN EN SERIES MACLAURIN DE ALGUNAS SERIES

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$
   convergente para todo x real (o sea para $-\infty<x<\infty$)

2. $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   convergente para todo x real.

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
   convergente para todo x en los reales.

4. $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
   convergente para todo x real.

5. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
   convergente para todo x en los reales.

6. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$
   convergente para x en el intervalo $-1 < x < 1$

7. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$
   convergente para x en el intervalo $-1 < x \leq 1$

8. $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
   convergente para x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

9. $\operatorname{sen}^{-1} x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$
   convergente para todo x en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$

10. Serie binomial:
    $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)x^3}{3!} + \ldots$
    convergente para x en el intervalo $-1 < x < 1$

5.2. SOLUCION EN PUNTOS ORDINARIOS

Supongamos que la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se puede escribir así:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

donde $a_2(x) \neq 0$ en I y $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$

Definición 5.1 (Punto Ordinario) . *Se dice que $x = a$ es un punto ordinario de la E.D. $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, si $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = a$, es decir, si $P(x)$ y $Q(x)$ se pueden expandir en serie de potencias de $x - a$ con un radio de convergencia positivo.*

Nota: si un punto no es ordinario se dice que es singular.

RECORDEMOS: serie Taylor de $y(x)$ en $x = a$ es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n(a)}{n!} (x-a)^n,$$

luego, toda función que tenga un desarrollo en serie Taylor alrededor de $x = a$ es analítica en $x = a$.

En particular cuando $x = 0$ a la serie Taylor se le llama serie Maclaurin de $y(x)$ y la serie tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n(0)}{n!} (x)^n,$$

luego, toda función que tenga un desarrollo en serie Maclaurin es analítica en $x = 0$.

Ejemplo 1. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$y'' + \operatorname{sen} xy' + e^x y = 0$

Solución: $\operatorname{sen} x$: tiene expansión Taylor para cualquier a
e^x: tiene expansión Taylor para cualquier a.
Es decir todo a en $\mathbf{R}$ es punto ordinario de la ecuación diferencial, por tanto no tiene puntos singulares.

Ejemplo 2. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$xy'' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
Solución:

$$y'' + \overbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}^{Q(x)} y = 0$$

$$Q(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$\Rightarrow x = 0$ es punto ordinario de la E.D.,por tanto todos los $x \neq 0$ son puntos singulares.

Ejemplo 3. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$y'' + (\ln x)y = 0$

Solución: $x = 0$ es un punto singular ya que $\ln x$ no tiene expansión en $x = 0$, todos los demás puntos diferentes de cero son puntos ordinarios.

Analicemos el caso en que $a_2(x), a_1(x)$ y $a_0(x)$ son polinomios. Si en la E.D. $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ se tiene que $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes, o sea, sin raíces comunes, entonces $x = a$ es :

i) Un punto ordinario si $a_2(a) \neq 0$ es decir, $x = a$ no es raíz del polinomio $a_2(x)$.

ii) Un punto singular si $a_2(a) = 0$, es decir, si a es raíz de $a_2(x)$.

Ejemplo 4. Hallar los puntos ordinarios y singulares de
$(x^2 - 4)y'' + 2xy' + 3y = 0$
Solución:

$$a_2(x) = x^2 - 4 = 0$$

$\Rightarrow x = \pm 2$ son puntos singulares.
$x \neq \pm 2$ son puntos ordinarios.

Teorema 5.1 .

Si $x = a$ es un punto ordinario de la ecuación

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

siempre podemos encontrar dos soluciones distintas (linealmente independientes), en serie de potencias; soluciones que son de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n.$$

Una solución en serie de potencias converge por lo menos para $|x-a| < R_1$, donde R_1 es la distancia de a al punto singular más cercano.

Nota: para simplificar supondremos que el punto ordinario es $a = 0$, si $a \neq 0$, se hace la sustitución $t = x - a$. Esta sustitución convierte la E.D. en otra E.D. con punto ordinario $t = 0$.

Ejemplo 5. Resolver por series la E.D. $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
Solución:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ son puntos singulares y los $x \neq \pm 1$ son puntos ordinarios.

Trabajemos con el punto ordinario $x = 0$, los candidatos a solución son de la forma $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n x^n$

Debemos hallar las C_n: derivamos dos veces:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2}$$

Pasamos a sustituir $y'(x)$ y $y''(x)$ en la E.D. original:

$$x^2y'' - y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4n\, C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, C_n x^n = 0$$

Homogenizamos las potencias de x:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^n - \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1)C_{m+2} x^m + \sum_{n=1}^{\infty} 4n\, C_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2\, C_n x^n = 0$$

$$\text{haciendo} \begin{cases} n-2=m & \Rightarrow n=m+2 \\ n=2 & \Rightarrow m=0 \end{cases}$$

Escribimos todo en términos de k:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 4k\, C_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2\, C_k x^k = 0$$

Ahora homogenizamos el índice de las series:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)C_k x^k - 2C_2 - (3)(2)C_3 x - \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)C_{k+2} x^k + 4C_1 x +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} 4k\, C_k x^k + 2C_0 + 2C_1 x + \sum_{k=2}^{\infty} 2\, C_k x^k = 0$$

luego

$$2C_0 - 2C_2 + (6C_1 - 2\cdot 3C_3)x + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} + 4kC_k + 2C_k] x^k = 0$$

Comparando coeficientes:

$$x^0 : 2C_0 - 2C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = C_0$$

$$x^1 : 6C_1 - 6C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = C_3$$

$$x^k : [k(k-1) + 4k + 2]C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0 \qquad k = 2, 3, \ldots$$

$$(k^2 + 3k + 2)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0$$

$$(k+2)(k+1)C_k - (k+2)(k+1)C_{k+2} = 0$$

$$C_{k+2} = \frac{(k+2)(k+1)}{(k+2)(k+1)} C_k$$

$$\underbrace{C_{k+2} = C_k}_{\text{Fórmula de recurrencia para los coeficientes}} \qquad k = 2, 3, \ldots$$

Iteremos la fórmula de recurrencia:

$$k = 2 : C_4 = C_2 = C_0$$

$$k = 3 : C_5 = C_3 = C_1$$

$$k = 4 : C_6 = C_4 = C_0$$

$$k = 5 : C_7 = C_5 = C_1$$

Volviendo a

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + \ldots$$

$$= C_0 + C_1 x + C_0 x^2 + C_1 x^3 + C_0 x^4 + C_1 x^5 + C_0 x^6 + \ldots$$

La solución general:

$$= C_0(\underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots}_{y_1(x)}) + C_1(\underbrace{x + x^3 + x^5 + \ldots + x^{2n+1} + \ldots}_{y_2(x)})$$

$$= C_0 \frac{1}{1 - x^2} + C_1 x(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots)$$

$$= C_0 \frac{1}{1 - x^2} + \frac{C_1 x}{1 - x^2} \quad \text{ya que} \quad \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Siendo $y_1(x)$ y $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes.

Resolver por series los siguientes ejercicios en el punto ordinario $x = 0$:

Ejercicio 1. $y'' - 2xy' + 8y = 0 \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = 3 - 12x^2 + 4x^4$)

Ejercicio 2. $(x^2-1)y''-6y=0$
(**Rta:** $y=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3}{(2n-1)(2n-3)}x^{2n}+C_1(x-x^3)$)

Ejercicio 3. $y''-xy=0$
(**Rta:** $y=C_0(1+\frac{1}{3\cdot 2}x+\frac{1}{6\cdot 5}\frac{1}{3\cdot 2}x^6+\frac{1}{9\cdot 8}\frac{1}{6\cdot 5}\frac{1}{3\cdot 2}x^9+\ldots)+C_1(x+\frac{1}{4\cdot 3}x^4+\frac{1}{7\cdot 6}\frac{1}{4\cdot 3}x^7+\frac{1}{10\cdot 9}\frac{1}{7\cdot 6}\frac{1}{4\cdot 3}x^{10}+\ldots)$)

Ejercicio 4. $(x^2+1)y''+6xy'+6y=0$
(**Rta:** $y=C_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}+C_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n+1}$)

Ejercicio 5. $y''-xy'-y=0$
(**Rta:** $y=C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}x^{2n}+C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}x^{2n+1}$)

Ejercicio 6. $y''+e^{-x}y=0$
(Sugerencia: Hallar la serie e^{-x} y multiplicarla por la serie de y)

Ejercicio 7. $(x-1)y''+y'=0$
(**Rta:** $y_1=C_0,\quad y_2=C_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=C_1\ln|x-1|$)

Ejercicio 8. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$
(**Rta:** $y(x)=C_0(1+x\tan^{-1}x)+C_1x$)

Ejercicio 9. $y''-xy'+y=-x\cos x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2$
(**Rta:** $y(x)=x+\operatorname{sen}x$)

Ejercicio 10. $y''-2xy'+4y=0$ con $y(0)=1$ y $y'(0)=0$
(**Rta:** $y=1-2x^2$)

Ejercicio 11. $(1-x)^2y''-(1-x)y'-y=0$ con $y(0)=y'(0)=1$
(**Rta:** $y=\frac{1}{1-x}$)

Ejercicio 12. $y''-2xy'-2y=x$ con $y(0)=1$ y $y'(0)=-\frac{1}{4}$
(**Rta:** $y=e^{x^2}-\frac{x}{4}$)

Ejercicio 13. $y''+xy'+(2x-1)y=x$ con $y(0)=2$ y $y'(0)=3$. Hallar los primeros 6 términos de la solución particular.

(**Rta:** $y = 2 + 3x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^5 - \ldots$)

Ejercicio 14. $y'' + xy' + y = 0$

a). Hallar dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$, $y_2(x)$

b). Usando el criterio del cociente, mostrar que las dos series son convergentes para todo x.

c). Probar que $y_1(x) = e^{-(\frac{x}{\sqrt{2}})^2}$

d). Usando el método de reducción de orden de D'Alembert, hallar $y_2(x)$

(**Rta:** a). $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2\cdot 4} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6} + \ldots$, $y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3\cdot 5} - \frac{x^7}{3\cdot 5\cdot 7} + \ldots$)

Ejercicio 15. La E.D. de Legendre de orden α es:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \text{ con } \alpha > -1$$

Mostrar:

a) Que las fórmulas de recurrencia son:

$$C_{2m} = \frac{(-1)^m \alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\ldots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\ldots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}C_0$$

$$C_{2m+1} = \frac{(-1)^m (\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\ldots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}C_1$$

b) Las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = C_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m}$$

$$y_2 = C_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1}$$

donde a_{2m} y a_{2m+1} son las fracciones encontradas en a), pero sin $(-1)^m$

c) Si α es entero no negativo y par, entonces $a_{2m} = 0$ para $2m > n$; mostrar que y_1 es un polinomio de grado n y y_2 es una serie infinita. Si α es entero no negativo e impar; mostrar que $a_{2m+1} = 0$ para $2m + 1 > n$ y y_2 es un polinomio de grado n y y_1 es una serie infinita.

d) Se acostumbra tomar la constante arbitraria (C_0 o C_1 según el caso) de tal manera que el coeficiente de x^n en el polinomio y_1 o y_2 (según el caso) sea $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ y se les llama polinomios de Legendre$P_n(x)$. Mostrar que:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

donde N =parte entera de $\frac{n}{2}$

e) Mostrar que los 6 primeros polinomios de Legendre son:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1), & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3), & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x) \end{aligned}$$

Ejercicio 16. Fórmula de Rodriguez:

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

para el polinomio de Legendre de grado n.

a) Mostrar que $u = (x^2-1)^n$ satisface la E.D.

$$(1-x^2)u' + 2nxu = 0$$

Derive ambos lados de la E.D. y obtenga

$$(1-x^2) + 2(n-1)xu' + 2nu = 0$$

b) Derive sucesivamente, n veces ambos lados de la ecuación y obtenga:

$$(1-x^2)u^{(n+2)} - 2xu^{(n+1)} + n(n+1)u^{(n)} = 0$$

Hacer $v = u^{(n)}$ y mostrar que $v = D^n(1-x^2)^n$ y luego mostrar que v satisface la ecuación de Legendre de orden n

c) Demostrar que el coeficiente de x^n en v es $\frac{(2n)!}{n!}$

d) Explicar porqué c) demuestra la fórmula de Rodriguez (Notar que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ es $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$)

Ejercicio 17. La E.D.

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

se le llama ecuación de Hermite de orden α.

a) Mostrar que las dos soluciones en serie de potencias son:

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m \alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha-2m+2)}{(2m)!} x^{2m}$$

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m (\alpha-1)(\alpha-3)\ldots(\alpha-2m+1)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

b) Si α es entero par, mostrar que y_1 es un polinomio.
Si α es impar, mostrar que y_2 es un polinomio.

c) El polinomio de la parte b) se denota por $H_n(x)$ y se le llama polinomio de Hermite cuando el coeficiente de x^n es 2^n.

d) Demostrar que los 6 primeros polinomios de Hermite son:

$$\begin{array}{ll} H_0(x) = 1, & H_1(x) = 2x, \\ H_2(x) = 4x^2 - 2, & H_3(x) = 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, & H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x \end{array}$$

e) La formula general de los polinomios de Hermite es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

Por inducción mostrar que genera un polinomio de grado n.

El siguiente ejercicio resuelto, sólo tiene validez para E.D. con condiciones iniciales. Si la condición inicial está en $x = 0$, utilizamos las series Maclaurin y si la condición inicial está en $x = a$, utilizamos la serie Taylor.

Ejemplo 6. $y'' - e^{-x}y = 0, \qquad y(0) = y'(0) = 1$
Solución.

Serie Maclaurin de $y(x)$.

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots$$

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

De la ecuación tenemos que

$$y''(x) = e^{-x}y(x), \quad \text{evaluando en } x = 0 \Rightarrow y''(0) = 1 \times 1 = 1$$

Derivando nuevamente tenemos que:

$$y'''(x) = e^{-x}y'(x) - e^{-x}y(x)$$

evaluando en

$$x = 0 \Rightarrow y'''(0) = 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0$$

$$y^{(iv)}(x) = e^{-x}(y''(x) - y'(x)) - e^{-x}(y'(x) - y(x))$$

$$\overset{x=0}{\Rightarrow} y^{(iv)}(0) = 1(1 - 1) - 1(1 - 1) = 0$$

$$y^{(v)}(x) = e^{-x}(y'''(x) - 2y''(x) + y'(x)) - e^{-x}(y''(x) - 2y' + y(x))$$

$$y^{(v)}(0) = 1(0 - 2(1) + 1) - 1(1 - 2(1) + 1) = -1$$

Sustituyendo en la fórmula de Maclaurin:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Ejercicio 1. Hallar la solución particular de la E.D. de Ayry

$$y'' - xy = 0 \qquad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$$

(**Rta.:** $y = 1 + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$)

Ejercicio 2. Hallar la solución particular de la E.D.

$$y'' - 2xy - 2y = x \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{1}{4}$$

(**Rta.:** $y = -\frac{x}{4} + e^{x^2}$)

Ejercicio 3. Resolviendo por series, mostrar que la solución de la E.D.

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 6$$

es $y = 8x - 2e^x$.

5.3. SOLUCIONES EN TORNO A PUNTOS SINGULARES REGULARES

Definición 5.2 (Punto singular) .

i. *Decimos que $x = x_0$ es un punto singular regular de la E.D.O.*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

si $(x-x_0)P(x)$ y $(x-x_0)^2Q(x)$ son analíticas en $x = x_0$, es decir, si $(x-x_0)P(x)$ y $(x-x_0)^2Q(x)$ tienen desarrollos en series de potencias de $(x-x_0)$. Si $x = x_0$ no cumple con la anterior definición, entonces decimos que $x = x_0$ es un punto **singular irregular**.

ii. *Si en la E.D.*

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

se tiene que $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ son polinomios sin factores comunes, entonces decimos que $x = x_0$ es un punto **singular regular** *si $a_2(x_0) = 0$ y además, si en $P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)}$ y $Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}$, el factor $x - x_0$ tiene a lo sumo grado uno en el denominador de $P(x)$ y grado a lo sumo dos en el denominador de $Q(x)$.*

Ejemplo 7. Hallar los puntos singulares regulares e irregulares de

$$(x^2-4)^2y''+(x-2)y'+y=0$$

Solución:
Puntos singulares:

$$a_2(x)=(x^2-4)^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$P(x)=\frac{x-2}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{(x-2)(x+2)^2}$$

$$Q(x)=\frac{1}{(x-2)^2(x+2)^2}$$

- Con $x=+2$, como $(x-2)$ es un factor de grado uno en $P(x)$ y de grado dos en $Q(x)$, por lo tanto $x=2$ es punto singular regular.
- Con $x=-2$ es punto singular irregular, porque $x+2$ aparece con grado dos en el denominador de $P(x)$.

Nota: los puntos singulares pueden ser números complejos.

Teorema 5.2 (de Frobenius) .

Si $x=x_0$ es un punto singular regular de la E.D.O.

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0,$$

entonces existe al menos una solución en serie de la forma:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^{n+r},$$

donde r es una constante a determinar.
Esta serie converge en un intervalo de la forma $0<x-x_0<R$.

Ejemplo 8. Utilizar el teorema de Frobenius para hallar dos soluciones linealmente independientes de la E.D. $3xy''+y'-y=0$
Solución:

$x = 0$ es punto singular y es regular porque

$$P(x) = \frac{1}{3x}, \quad Q(x) = -\frac{1}{3x}$$

Suponemos una solución de la forma:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

y sustituimos en la E.D.

$$3xy'' + y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) C_n x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right] = 0$$

Sacamos la potencia más baja:

$$x^r \left[r(3r-2) C_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(3n+3r-2) C_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \right] = 0$$

$$\text{hagamos} \begin{cases} k = n-1 & \Rightarrow n = k+1 \\ n = 1 & \Rightarrow k = 0 \end{cases}$$

$$x^r \left[r(3r-2) C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+r+1)(3k+3r+1) C_{k+1} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \right] = 0$$

$$x^r \left[r(3r-2) C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+r+1)(3k+3r+1) C_{k+1} - C_k \right] x^k \right] = 0$$

en potencias de:

$$x^{-1} : \; r(3r-2) C_0 = 0$$

y en potencias de:

$$x^k : (k+r+1)(3k+3r+1)C_{k+1} - C_k = 0 \quad \text{con} \;\; k = 0,1,2,\ldots$$

si $C_0 \neq 0 \Rightarrow \underbrace{r(3r-2)=0}_{\text{ec. indicial}} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{r_2 = 0 \quad r_1 = \frac{2}{3}}_{\text{índices (o exponentes) de la singularidad}}$ y

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+r+1)(3k+3r+1)}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Con $r_1 = \frac{2}{3}$ que es la raíz mayor, entonces:

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+\frac{5}{3})(3k+3)} = \frac{C_k}{(3k+5)(k+1)}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{5.1}$$

Con $r_2 = 0$ entonces:

$$C_{k+1} = \frac{C_k}{(k+1)(3k+1)}, \quad k = 0,1,\ldots \tag{5.2}$$

Iteremos (5.1):

$$\begin{aligned}
k=0 &: C_1 = \frac{C_0}{5\times 1}\\
k=1 &: C_2 = \frac{C_1}{8\times 2} = \frac{C_0}{(5\times 1)\times(8\times 2)} = \frac{C_0}{2!\times(5\times 8)}\\
k=2 &: C_3 = \frac{C_2}{11\times 3} = \frac{C_0}{(5\times 1)\times(8\times 2)\times(11\times 3)} = \frac{C_0}{3!\times 5\times 8\times 11}\\
k=3 &: C_4 = \frac{C_3}{14\times 4} = \frac{C_0}{4!\times 5\times 8\times 11\times 14}
\end{aligned}$$

generalizando

$$C_n = \frac{C_0}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)} \quad n = 1,2,\ldots$$

Iteremos (5.2):

$$k=0 : C_1 = \frac{C_0}{1\times 1}$$

$$k = 1:\ C_2 = \frac{C_1}{2\times 4} = \frac{C_0}{(1\times 1)\times(2\times 4)}$$
$$k = 2:\ C_3 = \frac{C_2}{3\times 7} = \frac{C_0}{(1\times 1)\times(2\times 4)\times(3\times 7)} = \frac{C_0}{3!\times 4\times 7}$$
$$k = 3:\ C_4 = \frac{C_3}{4\times 10} = \frac{C_0}{4!\times 4\times 7\times 10}$$

generalizando

$$C_n = \frac{C_0}{n!\times 1\times 4\times 7\times 10\ldots(3n-2)} \quad n = 1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned} r_1 = \frac{2}{3} \Rightarrow y_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = x^{\frac{2}{3}}\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n\right] \\ &= x^{\frac{2}{3}}\left[C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)}\,x^n\right] \\ &= C_0 x^{\frac{2}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 = 0 \Rightarrow y_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+0} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n x^n \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_0}{n!\times 1\times 4\times 7\times 10\ldots(3n-2)}\,x^n \\ &= C_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\times 1\times 4\times 7\times 10\ldots(3n-2)}\right] \end{aligned}$$

Luego la solución general es :

$$\begin{aligned} y &= k_1 y_1 + k_2 y_2 \\ &= k_1 C_0\, x^{\frac{2}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\times 5\times 8\times 11\times 14\ldots(3n+2)}\right] + \\ & k_2 C_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\times 1\times 4\times 7\times 10\ldots(3n-2)}\right] \end{aligned}$$

observemos que para este ejemplo

$$r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = 0 \Rightarrow r_1 - r_2 = \frac{2}{3} \neq \textit{ entero}$$

Nota: en general si $x = 0$ es un punto singular regular, entonces las funciones $xP(x)$ y $x^2Q(x)$ son analíticas en $x = 0$, es decir

$$xP(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots$$

$$x^2Q(x) = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots$$

son convergentes en intervalos de radio positivo. Después de sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r}$ en la E.D. y simplificar, la ecuación indicial es una ecuación cuadrática en r que resulta de igualar a cero el coeficiente de la menor potencia de x. Siguiendo este procedimiento se puede mostrar que la ecuación indicial es

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0$$

Se hallan las raíces de la ecuación indicial y se sustituyen en la relación de recurrencia.

Con las raíces de la ecuación indicial pueden ocurrir los siguientes tres casos.

CASO I: cuando $r_1 - r_2 \neq$ entero positivo, entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_2}$$

Este caso lo hemos contemplado en el Ejemplo 8.

CASO II: cuando $r_1 - r_2 =$ entero positivo, entonces las dos soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1}$$

$$y_2 = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad b_0 \neq 0,$$

donde C es una constante que puede ser cero.

Nota: para saber si C es cero o diferente de cero, utilizamos la fórmula de D'Alembert; si es cero, entonces en y_2 no aparece el término logarítmico. El próximo ejemplo lo haremos con $C = 0$; si $C \neq 0$, y_2 también se puede hallar utilizando la fórmula de D'Alembert:

$$y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{[y_1(x)]^2}\,dx$$

o también derivando dos veces

$$y_2 = Cy_1(x)\ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+r_2} \quad b_0 \neq 0,$$

y sustituyendo en la E.D. e iterando la fórmula de recurrencia para hallar los coeficientes b_n.

CASO III: cuando $r_1 - r_2 = 0$, entonces las soluciones linealmente independientes son:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r_1} \quad \text{con} \quad C_0 \neq 0$$

$$y_2 = y_1(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+r_1} \quad \text{sabiendo que } r_1 = r_2$$

5.3.1. CASO II: $r_1 - r_2 =$ entero positivo

Con el siguiente ejemplo mostramos el CASO II, o sea cuando $r_1 - r_2 =$ entero positivo.

Ejemplo 9. $xy'' + (5 + 3x)y' + 3y = 0$

<u>Solución</u>:

$x = 0$ es punto singular regular, ya que

$$P(x) = \frac{5+3x}{x} \qquad Q(x) = \frac{3}{x}$$

Si utilizamos la fórmula de D'Alembert encontramos que después de efectuar todas las operaciones, el primer término no tiene logaritmo, por tanto $C = 0$. Ahora supongamos que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r} \Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) C_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-2}$$

sustituyendo en la E.D.

$$xy'' + 5y' + 3xy' + 3y = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 5(n+r) C_n x^{n+r} +$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r) C_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} 3 C_n x^{n+r} = 0$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1+5) C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r+1) C_n x^n \right] = 0$$

$$x^r \left[r(r+4) C_0 x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+r)(n+r+4) C_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+r+1) C_n x^n \right] = 0$$

$$\text{hagamos} \left\{ \begin{array}{ll} k = n-1 & \Rightarrow n = k+1 \\ \text{cuando } n = 1 & \Rightarrow k = 0 \end{array} \right.$$

luego

$$x^r \left[r(r+4) C_0 x^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k+r+1)(k+r+5) C_{k+1} + 3(k+r+1) C_k] x^k \right] = 0$$

Por lo tanto la ecuación indicial:

$$r(r+4) = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \quad r_2 = -4 \;\text{ o sea que }\; r_1 - r_2 = \text{entero positivo}$$

y la fórmula de recurrencia es

$$(k+r+1)(k+r+5)C_{k+1} + 3(k+r+1)C_k = 0 \quad k = 0, 1, \ldots$$

e iteramos con la menor raíz indicial $r_2 = -4$:

$$(k+1)(k-3)C_{k+1} + 3(k-3)C_k = 0 \quad k = 0, 1, \ldots$$

$$\begin{aligned}
k = 0 &: \quad 1(-3)C_1 + 3(-3)C_0 \Rightarrow C_1 = \frac{9C_0}{-3} = -3C_0 \\
k = 1 &: \quad 2(-2)C_2 + 3(-2)C_1 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{6C_1}{-4} = -\frac{3}{2}(-3)C_0 = \frac{9}{2}C_0 \\
k = 2 &: \quad 3(-1)C_3 + 3(-1)C_2 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{3C_2}{-3} = -\frac{9}{2}C_0 \\
k = 3 &: \quad 4(0)C_4 + 3(0)C_3 = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

C_4 es parámetro

$$k \geq 4 \quad : \quad C_{k+1} = -\frac{3}{(k+1)}C_k$$

es decir

$$C_1 = -3C_0, \quad C_2 = \frac{9}{2}C_0, \quad C_3 = -\frac{9}{2}C_0,$$

$C_4 :$ parámetro

$$k \;\; \geq \;\; 4 : \; C_{k+1} = -\frac{3}{(k+1)}\, C_k \tag{5.3}$$

iteremos (5.3):

$$\begin{aligned}
k &= 4 : \; C_5 = -\frac{3}{5}\, C_4 \\
k &= 5 : \; C_6 = -\frac{3}{6}\, C_5 = \frac{3 \times 3}{5 \times 6}\, C_4 \\
k &= 6 : \; C_7 = -\frac{3}{7}\, C_6 = -\frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 6 \times 7}\, C_4 \\
&= -\frac{3^3 4!}{7!}\, C_4
\end{aligned}$$

generalizando

$$C_n \;\; = \;\; (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{n!}\, C_4 \qquad n \geq 4$$

$$
\begin{aligned}
y &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n-4} \\
&= x^{-4}[C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \sum_{n=4}^{\infty} C_n x^n] \\
&= x^{-4}[C_0 - 3C_0\, x + \frac{9}{2} C_0\, x^2 - \frac{9}{2} C_0\, x^3 + C_4 x^4 + \\
&\quad + \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{n!}\, C_4\, x^n] \\
&= C_0 \overbrace{x^{-4}\left(1 - 3\,x + \frac{9}{2} x^2 - \frac{9}{2} x^3\right)}^{y_1(x)} \\
&\quad + C_4 \overbrace{\left(1 + \sum_{n=5}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{(n-4)} 4!}{(n)!}\, x^{n-4}\right)}^{y_2(x)}
\end{aligned}
$$

hagamos $\begin{cases} k = n - 4 & \Rightarrow n = k + 4 \\ n = 5 & \Rightarrow k = 1 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
y &= C_0 y_1(x) + C_4 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+4} \frac{3^k 4!}{(k+4)!}\, x^k\right) \\
&= C_0 y_1(x) + C_4 \underbrace{\left(1 + 24 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{(n+4)!}\, x^n\right)}_{\text{converge } \forall x \in \mathbf{Re}}
\end{aligned}
$$

Para abordar el caso iii) cuando $r_1 = r_2$ necesitamos definir la función Gamma.

5.3.2. FUNCIÓN GAMMA: $\Gamma(x)$

Definición 5.3 . *Sea $x > 0$. La función Gamma se define así:*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{x-1}\, d\tau$$

Teorema 5.3 (Fórmula de recurrencia para la función Γ) .

$$\boxed{\text{Para } x > 0 : \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ .}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^x\, d\tau \\ &= -e^{-\tau}\tau^x\big|_0^\infty + \int_0^\infty xe^{-\tau}\tau^{x-1}\, d\tau\end{aligned}$$

la anterior integral se hizo por partes,

$$\text{haciendo}\left\{\begin{array}{lll} u & = \tau^x \Rightarrow & du = x\tau^{x-1}\, d\tau \\ dv & = e^{-\tau}\, dt \Rightarrow & v = -e^{-\tau}\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} &= 0 - 0 + x\int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{x-1}\, d\tau = x\Gamma(x) \\ \text{ya que } \lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau}\tau^x &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{\tau^x}{e^\tau} \\ &= \overset{L'Hopital}{\cdots} = 0\end{aligned}$$

Observaciones:

a).

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\Gamma(x)$	9.5	4.59	2.99	2.22	$\sqrt{\pi}$	1.49	1.30	1.16	1.07

b). Si $x = n$ entero positivo:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \ldots = n(n-1)(n-2)\ldots 1\,\Gamma(1)$$

Pero

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^0\, d\tau = -e^{-\tau}\big|_0^\infty = -(0-1) = 1$$

Luego,

$$\Gamma(n+1) = n!$$

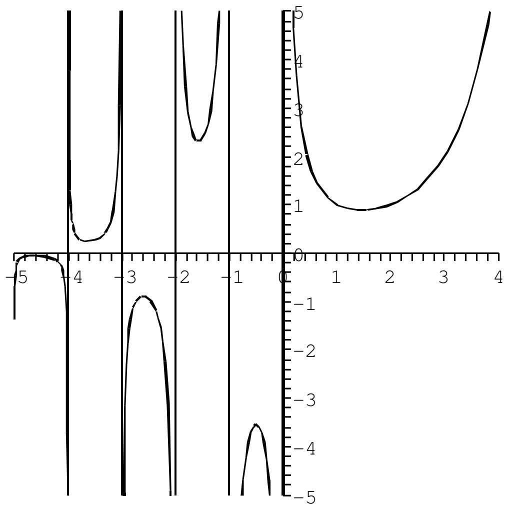

Figura 5.1

c). Con $n = 0$ obtenemos $0! = \Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1$ y

$$1! = \Gamma(1+1) = 1\,\Gamma(1) = 1 \times 1 = 1 \quad \text{(por el Teorema anterior)}$$

con esto probamos, mediante la función Gamma, que $0! = 1$

d). Gráfica de la función $\Gamma(x)$ (figura 5.1).

Definición 5.4 . *Si $x < 0$, definimos $\Gamma(x)$ así: $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ si $x \neq 0$ o $x \neq$ de un entero negativo. $\Gamma(x) = \pm\infty$ si $x = 0$ o $x =$ entero negativo.(Ver la gráfica 5.1)*

NOTA: la fórmula para calcular $\Gamma(x)$ para $x < 0$ es:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\,\Gamma(x+1)$$

Ejemplo 10. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Ejemplo 11. $\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)$
Solución:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{7}{2}\right) &= \left(-\frac{2}{7}\right)\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)\\ &= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Definición 5.5 (Factorial generalizado) . $x! = \Gamma(x+1)$, $x \neq$ *entero negativo.*

Ejemplo 12. Hallar $\left(\frac{7}{2}\right)!$

$$\left(\frac{7}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right) = \frac{7}{2}\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Ejemplo 13. Calcular $\left(-\frac{7}{2}\right)!$
Solución:

$$\begin{aligned}\left(-\frac{7}{2}\right)! &= \Gamma\left(-\frac{7}{2}+1\right) = \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{2}{1}\right)\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Ejercicio 1. Hallar $\int_0^1 x^3\left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 dx$
(**Rta:** $\frac{3!}{4^4}$)

Ejercicio 2. Hallar $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$
(**Rta:** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

Ejercicio 3. Hallar utilizando la función Γ: $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\,dx$
(**Rta:** $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$)

Ejercicio 4. Probar que

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}\sqrt{\pi}$$

y

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

para todo entero n no negativo.

5.3.3. CASO III: $r_1 = r_2$

CASO III: $r_1 = r_2$. Tomamos como ejemplo para este caso, la E.D. de Bessel de orden cero.

Definición 5.6 (Ecuación Diferencial de Bessel) . *La E.D.:*

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - p^2)y = 0$$

donde p es un parámetro positivo, se le llama E.D. de Bessel de orden p.

Las soluciones de esta E.D. se les llama funciones de Bessel de orden p.
Cuando $p = 0$ y $x \neq 0$ entonces

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Hallemos explícitamente estas soluciones en el intervalo $0 < x < R$; es fácil ver que $x = 0$ es un punto singular regular.
Suponemos una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r},$$

con $0 < x < R$ y $C_0 \neq 0$; derivamos dos veces y sustituimos en la E.D. y llegamos a esto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2 C_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+r+1} = 0$$

$$x^r\Big[\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)^2C_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+1}\Big]=0$$

para homogenizar los exponentes hagamos $k=n-1$ (o sea que $n=k+1$ y cuando $n=0$ entonces $k=-1$) en la primera sumatoria y hagamos $k=n+1$ en la segunda sumatoria, luego

$$x^r\Big[\sum_{k=-1}^{\infty}(k+r+1)^2C_{k+1}x^k+\sum_{n=1}^{\infty}C_{k-1}x^k\Big]=0$$

$$x^r\Big[r^2C_0x^{-1}+(r+1)^2C_1x^0+\sum_{k=1}^{\infty}[(k+r+1)^2\,C_{k+1}+C_{k-1}]\,x^k\Big]=0$$

comparamos coeficientes

$$r^2C_0=0,\quad (r+1)^2C_1=0,\quad (k+r+1)^2C_{k+1}+C_{k-1}=0 \text{ con } k\geq 1$$

$$\text{Si } C_0\neq 0\Rightarrow r_1=r_2=r=0$$

$$(0+1)^2C_1=0\Rightarrow C_1=0$$

$$C_{k+1}=-\frac{C_{k-1}}{(k+1)^2}\qquad k=1,2,\ldots$$

iterando k

$$\begin{aligned}
k=1 &\;\Rightarrow\; C_2=-\frac{C_0}{(1+1)^2}=-\frac{C_0}{2^2}\\
k=2 &\;\Rightarrow\; C_3=-\frac{C_1}{3^2}=0\\
k=3 &\;\Rightarrow\; C_4=-\frac{C_2}{4^2}=\frac{C_0}{2^2\times 4^2}\\
k=4 &\;\Rightarrow\; C_5=0\\
k=5 &\;\Rightarrow\; C_6=-\frac{C_4}{6^2}=-\frac{C_0}{2^2\times 4^2\times 6^2}
\end{aligned}$$

Generalizando,

$$C_{2n}\;=\;(-1)^n\frac{C_0}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdots(2n)^2}=(-1)^n\frac{C_0}{(2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n))^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^n \frac{C_0}{(2^n\, 1\cdot 2\cdot 3\ldots n)^2}\\
&= (-1)^n \frac{C_0}{2^{2n}\,(n!)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots\\
C_{2n+1} &= 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Sustituimos en

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_0}{2^{2n}(n!)^2}\, x^{2n} = C_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]
\end{aligned}
$$

Por definición, la serie

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = J_0(x)
$$

se le llama función de Bessel de orden cero y de primera especie

$$
J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \ldots
$$

La segunda solución la hallamos por el método de reducción de orden D'Alembert:

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= J_0(x) \int \frac{e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}}{[J_0(x)]^2}\, dx = J_0(x) \int \frac{1}{x[J_0(x)]^2}\, dx\\
\text{como} \quad [J_0(x)]^2 &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{32} - \frac{5x^6}{576} + \ldots\\
&\Rightarrow \frac{1}{[J_0(x)]^2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{32} + \frac{23x^6}{576} + \ldots\\
&\Rightarrow \frac{1}{x[J_0(x)]^2} = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \ldots\\
y_2(x) &= J_0(x) \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{5x^3}{32} + \frac{23x^5}{576} + \ldots\right) dx\\
&= J_0(x)[\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \ldots]
\end{aligned}
$$

$$
= J_0(x)\ln x + \left(1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \ldots\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \ldots\right)
$$

$$y_2 \quad = \quad J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \ldots$$

NOTA: observemos que

$$\frac{(-1)^2 1(1)}{2^2(1!)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$$(-1)^3\frac{1}{2^4(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2^4\,2^2\,2} = \frac{-3}{128}$$

$$(-1)^4\frac{1}{2^6(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = \frac{11}{2^6\,6^2\,6} = \frac{11}{13824}$$

Por tanto

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^4(2!)^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^6(3!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \ldots$$

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{2n} \qquad (5.4)$$

Donde (5.4) es la segunda solución y es linealmente independiente con y_1.
La solución general es:

$$y = C_0 J_0(x) + C_1 y_2(x)$$

En vez de $y_2(x)$ como segunda solución, se acostumbra tomar la siguiente función combinación lineal de y_2 y J_0, como segunda solución:

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]$$

donde γ es la constante de Euler; a $Y_0(x)$ se le llama función de Bessel de orden cero y de segunda especie y

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \approx 0{,}5772$$

Así $Y_0(x)$ será igual a

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\,[J_0(x)\ln x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{2n}+(\gamma-\ln 2)J_0(x)\right]$$

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]$$

La solución general es: $y=C_1J_0(x)+C_2Y_0(x)$, las gráficas de $J_0(x)$ y $Y_0(x)$ se muestran en la figura 5.2

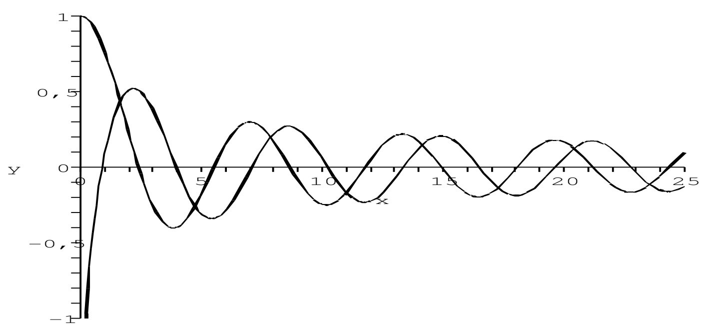

Figura 5.2 $J_0(x)$ y $Y_0(x)$.

5.3.4. ECUACIÓN DE BESSEL DE ORDEN p :

Sabemos que

$$x^2y''+xy'+(x^2-p^2)y=0$$

se le llama E.D. de Bessel de orden $p\geq 0$ y $x>0$. Trabajemos con $p>0$ y veamos que $x=0$ es un punto singular regular. En efecto, como $x^2=0$ entonces $x=0$ y

$$P(x)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x},\quad Q(x)=\frac{x^2-p^2}{x^2}$$

por tanto $x=0$ es un punto singular regular; suponemos una solución de la forma

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{n+r}$$

con $C_0 \neq 0$ y $0 < x < R$; derivamos dos veces y sustituimos en la E.D., el resultado es:

$$x^r\left[(r^2-p^2)C_0x^0+[(r+1)^2-p^2]C_1x+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(n+r)^2-p^2]C_n+C_{n-2}\}x^n\right]=0$$

Luego,

$$\begin{aligned}(r^2-p^2)C_0&=0\\ [(r+1)^2-p^2]C_1&=0\\ [(n+r)^2-p^2]C_n+C_{n-2}&=0 \quad \text{para } \ n\geq 2\end{aligned} \tag{5.5}$$

Si $C_0 \neq 0 \Rightarrow r^2-p^2=0$ (ecuación indicial)

$$r=\pm p \Rightarrow r_1=p \qquad r_2=-p \text{ (índices de la singularidad)}$$

Si $r_1=p \Rightarrow$ en la ecuación (5.5):

$$[(p+1)^2-p^2]C_1=0$$

$(1+2p)C_1=0 \Rightarrow C_1=0$, ya que $\quad p>0$

$$[(n+p)^2-p^2]C_n+C_{n-2}=0 \qquad n\geq 2$$

$$(n^2+2np)C_n+C_{n-2}=0$$

$$n(n+2p)C_n+C_{n-2}=0 \qquad n\geq 2$$

$$C_n=-\frac{C_{n-2}}{n(n+2p)} \quad n\geq 2$$

por tanto todos los coeficientes impares son cero, ya que $C_1=0$.

Iteramos los pares con $n\geq 2$ y obtenemos:

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n\,C_0}{(2\cdot 4\,\ldots 2n)(2+2p)(4+2p)\ldots(2n+2p)},$$

$$C_{2n}=\frac{(-1)^n\,C_0}{2^{2n}\,n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)}; \qquad n=0,1,2\ldots \tag{5.6}$$

luego,

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^{n+p} = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

Así,

$$y_1(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} x^{2n}$$

Al reemplazar (5.6), obtenemos:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^p C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{2^{2n}\, n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \\ &= C_0\, 2^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+p}}{2^{2n+p}\, n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \\ &= K_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

donde la constante $K_0 = C_0\, 2^p$.

Veamos los siguientes casos:

ⓐ Si p es un entero positivo:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!p!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \\ &= p! \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

a la expresión $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$ se le llama **función de Bessel** de orden p y primera especie y se denota por $J_p(x)$.

ⓑ Si p es diferente de un entero positivo:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1+p)(2+p)(3+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \\ &= \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(p+1)(1+p)(2+p)\cdots(n+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{y como}\quad \Gamma(n+p+1) &= (n+p)\Gamma(n+p) \\
&= (n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1) \\
&= (n+p)(n+p-1)\cdots(1+p)\Gamma(1+p) \\
\text{entonces}\quad y_1(x) &= \Gamma(p+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}
\end{aligned}$$

La expresión

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} = J_p(x)$$

se le llama **función de Bessel** de orden p y primera especie y se denota por $J_p(x)$, (Ver gráfica 5.3).

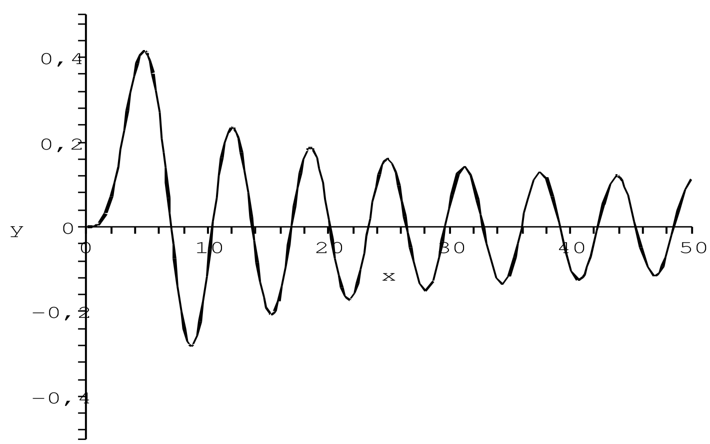

Figura 5.3 $J_{\frac{7}{2}}(x)$.

En general para $p =$ entero o $p \neq$ entero y $p > 0$

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(m+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

Para $r_2 = -p$, supongamos que $r_1 - r_2 = p - (-p) = 2p$ y $2p$ diferente de un entero positivo y $p > 0$.
La segunda solución es :

$$y_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} = J_{-p}(x)$$

que es la **función de Bessel** de orden $-p$

La solución general, $y_2(x) = C_1 J_p(x) + C_2 J_{-p}(x)$ si $2p \neq$ entero positivo $p > 0$.

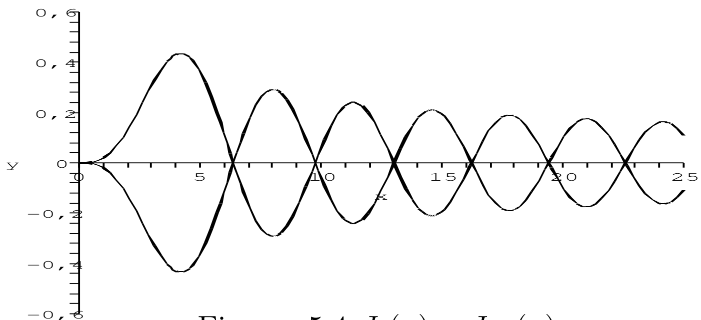

Figura 5.4 $J_3(x)$ y $J_{-3}(x)$.

Cuando $r_1 - r_2 = 2p =$ entero positivo (caso ii.), entonces J_p y J_{-p} son linealmente dependientes (Ejercicio)(Ver figura 5.4 con $p = 3$, obsérvese que $J_{-3}(x) = -J_3(x)$, es decir son linealmente dependientes). En este caso la segunda solución es de la forma

$$y_2(x) = C J_p \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-p} \qquad C \neq 0$$

O también podemos usar el método de reducción de D'Alembert como hicimos con la función de Bessel de orden cero y segunda especie $Y_0(x)$.
Haciendo el mismo proceso, llegamos a $Y_p(x) =$ Bessel de orden p y segunda especie,

$$\begin{aligned} Y_p(x) \;=\; & \frac{2}{\pi}\left[\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right) J_p(x) - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n+p}\frac{1}{k}\right)\left(\frac{1}{n!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}\right)\right] \end{aligned}$$

Donde γ es la constante de Euler. La solución Y_p se le llama función de Bessel de orden p y segunda especie.
Solución general: $y = C_1 J_p(x) + C_2 Y_p(x)$, donde p es un entero positivo.Ver gráfica 5.5 para $Y_p(x)$ con $p = 1$.

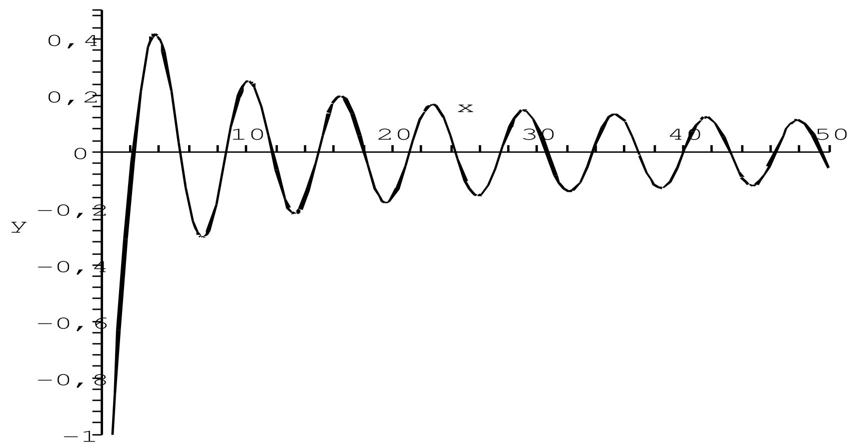

Figura 5.5 $Y_1(x)$

Las siguientes propiedades de la función de Bessel, se dejan como ejercicios.

Ejercicio 1. Mostrar que con el cambio de variable $y = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$ reduce la E.D. de Bessel de orden p a la E.D.:

$$u''(x) + \left[1 + \left(\frac{1}{4} - p^2\right)\frac{1}{x^2}\right] u = 0$$

Ejercicio 2. Con el resultado anterior, mostrar que la solución general de la E.D. de Bessel de orden $p = \frac{1}{2}$ es:

$$y = C_1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} + C_2 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

Ejercicio 3. Sabiendo que

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(kx)\right] = kx^p J_{p-1}(kx)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(kx)\right] = -kx^{-p} J_{p+1}(kx)$$

donde $k = cte.$

Ejercicio 4. Con los resultados del ejercicio anterior, mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right] &= kJ_{p-1}(kx) - \frac{p}{x}\,J_p(kx) \qquad (*) \\ \frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right] &= -kJ_{p+1}(kx) + \frac{p}{x}\,J_p(kx) \qquad (**) \end{aligned}$$

Y con esto mostrar que

$$\frac{d}{dx}\left[J_p(kx)\right] = \frac{k}{2}\left[J_{p-1}(kx) - J_{p+1}(kx)\right]$$

$$J_p(kx) = \frac{kx}{2p}\left[J_{p-1}(kx) + J_{p+1}(kx)\right]$$

Ejercicio 5. Hallar $J_1(x)$ y $\frac{d}{dx}J_1(x)$ en términos de $J_0(x)$ y $J_2(x)$. Hallar $J_{p+\frac{1}{2}}(x)$ en términos de $J_{p-\frac{1}{2}}(x)$ y $J_{p+\frac{3}{2}}(x)$.

Ejercicio 6. Probar que $\int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + c$

Ejercicio 7. Probar que para p entero positivo:

i) Usando el ejercicio 4. y la aproximación

$$J_p(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2})$$

Probar que $\int_0^\infty J_{p+1}(x)\,dx = \int_0^\infty J_{p-1}(x)\,dx$.

ii) Sabiendo que $\int_0^\infty J_0(x)\ dx = 1$ (ver ejercicio 11. de la sección 6.2), mostrar que $\int_0^\infty J_p(x)\ dx = 1$

iii) $\int_0^\infty \left(\frac{J_p(x)}{x}\right)\,dx = \frac{1}{p}$

Ejercicio 8. Para $p = 0, 1, 2, \ldots$ mostrar que:

i) $J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$

ii) $J_p(-x) = (-1)^p J_p(x)$

iii) $J_p(0) = 0, \quad p > 0$

iv) $J_0(0) = 1$

v) $\lim_{x\to 0^+} Y_p(x) = -\infty$

Ejercicio 9. Comprobar que la E.D.

$$xy'' + (1-2p)y' + xy = 0$$

tiene la solución particular $y = x^p J_p(x)$
(Ayuda: hacer $u = x^{-p}y$)

Ejercicio 10. Con el cambio de variable $y = x^{-\frac{1}{2}}u(\lambda x)$, hallar la solución general de

$$x^2y'' + 2xy' + \lambda^2x^2y = 0$$

(Rta.:$y = C_1x^{-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(\lambda x) + C_2x^{-\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(\lambda x)$)

5.3.5. PUNTO EN EL INFINITO

Para la E.D.: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, se desea saber el comportamiento de la solución en el infinito, para ello se hace el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$. O sea que cuando $x \to \infty \Rightarrow t \to 0$.

Derivemos dos veces (usando la regla de la cadena) y sustituyamos en la E.D.:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}(-\frac{1}{x^2}) = -t^2\frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx}) = \frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx} = [-t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt}](-t^2)$$

$$y'' + \left[\frac{2}{t} - \frac{P(\frac{1}{t})}{t^2}\right]y' + \frac{Q(\frac{1}{t})}{t^4} = 0$$

Si $t = 0$ es punto ordinario entonces x en el infinito es un punto ordinario. Si $t = 0$ es un punto singular regular con exponentes de singularidad r_1, r_2

entonces x en el infinito es un punto singular regular con exponentes de singularidad r_1, r_2.
Si $t = 0$ es un punto singular irregular entonces x en el infinito es un punto singular irregular.
Ejemplo 14. Análizar los puntos en el infinito para la E.D. de Euler:

$$y'' + \frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 0$$

Solución: haciendo el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ queda trasformada en la E.D.:

$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0$$

Por lo tanto $t = 0$ es un punto singular regular y la ecuación indicial es $r(r-1) - 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 1$, por lo tanto x en el infinito es un punto singular regular con exponentes 2 y 1.

Para los ejercicios siguientes, decir si la E.D. tiene un punto singular regular o irregular en el infinito:

1). $x^2y'' - 4y = 0$
(**Rta.:** hay un punto singular regular en el infinito)

2). $x^3y'' + 2x^2y' + 3y = 0$
(**Rta.:** hay un punto singular regular en el infinito)

Para los ejercicios siguientes hallar las raíces indiciales y las dos soluciones en serie de Frobenius, linealmente independientes con $|x| > 0$.

1). $4xy'' + 2y' + y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \cos\sqrt{x},\ \ y_2 = \operatorname{sen}\sqrt{x}$)

2). $xy'' + 2y' + 9xy = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \frac{\cos 3x}{x},\ \ y_2 = \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$)

3). $xy'' + 2y' - 4xy = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \frac{\cosh 2x}{x},\ \ y_2 = \frac{\operatorname{senh} 2x}{x}$)

4). $xy'' - y' + 4x^3y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \cos x^2,\quad y_2 = \operatorname{sen} x^2$)

5). $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 4x^2)y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = \sqrt{x}\cosh x,\quad y_2 = \sqrt{x}\operatorname{senh} x$)

6). $2xy'' + 3y' - y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)},\ y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)})$$

7). $2xy'' - y' - y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{3}{2}}(1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!5 \cdot 7 \ldots (2n+3)}),\ y_2 = 1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)})$$

8). $3xy'' + 2y' + 2y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{1}{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!4 \cdot 7 \ldots (3n+1)} x^n,\ y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!2 \cdot 5 \ldots (3n-1)} x^n)$$

9). $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!7 \cdot 11 \ldots (4n+3)}),\ y_2 = x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!1 \cdot 5 \ldots (4n+1)})$$

10). $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{\frac{3}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!9 \cdot 13 \ldots (4n+5)} x^{2n}),$

$$y_2 = x^{-1}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!3 \cdot 7 \ldots (4n-1)} x^{2n}))$$

11). $6x^2y'' + 7xy' - (x^2+2)y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{\frac{1}{2}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! 19 \cdot 31 \ldots (12n+7)})$,

$$y_2 = x^{-\frac{2}{3}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n! 5 \cdot 17 \ldots (12n-7)}))$$

12). $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{\frac{1}{3}}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! 7 \cdot 13 \ldots (6n+1)} x^{2n})$,

$$y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! 5 \cdot 11 \ldots (6n-1)} x^{2n})$$

13). $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n} x^n = x^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}},\ y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)} x^n)$$

14). $2xy'' + (1-2x^2)y' - 4xy = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n! 2^n} = x^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^2}{2}},\ y_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3 \cdot 7 \ldots (4n-1)} x^{2n})$$

15). $xy'' + (3-x)y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-2}(1+x),\ y_2 = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$)

16). $xy'' + (5-x)y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-4}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}),\ y_2 = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+4)!}$)

17). $xy'' + (x-6)y' - 3y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1 = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{120}x^3,\ y_2 = x^7(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{n! 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots (n+7)} x^n))$$

18). $5xy'' + (30 + 3x)y' + 3y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-5}(1 - \frac{3}{5}x + \frac{9}{50}x^2 - \frac{9}{250}x^3 + \frac{27}{5000}x^4)$,
$y_2 = 1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(n+5)!5^n} x^n$)

19). $xy'' - (4 + x)y' + 3y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = 1 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^3,\ y_2 = x^5(1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{(n+5)!} x^n)$)

20). $x^2y'' + (2x + 3x^2)y' - 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-2}(2 - 6x + 9x^2),\ y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{(n+2)!} x^n$)

21). $x(1 - x)y'' - 3y' + 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = 3 + 2x + x^2,\ y_2 = \frac{x^4}{(1-x)^2}$)

22). $xy'' + 2y' - xy = 0$
(**Rta.:** $y_1 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{\cosh x}{x},\ y_2 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\operatorname{senh} x}{x}$)

23). $x(x - 1)y'' + 3y' - 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1 = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2,\ y_2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)x^{n+4}$)

24). $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,\ y_2 = y_1(x)\ln|x| + y_1(x)(-x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \frac{1}{4\cdot 4!}x^4 - \ldots)$)

25). $xy'' + y' + y = 0$
(**Rta.:**

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n,\ y_2 = y_1(x)\ln|x| + y_1(x)(2x + \frac{5}{4}x^2 + \frac{23}{27}x^3 + \ldots))$$

26). $x^2y'' + x(x - 1)y' + y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = xe^{-x},\quad y_2 = xe^{-x}(\ln|x| + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3\cdot 3!}x^3 + \ldots)$)

27). $xy'' + (x-1)y' - 2y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = x^2, \;\; y_2 = \frac{1}{2}x^2 \ln|x| - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$)

28). $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = e^x, \;\; y_2 = e^x \ln|x|$)

29). $y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \cos\sqrt{x}, \;\; y_2 = \operatorname{sen}\sqrt{x}$)

30). $y'' + \frac{6}{x}y' + (\frac{6}{x^2} - 1)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{\operatorname{senh} x}{x^3}, \;\; y_2 = \frac{\cosh x}{x^3}$)

31). $y'' + \frac{3}{x}y' + 4x^2y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}, \;\; y_2 = \frac{\cos x^2}{x^2}$)

32). $y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = x, \;\; y_2 = \frac{1}{x^2}$)

33). $xy'' + 2y' + xy = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \;\; y_2 = \frac{\cos x}{x}$)

34). $xy'' + (1-2x)y' - (1-x)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = e^x, \;\; y_2 = e^x \ln|x|$)

35). $y'' - 2y' + (1 + \frac{1}{4x^2})y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \sqrt{x}\, e^x, \;\; y_2 = \sqrt{x}\, e^x \ln|x|$)

36). $x(x-1)y'' - (1-3x)y' + y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \frac{1}{1-x}, \;\; y_2 = \frac{\ln|x|}{1-x}$)

37). $y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} + \ldots,\ \ y_2 = \ln|x|y_1 - (\frac{x^2}{4} + \frac{3x^4}{8\cdot 16} + \ldots)$)

38). $y'' + \frac{x+1}{2x}y' + \frac{3}{2x}y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = \sqrt{x}\,(1 - \frac{7}{6}x + \frac{21}{40}x^2 + \ldots),\ \ y_2 = 1 - 3x + 2x^2 + \ldots$)

39). $x^2y'' + x(x-1)y' - (x-1)y = 0$
(**Rta.:** $y_1(x) = x,\ \ y_2 = x\ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!n}x^{n+1}$)

40). $xy'' - x^2y' + (x^2-2)y = 0$ con $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = xe^x$)

41). La ecuación hipergeométrica de Gauss es

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)]y' - \alpha\beta y = 0$$

donde $\alpha,\ \ \beta,\ \ \gamma$ son constantes

a). Mostrar que $x = 0$ es un punto singular regular con exponente de singularidad 0 y $1-\gamma$.

b). Si γ es un entero positivo, mostrar que

$$y(x) = x^0\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}C_nx^n$$

con $C_0 \neq 0$, cuya relación de recurrencia es:

$$C_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}C_n$$

para $n \geq 0$

c). Si $C_0 = 1$ entonces

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n\beta_n}{n!\gamma_n}x^n$$

donde $\alpha_n = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha+n-1)$ para $n \geq 1$ y similarmente se definen β_n y γ_n.

d). La serie en c) se le llama serie hipergeométrica y se denota por $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Demostrar que:

1) $F(1,1,1,x)=\frac{1}{1-x}$ (la serie geométrica)
2) $xF(1,1,2,-x)=\ln(1+x)$
3) $xF(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-x^2)=\tan^{-1}x$
4) $F(-k,1,1,-x)=(1+x)^k$ (la serie binomial).

5.4. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 15. Resolver la E.D. del Ejemplo 5. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$

```
>Eqn1:={(x^2-1)*D(D(y))(x)+4*x*D(y)(x)+2*y(x)=0,D(y)(0)=C1,y(0)=C0};
```

$Eqn1 :=$
$\{(x^2-1)*D(D(y))(x)+4*x*D(y)(x)+2*y(x)=0, D(y)(0)=C1, y(0)=C0\}$

```
>Order:=8:
>Sol1:=dsolve(Eqn1,y(x),series);
```

$Sol1 := y(x)=C0+C1x+C0x^2+C1x^3+C0x^4+C1x^5+C0x^6+C1x^7+O(x^8)$

Ejemplo 16. Para el ejemplo anterior, hallar la relación de recurrencia, iterarla hasta $n=8$ y luego dar la solución.
Debemos cambiar el formato de entrada de la E.D.

```
>eqn2:=(x^2-1)*diff(y(x),x,x)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=0;
```

$> eqn2 := (x^2-1)*diff(y(x),x,x)+4*x*diff(y(x),x)+2*y(x)=0$

```
>SeriesSol:=sum(a[n]*x^n,n=k-2..k+2);
```

$SeriesSol := a[k-2]x^{(k-2)}+a[-1+k]x^{(-1+k)}+a[k]x^k+a[1+k]x^{(1+k)}+a[k+2]x^{(k+2)}$

```
>simplify(simplify(subs(y(x)=SeriesSol,eqn2)));
```

$-(-5a[k-2]x^{(k-2)}k+3a[k+2]x^{(k+2)}k-a[k]x^kk+a[1+k]x^{(1+k)}k-x^ka[k-2]k^2-x^{(1+k)}a[-1+k]k$
$-3a[-1+k]x^{(-1+k)}k-3x^{(k+2)}a[k]k+x^ka[k]k^2+x^{(k+2)}a[k+2]k^2+2a[-1+k]x^{(-1+k)}$
$+6a[k-2]x^{(k-2)}+x^{(k-2)}a[k-2]k^2+x^{(-1+k)}a[-1+k]k^2+2a[k+2]x^{(k+2)}-x^{(1+k)}a[-1+k]k^2$
$-7x^{(k+2)}a[k+2]k+x^{(1+k)}a[1+k]k^2+x^ka[k-2]k-x^{(k+2)}a[k]k^2-5x^{(k+3)}a[1+k]k$
$-x^{(k+3)}a[1+k]k^2-x^{(k+4)}a[k+2]k^2-2a[k]x^{(k+2)}-6a[1+k]x^{(k+3)}-12a[k+2]x^{(k+2)})/x^2=0$

```
>a[k+2]:=simplify(solve(coeff(lhs(%),x^(k+2)),a[k+2]));
```

$$a[k+2]:=a[k]$$

```
>a[0]:=C0:a[1]:=C1:
> for k from 2 to 8 do a[k]:=a[k-2] od:
> Sol2:=sum(a[j]*x^j,j=0..8);
```

$$Sol2:=C0+C1x+C0x^2+C1x^3+C0x^4+C1x^5+C0x^6+C1x^7+C0x^8$$

```
>Y1:=C0*sum('x^(2*k)',k=0..infinity);
```

$$Y1:=-\frac{C0}{x^2-1}$$

```
>Y2:=C1*sum('x*x^(2*k)',k=0..infinity);
```

$$Y2:=-\frac{C1x}{x^2-1}$$

Ejemplo 17. Las siguientes instrucciones grafican las funciones de Bessel de primera especie y segunda especie.

```
>plot(BesselJ(3,x),x=0..50,y=-0.5..0.5);
>plot(BesselY(1,x),x=.1..50,y=-1..0.5);
```

CAPÍTULO 6

TRANSFORMADA DE LAPLACE

6.1. INTRODUCCION

Definición 6.1 *Sea $f(t)$ una función definida para todo $t \geq 0$; se define la* **Transformada de Laplace** *de $f(t)$ así:*

$$\begin{aligned} \pounds\{f(t)\}(s) = F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt, \end{aligned}$$

si el límite existe.

Teorema 6.1 .

Si $f(t)$ es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y además $|f(t)| \leq Me^{ct}$ para todo $t \geq T$, donde M es constante , $c > 0$ constante y $T > 0$ constante, entonces $\pounds\{f(t)\}(s)$ existe para $s > c$.

Demostración: veamos que la siguiente integral existe, en efecto:

$$\begin{aligned} |\pounds\{f(t)\}(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \leq \int_0^\infty |e^{-st}||f(t)|dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}|f(t)|dt, \qquad \text{sabiendo que } e^{-st} > 0 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{\int_0^T e^{-st}|f(t)|dt}_{I_1} + \underbrace{\int_T^\infty e^{-st}|f(t)|dt}_{I_2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T e^{-st}|f(t)|dt \quad \text{existe, ya que } \; f \text{ es continua a tramos}\\
I_2 &= \int_T^\infty e^{-st} \underbrace{|f(t)|}_{\leq Me^{ct}} dt \leq \int_T^\infty e^{-st} M e^{ct} dt = M \int_T^\infty e^{(-s+c)t}\, dt\\
&= \frac{M}{-(s-c)}\, e^{-(s-c)t}\Big|_T^\infty, \text{ suponiendo que } s-c>0\\
&= -\frac{M}{s-c}(0 - e^{-(s-c)T}) = \frac{M}{s-c}\, e^{-(s-c)T}
\end{aligned}$$

Luego, $\pounds\{f(t)\}(s)$ existe, si $s > c$.

NOTA: cuando $f(t) \leq |f(t)| \leq Me^{ct}$ para $t \geq T$, entonces decimos que $f(t)$ es de orden exponencial (ver figura 6.1).

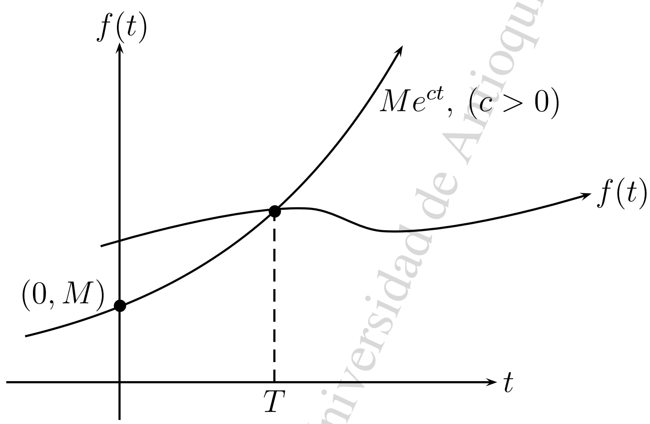

Figura 6.1

Observación: $\pounds$ es un operador lineal, en efecto

$$\pounds\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) \overset{def.}{=} \int_0^\infty e^{-st}\,(\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt$$

$$\begin{aligned} &= \alpha \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt + \beta \int_0^\infty e^{-st} g(t)\,dt \\ &= \alpha \pounds\{f(t)\}(s) + \beta \pounds\{g(t)\}(s) \end{aligned}$$

Teorema 6.2 .

1). $\pounds\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$,

$\pounds\{k\}(s) = \frac{k}{s}$, $s > 0, k$ *constante.*

2). $\pounds\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0,\ n = 1, 2, \ldots$

3). $\pounds\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}$, para $s > a$

4). $\pounds\{\operatorname{sen} kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}$, $s > 0$

5). $\pounds\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}$, $s > 0$

6). $\pounds\{\operatorname{senh} kt\}(s) = \frac{k}{s^2-k^2}$, $s > |k|$

7). $\pounds\{\cosh kt\}(s) = \frac{s}{s^2-k^2}$, $s > |k|$

8). $\pounds\{t^n\, e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a,\ n = 1, 2, \ldots$

Demostración 1). Si $s > 0$ se tiene que

$$\pounds\{1\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

Demostración 2). Hagamos la demostración por el método de inducción. Para ello, suponemos que $s > 0$ y utilizamos el siguiente limite: $\lim\limits_{t\to\infty} |\frac{t^n}{e^{ct}}| = 0, n = 1, 2, \ldots$

$$
\begin{aligned}
n = 1 : \pounds\{t\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t\, dt, \quad \text{hagamos} \left\{ \begin{array}{ll} u = t & \Rightarrow du = dt \\ dv = e^{-st}\, dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right. \\
&= -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\pounds\{t\}(s) &= -(0-0) + \frac{1}{s}\,\frac{1}{-s}\, e^{-st}\Big|_0^\infty \\
&= -\frac{1}{s^2}(0-1) = \frac{1}{s^2}
\end{aligned}
$$

Supongamos que se cumple para $n-1$ y veamos que se cumple para n. En efecto:

$$
\begin{aligned}
\pounds\{t^n\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, t^n\, dt \;\; \text{hagamos} \left\{ \begin{array}{ll} u = t^n & \Rightarrow du = nt^{n-1}\, dt \\ dv = e^{-st}\, dt & \Rightarrow v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right. \\
&= -\frac{t^n\, e^{-st}}{s}\Big|_0^\infty + \frac{n}{s}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}t^{n-1}\, dt}_{\pounds\{t^{n-1}\}(s)} \\
&= -(0-0) + \frac{n}{s}\pounds\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n}{s}\pounds\{t^{n-1}\}(s)
\end{aligned}
$$

Pero por la hipótesis de inducción $\pounds\{t^{n-1}\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n}$, luego:

$$\pounds\{t^n\}(s) = \frac{n}{s}\frac{(n-1)!}{s^n} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Demostración 4). Por el método de los operadores inversos, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\pounds\{\operatorname{sen} kt\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, (\operatorname{sen} kt)\, dt \\
&= \frac{1}{D}\, e^{-st} \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty = e^{-st}\, \frac{1}{D-s}\, \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty
\end{aligned}
$$

$$
= e^{-st}\, \frac{D+s}{D^2-s^2}\, \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty = e^{-st}\, \frac{D+s}{-k^2-s^2}\, \operatorname{sen} kt\Big|_0^\infty
$$

$$= \quad -\frac{1}{s^2+k^2}\, e^{-st}(k\cos kt + s\,\mathrm{sen}\, kt)\Big|_0^{\infty}$$
$$= \quad -\frac{1}{s^2+k^2}\,(0-k) = \frac{k}{s^2+k^2}, \quad s>0$$

En la demostración anterior utilizamos el siguiente teorema de límites: si $\lim_{t\to\infty} |f(t)| = 0$ y $g(t)$ es una función acotada en $\mathbb{R}$ entonces $\lim_{t\to\infty} f(t)g(t) = 0$

6.2. TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

Si $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, entonces decimos que $f(t)$ es una transformada inversa de Laplace de $F(s)$ y se denota así:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

NOTA:

- La transformada inversa de Laplace de $F(s)$, no necesariamente es única.
  Por ejemplo la función
  $$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t\geq 0 \text{ y } t\neq 1,\ t\neq 2 \\ 3, & \text{si } t=1 \\ -3, & \text{si } t=2 \end{cases}$$
  y la función $g(t) = 1$ (obsérvese que $f(t) \neq g(t)$) tienen la misma transformada, es decir, $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}$. Sinembargo $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = f(t)$ y $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} = g(t)$ son diferentes.
  Pero cuando $f(t)$ y $g(t)$ son continuas para $t\geq 0$ y $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\}$ entonces $f(t) = g(t)$ (Ver el libro de Variable Compleja de Churchill)

- Para funciones continuas, $\mathcal{L}^{-1}$ es un operador lineal:
  $$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta\, G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

- En los ejemplos de esta sección, utilizaremos los resultados del Apéndice C. para calcular fracciones parciales.

Teorema 6.3 . *Para a y k constantes se tiene:*

1). $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k\ ,\ si\ \ s > 0$

2). $\pounds^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}\ ,\ si\ \ s > 0$

3). $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}\ ,\ si\ \ s > a$

4). $\pounds^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \operatorname{sen} kt,\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{\operatorname{sen} kt}{k},\ si\ \ s > 0$

5). $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt\ ,\ si\ \ s > 0$

6). $\pounds^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \operatorname{senh} kt\ y \quad \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-k^2}\right\} = \frac{\operatorname{senh} kt}{k}\ ,\ si\ \ s > |k|$

7). $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt\ ,\ si\ \ s > |k|$

8). $\pounds^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n\,e^{at}\ y\ \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{t^n\,e^{at}}{n!}\ ,\ si\ \ s > a$

Ejemplo 1. Con factores lineales en el denominador

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-1}\right\}\\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}+B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}\\
&= Ae^{3t}+Be^{-2t}+Ce^{t}
\end{aligned}$$

Pero por fracciones parciales

$$\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)} = \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s-1}$$

Para hallar el coeficiente A, eliminamos de la fracción el factor correspondiente a A y en la parte restante sustituimos a s por la raíz asociada a este factor; lo mismo hacemos para los coeficientes B y C.

$$A = \frac{7\,(3)-1}{(5)\,(2)} = 2\ ,\ B = \frac{7\,(-2)-1}{(-5)\,(-3)} = -1\ ,\ C = \frac{7\,(1)-1}{(-2)\,(3)} = -1,$$

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(s-1)}\right\} = 2e^{3t} - e^{-2t} - e^{t}$$

Ejemplo 2. Con factores lineales repetidos

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{(s+2)^3}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{s+2}\right\}\\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^3}\right\}+\\
&\quad +D\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}+E\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\\
&= A\,t+B\,(1)+C\,\frac{t^2\,e^{-2t}}{2!}+D\,\frac{t\,e^{-2t}}{1!}+E\,e^{-2t}\\
\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} &= \frac{A}{s^2}+\frac{B}{s}+\frac{C}{(s+2)^3}+\frac{D}{(s+2)^2}+\frac{E}{s+2}
\end{aligned}$$

y por los métodos de las fracciones parciales hallamos

$A=\frac{1}{8},\ \ B=-\frac{1}{16},\ \ C=-\frac{1}{4},\ \ D=0,\ \ E=\frac{1}{16}$, luego

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = \frac{1}{8}\,t-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}\,\frac{t^2\,e^{-2t}}{2!}+\frac{1}{16}\,e^{-2t}$$

Ejemplo 3. Factores cuadráticos, lo factorizamos en factores lineales en los complejos

$$\begin{aligned}
\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s-(-1+i))(s-(-1-i))}\right\}\\
&= \pounds^{-1}\left\{\frac{A}{s}+\frac{B}{s-(-1+i)}+\frac{C}{s-(-1-i)}\right\}\\
&= A\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+B\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1+i)}\right\}+
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+C\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-1-i)}\right\}\\
&= A\,(1)+B\,e^{(-1+i)t}+Ce^{(-1-i)t}\\
&= A+Be^{-t}(\cos t+i\operatorname{sen} t)+C\,e^{-t}(\cos t-i\operatorname{sen} t)\\
&= A+e^{-t}[(B+C)\cos t+i(B-C)\operatorname{sen} t]
\end{aligned}
$$

Hallamos los coeficientes de la misma manera que en ejemplo 1.

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{0^2+2}{[0-(-1+i)][0-(-1-i)]}=\frac{2}{1+1}=1\\
B &= \frac{(-1+i)^2+2}{(-1+i)[-1+i-(-1-i)]}=-\frac{1}{i}=i\\
C &= \frac{(-1-i)^2+2}{(-1-i)[-1-i-(-1+i)]}=\frac{1}{i}=\ -i\\
\pounds^{-1}\left\{\frac{s^2+2}{s(s^2+2s+2)}\right\} &= 1+e^{-t}(0\cos t+i(2i)\operatorname{sen} t)\\
&= 1-2e^{-t}\operatorname{sen} t
\end{aligned}
$$

6.3. TEOREMAS SOBRE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Los teoremas que veremos en esta sección nos permitirán en muchos casos calcular la transformada inversa sin utilizar fracciones parciales.

Teorema 6.4 .

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial para $t \geq T$, entonces

$$\lim_{s\to\infty}\pounds\{f(t)\}(s)=\lim_{s\to\infty}F(s)=0$$

Demostración: como la función f es continua a tramos en $[0,T]$, entonces es acotada en este intervalo y por tanto $\exists M_1>0$ tal que $|f(t)|\leq M_1\,e^{0t},\quad \forall t\in[0,T]$ y como $f(t)$ es de orden exponencial para $t\geq T$, entonces $|f(t)|\leq M_2\,e^{\gamma t}$ donde M_2 y γ son constantes con $M_2\geq 0$.

Sea $M = \text{máx}\{M_1, M_2\}$ y sea $\alpha = \text{máx}\{0, \gamma\}$; por lo tanto, $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t \geq 0$.

$$\begin{aligned}
|F(s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-st}\, |f(t)|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-st}\, Me^{\alpha t}\, dt \\
&= M \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\, dt = \frac{1}{-(s-\alpha)}\, e^{-(s-\alpha)}\Big|_0^\infty \\
&\overset{s\geq\alpha}{=} -\frac{M}{s-\alpha}\,(0-1) = \frac{M}{s-\alpha} \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} |F(s)| \leq \lim_{s\to\infty} \frac{M}{s-\alpha} = 0 \\
&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} F(s) = 0
\end{aligned}$$

Teorema 6.5 (Primer Teorema de Translación) .

Si a es un número real cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
\pounds\left\{e^{at}\, f(t)\right\}(s) &= \pounds\left\{f(t)\right\}(s-a) \\
&= F(s-a)
\end{aligned}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\pounds\{e^{at}\, f(t)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at}\, f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, f(t)\, dt \\
&= \pounds\{f(t)\}(s-a) = F(s-a)
\end{aligned}$$

NOTA: $\pounds^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}\, f(t)$

Ejemplo 4. $\pounds\{e^{2t}\,\operatorname{sen} t\}(s)$
Solución: $\pounds\{e^{2t}\,\operatorname{sen} t\}(s) = \pounds\{\operatorname{sen} t\}(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2+1}$
ya que $\pounds\{\operatorname{sen} t\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

Ejemplo 5. $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\}$
Solución:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+3}\right\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^t\, \operatorname{sen}\sqrt{2}t$$

Ejemplo 6. $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}$
<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} &= \pounds^{-1}\left\{\frac{(s+2)-2}{(s+2)^2+1}\right\}\\ &= \pounds^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} - 2\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}\\ &= e^{-2t}\cos t - 2e^{-2t}\,\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Definición 6.2 (Función Escalón Unitario) *.(Ver figura 6.2)*

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0, & si \quad 0 \le t < a,\\ 1, & si \quad t \ge a\end{cases}$$

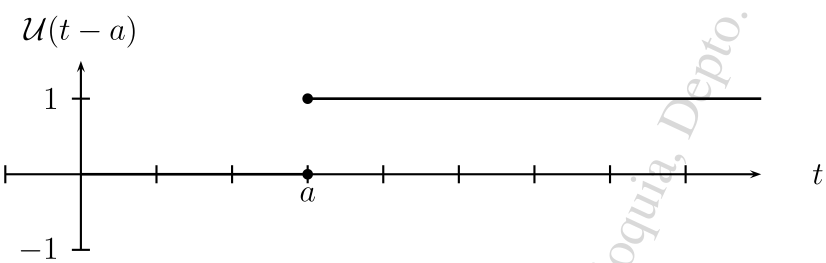

Figura 6.2

Ejemplo 7. Al aplicar $\mathcal{U}(t-\pi)$ a la función $\operatorname{sen} t$ trunca la función $\operatorname{sen} t$ entre 0 y π quedando la función $g(t) = \mathcal{U}(t-\pi)\operatorname{sen} t$ como lo muestra la gráfica 6.3

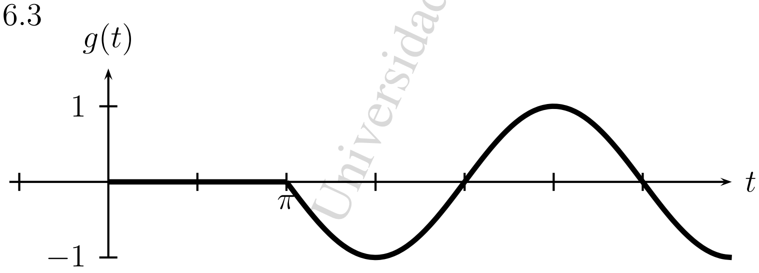

Figura 6.3

Teorema 6.6 (Segundo Teorema de Translación) .

Si $a > 0$ y $f(t)$ es continua para $t \geq 0$ y de orden exponencial entonces

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\pounds\{f(t)\}(s)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt \\
&= \int_0^a e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\,dt \\
&= \int_0^a e^{-st}0f(t-a)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}1f(t-a)\,dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt
\end{aligned}$$

Hagamos $u = t - a \Rightarrow du = dt$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\pounds\{\mathcal{U}(t-a)f(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)\,du \\
&= e^{-sa}\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du \\
&= e^{-as}\pounds\{f(t)\}(s)
\end{aligned}$$

NOTA: forma recíproca

$$\pounds^{-1}\{e^{-as}\,F(s)\} = \mathcal{U}(t-a)f(t-a)$$

Ejemplo 8. Hallar $\pounds\{\mathcal{U}(t-a)\}$

$$\pounds\{\mathcal{U}(t-a)\} = \pounds\{\mathcal{U}(t-a)\,1\} = e^{-as}\,\frac{1}{s} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Ejemplo 9. Hallar $\pounds\{\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2})\,\operatorname{sen} t\}$

Solución:

$$\pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\,\operatorname{sen} t\right\} = \pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\,\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

pero

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) &= \operatorname{sen}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\\
\pounds\left\{\mathcal{U}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right\} &= e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\pounds\{\cos t\}\\
&= e^{-\frac{\pi}{2}s}\,\frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 10. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}$

<u>Solución</u>:

$$
\pounds^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\} = \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s(s+1)}\right\}
$$

como

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s(s+1)} &= \frac{A}{s}+\frac{B}{s+1} \Rightarrow A=1,\ B=-1\\
&= \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s}\right\} - \pounds^{-1}\left\{e^{-s}\,\frac{1}{s+1}\right\}\\
&= \mathcal{U}(t-1)-\mathcal{U}(t-1)\,e^{-(t-1)}
\end{aligned}
$$

Teorema 6.7 (Derivada de una Transformada) .

$\pounds\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$, *con* $n = 1, 2, \ldots,$
donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}(s)$

Demostración: por inducción sobre n.

$n = 1$ $\qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$

$$
\begin{aligned}
\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\,(e^{-st}\,f(t))\,dt\\
&= \int_0^\infty -t\,e^{-st}\,f(t)\,dt = -\int_0^\infty e^{-st}(t\,f(t))\,dt\\
&\overset{\text{def.}\pounds}{=} -\pounds\{t\,f(t)\}(s)\\
\Rightarrow \pounds\{t\,f(t)\}(s) &= -\frac{d}{ds}\,F(s)
\end{aligned}
$$

Supongamos que se cumple para $n = k$

$$\pounds\{t^k f(t)\}(s) \;=\; (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$$

Veamos que se cumple para $n = k + 1$

$$\begin{aligned}
\pounds\{t^{k+1} f(t)\}(s) &= \pounds\{t\,t^k f(t)\}(s) \overset{n=1}{=} -\frac{d}{ds}\pounds\{t^k f(t)\}(s)\\
&\overset{n=k}{=} -\frac{d}{ds}[(-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)]\\
&= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s)
\end{aligned}$$

NOTA: para el caso $n = 1$, obtenemos una fórmula que nos permite hallar la transformada inversa de transformadas que no tenemos en la tabla de transformadas.

$$\pounds\{t\,f(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$$

o sea que

$$\begin{aligned}
t\,f(t) &= -\pounds^{-1}\{F'(s)\}\\
f(t) &= -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\{F'(s)\}
\end{aligned}$$

Ejemplo 11. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\ln\frac{s-3}{s+1}\right\} = f(t)$

Solución:

$$\begin{aligned}
f(t) &= -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}F(s)\right\} = -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln\frac{s-3}{s+1}\right\}\\
&= -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3}\,\frac{(s+1)1-(s-3)1}{(s+1)^2}\right\}\\
&= -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{s-3}\,\frac{4}{(s+1)^2}\right\} = -\frac{1}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{4}{(s-3)(s+1)}\right\}\\
&= -\frac{4}{t}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s-3)(s+1)}\right\}
\end{aligned}$$

utilizando fracciones parciales

$$\frac{1}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+1}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{4}{t}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{4(s-3)} - \frac{1}{4(s+1)}\right\} \\ &= -\frac{1}{t}\,(e^{3t} - e^{-t}) = \frac{e^{-t} - e^{3t}}{t} \end{aligned}$$

Teorema 6.8 (Transformada de la Derivada) .

Si $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ son continuas para $t \geq 0$ y de orden exponencial y si $f^n\,(t)$ es continua a tramos para $t \geq 0$, entonces:

$$\pounds\{f^{(n)}\,(t)\}(s) = s^n\,F(s) - s^{n-1}\,f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Demostración: por inducción sobre n:
para $n = 1$

$$\pounds\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,f'(t)\,dt,$$

e integrando por partes

$$\begin{aligned} &= e^{-st}\,f(t)\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\,f(t)\,dt \\ &= -f(0) + s\pounds\{f(t)\}(s) \\ &= s\,F(s) - f(0) \end{aligned}$$

supongamos que se cumple para $n = k$:

$$\pounds\{f^{(k)}(t)\}(s) \;=\; s^k\,F(s) - s^{k-1}\,f(0) - s^{k-2}f'(0) - \ldots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)$$

Veamos que se cumple para $n = k+1$:

$$\begin{aligned} \pounds\{f^{(k+1)}(t)\}(s) &= \pounds\{[f^{(k)}(t)]'\}(s) \\ &\overset{n=1}{=} s\pounds\{f^{(k)}(t)\}(s) - f^{(k)}(0) \end{aligned}$$

$$\overset{n=k}{=} s(s^k\,F(s) - s^{k-1}\,f(0) - s^{k-2}f'(0) - \ldots - sf^{(k-2)}(0) - f^{(k-1)}(0)) - f^{(k)}(0)$$

$$= s^{k+1}\,F(s) - s^k f(0) - s^{k-1}f'(0) - \ldots - s^2 f^{(k-2)}(0) - sf^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0)$$

NOTA: para resolver E.D. necesitamos, en la mayoría de ejemplos, los casos $n = 1$ y $n = 2$.
Para $n = 1$

$$\pounds\{y'(t)\}(s) = s\,Y(s) - y(0)$$

donde $Y(s) = \pounds\{y(t)\}(s)$

$$n = 2 \quad \pounds\{y''(t)\}(s) = s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

Definición 6.3 (Producto Convolutivo) . *Sean f y g funciones continuas a tramos para $t \geq 0$; el producto convolutivo entre las funciones f y g se define así:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

NOTA: haciendo el cambio de variable $u = t-\tau$ en la definición de producto convolutivo se demuestra que: $f * g = g * f$ (o sea que la operación $*$ es conmutativa)

Teorema 6.9 (Transformada del producto convolutivo) .

Si f y g son funciones continuas a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces

$$\pounds\{(f * g)(t)\}(s) = \pounds\{f(t)\}(s)\;\pounds\{g(t)\}(s) = F(s)\,G(s)$$

Demostración:

$$F(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau \qquad G(s) \overset{\text{def.}}{=} \int_0^\infty e^{-s\beta}\,g(\beta)\,d\beta$$

$$\begin{aligned} F(s)\,G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau}\,f(\tau)\,d\tau\;\int_0^\infty e^{-s\beta}\,g(\beta)\,d\beta \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s}\,f(\tau)\,g(\beta)\,d\beta\,d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-(\tau+\beta)s}\,g(\beta)\,d\beta\right]d\tau \qquad (6.1) \end{aligned}$$

Sea $t = \tau + \beta$ dejando constante a τ, luego $dt = d\beta$.
Ahora, cuando $\beta = 0 \Rightarrow t = \tau$ y cuando $\beta \to \infty$ entonces $t \to \infty$
Luego en 6.1

$$F(s)\,G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-ts}\,g(t-\tau)\,dt\right]d\tau$$

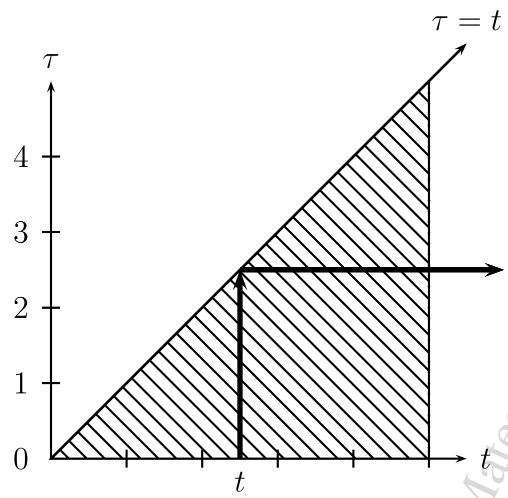

Figura 6.4

Y como f y g son continuas a tramos, podemos cambiar el orden de integración (ver figura 6.4);

$$F(s)\,G(s) = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\,e^{-ts}\,g(t-\tau)\,d\tau\,dt$$

$$F(s)\,G(s) = \int_0^\infty e^{-ts}\left[\underbrace{\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau}_{(f*g)(t)}\right]dt = \int_0^\infty e^{-ts}\,(f*g)(t)\,dt$$

$$\overset{\text{def.}}{=} \pounds\{(f*g)(t)\}\,(s)$$

NOTA: forma recíproca del teorema $(f*g)(t) = \pounds^{-1}\{F(s)\,G(s)\}$

Corolario 6.1 (Transformada de la integral) .

Si f es una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial, entonces:

$$\pounds\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\}(s) = \frac{1}{s}\,F(s) = \frac{1}{s}\,\pounds\{f(t)\}(s)$$

Demostración: tomando $g(t) = 1$ en el teorema de convolución, tenemos

$$
\begin{aligned}
\pounds\{g(t)\}(s) &= \pounds\{1\}(s) = \frac{1}{s} \\
\pounds\{(f*g)\} &= \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right\} = \pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\, 1\, d\tau\right\} \\
&= \pounds\{f(\tau)\}(s)\ \pounds\{g(\tau)\}(s) = F(s)\pounds\{1\}(s) \\
\pounds\left\{\int_0^t f(\tau)\ d\tau\right\} &= F(s)\,\frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

Teorema 6.10 (Generalización de la transformada de una potencia) .

$$\boxed{\pounds\{t^x\} = \tfrac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}}, \quad \textit{para} \quad s>0 \quad \textit{y} \quad x>-1}$$

Demostración: la función gamma como la definimos en el capítulo anterior es,

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-\tau}\tau^{x-1}\ d\tau$$

hagamos $\tau = st$, por tanto $d\tau = s\ dt$ y cuando $\tau = 0$ entonces $t = 0$ y con $\tau \to \infty$ entonces $t \to \infty$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-st}(st)^{x-1}s\ dt = s\int_0^\infty e^{-st}s^{x-1}t^{x-1}\ dt \\
= s^x\int_0^\infty e^{-st}t^{x-1} = s^x\pounds\{t^{x-1}\}
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\pounds\{t^{x-1}\} = \frac{\Gamma(x)}{s^x} \text{ con } x>0 \text{ y } s>0$$

luego (cambiando x por $x+1$)

$$\pounds\{t^x\} = \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \text{ con } x+1>0 \quad (\text{o sea } x>-1) \text{ y } s>0$$

Definición 6.4 *Una función $f(t)$ se dice que es periódica con período T ($T>0$) si para todo t se cumple $f(t+T) = f(t)$.*

El siguiente teorema se deja como ejercicio.

Teorema 6.11 (Transformada de una función periódica) .

Sea $f(t)$ una función continua a tramos para $t \geq 0$ y de orden exponencial. Si $f(t)$ es periódica con período T, entonces:

$$\pounds\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)\,dt$$

Ejemplo 12. Hallar $\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau}\ \cos\tau\, d\tau\right\}(s)$

Solución:

$$\pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau}\ \cos\tau\, d\tau\right\}(s) \;=\; \frac{1}{s}\pounds\{e^{-\tau}\ \cos\tau\}(s)$$

Pero

$$\begin{aligned}\pounds\{e^{-\tau}\ \cos\tau\}(s) &= \pounds\{\cos\tau\}(s+1)\\ &= \frac{s+1}{(s+1)^2+1^2}\\ \pounds\left\{\int_0^t e^{-\tau}\ \cos\tau\, d\tau\right\}(s) &= \frac{1}{s}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right]\end{aligned}$$

Ejemplo 13. Hallar $\pounds\{e^{-t} * e^t\cos t\}(s)$

Solución:

$$\begin{aligned}\pounds\{e^{-t} * e^t\cos t\}(s) &\overset{def*}{=} \pounds\{e^{-t}\}(s)\,\pounds\{e^t\cos t\}(s)\\ &= \frac{1}{s+1}\,\frac{s-1}{(s-1)^2+1}\end{aligned}$$

Observese que el ejemplo siguiente lo resolvemos con los resultados de los teoremas de la transformada y no necesitamos utilizar los dispendiosos métodos de las fracciones parciales.

Ejemplo 14. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t)$

Solución:

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+4)^2}\right\}(t) = \frac{1}{2}\pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\,\frac{s}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,(f*g)(t) = \frac{1}{2}\,(\operatorname{sen}2t * \cos 2t) \overset{\text{def.}\,*}{=} \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen}2\tau\ \cos 2(t-\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{sen} 2\tau(\cos 2t\, \cos 2\tau + \operatorname{sen} 2t\, \operatorname{sen} 2\tau)\, d\tau$$
$$= \frac{1}{2}\, \cos 2t \int_0^t \operatorname{sen} 2\tau \cos 2\tau\, d\tau + \frac{1}{2}\, \operatorname{sen} 2t \int_0^t \operatorname{sen}^2 2\tau\, d\tau$$
$$= \frac{1}{8}\, \cos 2t \operatorname{sen}^2 2t + \frac{1}{4} t \operatorname{sen} 2t - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen} 4t$$

Utilizando los teoremas vistos sobre transformada, efectuar los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Hallar $\int_0^\infty e^{-5t}[\int_0^t te^{3t} \operatorname{sen} 2t\ dt]\ dt$
(**Rta.:** $\frac{1}{40}$)

Ejercicio 2. Mostrar que

$$\pounds^{-1}\left\{\frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}\right\} = \frac{3}{2}\, e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, t$$

Ejercicio 3. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\} = e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \operatorname{sen} t$

Ejercicio 4. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{2}\right\} = \frac{\operatorname{sen} 2t}{t}$

Ejercicio 5. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\tan^{-1} \frac{1}{s}\right\} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}$

Ejercicio 6. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\tan^{-1} \frac{3}{s+2}\right\} = \frac{e^{-2t} \operatorname{sen} 3t}{t}$

Ejercicio 7. Mostrar que $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^3}\right\} = \frac{1}{8}(t \operatorname{sen} t - t^2 \cos t)$

Ejercicio 8. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1} e^{-\frac{\pi}{2}s}\right\}$
(**Rta.:** $-\mathcal{U}(t-\frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} t)$)

Ejercicio 9. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4} e^{-\pi s}\right\}$
(**Rta.:** $\frac{1}{2} e^{-2(t-\pi)} \operatorname{sen} 2(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi)$)

Ejercicio 10. Hallar $\pounds\left\{t \int_0^t \operatorname{sen} \tau\, d\tau\right\}(s)$
(**Rta.:** $\frac{3s^2+1}{s^2(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 11. Hallar $\pounds\left\{e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}\operatorname{sen}\tau\,d\tau\right\}(s)$
(**Rta.:** $\frac{2s}{(s+2)(s^2+1)^2}$)

Ejercicio 12. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}\right\}$

Ejercicio 13. Hallar $\pounds^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$

Ejercicio 14. Mostrar que $\pounds\{t^{\frac{5}{2}}\} = \frac{15}{8s^{\frac{5}{2}}}\left(\frac{\pi}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ejercicio 15. Hallar $\pounds\{t^{\frac{5}{2}}e^{2t}\}$

Ejercicio 16. Emplear la transformada de Laplace y su inversa para mostrar que

$$t^m * t^n = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}t^{m+n+1}$$

Ejercicio 17. Sea $f(t) = \frac{a}{b}t$ de período b (función "serrucho", ver figura 6.5). Hallar $\pounds\{f(t)\}(s)$

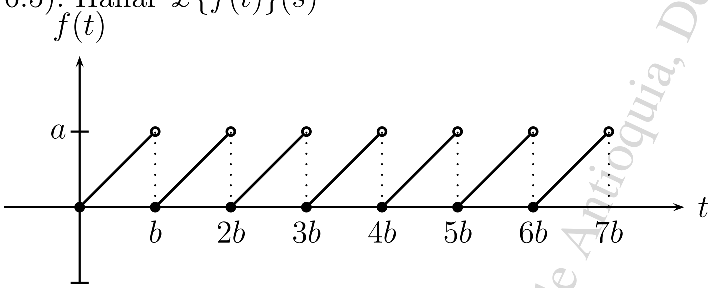

Figura 6.5

(**Rta.:**$\frac{a}{s}(\frac{1}{bs} - \frac{1}{e^{bs-1}})$)

Ejercicio 18. Sea

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

periódica de período 2π (función rectificación de la mitad de la onda seno. Ver figura 6.6). Hallar $\pounds\{f(t)\}(s)$

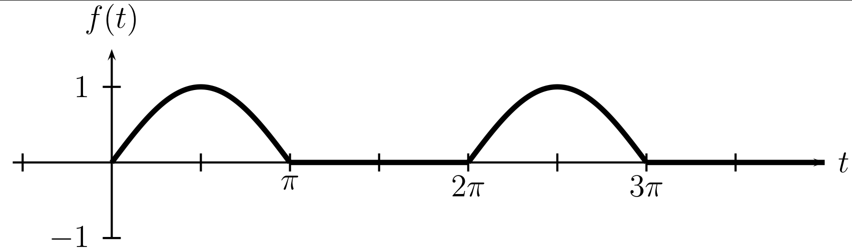

Figura 6.6

(**Rta.:** $\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$)

Ejercicio 19. Sea

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < a \\ -1, & \text{si } a \leq t < 2a \end{cases}$$

periódica de período $2a$ (función onda cuadrada. Ver figura 6.7). Hallar $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

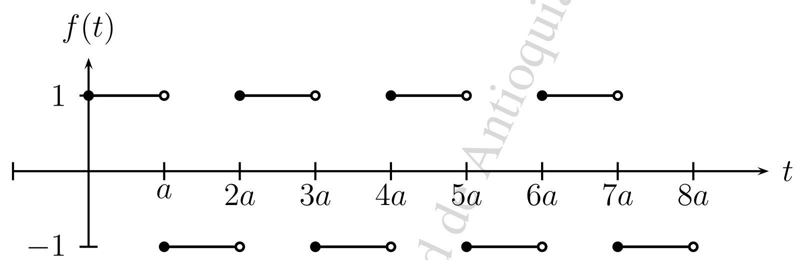

Figura 6.7

(**Rta.:** $\frac{1}{s}[\frac{2}{1+e^{-as}} - 1] = \frac{1}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}] = \frac{1}{s}\tanh\frac{as}{2}$)

Ejercicio 20. Sea

$$f(t) = \begin{cases} b, & \text{si } 0 \leq t < a \\ 0, & \text{si } a \leq t < 2a \\ -b, & \text{si } 2a \leq t < 3a \\ 0, & \text{si } 3a \leq t < 4a \end{cases}$$

periódica de período $4a$
(**Rta.:** $\frac{b}{s}[\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-2as}}]$)

Ejercicio 21. Sea $f(t)$ la función de onda triángular (ver figura 6.8). Mostrar que $\pounds\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}$

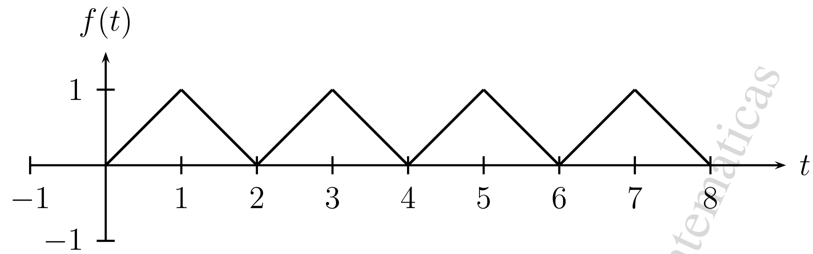

Figura 6.8

Ejercicio 22. Sea $f(t)$ la función rectificación completa de la onda de $\operatorname{sen} t$ (ver figura 6.9). Mostrar que $\pounds\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}\coth\frac{\pi s}{2}$

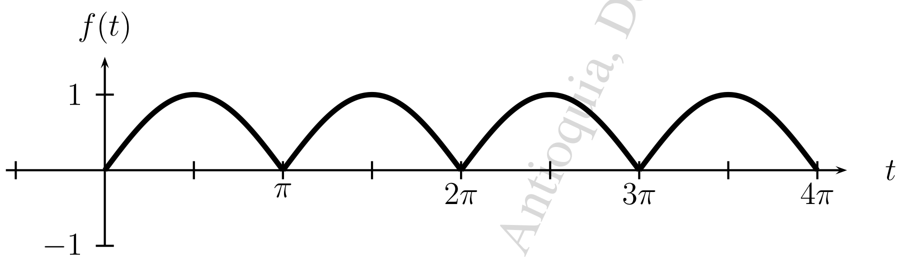

Figura 6.9

Ejercicio 23.

a). Si $f(t)$ es continua a tramos y de orden exponencial y si

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$$

existe, entonces

$$\pounds\{\frac{f(t)}{t}\}(s) = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

donde $F(s) = \pounds\{f(t)\}(s)$

b). Mostrar que
$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt = \int_0^\infty F(s)\,ds$$

c). Hallar

1. $\int_0^\infty e^{-ax}(\frac{\operatorname{sen} bx}{x})\,dx$
(**Rta.:** $tg^{-1}\frac{b}{a}$)

2. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx$
(**Rta.:**$\ln\frac{b}{a}$)

3. Mostrar que $\pounds\{\frac{e^t-e^{-t}}{t}\} = \ln(s+1)-\ln(s-1)$, con $s>1$

4. Mostrar que $\pounds\{\int_0^t \frac{1-\cos a\tau}{\tau}\,d\tau\} = \frac{1}{2s}\ln\frac{s^2+a^2}{s^2}$

5. Mostrar formalmente, que si $x>0$ entonces
a) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xt}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$; b) $f(x) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}e^{-x}$

6. Hallar $\pounds\{\frac{\operatorname{sen} kt}{t}\}$
(**Rta.:** $\tan^{-1}\frac{k}{s}$)

Ejercicio 24. Mostrar que

a). $\pounds^{-1}\{\frac{e^{-3s}}{s^2}\} = (t-3)\mathcal{U}(t-3)$

b). $\pounds^{-1}\{\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\} = \operatorname{sen}(t-\pi)\mathcal{U}(t-\pi) = -\operatorname{sen} t\mathcal{U}(t-3)$

c). $\pounds^{-1}\{\frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}\} = (1-\mathcal{U}(t-2\pi))\operatorname{sen} t$

d). $\pounds^{-1}\{\frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}\} = (1-\mathcal{U}(t-3))\cos\pi t$

e). Hallar $\pounds^{-1}\{\frac{s-se^{-\pi s}}{1+s^2}\}$
(**Rta.:** $\cos t - \mathcal{U}(t-\pi)\cos(t-\pi)$)

6.4. APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA A E.D. CON CONDICIONES INICIALES

Pasos:

- Aplicar la transformada a ambos lados de la ecuación
- Aplicar el teorema de la transformada de la derivada
  $\pounds\{y'\} = sY(s) - y(0)$
  $\pounds\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
  donde $Y(s) = \pounds\{y(t)\}(s)$
- Conseguir una función en s, es decir, despejar $Y(s)$
- Hallar la transformada inversa: $y(t) = \pounds^{-1}\{Y(s)\}$

Ejemplo 15. Hallar la solución de $y''-4y'+4y = t^3\, e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
Solución:

$$
\begin{aligned}
① &: \quad \pounds\{y''\} - 4\pounds\{y'\} + 4\pounds\{y\} = \pounds\{t^3 e^{2t}\} \\
② &: \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4} \\
③ &: \quad s^2Y(s) - 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{3!}{(s-2)^4} \\
④ &: \quad Y(s) = \frac{\frac{3!}{(s-2)^4}}{s^2 - 4s + 4} = \frac{3!}{(s-2)^4(s-2)^2} = \frac{3!}{(s-2)^6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \pounds^{-1}\{Y(s)\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{3!}{(s-2)^6}\right\} \\
&= \frac{1}{4\times 5}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{3!\,(4\times 5)}{(s-2)^6}\right\} = \frac{1}{4\times 5}\,\pounds^{-1}\left\{\frac{5!}{(s-2)^6}\right\} = \frac{t^5}{20}\,e^{2t}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 16. Hallar la solución de $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(t)\,dt, \quad y(0) = 0$
Solución:

$$
① : \quad \pounds\{y'(t)\}(s) = \pounds\{1\}(s) - \pounds\{\operatorname{sen} t\}(s) - \pounds\left\{\int_0^t y(t)\,dt\right\}(s)
$$

$$s\,Y(s) - y(0) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1^2} - \frac{1}{s}\,Y(s)$$

$$② \;:\; Y(s)\left(s+\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$Y(s)\left(\frac{s^2+1}{s}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}$$

$$③ \;:\; Y(s) = \frac{s}{s^2+1}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{(s^2+1)^2}$$

$$④ \;:\; y(t) = \pounds^{-1}\{Y(s)\} = \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \pounds^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$y(t) = \operatorname{sen} t - \pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\,\frac{s}{s^2+1}\right\} = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t * \cos t$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{sen} t - \int_0^t \operatorname{sen}\tau \cos(t-\tau)\,d\tau \\
&= \operatorname{sen} t - \int_0^t \operatorname{sen}\tau(\cos t\cos\tau + \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen} t)\,d\tau \\
&= \operatorname{sen} t - \cos t\int_0^t \operatorname{sen}\tau\cos\tau\,d\tau - \operatorname{sen} t\int_0^t \operatorname{sen}^2\tau\,d\tau \\
&= \frac{1}{2}\cos t\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2}t\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t
\end{aligned}$$

Ejemplo 17. Hallar la solución de $ty'' - y' = t^2, \quad y(0) = 0$

<u>Solución</u>:

$$\begin{aligned}
\pounds\{ty''\}(s) - \pounds\{y'\}(s) &= \pounds\{t^2\} \\
(-1)\frac{d}{ds}\pounds\{y''\}(s) - (s\,Y(s) - y(0)) &= \frac{2!}{s^3} \\
-\frac{d}{ds}(s^2\,Y(s) - s\,y(0) - y'(0)) - s\,Y(s) &= \frac{2!}{s^3} \\
-\frac{d}{ds}(s^2 Y(s)) - sY(s) &= \frac{2!}{s^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-(s^2\,Y'(s) + 2sY(s)) - s\,Y(s) &= \frac{2}{s^3} \\
-s^2 Y'(s) - 3sY(s) &= \frac{2}{s^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y'(s) + \frac{3}{s}Y(s) &= -\frac{2}{s^5}\,, \text{ E.D. lineal de primer orden}\\
F.I\; e^{\int \frac{3}{s}\,ds} &= e^{3\ln s} = s^3\\
Y(s)\,s^3 &= \int -\frac{2}{s^5}\,s^3\,ds + C = -2\,\frac{s^{-1}}{-1} + C\\
Y(s) &= \frac{2}{s^4} + \frac{C}{s^3}\\
y(t) &= \pounds^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} + C\,\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}\\
&= 2\,\frac{t^3}{3!} + C\,\frac{t^2}{2!}
\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Hallar la solución de $ty'' + y = 0, \quad y(0) = 0$
Solución:

$$\begin{aligned}
\pounds\{ty''\}(s) + Y(s) &= (-1)\,\frac{d}{ds}\,(\pounds\{y''\}(s)) + Y(s)\\
&= -\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s)\\
&= -\frac{d}{ds}\,(s^2Y(s)) + Y(s) = -(s^2Y'(s) + 2sY(s)) + Y(s)\\
&= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + Y(s) = s^2Y'(s) + Y(s)(2s-1)\\
&= Y'(s) + \left(\frac{2s-1}{s^2}\right)Y(s) = Y'(s) + \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}\right)Y(s)\\
F.I. &= e^{\int\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2}\right)ds} = e^{2\ln s - \frac{s^{-1}}{-1}},
\end{aligned}$$

E.D. lineal del primer orden

$$\begin{aligned}
F.I. &= s^2\,e^{\frac{1}{s}}\\
Y(s)\,s^2\,e^{\frac{1}{s}} &= \int F.I.\,(0) + C\\
Y(s) = \frac{C}{s^2}\,e^{-\frac{1}{s}} &= C\,\frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s^2}\\
&= C\,\frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{s^n} + \ldots\right)\\
Y(s) &= C\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{1!}\,\frac{1}{s^3} + \frac{1}{2!}\,\frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!}\,\frac{1}{s^5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{1}{s^{n+2}} + \ldots\right)\\
y(t) &= \pounds^{-1}\{Y(s)\}
\end{aligned}$$

$$= C\left(\frac{t}{1!} - \frac{1}{1!}\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!}\ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots\right)$$

Resolver los siguientes ejercicios por transformada de Laplace

Ejercicio 1. $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta.:** $y = \frac{1}{20}t^5 e^{2t}$)

Ejercicio 2. $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$
(**Rta.:** $y = 2e^{3t} + 2\frac{t^4}{4!}e^{3t}$)

Ejercicio 3. $y'' - 2y' + y = e^t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5$
(**Rta.:** $y = 5te^t + \frac{1}{2}t^2 e^t$)

Ejercicio 4. $y'' - 6y' + 9y = t, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta.:** $y = \frac{10}{9}te^{3t} - \frac{2}{27}e^{3t} + \frac{t}{9} + \frac{2}{27}$)

Ejercicio 5. $y'' + y' - 4y - 4\int_0^t y\,d\tau = 6e^t - 4t - 6, \quad y(0) = y'(0) = 0$
(**Rta.:** $y(t) = -e^t - \frac{1}{3}e^{-t} + 4e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{2t}$)

Ejercicio 6. Hallar $f(t)$ para la siguiente ecuación integral

$$f(t) + \int_0^t f(\tau)\,d\tau = 1$$

(**Rta.:** $f(t) = e^{-t}$)

Ejercicio 7. $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 1, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = te^{-3t}$)

Ejercicio 8. $y'(t) - 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = \frac{t}{3}e^{3t} - \frac{1}{9}e^{3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 9. $y'(t) + 6y(t) + 9\int_0^t y(\tau)\,d\tau = t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y = -\frac{t}{3}e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{9}$)

Ejercicio 10. $y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 1$
(**Rta.:** $y = 1 + t + \frac{1}{2}t^2$)

Ejercicio 11. $ty'' + 2ty' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
(**Rta.:** $y(t) = 3te^{-2t}$)

Ejercicio 12. $ty'' - ty' - y = 0, \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 3$

Ejercicio 13. $ty'' + 4ty' + 4y = 0, \quad y(0) = 0,\; y'(0) = 2$
(**Rta.:** $y = 2te^{-4t}$)

Ejercicio 14. $t^2y'' + 2ty' + t^2y = 0, \quad y(0) = C$
(**Rta.:** $y = -C\frac{\operatorname{sen} t}{t}$)

Ejercicio 15. $ty'' + y = 12t, \quad y(0) = 0$
(**Rta.:** $y(t) = 12t + C(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2!}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \frac{1}{4!}\frac{t^5}{5!} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots)$)

Ejercicio 16. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$
$y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1$
(**Rta.:** $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{\cos 2t}{4} - \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-1)\operatorname{sen} 2(t-1) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$)

Ejercicio 17. $y'' + 4y = f(t)$ donde $f(t) = \operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t - 2\pi)$
$y(0) = 1,\; y'(0) = 0$
(**Rta:** $y(t) = \cos 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}(t - 2\pi)\,\mathcal{U}(t - 2\pi) - \frac{1}{6}\operatorname{sen} 2(t - 2\pi)\,\mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 18. $y'' - 5y' + 6y = \mathcal{U}(t - 1),\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1$
(**Rta.:** $y(t) = e^{3t} - e^{2t} + \mathcal{U}(t-1)[\frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{3(t-1)} - \frac{1}{2}e^{2(t-1)}]$)

Ejercicio 19. $y'' - y' = e^t \cos t,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^t\cos t + \frac{1}{2}e^t\operatorname{sen} t$)

Ejercicio 20. Hallar $f(t)$ si:

i. $f(t) + \int_0^t (t - \tau)\, f(\tau)\, d\tau = t$
(**Rta:** $f(t) = \operatorname{sen} t$)

ii. $f(t) + 4\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, f(t - \tau)\, d\tau = 2t$

iii. $f(t) = te^t + \int_0^t \tau\, f(t - \tau)\, d\tau$
(**Rta:** $f(t) = -\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{1}{8}e^t + \frac{3}{4}te^t + \frac{1}{4}t^2e^t$)

iv. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = e^t$
(**Rta:** $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$)

v. $f(t) + \int_0^t f(\tau)\, d\tau = t$
(**Rta:** $f(t) = -e^{-t} + 1$)

Ejercicio 21. Sea $x(t)$ la solución de la ecuación de Bessel de orden cero

$$tx'' + x' + tx = 0$$

tal que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. Demostrar que

a. $\pounds\{x(t)\}(s) = \pounds\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$,

b. Mostrar formalmente $\int_0^\infty J_0(x)\, dx = 1$,

c. Mostrar formalmente $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos t)\, dt$
(**Ayuda:** $\int_0^\pi \cos^{2n} x\, dx = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\pi$)

6.5. IMPULSO UNITARIO O "FUNCIÓN DELTA"DE DIRAC

En muchos sistemas mecánicos, eléctricos, etc; aparecen fuerzas externas muy grandes que actúan en intervalos de tiempo muy pequeños, por ejemplo un golpe de martillo en un sistema mecánico, o un relámpago en un sistema eléctrico. La forma de representar esta fuerza exterior es con la "función δ"-Dirac.

Definición 6.5 $\delta_a(t-t_0) = \begin{cases} \frac{1}{2a}\,, & si\ \ t_0 - a \leq t \leq t_0 + a \\ 0\,, & si\ \ t < t_0 - a \quad o \quad t > t_0 + a \end{cases}$
donde a y t_0 son constantes positivas y $t_0 \geq a$.

Nota: para todo $a > 0$ y para todo $t_0 > 0$ se cumple que (Ver figura 6.10)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(t-t_0) = 1$$

Definición 6.6 *Se llama impulso unitario ó función delta de Dirac a la "función"definida por el límite:*

$$\delta(t-t_0) = \lim_{a\to0} \delta_a(t-t_0)$$

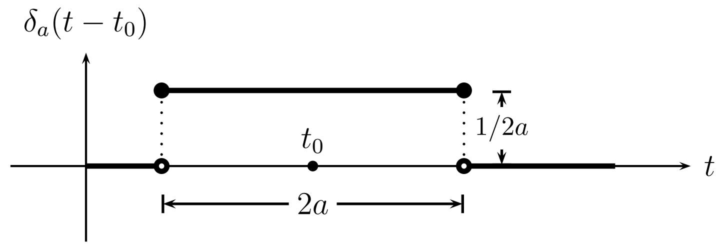

Figura 6.10

Ver figura 6.11 en la página siguiente.

Propiedades:

1. $\delta(t-t_0)$ es infinita en $t = t_0$ y cero para $t \neq t_0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,dt = 1$

3. $\pounds\{\delta_a(t-t_0)\}(s) = e^{-st_0}\left(\frac{e^{sa}-e^{-sa}}{2as}\right)$

4. $\pounds\{\delta(t-t_0)\}(s) \overset{\text{def.}}{=} \lim\limits_{a\to 0} \pounds\{\delta_a(t-t_0)\}(s) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} e^{-st_0}$

5. si $t_0 = 0 \Rightarrow \pounds\{\delta(t)\}(s) = 1$

6. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$, en particular $\int_0^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$

7. Por 6. podemos decir que $\pounds\{f(t)\delta(t-t_0)\}(s) = e^{-t_0 s} f(t_0)$

Notar que en la observación 5. $\lim\limits_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = 1$, mientras que por teorema anterior vimos que cuando una función es de orden exponencial $\lim\limits_{s\to\infty} \pounds\{f(t)\}(s) = 0$, lo cual es una contradicción, esto nos indica que la "función" δ-Dirac no es de orden exponencial, es por esto que δ es una "función" extraña. Más precisamente, esta función es tratada con detenimiento en los textos de Teoría de Distribuciones (Ver texto de Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais de Djairo Guedes de Figueiredo)

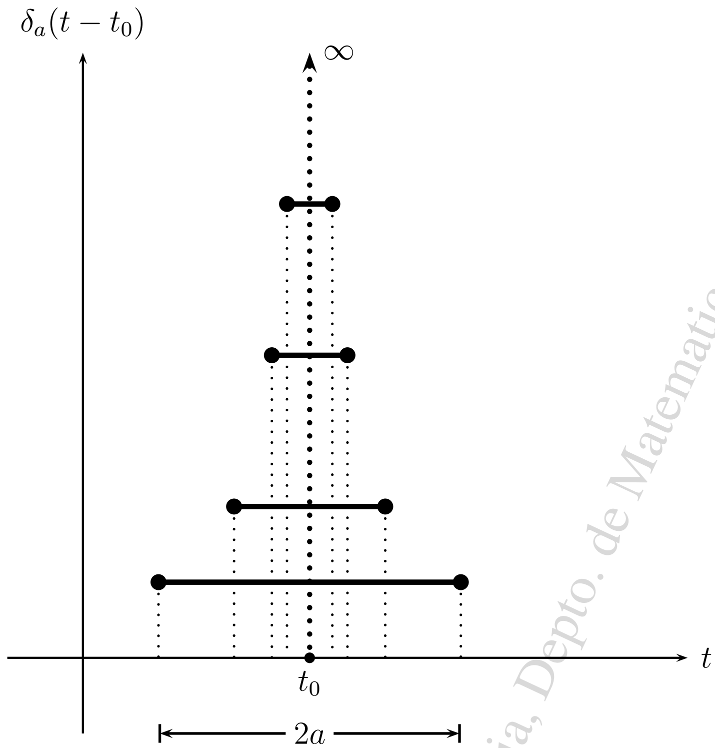

Figura 6.11

Ejercicio 1. $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen}(t - 2\pi)\mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 2. $y'' + 2y' + 2y = \cos t \; \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
(**Rta:** $y(t) = e^{-t}\cos t - e^{-(t-3\pi)}\operatorname{sen}(t - 3\pi)\mathcal{U}(t - 3\pi)$)

Ejercicio 3. $y'' + y = \delta(t - \pi)\cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = [1 + \mathcal{U}(t - \pi)]\operatorname{sen} t$)

Ejercicio 4. $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-1)}\right]\mathcal{U}(t - 1)$)

Ejercicio 5. $y'' + 4y' + 5y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:**$y = e^{-2(t-2\pi)}\operatorname{sen} t\,\mathcal{U}(t - 2\pi)$)

Ejercicio 6. $y'' + y = e^t\delta(t-2\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
(**Rta:** $y = e^{2\pi}\,\text{sen}\,(t-2\pi)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$)

Ejercicio 7. $y'' - 2y' = 1 + \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
(**Rta:** $y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\mathcal{U}(t-2) + \frac{1}{2}e^{2(t-2)}\mathcal{U}(t-2)$)

6.6. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 19. Utilizando el Paquete Maple, descomponer en fracciones parciales las siguientes expresiones: a) $F(s) = \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$, b) $F(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$, c) $F(s) = \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}$, d) $F(s) = \frac{s^3+3s^2+1}{s^2(s^2+2s+2)}$, e) $F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}$

a).
```
>F1(s) := (7*s-1)/((s-3)*(s+2)*(s-1));
>convert(F1(s),parfrac,s);
```

$$F1(s) := \frac{7s-1}{(s-3)(s+2)(a-1)}$$

$$\frac{2}{s-3} - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+2}$$

b).
```
>F2(s) :=(2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F2(s) := \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+4s+3)}$$

$$\frac{8}{15(s-2)} - \frac{1}{5(s+3)} - \frac{1}{3(s+1)}$$

c).
```
>F2(s) := (2*s+4)/((s-2)*(s^2+4*s+3));
>convert(F2(s),parfrac,s);
```

$$F3(s) := \frac{s^2-16}{s^3(s+2)^2}$$

$$-\frac{11}{4s} + \frac{11}{4(s+2)} - \frac{4}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{3}{2(s+2)^2}$$

d). `>F4(s) := (s^3+3*s^2+1)/(s^2*(s^2+2*s+2));`
`>convert(F4(s),parfrac,s,complex);`

$$F4(s) := \frac{s^3 + 3s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

$$-\frac{0{,}5000000000}{s} + \frac{0{,}7500000000 + 1{,}000000000I}{s + 1{,}000000000 + 1{,}000000000I} + \\ + \frac{0{,}7500000000 - 1{,}000000000I}{s + 1. - 1.I} + \frac{0{,}5000000000}{s^2}$$

`>convert(%,fraction);`

$$-\frac{1}{(2s)} + \frac{(\frac{3}{4} + I)}{(s + 1 + I)} + \frac{(\frac{3}{4} - I)}{(s + 1 - I)} + \frac{1}{(2s^2)}$$

e). `>F5(s) := (s^2)/((s^2+1)^2);`
`>convert(F5(s),parfrac,s,complex);`

$$F5(s) := \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}$$

$$\frac{0{,}2500000000}{(s + 1{,}000000000I)^2} + \frac{0{,}2500000000}{(s - 1.I)^2} - \frac{0{,}2500000000I}{s - 1.I} + \frac{0{,}2500000000I}{s + 1{,}000000000I}$$

`>convert(%,fraction);`

$$\frac{1}{4(s + I)^2} + \frac{1}{4(s - I)^2} - \frac{\frac{1}{4}I}{s - I} + \frac{\frac{1}{4}I}{s + I}$$

Ejemplo 20. Hallar la trasformada de Laplace de las funciones:
$\operatorname{sen}(kt)$, $\cos(kt)$, e^{kt}

Efectuar las siguientes instrucciones:

`>with(inttrans):laplace(cos(k*t),t,s);`

$$\frac{s}{s^2+k^2}$$

```
>with(inttrans):laplace({sin(k*t),exp(k*t)},t,s);
```

$$\frac{1}{s-k},\quad \frac{k}{s^2+k^2}$$

Ejemplo 21. Hallar la transformada de $e^t \operatorname{sen}(2t)$ y calcular la transformada inversa de $\frac{2}{(s-1)^2+4}$

Efectuar las siguientes instrucciones:

```
>with(inttrans):laplace(exp(t)*sin(2*t),t,s);
```

$$\frac{2}{(s-1)^2+4}$$

```
>invlaplace(%,s,t);
```

$$e^t \operatorname{sen}(2t)$$

Ejemplo 22. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D.

$$x'' + 16x = \cos 4t$$

con $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$

Efectúe las siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(D(x))(t)+16*x(t)=cos(4*t):
dsolve({Eqn2,x(0)=0,D(x)(0)=1},x(t),method=laplace);
```

$$x(t) = \left(\frac{t}{8}+\frac{1}{4}\right)\operatorname{sen}(4t)$$

Ejemplo 23. Resolver, usando transformada de Laplace, la ecuación integro-diferencial $y'(t) = 1 - \operatorname{sen} t - \int_0^t y(\tau)\ d\tau$ con la condición $y(0) = 0$

Efectuar los siguientes instrucciones:

```
>with(ODEtools):Eqn2:=D(y)(t)=1-sin(t)-int(y(s),s=0..t):
dsolve({Eqn2,y(0)=0,D(y)(0)=1},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \left(1 - \frac{t}{2}\right) \operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo 24. Resolver, usando transformada de Laplace, la E.D. $y' + y = U(t-1)$ con la condición $y(0) = 0$ (U es la función escalón unitario)

Efectuar los siguientes pasos:

```
>restart: with(ODEtools): ode := diff(y(t),t) + y(t) =
5*piecewise(t<1,0,t>=1,1):dsolve({ode,y(0)=0},y(t),method=laplace);
```

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ \text{undefind} & t = 1 \\ -5e^{(1-t)} + 5 & t > 1 \end{cases}$$

CAPÍTULO 7

SISTEMAS LINEALES DE E.D. DE PRIMER ORDEN

Estudiaremos el sistema de n ecuaciones lineales de primer orden:

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n + f_1(t)\\
x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + a_{22}(t)\,x_2 + \ldots + a_{2n}(t)\,x_n + f_2(t)\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n + f_n(t)
\end{aligned} \tag{7.1}$$

el cual se denomina no homogénea si $f_i \neq 0$ para algún $i = 1, 2, \ldots, n$.
El sistema homogéneo asociado al anterior sistema es:

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + \ldots + a_{1n}(t)\,x_n\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)\,x_1 + \ldots + a_{nn}(t)\,x_n
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Sea $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{bmatrix}$ y $\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{bmatrix}$,
entonces el sistema (7.1) se puede escribir:

$$\vec{x}\,'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t) \tag{7.3}$$

y la homogénea asociada (7.2) se puede escribir como

$$\vec{x}\,'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) \tag{7.4}$$

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\vec{x}\,'(t) \;=\; A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{7.5}$$

donde

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

Decimos que la función vectorial

$$\vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{bmatrix}$$

es solución de (7.5), si $\vec{\phi}(t)$ es derivable, satisface la ecuación diferencial y la condición inicial dada, es decir, si

$$\vec{\phi}(t_0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix} = \vec{x}_0$$

Teorema 7.1 .

Sean $A(t)$ y $\vec{f}(t)$ funciones matricial y vectorial respectivamente y continuas en $[a,b]$, entonces existe una única función vectorial $\vec{\phi}(t)$ que es solución del problema de valor inicial (7.5) en $[a,b]$.

(Ver la demostración de este teorema en el Apéndice)

Ejemplo 1. Consideremos el sistema lineal

$$x_1' = -4x_1 - x_2$$
$$x_2' = x_1 - 2x_2$$

con $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 2$.
Solución:

El sistema puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sus soluciones son de la forma:

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}, \qquad \vec{\phi}_2(t) = \begin{bmatrix} (1-t)\, e^{-3t} \\ t\, e^{-3t} \end{bmatrix}$$

También

$$\vec{\phi}(t) = \begin{bmatrix} (1-3t)\, e^{-3t} \\ (2+3t)\, e^{-3t} \end{bmatrix}$$

es un vector solución que satisface la condición inicial.
Nota: toda E.D. de orden n se puede reducir a un sistema de E.D. de primer orden.
Ejemplo 2. Convertir en un sistema la siguiente E.D.:

$$x''' - 6x'' + 11x' - 6x = \operatorname{sen} t$$

Solución: hagamos $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $x_3 = x''$ y obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x' = x_2 \\ x_2' &= x'' = x_3 \\ x_3' &= x''' = 6x'' - 11x' + 6x + \operatorname{sen} t = 6x_3 - 11x_2 + 6x_1 + \operatorname{sen} t \\ &= 6x_1 - 11x_2 + 6x_3 + \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

matricialmente la E.D. queda así

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \operatorname{sen} t \end{bmatrix}$$

7.1. CONJUNTOS FUNDAMENTALES Y SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Consideremos el sistema homogéneo $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$ donde $\vec{x}$ es un vector de n componentes y $A(t)$ una matriz de $n \times n$.
Si $\vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_n(t)$, son n soluciones linealmente independientes del sistema, entonces decimos que este conjunto es un conjunto fundamental de soluciones; la matriz

$$\Phi(t) = [\vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_n(t)] = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \cdots & \phi_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \cdots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

o sea, la matriz cuyas columnas son $\vec{\phi}_1(t), \ldots, \vec{\phi}_n(t)$ los cuales son linealmente independientes, la llamamos una matriz fundamental y decimos que $\Phi(t)$ es una solución matricial ya que cada una de sus columnas es solución de $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$.

Definición 7.1 (Matriz Principal) . *Decimos que la matriz fundamental $\boldsymbol{\varphi}(t)$ es matriz principal si*

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: esta matriz es única.

Definición 7.2 (Wronskiano) *Sea $\Phi(t)$ una matriz solución (es decir, cada columna es un vector solución) de $\vec{x}\,' = A(t)\,\vec{x}$, entonces $W(t) = det\,\Phi(t)$ lo llamamos el Wronskiano de $\Phi(t)$.*

Observación: si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental, entonces

$$W(t) = det\,\Phi(t) \neq 0$$

7.2. MÉTODO DE LOS VALORES Y VECTORES PROPIOS

Consideremos el sistema

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \tag{7.6}$$

donde $\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ es una matriz constante

El objetivo es hallar n soluciones linealmente independientes: $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$. Para ello imaginemos la solución del tipo $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es un vector constante, como

$$\frac{d}{dt}\,e^{\lambda t}\,\vec{v} = \lambda e^{\lambda t}\,\vec{v}$$

y $A(e^{\lambda t}\,\vec{v}) = e^{\lambda t}\,A\vec{v}$, de (7.6) tenemos que:

$$\lambda e^{\lambda t}\,\vec{v} = A(e^{\lambda t}\,\vec{v}) = e^{\lambda t}\,A\vec{v},$$

luego

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{7.7}$$

Es decir, $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$ es solución de (7.6) si y solo si λ y $\vec{v}$ satisfacen (7.7).

Definición 7.3 (Vector y valor propio) . *Un vector $\vec{v} \neq \vec{0}$ que satisface $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ se le llama vector propio de A con valor propio λ.*

NOTA:

- $\vec{v} = \vec{0}$ siempre satisface $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ para cualquier matriz A, por esto no nos interesa.

- λ es un valor propio de la matriz A si y solo si

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0} \tag{7.8}$$

es decir, $\vec{v}$ satisface sistema homogéneo de n ecuaciones con n incognitas

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0} \tag{7.9}$$

donde I es la matriz identidad.

La ecuación (7.9) tiene una solución $\vec{v}\neq\vec{0}$ si y solo si $det(A-\lambda I)=0$, luego los valores propios de A son las raíces de la ecuación.

$$0 = det(A-\lambda I) = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$=$ Polinomio en λ de grado $n = p(\lambda)$.

Definición 7.4 (Polinomio Característico) . *Al polinomio $p(\lambda)$ de la nota anterior lo llamamos el Polinomio Característico de la matriz A.*

Como los vectores propios de A son los vectores $\vec{v}\neq\vec{0}$ del sistema ecuaciones lineales

$$(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}.$$

y como $p(\lambda)=0$, tiene a lo sumo n raíces, entonces existen a lo sumo n valores propios de A y por tanto existen a lo sumo n vectores propios linealmente independientes.

El siguiente teorema se demuestra en los cursos de Algebra Lineal.

Teorema 7.2 .

Cualesquiera k vectores propios $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_k$ correspondientes a k valores propios diferentes $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ respectivamente, son linealmente independientes.

Pasos para hallar los valores y vectores propios de A:

- Hallar $p(\lambda)=det(A-\lambda I)=0$.

- Hallar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $p(\lambda) = 0$.

- Para cada valor propio λ_i, resolver el sistema homogéneo

$$(A - \lambda_i I)\,\vec{v} = \vec{0}.$$

Ejemplo 2. Hallar tres soluciones linealmente independientes, una matriz fundamental y la solución general del siguiente sistema:

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Solución: el polinomio característico es

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6) =$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

luego los valores propios son: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3$

Hallemos los vectores propios:
Para $\lambda_1 = 1$, tenemos que

$$(A - 1.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1 & 4 \\ 3 & 2-1 & -1 \\ 2 & 1 & -1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{31}(1)]{R_{21}(1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3(\frac{1}{2})]{R_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = 4v_3,\ \ v_1 = -v_3,\ \ v_3 = v_3$, por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 4e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = -2$, tenemos que

$$(A+2.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1+2 & -1 & 4 \\ 3 & 2+2 & -1 \\ 2 & 1 & -1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{31}(1)]{R_{21}(4)} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 15 & 0 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3(\frac{1}{5})]{R_2(\frac{1}{15})} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{32}(-1)]{R_{12}(-4)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = -v_1, \;\; v_3 = -v_1, \;\; v_1 = v_1$, por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_2 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 3$, tenemos que

$$(A-3.I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 1-3 & -1 & 4 \\ 3 & 2-3 & -1 \\ 2 & 1 & -1-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_{31}(1)]{R_{21}(-1)} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(4)}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = 2v_1, \;\; v_3 = v_1, \;\; v_1 = v_1$, por lo tanto

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}$$

Las tres soluciones son $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3$, como los tres valores propios son diferentes entonces $\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3$ son linealmente independientes, o sea que la matriz fundamental es

$$\Phi(t) = [\vec{x}_1,\ \vec{x}_2,\ \vec{x}_3] = \begin{bmatrix} -e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ 4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

La solución general es $\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t)$

RAÍCES COMPLEJAS.

Si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio o característico de A con vector propio asociado $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$, entonces $\vec{x}(t) = e^{\lambda t}\,\vec{v}$ es una solución vectorial compleja de $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$.

La solución vectorial compleja da lugar a dos soluciones vectoriales reales; en efecto:

Lema 7.1 .

Sea $\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + i\vec{x}_2(t)$ una solución vectorial compleja de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, entonces $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones vectoriales reales de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

Demostración: como $\vec{x}(t)$ es solución de $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$ entonces

$$\vec{x}_1\,'(t) + i\vec{x}_2\,'(t) = A(\vec{x}_1(t) + i\vec{x}_2(t)) = A\vec{x}_1(t) + iA\vec{x}_2(t)$$

e igualando parte Real y parte Imaginaria:

$$\vec{x}_1\,' = A\,\vec{x}_1 \quad \text{y} \quad \vec{x}_2\,' = A\,\vec{x}_2,$$

o sea que $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones.
Obsérvese que $\vec{x}_1(t) = \mathbf{R_e}\{\vec{x}(t)\}$ $\quad \vec{x}_2(t) = \mathbf{Im}\{\vec{x}(t)\}$

NOTA: si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio complejo y $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$ es un vector propio complejo asociado a λ entonces

$$\begin{aligned} \vec{x} = e^{\lambda t}\vec{v} &= e^{(\alpha+i\beta)t}\,(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\,\mathrm{sen}\,\beta t)(\vec{v}_1 + i\vec{v}_2) \\ &= e^{\alpha t}[\vec{v}_1\cos\beta t - \vec{v}_2\,\mathrm{sen}\,\beta t + i(\vec{v}_1\,\mathrm{sen}\,\beta t + \vec{v}_2\cos\beta t)] \end{aligned}$$

Por tanto si $\lambda = \alpha + i\beta$ es un valor propio de A con vector propio $\vec{v} = \vec{v}_1 + i\vec{v}_2$, entonces

$$\vec{x}_1 = e^{\alpha t}(\vec{v}_1 \cos\beta t - \vec{v}_2 \operatorname{sen}\beta t), \quad \vec{x}_2 = e^{\alpha t}(\vec{v}_1 \operatorname{sen}\beta t + \vec{v}_2 \cos\beta t) \tag{7.10}$$

son dos soluciones vectoriales reales de $\vec{x}'(t) = Ax$ y son linealmente independientes.

Ejemplo 3. Hallar dos soluciones vectoriales reales linealmente independientes del siguiente sistema: $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 12 & -17 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$

Solución: hallemos el polinomio característico

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 12-\lambda & -17 \\ 4 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

los valores propios son $\lambda_1 = 4 + 2i, \ \ \lambda_2 = 4 - 2i$,por tanto $\alpha = 4, \ \beta = 2$.

Si $\lambda_1 = 4 + 2i$ entonces

$$\begin{bmatrix} 8-2i & -17 \\ 4 & -8-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(8-2i)v_1 - 17v_2 = 0 \quad \text{y} \quad 4v_1 + (-8-2i)v_2 = 0$$

como estas dos ecuaciones son linealmente dependientes, se toma una cualquiera de las dos, por ejemplo la primera

$$v_2 = \frac{1}{17}(8-2i)v_1, \quad v_1 = v_1 \Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{17}(8-2i) \end{bmatrix} v_1$$

tomando $v_1 = 17$ tenemos $\vec{v} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8-2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$
escogemos como $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$
Por lo tanto las dos soluciones vectoriales reales son:

$$\vec{x}_1(t) \quad = \quad e^{\alpha t}\left(\vec{v}_1 \cos\beta t - \vec{v}_2 \operatorname{sen}\beta t\right) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t\right)$$

$$= \quad e^{4t}\begin{bmatrix} 17\cos 2t \\ 8\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$$

y también

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t}\left(\vec{v}_1 \operatorname{sen}\beta t + \vec{v}_2\cos\beta t\right) = e^{4t}\left(\begin{bmatrix} 17 \\ 8 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cos 2t\right) \\ &= e^{2t}\begin{bmatrix} 17\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t - 2\cos 2t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nota: si se utiliza el otro valor propio $\lambda_2 = 4 - 2i$ y se sigue el mismo procedimiento se llega a que

$$\vec{x}_1(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 17\cos 2t \\ 8\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}, \quad \vec{x}_2(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 17\operatorname{sen} 2t \\ 8\operatorname{sen} 2t + 2\cos 2t \end{bmatrix}$$

que también son dos soluciones linealmente independientes de la E.D., es decir, que de acuerdo a la selección que hagamos ya sea en los valores propios o en las ecuaciones lineales cuando escalonemos la matriz de coeficientes, tendremos respuestas diferentes, esto se debe a que escogemos vectores base $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ diferentes.

RAÍCES IGUALES.

La matriz e^{At} que definimos a continuación, tiene su existencia garantizada en el Apéndice A.3 .

Definición 7.5 (Matriz exponencial) . *Si A es una matriz $n \times n$ y constante*

$$e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots$$

Esta serie es convergente para todo t y para toda matriz $A_{n\times n}$ constante. Derivando formalmente (Ver la demostración de la derivada en el Apéndice A.4), tenemos

$$\frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2 t + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ldots$$

$$= A\left(I + At + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \ldots\right) = Ae^{At}$$

Por tanto, $e^{At}\,\vec{v}$ es una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, donde $\vec{v}$ es un vector constante. En efecto

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(e^{At}\,\vec{v})}_{\vec{x}} = Ae^{At}\vec{v} = A\underbrace{(e^{At}\,\vec{v})}_{\vec{x}}$$

También en el Apéndice se demuestran las siguientes propiedades.

Propiedades:

i). $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$

ii). $e^{A(t+s)} = e^{At}\,e^{As}$

iii). Si $AB = BA$, donde $A_{n\times n}$ y $B_{n\times n}$, entonces $e^{At+Bt} = e^{At}\,e^{Bt}$

Observación:

$$\begin{aligned} e^{At}\,\vec{v} &= e^{At-\lambda It+\lambda It}\vec{v} = e^{(A-\lambda I)t}e^{\lambda It}\vec{v} \qquad (7.11)\\ \text{Ya que}\quad (A-\lambda I)\lambda I &= (\lambda I)(A-\lambda I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pero}\quad e^{\lambda It}\vec{v} &= \left[I + \lambda It + (\lambda I)^2\frac{t^2}{2!} + \ldots\right]\vec{v}\\ &= \left[1 + \lambda t + \frac{\lambda^2t^2}{2!} + \ldots\right]I\vec{v} = e^{\lambda t}\vec{v} \end{aligned}$$

sustituyendo en (7.11)

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} \qquad (7.12)$$

Si $\vec{v}$ satisface $(A-\lambda I)^m\vec{v} = \vec{0}$ para algún entero m, entonces la serie infinita $e^{(A-\lambda I)\,t}$ termina después de m términos; en efecto,

$$(A-\lambda I)^{m+e}\vec{v} = (A-\lambda I)^e(A-\lambda I)^m\vec{v} = \vec{0}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} &= \left[I + (A-\lambda I)t + (A-\lambda I)\,\frac{t^2}{2!} + \ldots + (A-\lambda I)^{m-1}\,\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\right]\vec{v}\\ &= \vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v} + \frac{t^2}{2!}\,(A-\lambda I)^2\vec{v} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,(A-\lambda I)^{m-1}\,\vec{v} \end{aligned}$$

en (7.12):

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}[\vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v} + \frac{t^2}{2!}(A-\lambda I)^2\,\vec{v} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A-\lambda I)^{m-1}\,\vec{v}] \quad (7.13)$$

Algoritmo para hallar las n soluciones linealmente independientes

1. Hallar los valores y vectores propios de la matriz A. Si A tiene n vectores propios linealmente independientes entonces $\vec{x}' = A\,\vec{x}$ tiene n soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\vec{v}$.

2. Si A tiene $k < n$ vectores propios linealmente independientes, entonces se tienen k soluciones linealmente independientes de la forma $e^{\lambda t}\vec{v}$. Para encontrar las soluciones adicionales se toma un valor propio λ de A y se hallan todos los vectores $\vec{v}$ tales que

$$(A-\lambda I)^2\vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A-\lambda I)\vec{v} \neq \vec{0}.$$

   Para cada uno de estos vectores $\vec{v}$

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}e^{(A-\lambda I)t}\vec{v} = e^{\lambda t}[\vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v}]$$

   es una solución adicional de $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$. Esto se hace para todos los valores propios de A.

3. Si aún en el paso anterior no se han conseguido las n soluciones linealmente independientes, entonces se buscan los vectores $\vec{v}$ tales que

$$(A-\lambda I)^3\vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A-\lambda I)^2\vec{v} \neq \vec{0}$$

   por lo tanto

$$e^{At}\vec{v} = e^{\lambda t}[\vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v} + \frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\vec{v}]$$

   es una nueva solución linealmente independiente de $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$.

4. Se continua de la misma manera hasta completar n soluciones linealmente independientes.

Ejemplo 4. Resolver por el método anterior el problema de valor inicial

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \vec{x} \qquad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Solución: el polinomio característico de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad p(\lambda) = (2-\lambda)^3$$

luego $\lambda = 2$ es un valor propio de A con multiplicidad 3.
Hallemos los vectores propios asociados a $\lambda = 2$, estos vectores deben satisfacer la ecuación

$$(A - 2I)\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

escalonemos la matriz de coeficientes por reducción de filas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{12}(2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ y $v_1 = v_1$, por lo tanto el vector propio asociado a $\lambda = 2$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

la solución asociada a este vector propio es

$$\vec{x_1}(t) = e^{2t}\vec{v} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

luego la dimensión del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ es uno, esto quiere decir que debemos hallar un vector $\vec{v}$ tal que

$$(A - 2I)^2\vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - 2I)\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$(A-2I)^2\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es decir $v_3 = 0$, v_1 y v_2 son parámetros; elegimos $v_1 = 0$ y $v_2 = 1$ de tal manera que el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sea linealmente independiente con el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ hallado anteriormente

La solución asociada a $\vec{v}$ es

$$\begin{aligned} \vec{x_2}(t) &= e^{\lambda t}[\vec{v} + t(A-\lambda I)\vec{v}] = e^{2t}[\vec{v} + t(A-2I)\vec{v}] \\ &= e^{2t}[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}] = e^{2t}[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}] = e^{2t}\begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

como $(A-2I)^2\vec{v} = \vec{0}$ tiene dos soluciones linealmente independientes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

se debe buscar otra solución linealmente independiente con las anteriores, que cumpla la condición

$$(A-2I)^3\vec{v} = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad (A-2I)^2\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$(A-2I)^3\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

luego v_1, v_2 y v_3 son parámetros, entonces escogemos $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de tal manera que sea linealmente independiente con $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y que además cumpla

$(A-2I)^2\vec{v} \neq \vec{0}$.
Como el sistema es 3×3, entonces la última solución es

$$\vec{x_3}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}+t(A-\lambda I)\vec{v}+\frac{t^2}{2}(A-\lambda I)^2\vec{v}] = e^{2t}[\vec{v}+t(A-2I)\vec{v}+\frac{t^2}{2}(A-2I)^2\vec{v}]$$

$$= e^{2t}[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}]$$

$$= e^{2t}[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}] = e^{2t}[\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}]$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix}2t-\frac{t^2}{2}\\-t\\1\end{bmatrix}$$

La solución general es

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x_1}(t)+C_2\vec{x_2}(t)+C_3\vec{x_3}(t) = C_1e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2e^{2t}\begin{bmatrix}t\\1\\0\end{bmatrix}+C_3e^{2t}\begin{bmatrix}2t-\frac{t^2}{2}\\-t\\1\end{bmatrix}$$

en $t=0$ se tiene que

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix} = C_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+C_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

luego $C_1=1$, $C_2=3$ y $C_3=1$

La solución particular buscada es

$$\vec{x}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix}1+5t-\frac{t^2}{2}\\3-t\\1\end{bmatrix}$$

Nota: en algunos casos el valor propio repetido λ de multiplicidad m puede producir m vectores propios, en otros casos (como en el ejemplo anterior) puede producir menos de m vectores propios, teniéndose que completar el resto (hasta completar m) con los que llamaremos vectores propios generalizados.

Definición 7.6 (Valor propio defectuoso) *Un valor propio λ de multiplicidad $m > 1$ se le llama* **defectuoso** *si produce menos de m vectores propios linealmente independientes. Si λ tiene $p < m$ vectores propios linealmente independientes, al número $d = m - p$ de vectores propios faltantes se le llama el defecto del valor propio defectuoso λ*

En el ejemplo anterior $\lambda = 2$ tiene multiplicidad $m = 3$ y solo produjo $p = 1$ vector propio, al número $d = m - p = 3 - 1 = 2$ de vectores propios faltantes se le llama el defecto del valor propio $\lambda = 2$, los dos vectores propios faltantes se consiguen con vectores propios generalizados.

Observaciones.

1. Si λ es un valor propio de la matriz A, denominamos vector propio generalizado de rango m asociado a λ, al vector $\vec{v}$ tal que

$$(A - \lambda I)^m \vec{v} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A - \lambda I)^{m-1} \vec{v} \neq \vec{0}$$

Cuando $m = 1$, el vector $\vec{v}$ es un vector propio generalizado de rango uno y es también un vector propio ordinario; cuando $m = 2$, el vector $\vec{v}$ es un vector propio generalizado de rango dos, pero no es un vector propio ordinario.

Una cadena de longitud m de vectores propios generalizados originados en el vector propio $\vec{v_1}$ es un conjunto de m vectores propios generalizados $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ tales que

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)\vec{v}_m &= \vec{v}_{m-1} \\ (A - \lambda I)\vec{v}_{m-1} &= \vec{v}_{m-2} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I)\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 \end{aligned} \tag{7.14}$$

Si sustituimos $\vec{v}_{m-1}$ en la segunda expresión de (7.14) y luego $\vec{v}_{m-2}$ en la tercera expresión y así sucesivamente, tenemos que

$$(A - \lambda I)^{m-1} \vec{v}_m = \vec{v}_1, \tag{7.15}$$

y como $\vec{v}_1$ es un vector propio ordinario, entonces premultiplicando (7.15) por $(A - \lambda I)$ se llega a que

$$(A - \lambda I)^m \vec{v}_m = (A - \lambda I)\vec{v}_1 = \vec{0}$$

en general para $j = 1, \ldots, m-1$:

$$(A - \lambda I)^j \vec{v}_m = \vec{v}_{m-j} \tag{7.16}$$

Utilizando (7.16) se puede mostrar que la cadena $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, para ello suponemos que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_m \vec{v}_m = \vec{0}$$

se premultiplica por $(A - \lambda I)^{m-1}$ y se llega a que $\alpha_m = 0$, en forma similar se demuestra que $\alpha_{m-1} = 0$ y así sucesivamente hasta mostrar que $\alpha_1 = 0$

2. Utilizando (7.13) tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t(A - \lambda_I)\vec{v}_m + \\ \frac{t^2}{2!}(A - \lambda I)^2\,\vec{v}_m + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}(A - \lambda I)^{m-1}\,\vec{v}_m] \end{aligned} \tag{7.17}$$

donde $\vec{v}_m$ satisface $(A - \lambda I)^m \vec{v}_m = \vec{0}$ y $(A - \lambda I)^{m-1}\vec{v}_m = \vec{v}_1 \neq \vec{0}$ y por (7.16)

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!}\,\vec{v}_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,\vec{v}_1] \tag{7.18}$$

Algoritmo para una cadena de longitud m

a. Hallar $\vec{v}_1$ vector propio de A asociado al valor propio λ que satisface el sistema: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

b. Hallar $\vec{v}_2$ tal que $(A - \lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

c. Hallar $\vec{v}_m$ tal que $(A - \lambda I)\vec{v}_m = \vec{v}_{m-1}$.

d. La solución asociada a esta cadena es

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t}[\vec{v}_m + t\vec{v}_{m-1} + \frac{t^2}{2!}\,\vec{v}_{m-2} + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\,\vec{v}_1]$$

3. Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y \\ y' &= a_2 x + b_2 y \end{aligned} \tag{7.19}$$

luego su ecuación característica es

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{bmatrix} &= (a_1 - \lambda)(b_2 - \lambda) - a_2 b_1 \\
&= \lambda^2 - (a_1 + b_2)\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0 \quad (7.20)
\end{aligned}
$$

y supongamos que tiene una raíz $\lambda = m$ con multiplicidad dos.
Supongamos también que

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

es el vector propio asociado a $\lambda = m$ y que

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

es el vector propio generalizado de rango dos, asociado al valor propio $\lambda = m$, es decir

$$(A - mI)^2 \vec{v}_2 = \vec{0} \qquad \text{y} \qquad (A - mI)\vec{v}_2 = \vec{v}_1 \neq \vec{0}$$

Por tanto las dos soluciones linealmente independientes son

$$\vec{x}_1(t) = e^{mt}\vec{v}_1 = e^{mt} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

y por (7.18) la segunda solución es

$$\vec{x}_2(t) = e^{mt}[\vec{v}_2 + t\vec{v}_1] = e^{mt}[\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} + t\, e^{mt} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}] = e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix},$$

la solución general es

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t) \\
&= C_1 e^{mt} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} + C_2 e^{mt} \begin{bmatrix} A_1 + At \\ B_1 + Bt \end{bmatrix} \qquad (7.21)
\end{aligned}
$$

finalmente

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 A e^{mt} + C_2 (A_1 + At) e^{mt} \\
y(t) &= C_1 B e^{mt} + C_2 (B_1 + Bt) e^{mt}
\end{aligned} \qquad (7.22)
$$

Teorema 7.3 .

La matriz $X(t)_{n\times n}$ es una matriz fundamental de la E.D. vectorial $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ si y solo si satisface la E.D. matricial $X'(t) = AX(t)$ y además $\det X(t_0) \neq 0$.

Demostración: sea $X(t) = [\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)]$ una matriz fundamental de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, entonces

$$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$$

son linealmente independientes. Derivando la matriz $X(t)$, tenemos

$$X'(t) = (\vec{x}\,'_1(t), \vec{x}\,'_2(t), \ldots, \vec{x}\,'_n(t))$$

y como

$$AX(t) = (A\vec{x}_1(t), A\vec{x}_2(t), \ldots, A\vec{x}_n(t))$$

y sabiendo que

$$A\vec{x}_1(t) = \vec{x}\,'_1(t), \quad A\vec{x}_2(t) = \vec{x}\,'_2(t), \ldots, A\vec{x}_n(t) = \vec{x}\,'_n(t)$$

entonces

$$X'(t) = (A\vec{x}_1(t), A\vec{x}_2(t), \ldots, A\vec{x}_n(t)) = AX(t) \Rightarrow X(t)$$

solucion de la E.D. matricial

$$X' = AX$$

Recíprocamente como $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ son linealmente independientes, ya que $\det X(t_0) \neq 0$; entonces por la nota hecha en la página 89 del Cap. IV, tenemos que

$$\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t) \quad \text{son linealmente independientes}$$

luego la matriz

$$X(t) = (\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t))$$

es una matriz fundamental.

Teorema 7.4 .

La matriz e^{At} es una matriz principal de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$.

Demostración: en efecto, e^{At} es solución de $X' = AX$ ya que

$$\frac{d}{dt}\, e^{At} = A\, e^{At}$$

y por el teorema anterior e^{At} es una matriz fundamental, además,

$$e^{At} = I + At + A^2\,\frac{t^2}{2} + \ldots,$$

y para $t = 0$ se tiene que $e^{A0} = I$.

Teorema 7.5 .

Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos matrices fundamentales de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, entonces existe una matriz constante $C_{n\times n}$ tal que $Y(t) = X(t)C$.

Demostración: como

$$X(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)) \quad \text{es fundamental}$$

entonces $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ son linealmente independientes. Similarmente como

$$Y(t) = (\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n) \quad \text{es fundamental}$$

entonces $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$ son linealmente independientes. Pero

$$\vec{y}_i = C_{1i}\,\vec{x}_1 + \ldots + C_{ni}\,\vec{x}_n$$

para $i = 1, \ldots, n$, luego

$$Y(t) = X\, C_{n\times n}$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema nos permite hallar una matriz exponencial, conociendo una matriz fundamental.

Teorema 7.6 .

Sea $X(t)$ una matriz fundamental de $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ entonces

$$e^{At} = X(t)\, X^{-1}(0).$$

Demostración: sea $X(t)$ una matriz fundamental y como e^{At} es matriz fundamental (principal), entonces, existe

$$C_{n\times n} \quad \text{tal que} \quad e^{At} = X(t)C$$

Para $t = 0 \Rightarrow e^{0t} = I = X(0)C \Rightarrow C = X^{-1}(0)$. Luego $e^{At} = X(t)\,X^{-1}(0)$

Ejemplo 5. Hallar e^{At} para

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{x}$$

Solución:
Hallamos los valores propios, que en este caso son: $\lambda = 1,\ \lambda = 3,\ \lambda = 5$

$$\text{Para } \lambda = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1(t) = e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 3 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_2(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Para } \lambda = 5 \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_3(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \\ 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

y por Teorema 7.2 $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$, $\vec{x}_3(t)$ son linealmente independientes.

Luego $X(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$ es la matriz fundamental.

Luego $X(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Luego

$$e^{At} = X(t)\,X^{-1}(0) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & -\frac{e^t}{2} + \frac{e^{3t}}{2} & -\frac{e^{3t}}{2} + \frac{e^{5t}}{2} \\ 0 & e^{3t} & -e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$$

Ejercicios. En los siguientes ejercicios, hallar la solución general para $\vec{x}\,' = A\,\vec{x}$ y con el Wronskiano comprobar que los vectores solución son linealmente independientes.

1. $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} e^{4t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-4t}$)

2. $A = \begin{bmatrix} 12 & -15 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t}$)

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1[\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t] + C_2[\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t]$)

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + C_2 e^t [\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cos 2t - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t]$

$+ C_3 e^t [\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos 2t + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t]$)

5. $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \vec{x}$

(**Rta.:** $\lambda = -3$(mult.2),vector propio $\vec{v} = [1 - 1]^T$, $x_1(t) = (C_1 + C_2 + C_2 t)e^{-3t}, x_2(t) = (-C_1 - C_2 t)e^{-3t}$)

6. $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

(**Rta.:** $\lambda = -1$(mult.3) defectuoso, $x_1(t) = (-2C_2+C_3-2C_3 t)e^{-t}, x_2(t) = (C_1 - C_2 + C_2 t - C_3 t + \frac{1}{2} C_3 t^2)e^{-t}, x_3(t) = (C_2 + C_3 t)e^{-t}$)

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

(**Rta.:** $\vec{x}(t) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 - 2t \\ -4t \end{bmatrix} e^{2t}$)

7.3. E.D. NO HOMOGÉNEA Y VARIACIÓN DE PARÁMETROS

Consideremos el problema de valor inicial:

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}(t), \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \tag{7.23}$$

Sean $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ las soluciones linealmente independientes de la homogénea asociada, o sea que

$$\vec{x}_h(t) = C_1\vec{x}_1(t) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t)$$

y variando los parámetros $C_1, C_2, \ldots, C_n$ tenemos

$$\vec{x}(t) = u_1(t)\vec{x}_1(t) + \ldots + u_n(t)\vec{x}_n(t),$$

la cual suponemos que es una solución de $\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}(t)$.

Luego , $\vec{x}(t) = X(t)\vec{u}(t)$, donde

$$X(t) = (\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)) \quad \text{y } \vec{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{aligned} \vec{x}\,'(t) &= \frac{d}{dt}(X(t)\vec{u}(t)) = X'(t)\vec{u}(t) + X(t)\vec{u}\,'(t), \\ A\vec{x} + \vec{f}(t) &= \underbrace{AX(t)}_{X'}\vec{u}(t) + \vec{f}(t) = X'(t)\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \end{aligned}$$

Sustituimos en (7.23) y cancelando, obtenemos:

$$X(t)\vec{u}\,'(t) = \vec{f}(t)$$

Premultiplicando por $X^{-1}(t) : \vec{u}\,'(t) = X^{-1}(t)\vec{f}(t)$
e integrando de t_0 a t:

$$\vec{u}(t) = \vec{u}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds \qquad (7.24)$$

como

$$\vec{x}(t) = X(t)\,\vec{u}(t) \Rightarrow \vec{x}(t_0) = X(t_0)\,\vec{u}(t_0)$$

y premultiplicando por $X^{-1}(t_0)$

$$\vec{u}(t_0) = X^{-1}(t_0)\,\vec{x}(t_0)$$

en (7.24):

$$\vec{u}(t) = X^{-1}(t_0)\,\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds$$

luego

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{u}(t) = X(t)\left[X^{-1}(t_0)\,\vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds\right]$$

$$\vec{x}(t) = X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\vec{x_0} + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds \qquad (7.25)$$

En particular si

$$X(t) = e^{At} \Rightarrow X^{-1}(t) = e^{-At} \Rightarrow X^{-1}(t_0) = e^{-At_0}$$

entonces

$$\vec{x}(t) = e^{At}\,e^{-At_0}\,\vec{x_0} + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}\,\vec{f}(s)\,ds$$

o sea que

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\,\vec{f}(s)\,ds \qquad (7.26)$$

Ejemplo 6. Utilizar (7.25) para resolver el sistema:

$$\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 4 \end{bmatrix}, \; x(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

<u>Solución</u>: los valores propios son: $\lambda = 3, \; \lambda = 4$

Los vectores propios linealmente independientes son:

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las soluciones vectoriales linealmente independientes son:

$$\vec{x_1}(t) = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \; \vec{x_2}(t) = e^{4t}\,\vec{v_2} = e^{4t} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz fundamental y su inversa en términos de s son:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix}, \quad X^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix}$$

Pasos: a) hallemos:

$$\begin{aligned}
X(t) \int_{t_0=0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{-3s} & 3e^{-3s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5s} \\ 4 \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^{2s} + 12e^{-3s} \\ e^{s} - 4e^{-4s} \end{bmatrix} ds \\
&= \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{2t} - 4e^{-3t} + 5 \\ e^{t} + e^{-4t} - 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 + 5e^{3t} - 6e^{4t} \\ e^{5t} - 2 + 5e^{3t} - 4e^{4t} \end{bmatrix} \\
&= 5 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3e^{4t} \\ 2e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix} \\
&= 5\vec{x_1}(t) - 2\vec{x_2}(t) + \vec{x_p}
\end{aligned}$$

Luego la solución particular es

$$\vec{x_p} = \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 \\ e^{5t} - 2 \end{bmatrix}$$

b) Hallemos $X(t)\,X^{-1}(0)\vec{x_0}$

$$\begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 3e^{4t} \\ e^{3t} & 2e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{bmatrix}$$

De a) y b):

$$\vec{x}(t) = X(t)\,X^{-1}(0)\,\vec{x_0} + X(t)\int_0^t X^{-1}(s)\,\vec{f}(s)\,ds$$

$$= \begin{bmatrix} -6e^{3t} + 15e^{4t} \\ -6e^{3t} + 10e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2e^{5t} - 1 + 5e^{3t} - 6e^{4t} \\ e^{5t} - 2 + 5e^{3t} - 4e^{4t} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -e^{3t} + 9e^{4t} + 2e^{5t} - 1 \\ -e^{3t} + 6e^{4t} + e^{5t} - 2 \end{bmatrix}$$

En los siguientes ejercicios, aplique el método de variación de parámetros para hallar una solución particular de los siguientes sistemas:

1. $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 2t \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
(**Rta.:** $\vec{x}(t) = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} 666 - 120t - 575e^{-t} - 91e^{5t} \\ 588 - 60t - 575e^{-t} - 13e^{5t} \end{bmatrix}$)

2. $\vec{x}\,' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos 2t \end{bmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
(**Rta.:**$\vec{x}(t) = \frac{1}{4}e^{3t} \begin{bmatrix} -2t\,\mathrm{sen}\,2t \\ \mathrm{sen}\,2t + 2t\cos 2t \end{bmatrix}$)

3. $x' = 4y + 1, \qquad y' = -x + 2$
(**Rta.:** $x = -2C_1\cos 2t + 2C_2\,\mathrm{sen}\,2t + 2; \quad y = C_2\cos 2t + C_1\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{1}{4}$)

4. $x' = -y + t, \qquad y' = x - t$
(**Rta.:** $x = C_1\cos t + C_2\,\mathrm{sen}\,t + 1 + t; \quad y = -C_2\cos t + C_1\,\mathrm{sen}\,t - 1 + t$)

7.4. TRANSFORMADA DE LAPLACE PARA SISTEMAS

Definición 7.7 *Si*

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \pounds\{\vec{x}(t)\}(s) \overset{def.}{=} \vec{X}(s) = \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st}x_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st}x_n(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Y si

$$\vec{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{F}(s) = \pounds\{\vec{f}(t)\}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^\infty e^{-st}f_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_0^\infty e^{-st}f_n(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Sea el P.V.I. $\vec{x}\,'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)$, $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$. Luego

$$\begin{aligned} \pounds\{\vec{x}\,'(t)\}(s) &= \pounds\{A\vec{x}(t) + \vec{f}(t)\} \\ &= A\pounds\{\vec{x}(t)\}(s) + \pounds\{\vec{f}(t)\}(s) \\ &= A\vec{X}(s) + \vec{F}(s) \end{aligned} \tag{7.27}$$

Pero $\pounds\{\vec{x}\,'(t)\} = \begin{bmatrix} \pounds\{x_1{}'\}(s) \\ \vdots \\ \pounds\{x_n{}'\}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sX_1(s) - x_1(0) \\ \vdots \\ sX_n(s) - x_n(0) \end{bmatrix} = s\vec{X}(s) - \vec{x}(0)$

en (7.27): $s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) = A\vec{X}(s) + \vec{F}(s)$

Luego $(sI - A)\,\vec{X}(s) = \vec{x}(0) + \vec{F}(s) = \vec{x}_0 + \vec{F}(s)$

Ejemplo 7. Resolver el problema de valor inicial.

$$\begin{aligned} \vec{x}\,' &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t, \quad \vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \pounds\{\vec{x}\,'\}(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\pounds\{\vec{x}\}(s) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\pounds\{e^t\}(s) \\ s\vec{X}(s) - \vec{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\vec{X}(s) + \frac{1}{s-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(sI - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \vec{X}(s) &= \vec{x}(0) + \frac{1}{s-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2+\frac{1}{s-1} \\ 1+\frac{1}{s-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (s-1)X_1(s) - 4X_2(s) = 2 + \frac{1}{s-1}$$

$$-X_1(s) + (s-1)X_2(s) = 1 + \frac{1}{s-1}$$

Resolviendo el anterior sistema para $X_1(s),\ \ X_2(s)$:

$$X_1(s) = -\frac{1}{s-1} + \frac{11}{4}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+1}$$

$$X_2(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{s-1} + \frac{11}{8}\frac{1}{s-3} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \pounds^{-1}\{X_1(s)\} \\
&= -\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{11}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} + \frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\
&= -e^t + \frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} \\
x_2(t) &= \pounds^{-1}\{X_2(s)\} \\
&= -\frac{1}{4}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + \frac{11}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \frac{1}{8}\pounds^{-1}\left\{\frac{1}{s+1)}\right\} \\
&= -\frac{1}{4}e^t + \frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}
\end{aligned}$$

Usar la transformada de Laplace para resolver los siguientes sistemas de E.D.

1. $\frac{dx}{dt} = -x + y$
$\frac{dy}{dt} = 2x, \quad x(0) = 0, \ \ y(0) = 1$
(**Rta.:** $x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t, \ \ y(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t$)

2. $\frac{dx}{dt} = 2y + e^t$
$\frac{dy}{dt} = 8x - t, \quad x(0) = 1, \ \ y(0) = 1$
(**Rta.:** $x = \frac{173}{192}e^{4t} + \frac{t}{8} - \frac{e^t}{15} + \frac{53}{320}e^{-4t}, \quad y = \frac{1}{16} - \frac{53}{160}e^{-4t} - \frac{8}{15}e^t + \frac{173}{96}e^{4t}$)

3. $\frac{dx}{dt} = x - 2y$
$\frac{dy}{dt} = 5x - y, \quad x(0) = -1, \; y(0) = 2$
(**Rta.:** $x = -\cos 3t - \frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t, \quad y = 2\cos 3t - \frac{7}{3}\operatorname{sen} 3t$)

4. Dos pesos de 96 libras y 64 libras se mueven horizontalmente en una superficie lisa, cada resorte tiene $k = k_1 = k_2 = 600$. En $t = 0$ los resortes están sin estirar y el de peso 96 tiene una velocidad de 600 pies/seg. alejándose del muro y el otro esta en reposo. Encontrar las E.D. del movimiento y la posición en el tiempo t. (Ver Capítulo 4 figura 4.16)
(**Rta.:** $m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x + k_2(y - x), \quad m_2 \frac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y - x)$
$x = 24 \operatorname{sen} 10t + 6\sqrt{6}\operatorname{sen}\sqrt{600}t, \quad y = 36\operatorname{sen} 10t - 6\sqrt{6}\operatorname{sen}\sqrt{600}t$)

Ejercicio 5. Hallar las E.D. del sistema de resortes acoplados con constantes k_1 y k_2 y masas m_1 y m_2 respectivamente, como se muestra en la figura 4.14; resolverla con $k_1 = k_2 = k_3 = 1, \; m_1 = m_2 = 1$ y $x(0) = 0, \; y(0) = 0, \; x'(0) = -1, \; y'(0) = 1$
(**Rta.:** $x = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}, \; y = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$)

7.5. ANEXO CON EL PAQUETE Maple

Ejemplo 8. Con el paquete Maple resolver el siguiente sistema, hallar la solución general y la solución particular
$x_1' = -4x_1 - x_2$
$x_2' = x_1 - 2x_2$
con $x_1(0) = 1, \; x_2 = 2$
Solución:

```
>sys1 :=[diff(x(t),t)=-4*x(t)-y(t), diff(y(t),t)=x(t)-2*y(t)];
```

sys1 := $[x' = -4 * x - y, y' = x - 2 * y]$

```
>sol1 := dsolve(sys1);
```

sol1 := $\{x(t) = e^{-3t}(\_C1 + \_C2\, t), y(t) = -e^{-3t}(\_C1 + \_C2\, t + \_C2)\}$