

Apuntes y ejercicios resueltos

ANÁLISIS NUMÉRICO

Julio Daniel Ruano Lima

Ayudante de cátedra

Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas

Escuela Superior Politécnica del Litoral

<http://es.scribd.com/jdruano92>

jdruano@live.com

jdruano@espol.edu.ec

Guayaquil, Ecuador

Marzo de 2013

Prefacio

"Las matemáticas son el lenguaje con el que Dios ha escrito el universo".

Galileo Galilei

La presente obra busca ser un material de apoyo y consulta durante el estudio del Análisis Numérico.

El contenido de la misma fue elaborado durante el dictado de las ayudantías de cátedra de la asignatura en mención en la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL) en la ciudad de Guayaquil. Es por esto que se presentan ejercicios tomados de evaluaciones receptadas en esta institución educativa así como material propio desarrollado por el autor.

La intención de este material no es de convertirse en una referencia absoluta para el estudio sino una herramienta para la práctica, ya que por ejemplo no profundizamos en demostraciones de teoremas o deducciones de los algoritmos, por el contrario lo que hacemos es el desarrollo de problemas aplicando ya los resultados de cada método.

Durante todo el desarrollo de la obra se lleva un formato fijo, el mismo tiene el mismo orden del dictado de la materia en la mayoría de universidades.

Dado que es la primera edición de este material, el lector debe sentirse libre a contactarnos vía correo electrónico para informarnos en algún error que pueda existir en el documento. Sin duda esto serviría para corregir a futuro lo presentado.

Espero sinceridad que el contenido aquí detallado sirva en el entendimiento de los conocimientos y destrezas necesarios para esta área del Análisis Matemático.

Julio Ruano Lima

A Dios, por el cumulo de bendiciones recibidas en mi vida.

A mis padres, mi constante apoyo y guía.

A mi familia y amigos, por su confianza y aliento.

Contenido

0. PRELIMINARES	1
0.1 Introducción.....	1
0.2 Errores	1
0.2.1 Error absoluto	1
0.2.2 Error relativo	1
0.3 Tolerancia	1
0.4 Normas vectoriales.....	1
0.5 Normas matriciales	2
0.6 Radio espectral.....	2
0.7 Matriz estrictamente dominante diagonalmente	2
1. ECUACIONES NO LINEALES	3
1.1 Introducción.....	3
1.2 Método de bisección	3
1.2.1 Generalidades	3
1.2.2 Ejemplos	4
1.3 Método del punto fijo	8
1.3.1 Generalidades	8
1.3.2 Ejemplos.....	9
1.4 Método de Newton	14
1.4.1 Generalidades	14
1.4.2 Ejemplos.....	14
2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.....	17
2.1 Introducción.....	17
2.2 Método de Jacobi	17
2.2.1 Generalidades	17
2.2.2 Ejemplos.....	18
2.3 Método de Gauss - Seidel.....	20
2.3.1 Generalidades	20
2.3.2 Ejemplos.....	21
2.4 Número de condición de un sistema.....	23
2.4.1 Generalidades	23
2.4.2 Ejemplos.....	24
3. SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES (OPCIONAL)	27
3.1 Introducción.....	27
3.1 Método de Newton	27

3.1.1 Generalidades	27
3.1.2 Ejemplo	28
4. INTERPOLACIÓN POLINÓMICA	31
4.1 Introducción.....	31
4.2 Polinomio de Lagrange.....	31
4.2.1 Generalidades	31
4.2.2 Ejemplos.....	31
4.3 Trazadores cúbicos naturales.....	34
4.3.1 Generalidades	34
4.3.2 Ejemplos.....	36
4.4 Trazadores cúbicos sujetos	38
4.4.1 Generalidades	38
4.4.2 Ejemplos.....	39
4.5 Interpolación en dos variables (OPCIONAL)	40
4.5.1 Generalidades	40
4.5.2 Ejemplos.....	41
5. DIFERENCIACIÓN NUMÉRICA	43
5.1 Introducción.....	43
5.2 Primera derivada	43
5.2.1 Generalidades	43
5.2.2 Ejemplos.....	43
5.3 Segunda derivada	45
5.3.1 Generalidades	45
5.3.2 Ejemplos.....	45
6. INTEGRACIÓN NUMÉRICA.....	47
6.1 Introducción.....	47
6.2 Formulas simples cerradas de Newton Cotes	47
6.2.1 Generalidades	47
6.2.2 Ejemplos.....	48
6.3 Formulas compuestas de Newton Cotes.....	49
6.3.1 Generalidades	49
6.3.2 Ejemplos.....	50
6.4 Integrales Impropias.....	53
6.4.1 Generalidades	53
6.4.2 Ejemplos.....	54
6.5 Integrales dobles	56
6.5.1 Generalidades	56
6.5.2 Ejemplos.....	58
6.6 Cuadratura Gaussiana	62

6.6.1 Generalidades	62
6.6.2 Ejemplos.....	63
7. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	68
7.1 Introducción.....	68
7.2 Método de Taylor	68
7.2.1 Generalidades	68
7.2.2 Ejemplos.....	68
7.3 Métodos de Runge Kutta para ecuaciones de primer orden	70
7.3.1 Generalidades	70
7.3.2 Ejemplos.....	71
7.4 Sistema de ecuaciones diferenciales por el método de Runge Kutta	72
7.4.1 Generalidades	72
7.4.2 Ejemplos.....	72
7.5 Método de diferencias finitas para ecuaciones de segundo orden	74
7.5.1 Generalidades	74
7.5.2 Ejemplos.....	74
8. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	76
8.1 Introducción.....	76
8.2 Ecuación diferencial parcial elíptica	76
8.2.1 Generalidades	76
8.2.2 Ejemplos.....	77
8.3 Ecuación diferencial parcial parabólica	79
8.3.1 Generalidades	79
8.3.2 Ejemplos.....	81
8.4 Ecuación diferencial parcial hiperbólica	82
8.4.1 Generalidades	82
8.4.2 Ejemplos.....	83

0. Preliminares

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos".

Jean-Baptiste Joseph Fourier

0.1 Introducción

Durante el desarrollo del folleto nos toparemos con ciertos conceptos que vale la pena definir antes del estudio de la materia en sí.

El análisis numérico proporciona una herramienta poderosa en el cálculo de aproximaciones por lo que es de vital importancia conocer los conceptos preliminares que se presentan.

0.2 Errores

0.2.1 Error absoluto

Comenzamos con la definición de error, sea p^* una aproximación del número p . Se dice que el error absoluto de la aproximación, denotado por E_a está dado por:

$$E_a = |p - p^*|$$

0.2.2 Error relativo

Por su parte el error relativo E_r de la aproximación se determina por:

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{E_a}{|p|}; p \neq 0$$

0.3 Tolerancia

Por otro lado vale la pena definir uno de los conceptos más empleados en el folleto, la tolerancia. Se entiende por tolerancia al *error* (en realidad es diferencia) $|p_{n-1} - p_n|$ entre dos términos consecutivos de una sucesión $\{p_n\}$ que busca aproximar al valor de p .

0.4 Normas vectoriales

Terminamos con una serie de definiciones en el área matricial, que es la que tal vez tenga más por desarrollar.

Comenzamos con el caso particular de los vectores, y el estudio de dos normas definidas en ellos. Sea $X \in R^n$, se dice que:

- La norma l_2 de X , denotada por $\|X\|_2$ está dada por:

$$\|X\|_2 = \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

- La norma l_∞ de X , denotada por $\|X\|_\infty$ está dada por:

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

La distancia entre dos vectores no es más que la norma de su resta, claro está se debe especificar la norma a usarse. Esto nos servirá en el cálculo de la tolerancia en los métodos que arrojan vectores como aproximación donde comúnmente se usa la norma infinita en el cálculo de la tolerancia.

0.5 Normas matriciales

De manera análoga existen normas definidas muy utilizadas en las matrices, sea $A \in M_{n \times n}$ se dice que:

- La norma l_1 de A, denotada por $\|A\|_1$ está dada por:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

- La norma l_∞ de A, denotada por $\|A\|_\infty$ está dada por:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\}$$

La norma 'uno' no es más que el máximo de las sumas por columnas, mientras que la norma infinita es análoga pero en suma por filas.

0.6 Radio espectral

Otra definición relevante en el área matricial es la de radio espectral:

Sea $A \in M_{n \times n}$ se dice que el radio espectral de A, denotado por $\rho(A)$ está dado por:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$$

Donde λ_i es el i-ésimo valor propio de A.

0.7 Matriz estrictamente dominante diagonalmente

Finalmente definimos a la llamada matriz estrictamente dominante diagonalmente, sea $A \in M_{n \times n}$ se dice que A es una matriz estrictamente dominante diagonalmente si y solo si:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

1. Ecuaciones no lineales

"El estudio y, en general, la búsqueda de la verdad y la belleza conforman un área donde podemos seguir siendo niños toda la vida".

Albert Einstein

1.1 Introducción

En ciencias así como en ingeniería comúnmente se nos presentan ecuaciones que resultan algo más complejas de resolver que las estudiadas hasta ahora.

Por ejemplo una ecuación del tipo polinomial, como $x^2 - 2x + 1 = 0$ nos resulta sencilla de resolver pero una ecuación donde no nos sea posible factorar o *despejar* la variable buscada ingresa en el grupo de las denominadas ecuaciones no lineales, por ejemplo $x + e^x - \cos(x) - 4 = 0$.

Existen métodos para la resolución de este tipo de ecuaciones, los mismos se presentaran a continuación con pequeñas generalidades respecto a cada uno para poder aplicarlos de manera efectiva.

1.2 Método de bisección

1.2.1 Generalidades

El método de la bisección basa su algoritmo o proceso en el Teorema de Bolzano, a saber:

Teorema 1: *Sea f una función cualquiera, y sea $[a, b]$ un intervalo subconjunto del dominio de f . Si $f(a)f(b) < 0$ entonces existe por lo menos una raíz o cero de f en el intervalo $[a, b]$.*

En general el procedimiento de este método busca un intervalo inicial usando la gráfica de la función donde se crea existe una solución, luego en cada iteración se busca continuar con el cumplimiento del teorema de Bolzano, acortando así el intervalo de solución de tal forma que llegará un momento donde se lo haya acortado lo necesario para tener una solución confiable.

Para en cada iteración asegurar el cumplimiento de las condiciones antes descritas, es decir el teorema de Bolzano así como el acortamiento del intervalo se usa el siguiente procedimiento:

Las iteraciones serán expresadas mediante el contador $n=1, 2, \dots$ y en cada una de ellas se hallará el punto medio p_n del intervalo de aproximación $[a_n, b_n]$ usando la siguiente expresión $p_n = \frac{b_n + a_n}{2}$. Luego se evalúa la función f en los tres puntos de la iteración, a_n , b_n y p_n , comparando los signos de la función en estos puntos para reemplazar el intervalo de aproximación según el siguiente criterio:

Si $f(a_n)f(p_n) < 0$ entonces el intervalo de aproximación cambia a $[a_n, p_n]$.

Si $f(p_n)f(b_n) < 0$ entonces el intervalo de aproximación cambia a $[p_n, b_n]$.

El intervalo resultado de la comparación antes indicada, pasa a ser el intervalo de aproximación inicial para la iteración siguiente. De esta forma se repite el proceso hasta tener una tolerancia aceptable.

Para la aplicación del proceso antes indicado se usa la siguiente tabla en este método:

n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	p_n	$f(p_n)$
-----	-------	-------	----------	----------	-------	----------

Finalmente indicamos la existencia de un teorema de convergencia del método, el cual nos ayuda en conocer el número de iteraciones necesarias para alcanzar un determinado error absoluto:

Teorema 2: Sea $f \in C_{[a, b]}$ tal que $f(a)f(b) < 0$, el algoritmo de la bisección genera una sucesión $\{p_n\}$ que se aproxima al valor exacto p con la propiedad:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}; n \geq 1$$

El desarrollo anterior resumió los aspectos más importantes del método, a continuación se los complementa con una serie de ejemplos:

1.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 1: Optimización de áreas.

Se debe fabricar una lata en forma cilíndrica circular recta que contenga 1000 cm^3 . La tapa circular de la parte superior y del fondo deben tener un radio de 0.25 cm más que el radio de la lata para que el sobrante se utilice para sellar con la pared lateral. La hoja de material con que se construye la pared lateral también debe ser 0.25 cm más grande que la circunferencia de la lata de modo que pueda hacerse un sello lateral.

Calcule con una exactitud de 10^{-4} la cantidad mínima de material necesaria para fabricar esta lata.

Una gráfica aproximada del problema planteado es la adjunta.

Sea h la altura del cilindro y sea r el radio del volumen deseado y $r+0.25$ el radio necesario para sellar la tapa.

Se tiene que el área de material a usarse, y valor a minimizar (optimizar) está dada por:

$$A_{total} = 2 * A_{base} + A_{lateral}$$

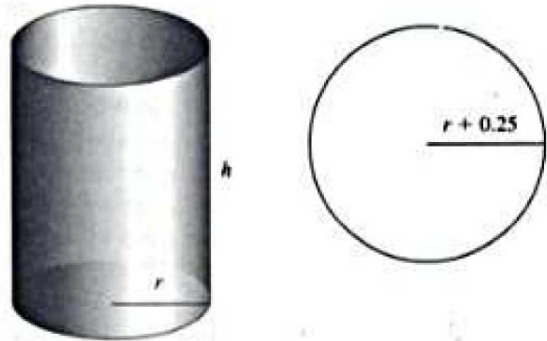
Donde las áreas mencionadas de la base y lateral se pueden reemplazar en función de r , h . además usando el volumen del cilindro se puede dejar la función Área respecto a una sola variable.

Es decir:

$$V = 1000 = \pi r^2 h; h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$A_{total} = 2\pi(r + 0.25)^2 + 2\pi(r + 0.25)h = 2\pi(r + 0.25)^2 + \frac{2000\pi(r + 0.25)}{\pi r^2}$$

Se deduce entonces que la función a optimizar es la siguiente:

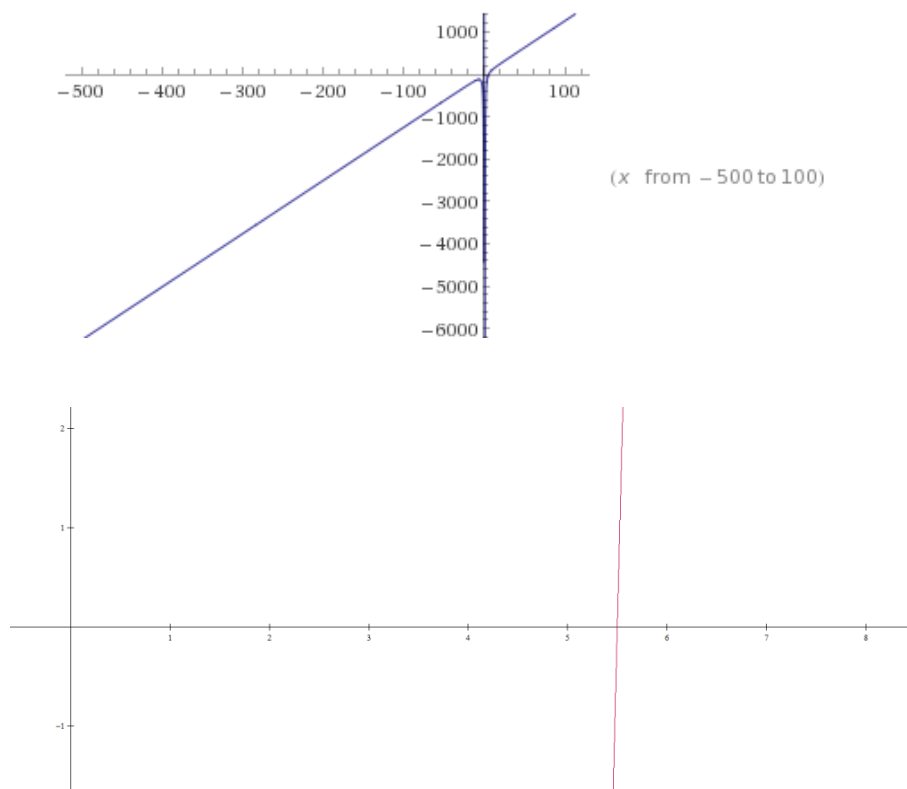


$$A(r) = 2\pi(r + 0.25)^2 + \frac{2000(r + 0.25)}{r^2}$$

Para hallar el punto solicitado de área mínima se iguala a cero esta derivada, luego con el método de bisección se halla la solución deseada, con tolerancia de 10^{-4} .

La derivada con su respectiva gráfica tanto de toda la función como de solo las cercanías al valor estimado de la raíz son:

$$A'(r) = 4\pi(r + 0.25) - \frac{2000}{r^2} - \frac{1000}{r^3}$$



Aquí cabe recalcar que la única raíz positiva de la función esta alrededor de 5 siendo un intervalo que la contiene el [5.1; 5.6].

Este valor resulta coherente dado que el radio solo puede ser positivo por representar una medida.

La tabla de resultados es la siguiente:

n	an	bn	pn	$f(an)$	$f(bn)$	$f(pn)$
0	5.1	5.6	5.35	-17.2020552	4.04345381	-6.03386528
1	5.35	5.6	5.475	-6.03386528	4.04345381	-0.87169719
2	5.475	5.6	5.5375	-0.87169719	4.04345381	1.6153126
3	5.475	5.5375	5.50625	-0.87169719	1.6153126	0.37934
4	5.475	5.50625	5.490625	-0.87169719	0.37934	-0.24427324
5	5.490625	5.50625	5.4984375	-0.24427324	0.37934	0.06800691
6	5.490625	5.4984375	5.49453125	-0.24427324	0.06800691	-0.08801443
7	5.49453125	5.4984375	5.496484375	-0.08801443	0.06800691	-0.00997412
8	5.49648438	5.4984375	5.497460938	-0.00997412	0.06800691	0.0290238
9	5.49648438	5.497460938	5.496972659	-0.00997392	0.02902382	0.0095268
10	5.49648438	5.496972656	5.496728516	-0.00997412	0.00952669	-0.00022325
11	5.49672852	5.496972656	5.496850586	-0.00022326	0.00952669	0.00465183
12	5.49672852	5.496850586	5.496789551	-0.00022326	0.00465183	0.00221432

Ya se conoce el radio buscado sin embargo el problema termina hallando el área mínima que este radio otorga, entonces se evalúa la función $A(r)$ en el radio obtenido.

Se tiene entonces:

$$A_{total} = 2\pi(5.496729551 + 0.25)^2 + \frac{2000(5.496729551 + 0.25)}{5.496729551^2} = 587.9 \text{ cm}^2$$

Ejercicio resuelto 2: Aplicación del teorema del valor medio para integrales.

1) El teorema del valor medio para integrales establece que si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, existe al menos un $\alpha \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b - a)$.

Sea $f(x) = e^x - \text{sen}(\pi x)$; $0 \leq x \leq 2$. Determine:

a) La ecuación para obtener el valor a que satisface el Teorema del Valor Medio con $\int_0^2 f(x)dx$.

b) Un intervalo para resolver la ecuación planteada en a) con el método de la Bisección.

Justifique su respuesta.

c) Muestre el resultado obtenido en la cuarta iteración con el método de la Bisección.

d) Sin realizar más iteraciones, determine cuántas tendría que realizar con el método de la bisección si desea tener la seguridad que el error de truncamiento es menor a 10^{-6} .

Primero se debe hallar el valor de la integral planteada, es decir:

$$\int_0^2 e^x - \text{sen}(\pi x)dx = e^x + \frac{\cos(\pi x)}{\pi} \Big|_0^2 = e^2 - 1$$

Por lo tanto procedemos a igualar este resultado con lo estipulado en el teorema, y evaluando la función f dada en el número α buscado.

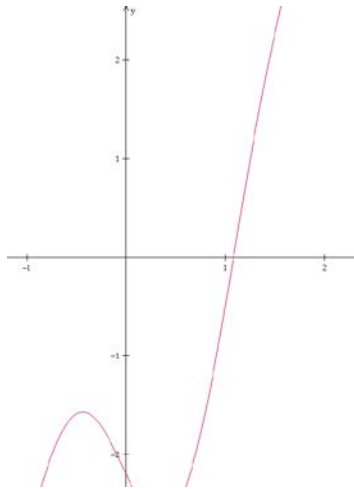
$$e^2 - 1 = f(\alpha)(2 - 0)$$

$$e^2 - 1 = 2(e^\alpha - \text{sen}(\pi\alpha))$$

De la última expresión se halla la ecuación a resolver, llamándole $g(\alpha)$.

$$\text{a) } g(\alpha) = e^\alpha - \text{sen}(\pi\alpha) - \frac{e^2-1}{2} = 0$$

Su gráfica es la siguiente:



b) Del gráfico podemos seleccionar el intervalo, el mismo puede ser $[1, 1.5]$.

Comprobando la validez del mismo tenemos:

$$g(1) = -0.476246 \text{ y } g(1.5) = 2.28716$$

Dado que $g(1)g(1.5) < 0$ por teorema de Bolzano, existe por lo menos una solución en el intervalo escogido.

c) Método de bisección

n	a_n	b_n	p_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(p_n)$
0	1	1.5	1.25	-0.477838874	2.287158167	1.001512569
1	1	1.25	1.125	-0.477838874	1.001512569	0.266716271
2	1	1.125	1.0625	-0.477838874	0.266716271	-0.107501741
3	1.0625	1.125	1.09375	-0.107501741	0.266716271	0.079537771
4	1.0625	1.09375	1.078125	-0.107501741	0.079537771	-0.014050398

d) Por teorema de convergencia del método de bisección tenemos:

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

Reemplazando tenemos:

$$|10^{-6}| \leq \frac{1.5 - 1}{2^n}$$

$$n \approx 18.93$$

Por lo que se concluye que para seguridad del error de truncamiento se deberían tomar $n=19$ iteraciones.

1.3 Método del punto fijo

1.3.1 Generalidades

El método del punto fijo representa una herramienta poderosa y en general más ágil que el método de bisección. Este método basa su nombre y algoritmo en la propiedad de ciertas funciones de tener dentro de su dominio los llamadas puntos fijos, que no son más que puntos en los cuales se cumple que $x = g(x)$, es decir la imagen de la función en ese punto es idéntica al mismo.

En la práctica, al tener una ecuación de la forma $f(x) = 0$, se busca manipular algebraicamente la expresión de f para llegar de alguna forma a la igualdad $x = g(x)$.

Antes de entrar a detallar las condiciones necesarias para que la función g proporcione un algoritmo convergente, se dan pequeños ejemplos de lo que queremos decir con "manipulación algebraica" de f para llegar a la igualdad mencionada.

Suponga que tenemos la ecuación: $e^x - x^2 = 0$, la cual mediante *despejes* y manipulaciones podemos dejar de las siguientes maneras:

$$e^x - x^2 + x = x$$

$$\frac{e^x}{x} = x$$

$$\ln(x^2) = x$$

$$\sqrt{e^x} = x$$

Los cuatro ejemplos previamente presentados nos dan cuatro posibles bosquejos de la tan buscada $g(x)$, en este caso tendríamos las posibilidades:

$$g_1(x) = e^x - x^2 + x$$

$$g_2(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$g_3(x) = \ln(x^2)$$

$$g_4(x) = \sqrt{e^x}$$

En la realidad ninguna de las cuatro funciones que pusimos como candidatas a $g(x)$ proporcionan un algoritmo convergente dado que no cumplen con el criterio de convergencia, de hecho la finalidad del pequeño ejemplo anterior fue que el lector se familiarice con la idea de tener varias candidatas de g para una misma ecuación planteada. En la práctica el ensayo y error, además de práctica nos conducirán a tener mejores elecciones de posibles funciones para el algoritmo.

A continuación enunciaremos el teorema de convergencia del método de punto fijo, en el mismo se hace referencia a un intervalo $[a, b]$ donde se encuentra la solución, no está de más recordar que dado un problema, la elección de dicho intervalo debe justificarse mediante el teorema de Bolzano.

Teorema 3: Sea $g \in C_{[a,b]}$, $g(x) \in [a, b]$, g diferenciable en (a, b) con $|g'(x)| \leq k < 1$ en $[a, b]$. Si $p_0 \in [a, b]$ entonces la sucesión $\{p_n = g(p_{n-1})\}, n \geq 1$ converge al único punto fijo en $[a, b]$.

El teorema en general se puede resumir en lo siguiente, basándonos en las características de la función $g(x)$:

- g evaluada en $[a, b]$ debe tomar valores que también estén incluidos de manera 'cercana' al intervalo $[a, b]$. Dicho de otra manera, las imágenes de la función evaluada en el intervalo debe *parecerse* al intervalo, $[g(a), g(b)]$ debe *parecerse* a $[a, b]$.
- g' no puede tomar valores superiores a 1 ni inferiores a -1 en el intervalo $[a, b]$.

En los ejemplos siguientes se trata de dejar en claro el procedimiento para determinar que funciones podrían converger o no.

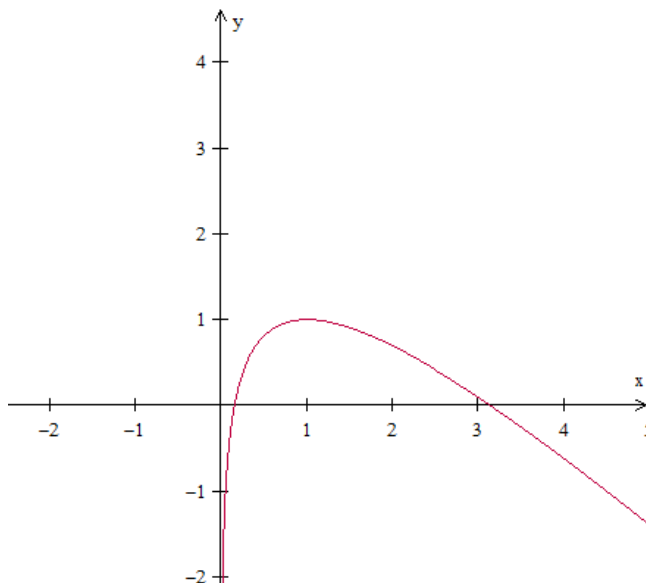
Por costumbre del autor, primero se verifica la condición de acotamiento de g' , si la misma se cumple se continua verificando la otra condición, caso contrario se deja a un lado la función ya que necesita cumplir ambas condiciones.

1.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 3: Convergencia del método de punto fijo.

Resuelva la ecuación $\ln(x)+2-x=0$ empleando el método del punto fijo y justificando la convergencia del método. utilice una tolerancia de 10^{-5} .

Como de costumbre adjuntamos primeramente la gráfica de la función:



De esta gráfica podemos obtener que un buen intervalo de existencia de una de las soluciones es $[3, 3.5]$.

Comprobando su validez tenemos:

$[\ln(3)+2-3][\ln(3.5)+2-3.5] < 0$ por lo tanto por el teorema de Bolzano podemos asegurar que existe por lo menos una solución en el intervalo seleccionado.

A continuación buscamos posibles funciones $g(x)$ que garanticen la convergencia del algoritmo de punto fijo.

La manipulación de la ecuación nos lleva como primera opción de $g(x)$ a la siguiente:

$$g(x) = e^{x-2}$$

Con su derivada:

$$g'(x) = e^{x-2}$$

Para verificar la convergencia de esta opción de $g(x)$ vemos los valores de g' en el intervalo previamente seleccionado.

$$g'(3) = e^{3-2} = e \approx 2.718281828$$

$$g'(3.5) = e^{3.5-2} = e^{1.5} \approx 4.48168907$$

Como podemos ver nuestra primera elección de $g(x)$ no proporciona una función que garantice la convergencia del método dado que la misma excede la cota de $|g'(x)| \leq 1$ en el intervalo de aproximación.

Cabe recalcar que no verificamos la segunda condición dado que como se dijo anteriormente basta que una no se cumpla para poder descartar una opción de $g(x)$.

Una siguiente opción para la función $g(x)$ resulta $g(x) = \ln(x) + 2$ con $g'(x) = \frac{1}{x}$.

Nuevamente verificamos su acotamiento entre -1 y 1 en el intervalo para asegurar la convergencia del método, tenemos:

$$g'(3) = \frac{1}{3} \approx 0.333333 \dots$$

$$g'(3.5) = \frac{1}{3.5} \approx 0.285714285$$

Esta función cumple el acotamiento por lo que continuaremos verificando si sus imágenes *se parecen* al intervalo de aproximación elegido.

Para esto nos damos una idea con los extremos y algún punto interior:

$$g(3) = \ln(3) + 2 = 3.098 \dots$$

$$g(3.25) = \ln(3.25) + 2 = 3.178654 \dots$$

$$g(3.5) = \ln(3.5) + 2 = 3.252762 \dots$$

Como podemos ver la función g evaluada en el intervalo de aproximación *se parece* o está contenida dentro del mismo intervalo de aproximación por lo que la misma cumple totalmente con el criterio de convergencia.

Dado el cumplimiento del criterio de convergencia pasamos a desarrollar el algoritmo:

$$x_{n+1} = g(x_n) = \ln(x_n) + 2$$

Escogemos un punto que pertenezca al intervalo para realizar las iteraciones, en este caso escogemos $x_0=3.1$ para el cual tenemos la siguiente tabla de resultados:

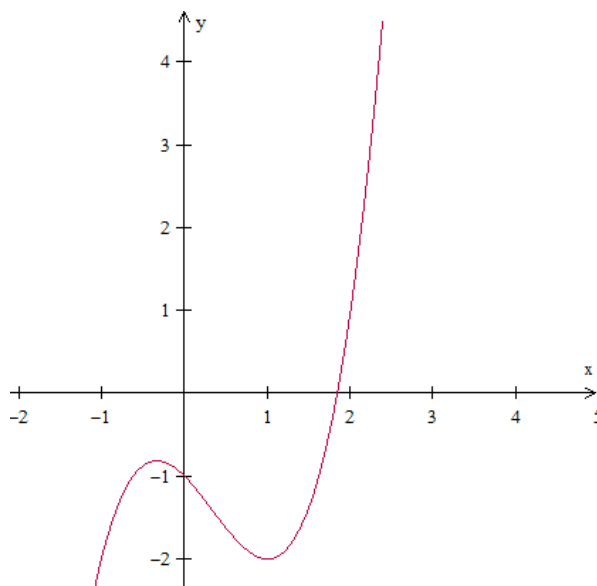
n	x_n	x_{n+1}	Tol
0	3.1	3.131402111	0.031402111
1	3.131402111	3.141480863	0.010078752
2	3.141480863	3.144694301	0.003213438
3	3.144694301	3.145716684	0.001022383
4	3.145716684	3.146041745	0.000325061
5	3.146041745	3.146145074	0.000103329
6	3.146145074	3.146177917	3.28436E-05
7	3.146177917	3.146188357	1.04393E-05
8	3.146188357	3.146191675	3.31807E-06

Finalmente concluimos que una de las soluciones de la ecuación planteada es 3.146191675.

Ejercicio resuelto 4: Búsqueda de raíces de un polinomio.

El polinomio $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ tiene una única raíz positiva. Encuentre un intervalo donde se garantice la existencia de esta raíz (justifique!). Utilizando el método del punto fijo, presente una tabla que contenga la sucesión de valores, con un criterio de interrupción del método iterativo con tolerancia 10^{-9} .

Presentamos la gráfica del polinomio, dado que la ecuación a resolver será $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$.



Buscamos ahora un intervalo de existencia de la raíz, el mismo será de $[1.5, 2]$ dado que por el teorema de Bolzano $p(1.5) p(2) < 0$ existe por lo menos una solución dentro del mismo.

A continuación buscamos la función g que garantice la convergencia del algoritmo de punto fijo. el primer bosquejo de función será:

$$g(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$$

La misma tiene por derivada:

$$g'(x) = \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)^{\frac{2}{3}}}$$

Para verificar la convergencia del método vemos los valores que toma la derivada en los extremos del intervalo, los mismos son:

$$g'(1.5) = \frac{2(1.5) + 1}{3(1.5^2 + 1.5 + 1)^{\frac{2}{3}}} \approx 0.4719$$

$$g'(2) = \frac{2(2) + 1}{3(2^2 + 2 + 1)^{\frac{2}{3}}} \approx 0.4554$$

Las derivadas en los extremos cumplen el criterio de acotamiento por lo que podemos empezar a verificar la segunda condición del criterio de convergencia para lo cual evaluaremos la función en los extremos del intervalo y algún punto interior.

$$g(1.5) = \sqrt[3]{(1.5)^2 + (1.5) + 1} = 1.68 \dots$$

$$g(1.75) = \sqrt[3]{(1.75)^2 + (1.75) + 1} = 1.79799 \dots$$

$$g(2) = \sqrt[3]{(2)^2 + (2) + 1} = 1.912931 \dots$$

Dado que se cumplen ambas condiciones del criterio de convergencia, procedemos a elaborar el algoritmo del punto fijo y presentamos la tabla de resultados:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n^2 + x_n + 1}$$

Las iteraciones se muestran a continuación con una aproximación $x_0=1.7$.

Por factor espacio debido al número de iteraciones necesarias la tabla se muestra en partes, tanto en esta como en la siguiente hoja:

n	x_n	x_{n+1}	Tol
0	1.7	1.774750345	0.074750345
1	1.774750345	1.80946548	0.034715135
2	1.80946548	1.825524294	0.016058813
3	1.825524294	1.832939153	0.007414859
4	1.832939153	1.836359877	0.003420724
5	1.836359877	1.837937342	0.001577465
6	1.837937342	1.838664656	0.000727314
7	1.838664656	1.838999966	0.00033531
8	1.838999966	1.839154546	0.00015458
9	1.839154546	1.839225808	7.12614E-05
10	1.839225808	1.839258659	3.28512E-05
11	1.839258659	1.839273803	1.51442E-05
12	1.839273803	1.839280784	6.98135E-06
13	1.839280784	1.839284003	3.21835E-06
14	1.839284003	1.839285486	1.48363E-06

15	1.839285486	1.83928617	6.83943E-07
16	1.83928617	1.839286486	3.15292E-07
17	1.839286486	1.839286631	1.45347E-07
18	1.839286631	1.839286698	6.70039E-08
19	1.839286698	1.839286729	3.08883E-08
20	1.839286729	1.839286743	1.42392E-08
21	1.839286743	1.83928675	6.56417E-09
22	1.83928675	1.839286753	3.02603E-09
23	1.839286753	1.839286754	1.39498E-09
24	1.839286754	1.839286755	6.43072E-10

Vale la pena destacar que la tolerancia deseada se alcanzó en la iteración 25, por lo que podemos ver que el método a pesar de converger lo hace lentamente.

1.4 Método de Newton

1.4.1 Generalidades

El método tratado en esta sección es sin duda el de convergencia más acelerada de los tratados hasta ahora, el mismo tiene un algoritmo algo similar al de punto fijo lo cual se explica dado que el método de Newton es un caso particular del mismo.

Regresamos al caso inicial de tener que resolver un problema de la forma $f(x) = 0$, para poder aplicar este método la función f debe ser derivable dos veces, es decir $(f \in C^2_{[a, b]})$ donde $[a, b]$ es el intervalo de existencia de la raíz seleccionado al incoar el procedimiento (siendo justificado adecuadamente por el teorema de Bolzano). Además la función f' no debe ser nula en el intervalo antes mencionado.

Estas condiciones garantizan la convergencia del método, que tiene por algoritmo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La mayor dificultad en este algoritmo radica en calcular bien la derivada de la función y elegir una aproximación inicial cercana a la solución exacta.

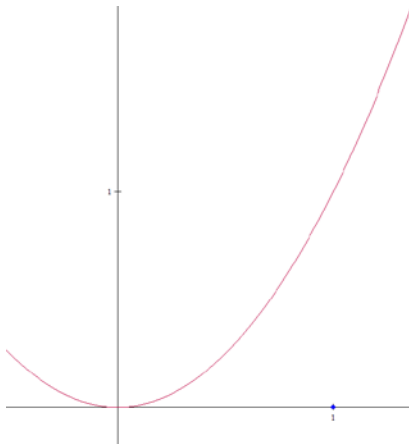
Para muchos estudiantes es el método más fácil de aplicar, siendo además el de convergencia más acelerada ya que el mismo tiene convergencia cuadrática.

1.4.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 5: Distancia mínima.

Use el método de Newton para aproximar con un grado de exactitud de 10^{-4} el valor de x que en la gráfica de $y=x^2$ produce el punto más cercano a $(1,0)$.

La gráfica del problema planteado es la siguiente:



La función distancia entre dos puntos cualquiera en \mathbb{R}^2 está dada por:

$$d^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

Sea el punto $(x_1, y_1)=(x, x^2)$ y $(x_0, y_0)=(1,0)$. El punto y_1 se reemplaza por x^2 debido a que pertenece a la función $y=x^2$.

Se optimiza la función d^2 ya que arrojará el mismo resultado que optimizar la función d pero de forma más sencilla.

Reemplazando con las relaciones antes expresadas se obtiene:

$$d^2 = (x - 1)^2 + (x^2 - 0)^2$$

Derivando respecto a x se tiene:

$$2d = 2(x - 1) + 4x^3$$

Para optimizar se iguala la derivada a cero:

$$2(x - 1) + 4x^3 = 0$$

Aplicando el método de Newton, y usando como aproximación inicial al número 0.8, se tiene las iteraciones:

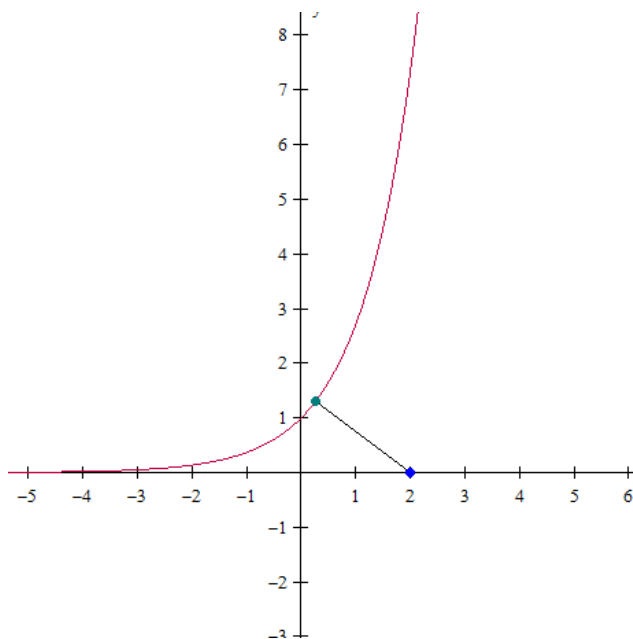
<i>n</i>	<i>X_n</i>	<i>X_{n+1}</i>	<i>Tolerancia</i>
0	0.8	0.58541667	2.15E-01
1	0.58541667	0.5918963	6.48E-03
2	0.5918963	0.58874335	3.15E-03
3	0.58874335	0.59024245	1.50E-03
4	0.59024245	0.58952149	7.21E-04
5	0.58952149	0.58986636	3.45E-04
6	0.58986636	0.58970096	1.65E-04
7	0.58970096	0.58978018	7.92E-05

Así se deduce que el punto más cercano de la curva $y=x^2$ al punto (1,0) es (0.58978018,0.34784066).

Ejercicio resuelto 6: Otro problema de distancia mínima.

Aproxime con una exactitud de 10^{-4} el valor de x en que la gráfica de $y=e^x$ produce el punto más cercano a (2,0).

La gráfica del problema planteado es la siguiente, donde el punto azul corresponde al punto dado como dato y el verde al punto que queremos hallar (graficado conociendo la respuesta).



Se conoce que la función distancia en el plano está dada por:

$$d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

Sean x_0, y_0 el punto dado como dato y sea x,y un punto cualquiera de la curva dada. Se tiene:

$$d^2 = (x - 2)^2 + (e^x)^2$$

La función ofrece un mínimo cuando su derivada se iguala a cero, por lo que:

$$2d = 2(x - 2) + 2(e^x)^2 = 0$$

De aquí se obtiene que la función a la cual se debe hallar sus raíces sea la siguiente:

$$f(x) = (x - 2) + e^{2x} = 0$$

Aproximando por método de Newton, y escogiendo como punto de aproximación inicial a $x_0=0.3$.

Se obtiene el algoritmo de Newton y las iteraciones:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n - 2 + e^{2x_n}}{1 + 2e^{2x_n}}$$

n	Xn	Xn+1	tol
0	0.3	0.273705307	2.63E-02
1	0.273705307	0.273149828	5.55E-04
2	0.273149828	0.273149589	2.39E-07

Por lo tanto el valor de x para el cual la gráfica se encuentra más cercana a $(2,0)$ es $x=0.273149589$.

2. Sistemas de ecuaciones lineales

"Mejor que de nuestro juicio, debemos fiarnos del cálculo algebraico".

Leonhard Euler

2.1 Introducción

Estamos en general familiarizados con la idea de un sistema lineal de ecuaciones desde las matemáticas básicas de colegio, sin embargo en la práctica no siempre se nos presenta un sistema al cual sea del todo sencillo aplicarle el método directo de Gauss Jordan, esto se debe principalmente a la aparición de coeficientes no enteros que generan un poco más de trabajo.

Asimismo se nos pueden presentar sistemas de un tamaño algo mayor, entiéndase un sistema de 7×7 por ejemplo donde el método de Gauss Jordan se volverá algo tedioso.

Herramientas en la resolución de sistemas de este tipo son los métodos que presentaremos a continuación, en realidad ambos métodos poseen un mismo algoritmo pero poseen una gran diferencia al aplicarlos lo cual se explicara más a fondo en unas páginas.

Para la total comprensión de los conceptos a usarse más adelante sugerimos al lector revisar las definiciones de norma matricial y vectorial.

2.2 Método de Jacobi

2.2.1 Generalidades

Considere un sistema de la forma $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Al realizar la operación matricial, obtenemos:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

De lo previamente obtenido podemos despejar cada variable en orden de cada fila, con lo cual tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

De las variables despejadas podemos llegar a un algoritmo de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^{(k-1)} + \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

Este algoritmo comúnmente es expresado: $X^k = TX^{k-1} + C$ donde la matriz y vectores que lo conforman se pueden distinguir claramente de la forma matricial antes presentada.

Dado un sistema cualquiera a resolver, los pasos a seguir son claros. Se debe despejar de cada fila cada variable para así con eso poder obtener la matriz y vector T, C respectivamente y formar el algoritmo.

Sin embargo antes de proceder con las iteraciones vale la pena revisar los criterios de convergencia de este método, (de hecho los mismos se aplican también para el siguiente método, el de Gauss - Seidel).

Teorema 4: Sea la sucesión $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ definida por $X^k = TX^{k-1} + C$. La sucesión converge $\forall X^0 \in R^n$ si y solo si:

- La matriz de coeficientes A (de donde proviene la sucesión) es una matriz estrictamente dominante diagonalmente.
- El radio espectral de la matriz T , cumple que $\rho(T) < 1$.

2.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 7: Criterio de convergencia e iteraciones en Jacobi.

Dado el sistema $AX=B$ con $a_{ij} = \begin{cases} 8+i & i=j & i=1,2,3 \\ i+j & i \neq j & i=1,2,3 & j=1,2,3 \end{cases}$ con $b_i=2i; i=1,2,3$.

a) Indique si se cumple alguna condición de convergencia para resolver con un método iterativo.

b) Comience con un vector aproximación inicial $X^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$. Encuentre el vector diferencia en la tercera iteración, entre las soluciones calculadas con los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Nota: Solo se desarrollaran las iteraciones del método de Jacobi, este ejercicio será complementado en la siguiente sección con el método de Gauss-Seidel.

El sistema expresado en términos de 'formulas', escrito en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La respuesta al literal **a)** es que el sistema sí se presta para ser resuelto por algún método iterativo tal y como nos lo dieron, dado que la matriz A de coeficientes es estrictamente dominante diagonalmente, para resolver el literal **b)**, necesitamos el algoritmo de Jacobi.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -3/9 & -4/9 \\ -3/10 & 0 & -5/10 \\ -4/11 & -5/11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 2/9 \\ 4/10 \\ 6/11 \end{bmatrix}$$

Aplicando ambos métodos con el vector aproximación inicial dado $X^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$, se tiene:

Iteraciones del método de Jacobi:

$$i=1 \begin{bmatrix} -0.56 \\ -0.4 \\ -0.27 \end{bmatrix}$$

$$i=2 \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.70 \\ 0.92 \end{bmatrix}$$

$$i=3 \begin{bmatrix} -0.43 \\ -0.21 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Ejercicio resuelto 8: Construya el algoritmo de Jacobi para el sistema planteado e itere el mismo 3 veces, si la solución exacta es $X^e = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, halle el error para la última iteración hecha.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ -17x - 32y + z = 29 \\ 3x - 2y - 9z = 9 \end{cases}$$

El desarrollo del problema nos permite ir directo al algoritmo dado que el sistema tal como fue proporcionado ya es un sistema estrictamente dominante diagonalmente.

El algoritmo toma la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ -17/32 & 0 & 1/32 \\ 1/3 & -2/9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 2 \\ -29/32 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dado que no nos proporcionan un vector aproximación inicial usaremos el vector cero, teniendo las siguientes iteraciones:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -29/32 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 2.6041666 \\ -2 \\ -0.1319444 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 3.3333 \\ -2.29383676875 \\ 0.3124999 \end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos el error entre la tercera iteración y la solución exacta:

$$\|X^e - X^3\| = \left\| \begin{array}{c} 0.66667 \\ -0.70616323125 \\ 0.6875001 \end{array} \right\| = 0.70616323125$$

2.3 Método de Gauss - Seidel

2.3.1 Generalidades

Como antes se indicó, el método de Gauss - Seidel usa el mismo algoritmo que el de Jacobi, sin embargo tiene una marcada diferencia en su uso. Esta diferencia radica en el aumento de una parte al algoritmo de Jacobi, el cálculo de la i -ésima componente dado que el vector se actualiza antes de pasar a la siguiente iteración usando el ya conocido $X^k = TX^{k-1} + C$.

Lo mismo se representa:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right]$$

De forma sencilla podemos ver que cada entrada del vector se actualiza en cada iteración i , mediante iteraciones internas j , lo mismo produce aproximaciones más rápidas ya que cada valor actualizado sustituye su antecesor.

Un ejemplo sencillo y explicativo sería el siguiente:

Supongamos el algoritmo usado en uno de los ejercicios resueltos de la sección anterior:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 & 0 \\ -17/32 & 0 & 1/32 \\ 1/3 & -2/9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 2 \\ -29/32 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tomando como vector inicial al vector cero $X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tenemos:

Para $i=1$

Al realizar el proceso hasta ahora conocido obteníamos el vector:

$$X^{01} = \begin{pmatrix} 2 \\ -29/32 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Dado que estamos en la primera iteración interna cambiamos la primer entrada por lo que ahora nuestro vector inicial pasara a ser:

$$X^{00} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siguiendo en la iteración $i=1$, repetimos el proceso para actualizar la segunda entrada. De esta forma obtenemos un vector:

$$X^{02} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.96875 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora con este actualizamos la segunda entrada que estaba pendiente por lo que tenemos:

$$X^{n0} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.96875 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente en esta iteración multiplicamos este vector actualizado por T y le sumamos C como ya es conocido, obteniendo por fin el vector final de $i=1$.

$$X^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1.96875 \\ 0.1041666 \end{pmatrix}$$

Este proceso tedioso pero más efectivo se repite en cada iteración i .

En los ejercicios resueltos se muestran los vectores que se dan como resultados finales de cada iteración i más no de los pasos intermedios en cada una de ellas.

2.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 9: Complemento del ejercicio 7.

Dado el sistema $AX=B$ con $a_{ij} = \begin{cases} 8+i & i=j & i=1,2,3 \\ i+j & i \neq j & i=1,2,3 & j=1,2,3 \end{cases}$ con $b_i=2i; i=1,2,3$.

a) Indique si se cumple alguna condición de convergencia para resolver con un método iterativo.

b) Comience con un vector aproximación inicial $X^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$. Encuentre el vector diferencia en la tercera iteración, entre las soluciones calculadas con los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Nota: Solo se desarrollaran las iteraciones del método de Jacobi, este ejercicio será complementado en la siguiente sección con el método de Gauss-Seidel.

El sistema expresado en términos de 'formulas', escrito en forma matricial es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 3 & 10 & 5 \\ 4 & 5 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

La respuesta al literal a) es que el sistema sí se presta para ser resuelto por algún método iterativo tal y como nos lo dieron, dado que la matriz A de coeficientes es estrictamente dominante diagonalmente, para resolver el literal b, necesitamos el algoritmo de Jacobi.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -3/9 & -4/9 \\ -3/10 & 0 & -5/10 \\ -4/11 & -5/11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 2/9 \\ 4/10 \\ 6/11 \end{bmatrix}$$

Aplicando ambos métodos con el vector aproximación inicial dado $X^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$, se tiene:

Iteraciones del método de Jacobi:

$$i=1 \begin{bmatrix} -0.56 \\ -0.4 \\ -0.27 \end{bmatrix}$$

$$i=2 \begin{bmatrix} 0.48 \\ 0.70 \\ 0.92 \end{bmatrix}$$

$$i=3 \begin{bmatrix} -0.43 \\ -0.21 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Iteraciones del método de Gauss Seidel:

$$i=1 \begin{bmatrix} -0.56 \\ 0.07 \\ 0.71 \end{bmatrix}$$

$$i=2 \begin{bmatrix} -0.12 \\ 0.08 \\ 0.55 \end{bmatrix}$$

$$i=3 \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.13 \\ 0.50 \end{bmatrix}$$

Finalmente el vector diferencia es entonces la resta de los resultados en las iteraciones 3 de ambos métodos:

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} -0.38 \\ -0.34 \\ -0.45 \end{bmatrix}$$

Ejercicio resuelto 10: Manipulación de un sistema para garantizar su convergencia.

Considere el sistema $AX=B$ dado por:

$$\begin{cases} 0.4x + 1.1y + 3.1z = 7.5 \\ 4x + 0.15y + 0.25z = 4.45 \\ 2x + 5.6y + 3.1z = 0.1 \end{cases}$$

De ser posible manipule el sistema de tal forma que se garantice la convergencia del método de Gauss Seidel, determine la solución de este sistema con un vector inicial $(1,1,1)$ y con una tolerancia de 10^{-4} .

Empezamos por manipular el sistema, con una rápida mirada podemos notar que no es necesario sumar o restar alguna fila a otra. Basta con hacer un cambio de filas para tener una matriz estrictamente dominante diagonalmente.

El cambio de filas arroja el sistema totalmente equivalente:

$$\begin{cases} 4x + 0.15y + 0.25z = 4.45 \\ 2x + 5.6y + 3.1z = 0.1 \\ 0.4x + 1.1y + 3.1z = 7.5 \end{cases}$$

De donde al despejar cada variable obtenemos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0.15/4 & -0.25/4 \\ -2/5.6 & 0 & -3.1/5.6 \\ -0.4/3.1 & -1.1/3.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} 4.45/4 \\ 0.1/5.6 \\ 7.5/3.1 \end{bmatrix}$$

Las iteraciones con $X^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se presentan a continuación:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 1.0125 \\ -0.897321428571 \\ 2.6071140553 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0.983204925115 \\ -1.7765113253 \\ 2.92286467348 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0.996440132605 \\ -1.95602870589 \\ 2.98485662046 \end{pmatrix}$$

$$X^4 = \begin{pmatrix} 0.999297537692 \\ -1.99136617836 \\ 2.99702702617 \end{pmatrix}$$

$$X^5 = \begin{pmatrix} 0.999862042552 \\ -1.99830497611 \\ 2.99941634087 \end{pmatrix}$$

$$X^6 = \begin{pmatrix} 0.9999729153 \\ -1.99966722988 \\ 2.99988541508 \end{pmatrix}$$

$$X^7 = \begin{pmatrix} 0.999994682678 \\ -1.99993467002 \\ 2.9999775045 \end{pmatrix}$$

$$X^8 = \begin{pmatrix} 0.999998956095 \\ -1.9999871743 \\ 2.99999558364 \end{pmatrix}$$

2.4 Número de condición de un sistema

2.4.1 Generalidades

Los sistemas de ecuaciones son muy usados cotidianamente en el área de ciencias e ingeniería, sin embargo muchas veces debemos realizar correcciones a nuestras mediciones o en general a nuestras ecuaciones que conforman un sistema pero qué tanto afectara un cambio en algún coeficiente del sistema a su solución?

La presente sección trata sobre los sistemas mal o bien condicionados que no son más que los sistemas sensibles o no a los cambios en sus coeficientes, cabe recalcar que la medida de su sensibilidad se da mediante un valor denominado numero de condición y la sensibilidad como tal es la variación de la solución del sistema por cambios en sus coeficientes.

El numero de condición $k(A)$ de una matriz de coeficientes A (si y solo si A es no singular) se determina mediante:

$$k(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty}$$

Se puede probar que siempre $k(A) \geq 1$, y se entiende por sistema mal condicionado el que tenga una matriz de coeficientes A con $k(A) \gg 1$.

2.4.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 11: Condicionamiento de sistemas.

Un local vende tres materiales A, B, C por peso en Kg. En el cuadro se muestra la cantidad de Kg vendida en tres días y el dinero ingresado por la venta (dólares), en cada día:

Día	Venta Kg de A	Venta Kg de B	Venta Kg de C	Ingreso por venta
1	9	8	3	27.00
2	7	6	5	24.40
3	2	1	9	16.50

a) *Plantee un sistema de ecuaciones para determinar el precio por Kg. de cada material: A, B, C.*

b) *Obtenga la solución resolviendo el sistema con método directo de Gauss.*

c) *Suponga que uno de los coeficientes tiene un error de 0.1 (reemplace el coeficiente 3 por 3.1), determine hasta cuanto puede variar el error relativo de la solución con respecto al error relativo de la matriz si se conoce que la inversa de la matriz con los datos originales dado en el cuadro es*

$\begin{bmatrix} 24.5 & -34.5 & 11 \\ -26.5 & 37.5 & -12 \\ -2.5 & 3.5 & -1 \end{bmatrix}$. *Es este un sistema mal condicionado? Usaría la solución obtenida?*

Justifique su respuesta.

El sistema de ecuaciones a resolver, solicitado en el literal a) es el siguiente:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24.4 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

El sistema tiene como solución (luego de reducir por Gauss):

$$\mathbf{b)} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.5 \\ 1.4 \end{bmatrix}$$

c) El nuevo sistema a resolver es:

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & 3.1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ 24.4 \\ 16.5 \end{bmatrix}$$

Cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.37 \\ 6.446 \\ 1.866 \end{bmatrix}$$

El error relativo entre ambas soluciones es: $|X - X'| = 3.297333$, mientras que el error relativo entre matrices es apenas: $|A - A'| = 0.005$.

Es obvio que el sistema ha cambiado drásticamente su solución por un cambio pequeño en un coeficiente, lo cual se puede comprobar con el número de condición:

$$k(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 20(76)$$

$$k(A) = 1520$$

El número de condición es mucho mayor que 1, por lo que el sistema es mal condicionado y no es recomendable usar su solución.

Incluso podemos notar que al cambiar los coeficientes la solución pasó a ser ilógica dado que no se pueden vender cantidades negativas de materiales.

Ejercicio resuelto 12: Otro problema de condicionamiento de sistemas.

Entre otros objetos se transportaron refrigeradoras y cocinas en un container. Cada cocina pesa una tonelada y cada refrigeradora dos toneladas, por otro lado una cocina ocupa un espacio de 1.05 m^3 y cada refrigeradora 2 m^3 . En total entre cocinas y refrigeradoras se registró un peso de 10 toneladas y ocuparon un espacio juntas de 10.4 m^3 . Se desea conocer cuantas cocinas y refrigeradoras se transportó en el container.

a) Plantear este problema como el de un sistema de ecuaciones y resolverlo con un método directo (Gauss), usar aritmética de 4 dígitos.

b) El encargado de transporte se equivocó y en realidad cada cocina ocupa un espacio de 1.1 m^3 . Encuentre nuevamente la solución.

c) El sistema de ecuaciones usado, es bien o mal condicionado?

a) Planteamos el problema como un sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.05 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10.4 \end{pmatrix}$$

El mismo tiene por solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Planteamos nuevamente el problema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1.1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10.4 \end{pmatrix}$$

El mismo tiene por solución:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Primero necesitamos la inversa de la matriz de coeficientes, esta inversa es:

$$\begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 10.5 & -10 \end{pmatrix}$$

Finalmente el número de condición de la matriz de coeficientes será:

$$k(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 3.05(40)$$

$$k(A) = 122$$

Siendo el número de condición mucho mayor que 1, concluimos que el sistema es muy mal condicionado.

3. Sistemas de ecuaciones no lineales (OPCIONAL)

"No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje; y no la posesión, sino el acto de llegar a ella, lo que concede el mayor disfrute".

Carl Friedrich Gauss

3.1 Introducción

En el capítulo anterior tratamos el tema de un sistema de ecuaciones lineales, pero no siempre nos enfrentaremos a este tipo de sistemas.

Considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2 \cos(xy) + x^2 = 4 \\ e^x + y + \ln(xy) = 1 \end{cases}$$

El sistema antes considerado no representa un ejemplo en el cual podamos aplicar los métodos del capítulo anterior ya que para ambos requeríamos *despejar* una variable en cada fila para armar el algoritmo respectivo.

La no linealidad de las ecuaciones presentadas nos conduce a un nuevo capítulo, el de sistemas de ecuaciones no lineales.

En este capítulo solo presentaremos un método, el de Newton, dado su facilidad de aplicación y buena convergencia. Como es de costumbre no profundizamos en los teoremas ni en las deducciones de algoritmos pero podemos hacer una pequeña analogía para entender algo mejor el método antes mencionado.

3.1 Método de Newton

3.1.1 Generalidades

Recordemos el algoritmo del método de Newton para **una sola ecuación no lineal**, el mismo era:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Para tratar de crear una analogía primero reemplazamos los valores aproximados x_{n+1} y x_n ya no por valores sino por vectores aproximados dado que buscamos solución a un sistema de ecuaciones. A continuación nos fijamos del restando en el algoritmo de una sola ecuación. En el mismo tenemos una división, una operación no definida en el álgebra de matrices.

Esta división nos lleva a ingresar la idea más cercana de la misma en el álgebra de matrices, la de matriz inversa. Ahora nos queda realizar alguna analogía a la función f ya que esta influye también en nuestra matriz inversa. De hecho si el lector es observador, solo dijimos que ingresaríamos una matriz inversa sin embargo nunca dijimos la inversa de quien.

Sin más preámbulos, presentamos la analogía a la cual hacemos referencia, supongamos un sistema de la forma:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Donde (x_1, x_2, \dots, x_n) son nuestras incógnitas, definimos al vector $F(X) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ como el reemplazante del término $f(x_n)$, y como reemplazante de $f'(x_n)$ a la matriz de derivadas de las funciones f_1, f_2, \dots, f_n que no es más que la Jacobiana dada por:

$$J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

De esta forma nuestro algoritmo para un sistema no lineal toma la forma:

$$X^k = X^{k-1} + Y^{k-1}$$

Donde $Y^{k-1} = -J(X)^{-1}F(X)$, la matriz $J(X)$ y el vector $F(X)$ se evalúan en las diversas aproximaciones de cada iteración por lo que en realidad son funciones de varias variables.

3.1.2 Ejemplo

Ejercicio resuelto 13: Coeficientes de una función.

TEMA 1.- Determine los coeficientes a, b para que la función $f(x) = (ax + b)e^{ax+b} + a$ incluya los puntos $(1, 3), (2, 4)$.

a) Describa el método numérico iterativo que utilizara y también el algoritmo respectivo

b) Elija como valor inicial el punto $(0, 1)$ y realice tres iteraciones

c) Encuentre la norma del error sabiendo que la respuesta es $(0.157877\dots, 0.864522\dots)$

Desarrollo:

a) Se usará el método de Newton para un sistema de ecuaciones no lineales, el cual tiene por algoritmo lo siguiente:

$$X^i = X^{i-1} - J^{-1}_{i-1} F_{i-1}$$

Donde J es la matriz Jacobiana resultante de las derivadas parciales de las dos funciones obtenidas. El vector F es el vector de funciones f_1 y f_2 . Tanto el vector F , como la matriz J se evalúan en los pares ordenados (a_i, b_i) para cada iteración.

$$f_1 = (a + b)e^{a+b} + a - 3 = 0$$

$$f_2 = (2a + b)e^{2a+b} + a - 4 = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a} = e^{a+b} + (a + b)e^{a+b} + 1$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial b} = e^{a+b} + (a + b)e^{a+b}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a} = 2e^{2a+b} + 2(2a + b)e^{2a+b} + 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial b} = e^{2a+b} + (2a + b)e^{2a+b}$$

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} \end{pmatrix}$$

Para cada iteración se usan la matriz Jacobiana y vector de funciones a continuación presentados:

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} e^{a+b} + (a + b)e^{a+b} + 1 & e^{a+b} + (a + b)e^{a+b} \\ 2e^{2a+b} + 2(2a + b)e^{2a+b} + 1 & e^{2a+b} + (2a + b)e^{2a+b} \end{pmatrix}$$

$$F(a, b) = \begin{pmatrix} (a + b)e^{a+b} + a - 3 \\ (2a + b)e^{2a+b} + a - 4 \end{pmatrix}$$

b) Primera iteración:

$$X^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}_0 = \begin{pmatrix} -0.183939721158 & 0.183939721158 \\ 0.401713262535 & -0.217773542053 \end{pmatrix}$$

$$F_0 = \begin{pmatrix} -0.28171817 \\ -1.28171817 \end{pmatrix}$$

$$X^1 = X^0 - J^{-1}_0 F_0$$

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0.183939721158 \\ 0.834045619391 \end{pmatrix}$$

Segunda iteración:

$$X^1 = \begin{pmatrix} 0.183939721158 \\ 0.834045619391 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}_1 = \begin{pmatrix} -0.187003677159 & 0.142587552145 \\ 0.399537787374 & -0.168117985711 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0.00132953 \\ 0.18216088 \end{pmatrix}$$

$$X^2 = X^1 - J^{-1}_1 F_1$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0.158214474181 \\ 0.864138942138 \end{pmatrix}$$

Tercera iteración:

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0.158214474181 \\ 0.864138942138 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1}_2 = \begin{pmatrix} -0.184729455292 & 0.146255402383 \\ 0.395475623028 & -0.172272114827 \end{pmatrix}$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} 7.9844 \times 10^{-5} \\ 0.00240662 \end{pmatrix}$$

$$X^3 = X^2 - J^{-1}_2 F_2$$

$$X^3 = \begin{pmatrix} 0.157877242543 \\ 0.864521959299 \end{pmatrix}$$

c) Se calcula primero el vector diferencia entre los valores de la tercera iteración y de la solución exacta:

$$X^3 - X_{exacta} = \begin{pmatrix} 0.000000242543 \\ -0.000000040701 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la norma del error es:

$$\|X^3 - X_{exacta}\| = 0.000000242543$$

4. Interpolación polinómica

"Si he logrado ver más lejos, ha sido porque he subido a hombros de gigantes".

Isaac Newton

4.1 Introducción

En cuanto a la experimentación se refiere, tanto en ciencias como en ingeniería muchas veces se recolectan una serie de puntos que representan el estudio de alguna variable que fijamos como independiente y de algún parámetro que creemos depende de la misma.

Estas lecturas de valores nos proporcionan información acerca del comportamiento de la función que explica la relación entre ambas variables sin embargo no nos permite establecer de forma directa la estructura algebraica de esta relación.

Existen técnicas poderosas llamadas interpolación donde partiendo de una serie de datos, en general pares ordenados, tratamos de bosquejar la función de donde los mismos provinieron mediante polinomios interpolantes.

Los polinomios interpolantes más usados son los de Lagrange y los llamados trazadores cúbicos, los mismos se estudiarán en el presente capítulo.

4.2 Polinomio de Lagrange

4.2.1 Generalidades

El objetivo no solo de la sección sino del capítulo como antes fue mencionado es la aproximación del comportamiento de algún fenómeno estudiado donde se hayan recolectado puntos de la forma (x, y) que es equivalente a $(x, f(x))$. Suponga en principio que ha recolectado $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ puntos, es decir en total $n+1$ puntos.

Se define como polinomio de interpolación de Lagrange al polinomio de la forma:

$$p(x) = L_0f(x_0) + L_1f(x_1) + L_2f(x_2) + \dots + L_nf(x_n)$$

De grado n definido en el intervalo $[x_0, x_n]$ donde los factores $f(x_j)$ corresponden a las funciones evaluadas en cada uno de los valores en el eje x . Además los factores L se calculan de la siguiente forma:

$$L(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Estos coeficientes L cumplen las siguientes propiedades:

- $L_k(x_i) = 0, i \neq k$
- $L_k(x_i) = 1, i = k$

Finalmente a los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ se los denomina puntos de interpolación y a los valores x_0, x_1, \dots, x_n se los denomina nodos de interpolación.

4.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 14: Una ecuación obtenida del polinomio de Lagrange.

Obtener con la tabla adjunta, una aproximación a la solución de $x-p(x)=0$ donde $p(x)$ es el polinomio de Lagrange usando los puntos dados.

x	$f(x)$
0.3	0.740818
0.4	0.670320
0.5	0.606531
0.6	0.548812

Se construye el polinomio de Lagrange de grado 3 con los datos proporcionados para luego generar iteraciones mediante algún método escogido y hallar la solución pedida.

Recordamos que el polinomio de Lagrange tendrá la forma:

$$p(x) = L_0f(x_0) + L_1f(x_1) + L_2f(x_2) + L_3f(x_3)$$

Por lo que calculamos los valores de los coeficientes L .

$$L_0 = \frac{(x - 0.4)(x - 0.5)(x - 0.6)}{(0.3 - 0.4)(0.3 - 0.5)(0.3 - 0.6)}$$

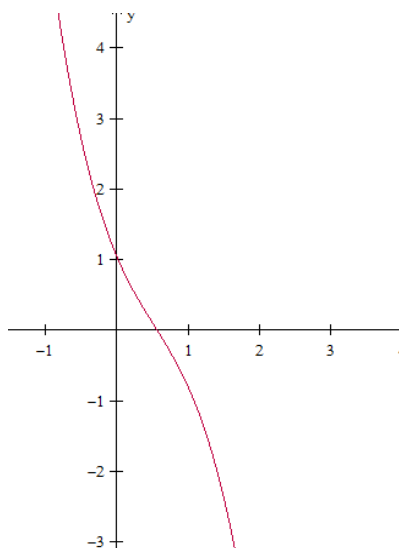
$$L_1 = \frac{(x - 0.3)(x - 0.5)(x - 0.6)}{(0.4 - 0.3)(0.4 - 0.5)(0.4 - 0.6)}$$

$$L_2 = \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.6)}{(0.5 - 0.3)(0.5 - 0.4)(0.5 - 0.6)}$$

$$L_3 = \frac{(x - 0.3)(x - 0.4)(x - 0.5)}{(0.6 - 0.3)(0.6 - 0.4)(0.6 - 0.5)}$$

Resolviendo los productos entre los $Lf(x)$ para cada x se obtiene:

$$p(x) = -0.939833x^3 + 1.46325x^2 - 1.3815166x + 1.048956$$



Gráfica de $p(x)-x$.

Debemos recordar que lo solicitado fue $x=p(x)$, se puede resolver el problema mediante el método de Newton, para lo cual se usa el algoritmo aplicándolo a $F(x)=p(x)-x=0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-0.939833x_n^3 + 1.46325x_n^2 - 1.3815166x_n + 1.048956 - x}{-2.819499x_n^2 + 2.9265x_n - 1.3815166 - 1}$$

Con una buena aproximación inicial se concluye que el punto solicitado es $x=0.565611$.

Ejercicio resuelto 15:

La función de variable real $f(x) = e^x \cos(x) + 1$, $0 \leq x \leq \pi$, será aproximada con el polinomio de segundo grado $P(x)$ que incluye a los tres puntos $f(0)$, $f(\pi/2)$, $f(\pi)$. Encuentre la magnitud del mayor error $E(x)=f(x)-p(x)$, que se produciría al usar esta aproximación. Resuelva la ecuación no lineal resultante con la fórmula de Newton con un error máximo de 0.0001.

Primero construimos una tabla de valores con los puntos antes mencionados:

X	$f(x)$
0	2
1.570796327	1
3.141592654	-22.1406926

Luego procedemos a calcular el polinomio de interpolación, para esto primero bosquejamos el polinomio. El mismo tendrá la forma:

$$p(x) = L_0f(x_0) + L_1f(x_1) + L_2f(x_2)$$

A continuación calculamos los coeficientes L :

$$L_0 = \frac{(x - \pi/2)(x - \pi)}{(0 - \pi/2)(0 - \pi)}$$

$$L_1 = \frac{(x - 0)(x - \pi)}{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)}$$

$$L_2 = \frac{(x - 0)(x - \pi/2)}{(\pi - 0)(\pi - \pi/2)}$$

Reemplazamos en el bosquejo del polinomio obteniendo:

$$p(x) = L_0f(x_0) + L_1f(x_1) + L_2f(x_2)$$

$$p(x) = -4.4866423618x^2 + 6.41098156922x + 2$$

La función error será entonces:

$$E(x) = f(x) - p(x) = e^x \cos(x) + 1 + 4.4866423618x^2 - 6.41098156922x - 2$$

Aplicamos la formula de Newton para la derivada $E'(x)$ dado que necesitamos ver donde la misma vale cero, lo que nos indicará el máximo error en el intervalo.

$$E'(x) = e^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x) + 2(4.4866423618)x - 6.41098156922 = 0$$

Asimismo necesitaremos E'' , para completar el algoritmo de Newton:

$$E''(x) = e^x \cos(x) - e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \operatorname{sen}(x) - e^x \cos(x) + 2(4.4866423618)$$

El algoritmo tomará la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} \cos(x_n) - e^{x_n} \operatorname{sen}(x_n) + 2(4.4866423618)x_n - 6.41098156922}{-2e^{x_n} \operatorname{sen}(x_n) + 2(4.4866423618)}$$

Tomaremos como aproximación inicial a $x_0=0.9$ (invitamos al lector a verificar el porqué de la elección de esta aproximación inicial graficando la función $E(x)$).

La tabla de valores con el algoritmo y la aproximación inicial es la siguiente:

n	x_n	x_{n+1}	Tol
0	0.9	0.732452	0.167548
1	0.732452	0.69277035	0.03968165
2	0.69277035	0.68449156	0.00827879
3	0.68449156	0.68281125	0.00168031
4	0.68281125	0.68247214	0.00033911
5	0.68247214	0.68240378	6.836E-05

Por lo que el máximo error se da en $x=0.68240378$, el mismo tiene un valor de 1.75 aproximadamente.

4.3 Trazadores cúbicos naturales

4.3.1 Generalidades

Los trazadores cúbicos son una herramienta algo más exacta que los polinomios de Lagrange en cuanto a la aproximación polinómica se refiere.

Estos trazadores son funciones definidas por tramos dentro del dominio x_0, x_1, \dots, x_n , es decir se tendrán en general para $n+1$ puntos n trazadores tomando los mismos la siguiente forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) ; & x_0 \leq x \leq x_1 \\ S_1(x) ; & x_1 \leq x \leq x_2 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) ; & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Cada polinomio S_j ($j=0, 1, 2, \dots, n-1$) tiene la forma $S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$ donde los coeficientes a, b, c, d se hallan mediante expresiones que indicaremos en breve.

En general por definición un trazador cubico cumple con las siguientes condiciones:

- $S_j(x)$ es un polinomio de grado 3 $\forall x \in [x_j, x_{j+1}]$ $j = 0, 1, \dots, n - 1$
- $S(x_j) = f(x_j)$ $j = 0, 1, \dots, n$ Donde f es la función conocida de donde provienen los puntos a partir de los cuales construimos el trazador.
- $S_j(x_j) = S_{j+1}(x_j)$ $j = 0, 1, \dots, n$
- $S'_j(x_j) = S'_{j+1}(x_j)$ $j = 0, 1, \dots, n$
- $S''_j(x_j) = S''_{j+1}(x_j)$ $j = 0, 1, \dots, n$
- $S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = \mathbf{0}$ (solo aplica para trazador cubico natural)

Ahora entraremos a la determinación de los coeficientes antes mencionados, para esto introduciremos un pequeño formato de tabla a ser llenado:

j	x_j	a_j	h_j
0	x_0	$f(x_0)$	$x_1 - x_0$
1	x_1	$f(x_1)$	$x_2 - x_1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$n - 1$	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$x_n - x_{n-1}$
n	x_n	$f(x_n)$	—

Con los valores obtenidos previamente podemos calcular los restantes coeficientes, contrario al orden en que aparecen en el polinomio al momento de hallarlos primero lo hacemos con los coeficientes C , luego con b, d .

Con los $n+1$ puntos hallaremos también $n+1$ coeficientes C , para lo cual usaremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) - \frac{3}{h_{n-3}}(a_{n-2} - a_{n-3}) \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_n) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Del sistema obtenemos los valores de los coeficientes C , para luego hallar los restantes con las siguientes formulas:

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

Con esto tenemos todo listo para generar los trazadores cúbicos en cada tramo.

4.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 16: Uso de las condiciones del trazador cubico natural.

Sea el trazador cubico natural $S(x)$ dado por:

$$S(x) = \begin{cases} S_0 = 0.721x - 0.459x^3, & 0 \leq x \leq 0.5 \\ S_1 = 0.303 + b(x - 0.5) - 0.688(x - 0.5)^2 + d(x - 0.5)^3, & 0.5 \leq x \leq 1 \\ S_2 = 0.368 + B(x - 1) - 0.112(x - 1)^2 + D(x - 1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Hallar b, d, B, D .

Solución:

Se usarán las siguientes propiedades del trazador para construir ecuaciones y hallar los valores pedidos:

$$(1) S'_0(0.5) = S'_1(0.5)$$

$$(2) S'_1(1) = S'_2(1)$$

$$(3) S''_1(1) = S''_2(1)$$

$$(4) S''_2(2) = 0$$

Las derivadas antes mencionadas son las siguientes:

$$S'_0(x) = 0.721 - 3(0.459)x^2$$

$$S'_1(x) = b - 2(0.688)(x - 0.5) + 3d(x - 0.5)^2$$

$$S'_2(x) = B - 2(0.112)(x - 1) + 3D(x - 1)^2$$

$$S''_1(x) = -2(0.688) + 6d(x - 0.5)$$

$$S''_2(x) = -2(0.112) + 6D(x - 1)$$

Usando la igualdad se obtiene:

$$0.721 - 3(0.459)(0.5)^2 = b - 2(0.688)(0.5 - 0.5) + 3d(0.5 - 0.5)^2$$

$$\therefore b = 0.37675$$

De la misma forma se usa la igualdad (2) para obtener:

$$b - 2(0.688)(1 - 0.5) + 3d(1 - 0.5)^2 = B - 2(0.112)(1 - 1) + 3D(1 - 1)^2$$

$$(5) B = b - 0.688 + 0.75d$$

Análogamente se usa la igualdad (3):

$$-2(0.688) + 6d(1 - 0.5) = -2(0.112) + 6D(1 - 1)$$

$$\therefore d = 0.384$$

Finalmente con la igualdad (4):

$$-2(0.112) + 6D(2 - 1) = 0$$

$$\therefore D = 0.0373 \dots$$

Finalmente los valores obtenidos se reemplazan en la ecuación (5) para obtener el último valor solicitado, los valores finales son los siguientes:

$$b=0.37675$$

$$d=0.384$$

$$B=-0.02325$$

$$D=0.0373$$

Ejercicio resuelto 17: Aproximación de una función usando trazadores cúbicos

Construir el trazador cubico natural de la función $f(x)=\text{sen}(x)$ usando los nodos $0, \pi/16, \pi/8$ y $\pi/4$.

Inicialmente construimos nuestra tabla preliminar para poder generar luego el sistema de ecuaciones y hallar los valores de los coeficientes c, b, d .

j	x_j	$a_j=f(x_j)$	h_j
0	0	0	0.196349541
1	0.196349541	0.195090322	0.196349541
2	0.392699082	0.382683432	0.392699082
3	0.785398163	0.707106781	

A partir de esta tabla generamos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{16} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{16} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{16} & \frac{3\pi}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.11458956 \\ -0.387799775 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El cual tiene por solución:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.066317836 \\ -0.3181217 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De aquí podemos hallar los valores de los coeficientes d , b . Los mismos se hallan con las fórmulas:

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j}$$

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1})$$

Los valores de estos coeficientes son los siguientes:

j	b_j	d_j
0	0.99792734	-0.112585
1	0.98490587	-0.4274755
2	0.90942134	0.27003
3	-	-

Finalmente podemos escribir el trazador cubico definido por tramos:

$$s(x) = \begin{cases} S_0(x) = 0 + 0.997927343(x-0) + 0(x-0)^2 - 0.112585(x-0)^3, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{16} \\ S_1(x) = 0.195090322016 + 0.984905866699\left(x - \frac{\pi}{16}\right) - 0.066317836\left(x - \frac{\pi}{16}\right)^2 - 0.4274755\left(x - \frac{\pi}{16}\right)^3, & \frac{\pi}{16} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \\ S_2(x) = 0.3826834 + 0.909421340263\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 0.3181217\left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 + 0.270030085802\left(x - \frac{\pi}{8}\right)^3, & \frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

4.4 Trazadores cúbicos sujetos

4.4.1 Generalidades

El trazador cubico sujeto cumple con las mismas condiciones básicas del trazador cubico natural, pero además cumple con la siguiente:

- $S'_0(x_0) = f'(x_0)$, $S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n)$

Con esta condición adicional podemos inferir que dado un problema debemos conocer las derivadas de la función f en los extremos de aproximación.

Además el sistema de ecuaciones antes mencionado para hallar los valores de C en el trazador natural tiene un ligero cambio, las ecuaciones primera y última ya no son las mismas. Estas serán reemplazadas por, respectivamente:

$$\frac{2}{3}h_0c_0 + \frac{1}{3}h_0c_1 = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - b_0; \quad b_0 = f'(x_0)$$

$$\frac{1}{3}h_{n-1}c_{n-1} + \frac{2}{3}h_{n-1}c_n = -\frac{1}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + b_n; \quad b_n = f'(x_n)$$

De aquí podemos notar porque requeríamos los valores de f' en los extremos, además cabe recalcar que en el trazador sujetos los valores del primero y último coeficiente b ya no se calculan con la formula sino que pasan a ser directamente los valores previamente indicados. Los restantes b se calculan tal y como se hizo anteriormente.

4.4.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 18: Comparación del trazador natural y fijo

Resuelva nuevamente el ejemplo 17, esta vez considerando el trazador sujeto.

Tenemos los mismos nodos, lo que cambiará son los valores del primer y último coeficiente b , además de la ecuación primera y última del sistema a resolver.

La tabla preliminar es la misma, recordamos que esta era:

j	x_j	$a_j=f(x_j)$	h_j
0	0	0	0.196349541
1	0.196349541	0.195090322	0.196349541
2	0.392699082	0.382683432	0.392699082
3	0.785398163	0.707106781	

Ahora antes de volver a plantear un sistema para los coeficientes b , primero planteamos las ecuaciones que irán en la primera y última fila de la matriz.

Recordamos que $b_0=f'(0)=\cos(0)$, $b_3=f'(\pi/4)=\cos(\pi/4)$.

Las nuevas primera y última ecuación serán:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{16}\right)c_0 + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{16}\right)c_1 = \frac{1}{\pi/16}(0 - 0.19509032) - 1$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{8}\right)c_2 + \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{8}\right)c_3 = -\frac{1}{\pi/8}(0.70710678 - 0.38268343) + 0.707106781186555$$

Las demás filas del sistema quedan idénticas y el sistema resultante es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\pi}{24} & \frac{\pi}{48} & 0 & 0 \\ \frac{\pi}{16} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{16} & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{16} & \frac{3\pi}{8} & \frac{\pi}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\pi}{24} & \frac{\pi}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.006413149 \\ -0.114548956 \\ -0.387799775 \\ -0.119030493 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva a los siguientes valores para los coeficientes c :

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.17730 \times 10^{-4} \\ -9.735024 \times 10^{-2} \\ -0.193674362887 \\ -0.357825810707 \end{pmatrix}$$

De aquí procedemos a calcular los coeficientes b , d recordando que el primer y último b ya están dados por las formulas conocidas:

j	b_j	d_j
0	1	-0.164728
1	0.980822939	-0.1635249
2	0.923680393	-0.13933607
3	0.707106378	-

Finalmente podemos escribir el trazador cúbico:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 0 + 1(x-0) - 0.000317729(x-0)^2 - 0.164727503(x-0)^3, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{16} \\ S_1(x) = 0.195090322016 + 0.9808229297\left(x - \frac{\pi}{16}\right) - 0.0973501806\left(x - \frac{\pi}{16}\right)^2 - 0.163524998\left(x - \frac{\pi}{16}\right)^3, & \frac{\pi}{16} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \\ S_2(x) = 0.3826834 + 0.923680396\left(x - \frac{\pi}{8}\right) - 0.1936743556\left(x - \frac{\pi}{8}\right)^2 - 0.139336095\left(x - \frac{\pi}{8}\right)^3, & \frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

4.5 Interpolación en dos variables (OPCIONAL)

4.5.1 Generalidades

Así como existe interpolación en una sola variable, se puede hacer una extensión al caso de dos. En esta pequeña sección no tenemos por propósito hallar un polinomio de interpolación propiamente en dos variables sino mediante la fijación de una de las mismas interpolar una vez para deshacernos de la primera y luego interpolar nuevamente para llegar a evaluar el valor deseado $f(x, y)$.

El proceso es tal y como se dijo en el párrafo anterior, dada una matriz de datos pares ordenados (x, y) y la función f evaluada en esos pares primero fijamos una de las dos variables para interpolar una vez. Al realizar la primer interpolación reduciremos la matriz a un arreglo ya sea de dos filas o dos columnas (dependiendo de qué variable hayamos fijado inicialmente) para luego volver a interpolar y calcular así el valor deseado.

4.5.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 19: Aplicaciones de la interpolación en dos variables.

El índice enfriador del viento I es una función que depende de dos factores: la temperatura real T y la velocidad del viento v , es decir $I=f(T,v)$. La siguiente tabla registra los valores de I recogidos en cierto momento por un investigador en los páramos del Cotopaxi. Por ejemplo, cuando la temperatura real es de 5 grados Celsius y el viento de 20 km/hora, el índice $I=f(5, 20)=1$, que quiere decir que la temperatura que se siente en estas condiciones es de 1 grado, aunque no sea la real.

T/V	5	10	15	20
5	4	2	2	1
0	-2	-3	-4	-5
-5	-8	-10	-11	-12

Usando interpolación polinomial estimar la temperatura que sentirá una persona situado en un lugar en la que la temperatura real es de dos grados y la velocidad del viento es de 25 km/h.

Comenzamos el desarrollo recordando lo antes indicado, primero debemos fijar una variable. En este caso fijaremos a la variable temperatura real.

Interpolamos usando el polinomio de Lagrange primero respecto a la variable T , dado que conocemos el punto donde vamos a efectuar la estimación podemos escribir:

Para $T=2$ (polinomio de orden 2 por haber 3 datos en la dirección T):

$$p_2(3) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2$$

Como dijimos nos interesa la forma algebraica del polinomio por lo que en los coeficientes L evaluamos directamente el valor a interpolar.

$$L_0 = \frac{(2-0)(2-(-5))}{(5-0)(5-(-5))} = 0.28$$

$$L_1 = \frac{(2-5)(2-(-5))}{(0-5)(0-(-5))} = 0.84$$

$$L_2 = \frac{(2-0)(2-5)}{(-5-0)(-5-5)} = -0.12$$

Se aplica este polinomio para cada columna, es decir para cada v . Teniendo:

$$v=5$$

$$p_2(3) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2 = 4(0.28) - 2(0.84) - 8(-0.12) = \mathbf{0.4}$$

$$v=10$$

$$p_2(3) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2 = 2(0.28) - 3(0.84) + 10(-0.12) = \mathbf{-3.16}$$

$$v=15$$

$$p_2(3) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2 = 2(0.28) - 4(0.84) - 11(-0.12) = \mathbf{-1.48}$$

$$v=20$$

$$p_2(3) = f_0L_0 + f_1L_1 + f_2L_2 = 1(0.28) - 5(0.84) - 12(-0.12) = \mathbf{-2.48}$$

Con los valores obtenidos podemos escribir una nueva tabla:

V	5	10	15	20
$f(2, v)$	0.4	-3.16	-1.48	-2.48

Finalmente volvemos a interpolar:

$$L'_0 = \frac{(25 - 10)(25 - 15)(25 - 20)}{(5 - 10)(5 - 15)(5 - 20)} = -1$$

$$L'_1 = \frac{(25 - 5)(25 - 15)(25 - 20)}{(10 - 5)(10 - 15)(10 - 20)} = 4$$

$$L'_2 = \frac{(25 - 5)(25 - 10)(25 - 20)}{(15 - 5)(15 - 10)(15 - 20)} = -6$$

$$L'_3 = \frac{(25 - 5)(25 - 10)(25 - 15)}{(20 - 5)(20 - 10)(20 - 15)} = 4$$

Por lo tanto:

$$f(2, 25) = -1(0.4) + 4(-3.16) - 6(-1.48) + 4(-2.48)$$

$$\mathbf{f(2, 25) = -14.08}$$

Por lo tanto la temperatura que se siente a la temperatura real y viento solicitados es de -14.08 la cual resulta razonable para los datos usados.

5. Diferenciación Numérica

"Hacer predicciones es muy difícil, especialmente cuando se trata del futuro".
Niels Bohr

5.1 Introducción

El presente capítulo constituye tal vez uno de los más sencillos en cuanto a algoritmos se refiere, sin embargo no debe de olvidarse la importancia del mismo.

Por ejemplo suponga que ha tomado medidas de la posición de un cuerpo en el espacio en determinados momentos, además considere que desconoce la función que describe el movimiento de dicho cuerpo. Si usted desea calcular la velocidad de dicho cuerpo en los tiempos donde realizó las mediciones de la posición, por definición tendría que calcular la derivada de la posición respecto al tiempo. Sin embargo se enfrentará al problema de desconocer la función que describa el comportamiento.

Para solucionar este problema se introduce la diferenciación numérica que no son más que ciertas fórmulas de fácil deducción que sirven para aproximar los valores de las derivadas en ciertos tiempos conociendo un conjunto de datos previamente registrado.

5.2 Primera derivada

5.2.1 Generalidades

La primera derivada de una función puede ser calculada mediante tres principales fórmulas, la de 2 y 3 puntos y la centrada (que en realidad es una fórmula de 3 puntos específicamente).

De las fórmulas antes mencionadas la que posee más exactitud es la centrada, sin embargo no siempre puede ser usada ya que requiere al menos un punto antes y uno después de donde se efectúan los cálculos. Es por esto que en el primer y el último punto que se tenga se acostumbra a usar la fórmula de tres puntos.

En todos los casos a estudiar aproximamos la derivada en un punto x_0 .

Estas fórmulas son las siguientes:

$$\text{Dos puntos: } f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''(\varepsilon)$$

$$\text{Tres puntos: } f'(x_0) = \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)] + \frac{h^2}{3} f'''(\varepsilon)$$

$$\text{Centrada: } f'(x_0) = \frac{1}{2h} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{6} f'''(\varepsilon)$$

Cabe recalcar que si $h > 0$ se dice que la fórmula es progresiva y si $h < 0$ se dice que la misma es regresiva.

Además en cálculos prácticos se omite el término del error que aparece con el paso elevado a alguna potencia por alguna derivada de f .

5.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 20: Comparación de la fórmula de derivada respecto a una derivada exacta.

Sea $f(x)=\ln(x)$ aproxime la derivada en el intervalo $[1, 1.1]$ usando un paso de 0.01 y compare cada resultado con el valor de la derivada exacta en ese punto.

Tenemos antes que nada la siguiente tabla de valores:

j	x_j	$f(x_j)=\ln(x_j)$
0	1	0
1	1.01	0.009950331
2	1.02	0.019802627
3	1.03	0.029558802
4	1.04	0.039220713
5	1.05	0.048790164
6	1.06	0.058268908
7	1.07	0.067658648
8	1.08	0.076961041
9	1.09	0.086177696
10	1.1	0.09531018

Como se indico en los extremos usaremos la formula de tres puntos y en los puntos interiores la centrada para tener el mínimo error.

$$f'(1) \approx \frac{1}{2(0.01)} [-3(0) + 4(0.009950331) - 0.019802627] \approx 0.99993485$$

$$f'(1.1) \approx \frac{1}{2(-0.01)} [-3(0.09531018) + 4(0.086177696) - 0.076961041] \approx 0.90903985$$

Se da un solo ejemplo para la centrada:

$$f'(1.05) \approx \frac{1}{2(0.01)} [0.058268908 - 0.039220713] \approx 0.95240975$$

Para comparar los valores tenemos en cuenta que la derivada exacta está dada por: $f'(x) = \frac{1}{x}$, por lo cual comparamos los valores exactos y aproximados en la siguiente tabla.

Ademas mostramos la distancia entre ambos valores en la columna de error.

x_j	$\ln(x_j)$	Exacta	Aprox	Error
1	0	1	0.99993485	6.515E-05
1.01	0.009950331	0.99009901	0.99013136	3.2355E-05
1.02	0.019802627	0.980392157	0.98042357	3.1413E-05
1.03	0.029558802	0.970873786	0.97090429	3.0506E-05
1.04	0.039220713	0.961538462	0.9615681	2.9635E-05
1.05	0.048790164	0.952380952	0.95240975	2.8796E-05
1.06	0.058268908	0.943396226	0.94342422	2.7989E-05
1.07	0.067658648	0.934579439	0.93460665	2.7211E-05
1.08	0.076961041	0.925925926	0.92595239	2.6462E-05
1.09	0.086177696	0.917431193	0.91745693	2.5741E-05
1.1	0.09531018	0.909090909	0.90903985	5.1059E-05

5.3 Segunda derivada

5.3.1 Generalidades

Sin mayor formalismo introducimos la fórmula de la segunda derivada para puntos interiores al conjunto dado:

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)] - \frac{h^2}{12} f^{iv}(\xi)$$

5.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 21: Aceleración de una partícula.

Considere la tabla adjunta, en la misma se muestran la posición para determinado tiempo de una partícula moviéndose en el espacio, calcule de ser posible la aceleración de la misma. Si la partícula describe un movimiento parabólico dado por $f(t)=t^2$, calcule el error de la aceleración aproximada.

j	t_j	x_j
0	0	0
1	0.01	0.0001
2	0.02	0.0004
3	0.03	0.0009
4	0.04	0.0016
5	0.05	0.0025

La segunda derivada en su forma aproximada es solo aplicable a puntos interiores de los dados, es decir que podremos calcular la aceleración en $t=0.01, 0.02, 0.03$ y 0.04 .

$$f''(0.01) \approx \frac{1}{0.01^2} [0.0004 - 2(0.001) + 0] \approx 2$$

$$f''(0.02) \approx \frac{1}{0.01^2} [0.0009 - 2(0.0004) + 0.0001] \approx 2$$

$$f''(0.03) \approx \frac{1}{0.01^2} [0.0016 - 2(0.0009) + 0.0004] \approx 2$$

$$f''(0.04) \approx \frac{1}{0.01^2} [0.0025 - 2(0.0016) + 0.0009] \approx 2$$

La segunda derivada de f es obviamente igual a 2 en todo el intervalo por lo que en este ejercicio tuvimos un error de cero.

6. Integración Numérica

"Creo que mientras más a fondo se estudia la ciencia, más se aleja uno de cualquier concepto que se aproxime al ateísmo".

William Thomson

6.1 Introducción

Tal y como existen métodos numéricos para aproximar derivadas de funciones en algún punto, también existe métodos para su operación contraria, determinar la integral en un intervalo determinado.

En realidad existe más de un método en este capítulo ya que cubriremos integrales sencillas de dos formas, con métodos simples y compuestos resultando obviamente mayor la confiabilidad de los compuestos.

Además estudiaremos los métodos para aproximar integrales dobles en una región del plano los cuales se deducen de las formulas para integrales en una sola dimensión.

6.2 Formulas simples cerradas de Newton Cotes

Se denomina formula cerrada de Newton Cotes de $n+1$ puntos a la expresión usada para aproximar:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Existen expresiones de la sumatoria para cuando el valor de n es par y cuando el mismo es impar sin embargo no entraremos en detalle de las mismas.

De forma genérica introducimos las formulas de Newton Cotes deducidas para $n=1, 2, 3$:

$$n = 1: \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\varepsilon), \varepsilon \in [x_0, x_1]$$

$$n = 2: \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{iv}(\varepsilon), \varepsilon \in [x_0, x_2]$$

$$n = 3: \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{5} f^{iv}(\varepsilon), \varepsilon \in [x_0, x_3]$$

La fórmula para $n=1$ tiene por nombre específico Trapecio Simple, para $n=2$ se denomina Simpson Simple y para $n=3$ se denomina Simpson Simple 3/8.

Cada integral divide al intervalo de integración en $n+1$ particiones, las cuales intervienen como se puede observar en la formula a usarse.

El termino final de cada formula se considera termino del error y por lo general se omite en los cálculos llegando de esta forma a valores aproximados al eliminarlo.

6.2.1 Generalidades

6.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 22: Aplicación de las fórmulas de Trapecio y de Simpson y comparación entre ellas.

Considere la integral dada $\int_0^1 e^x dx$, aproxime la misma mediante las formulas de Trapecio y de Simpson simples, además halle su valor exacto para con el mismo determinar el valor del error absoluto con cada método.

Para aplicar cada método necesitamos una tabla de valores, comenzaremos por el método del Trapecio el cual usara la siguiente tabla considerando que la función f a integrar en este caso es e^x .

j	x_j	$f(x_j)=e^{x_j}$
0	0	1
1	1	2.718281828

$$\text{Trapecio: } \int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2} [1 + 2.718281828] \approx 1.85914091$$

A continuación seguiremos con el método de Simpson:

j	x_j	$f(x_j)=e^{x_j}$
0	0	1
1	0.5	1.648721271
2	1	2.718281828

$$\text{Simpson: } \int_0^1 e^x dx \approx \frac{0.5}{3} [1 + 2.718281828 + 4(1.648721271)] \approx 1.71886115$$

Finalmente podemos calcular el valor exacto: $\int_0^1 e^x dx = e^x|_0^1 = e - 1$.

El error absoluto en cada método será entonces:

$$EA_{\text{Trapecio}} = |e - 1 - 1.85914091| = 0.14085909$$

$$EA_{\text{Simpson}} = |e - 1 - 1.71886115| = 0.00057932$$

Aquí podemos concluir una característica importante cuando comparamos ambos métodos, el de Simpson tanto en su versión simple como compuesta es más exacto que el del Trapecio.

Ejercicio resuelto 23: Aplicaciones usuales de las fórmulas del Trapecio y Newton.

En la práctica las fórmulas para aproximar integrales son usadas cuando no podemos hallar una antiderivada mediante los conocimientos de funciones elementales. Considere la integral $\int_0^1 e^{x^2} dx$, la cual no posee una antiderivada posible de expresar mediante funciones elementales. Aproxime su valor mediante las formulas de Trapecio y de Simpson.

Comenzaremos por el método del Trapecio, la tabla de valores será:

j	x_j	$f(x_j)=e^{(x_j)^2}$
0	0	1
1	1	2.718281828

$$\text{Trapezio: } \int_0^1 e^x dx \approx \frac{1}{2} [1 + 2.718281828] \approx 1.85914091$$

Luego la fórmula de Simpson nos da:

j	x_j	$f(x_j)=e^{(x_j)^2}$
0	0	1
1	0.5	1.284025417
2	1	2.718281828

$$\text{Simpson: } \int_0^1 e^x dx \approx \frac{0.5}{3} [1 + 2.718281828 + 4(1.284025417)] \approx 1.47573058$$

Nota: Mediante métodos que rebasan el alcance de esta obra, calculamos el valor exacto de la integral el cual es $\int_0^1 e^x dx = 1.46265$. Nuevamente podemos ver que el método de Simpson es más exacto.

6.3 Formulas compuestas de Newton Cotes

6.3.1 Generalidades

Una extensión de las formulas simples presentadas hace una sección nos lleva al estudio de las formulas compuestas de Newton Cotes.

Las mismas en general se usan con un $n \geq 4$, pudiéndose usar solamente la formula de Simpson compuesto para n pares, y la del Trapecio compuesto para n impares y pares sin problemas.

La formula compuesta del Trapecio y de Simpson son respectivamente:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j)] - \frac{b-a}{12} h^2 f''(\mu), \mu \in [a, b]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^m f(x_{2j-1})] - \frac{b-a}{180} h^4 f^{iv}(\mu), \mu \in [a, b], n = 2m$$

Las dos formulas pueden ser interpretadas de manera más sencillas si vemos a cuales valores hacen referencia, la del trapecio no es más que el paso medio por las funciones evaluadas en los extremos del intervalo sumándole el duplo del sumatorio de la función evaluada en puntos interiores.

Por otro lado la formula de Simpson no es más que el paso entre tres por la suma de la función evaluada en los extremos sumada al duplo de la función evaluada en puntos interiores pares además del cuádruplo de la función evaluada en puntos interiores impares.

Para identificar si un punto es par o impar lo hacemos mirando al contador j el cual nos indica en cual grupo entra. Cabe recalcar que j arranca de 0.

6.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 24: Comparación de las formulas compuestas de Simpson y del Trapecio

Utilizando el método de trapecio o el método de Simpson y aproximar la integral con $n=4$ y aproximar el error:

Cuanto tendría que ser n para que el error sea menor o igual a 10^{-4} .

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

La resolución ya sea por el método de Trapecio o de Simpson, involucra la siguiente tabla con el paso indicado:

$$h = \frac{1}{4}$$

j	Xj	f(Xj)
0	0	0.39894228
1	0.25	0.386668116
2	0.5	0.352065326
3	0.75	0.301137432
4	1	0.241970724

Por el método del trapecio se tiene:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_4) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3))]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.340081844$$

Por el método de Simpson se tiene:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + f(x_4) + 4(f(x_1) + f(x_3)) + 2f(x_2)]$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \approx 0.341355487$$

Para encontrar el valor de n para cada uno de los métodos, se usa las cotas de errores en cada caso:

Trapezio:

$$\epsilon = \frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$$

Donde $f''(\mu)$ es el máximo de la segunda derivada en el intervalo $[0, 1]$.

Este valor máximo se puede hallar derivando la función original, el proceso se omite sin embargo el máximo local en el intervalo $[0, 1]$ es el siguiente (tomado en valor absoluto):

$$f''(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Evaluando esto en la expresión del error, obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{(b-a)}{12} h^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ h^2 &= \frac{1}{n^2} = \frac{12\sqrt{2\pi} \epsilon}{b-a} = \frac{12\sqrt{2\pi} (10^{-4})}{1} \\ n &\approx 18.23 \end{aligned}$$

Para asegurar el error deseado, se *redondea* a un n superior, por lo que finalmente $n=19$.

Simpson:

$$\epsilon = \frac{(b-a)}{180} h^4 f^{iv}(\mu)$$

Análogamente necesitamos el valor máximo (en valor absoluto) de la cuarta derivada de la función original en el intervalo $[0, 1]$, el proceso para hallarlo se omite sin embargo su valor es el siguiente:

$$f^{iv}(\mu) = \frac{3}{\sqrt{2\pi}}$$

Ingresando estos datos en la expresión del error, tenemos:

$$\begin{aligned} h^4 &= \frac{1}{n^4} = \frac{180\sqrt{2\pi} \epsilon}{3(b-a)} = \frac{180\sqrt{2\pi}(10^{-4})}{3(1)} \\ n &\approx 2.86 \end{aligned}$$

El método de Simpson compuesto, necesita un n par por lo que el n obtenido se redondea al inmediato par, resultando $n=4$.

Ejercicio resuelto 25: Exactitud de las compuestas respecto a las reglas simples.

Calcule nuevamente la integral presentada en el ejercicio 23 pero esta vez utilice las reglas compuestas de Simpson y del Trapecio con un $n=8$ para ambas.

Dado que usaremos el mismo número de particiones n para ambas podemos generar una tabla común de resultados recordando que la integral a calcular es $\int_0^1 e^{x^2} dx$.

j	x_j	$f(x_j)=e^{(x_j^2)}$
0	0	1
1	0.13	1.015747709
2	0.25	1.064494459
3	0.38	1.150992945
4	0.5	1.284025417
5	0.63	1.477904195
6	0.75	1.755054657
7	0.88	2.150337916
8	1	2.718281828

La regla del trapecio nos genera un resultado:

$$\begin{aligned} \text{Trapecio: } \int_0^1 e^x dx & \\ & \approx \frac{1/8}{2} [1 + 2.718281828 + 2(1.015747709 + 1.064494459 + 1.150992945 \\ & + 1.284025417 + 1.477904195 + 1.755054657 + 2.150337916)] \end{aligned}$$

$$\text{Trapecio: } \int_0^1 e^x dx \approx 1.46971228$$

Luego la fórmula de Simpson nos da:

$$\begin{aligned} \text{Simpson: } \int_0^1 e^x dx & \\ & \approx \frac{1/8}{3} [1 + 2.718281828 \\ & + 4(1.015747709 + 1.150992945 + 1.477904195 + 2.150337916) \\ & + 2(1.064494459 + 1.284025417 + 1.755054657)] \end{aligned}$$

$$\text{Simpson: } \int_0^1 e^x dx \approx 1.46272341$$

Nota: Como se mencionó en el ejercicio 23, mediante métodos que rebasan el alcance de esta obra, calculamos el valor exacto de la integral el cual es $\int_0^2 e^{x^2} dx = 1.46265$ donde podemos ver qué tal y como con las formulas simples, el método de Simpson posee también más exactitud al usar su formula compuesta que el método del Trapecio.

6.4 Integrales Impropias

6.4.1 Generalidades

En la presente sección estudiaremos dos casos de integrales que en teoría presentan problemas al aplicarles de forma directa algún método de aproximación, suponga para el primer caso que calculamos su valor en $[a, b]$ y que la función presenta alguna discontinuidad en dicho intervalo como una asíntota.

La aplicación de los métodos numéricos revisados anteriormente nos demanda conocer el valor de la función evaluada en ciertos puntos del intervalo de aproximación, por lo que una asíntota nos impediría conocer el valor de la misma de manera acertada en las cercanías de la discontinuidad.

Por otro lado considere que necesita calcular una integral en el intervalo no acotado $[a, \infty)$ topándose con el mismo inconveniente descrito en el párrafo anterior solo que ahora no lo tiene por una asíntota sino por tener que evaluar su función 'en el infinito'.

Para el primer tipo de inconveniente considere lo siguiente, intentamos calcular $\int_a^b f(x)dx$, si f puede escribirse de la forma $f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^p}$ (con $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$) donde g es continua en $[a, b]$ y $p \in (0, 1)$ entonces la integral $\int_a^b f(x)dx$ existe y puede calcularse de la siguiente manera:

Escribamos a f como $f(x) = \frac{g(x) - P_4(x) + P_4(x)}{(x-a)^p}$ donde $P_4(x)$ es el polinomio de Taylor de g de cuarto orden alrededor de a .

Con f en esta forma tendremos:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p} dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx$$

Donde podemos definir $G(x) = \begin{cases} 0, & x = a \\ \frac{g(x) - P_4(x)}{(x-a)^p}, & x \neq a \end{cases}$ para finalmente obtener:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b G(x) dx + \int_a^b \frac{P_4(x)}{(x-a)^p} dx$$

De la expresión obtenida la integral de G se realiza de forma aproximada usando cualquiera de los métodos conocidos mientras que la otra integral a resolver se puede hallar de forma directa dado que no representa mayor desafío en cuanto a encontrar su antiderivada se refiere.

En cuanto al otro tipo de integrales, tenemos a la que contiene límites infinitos en la misma. Considere una integral del tipo $\int_a^\infty f(x)dx$ o $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, realizando la sustitución $x = \frac{1}{u}$ podemos eliminar la indeterminación en los límites para luego vernos en la capacidad de aplicar algún método numérico estudiado en secciones previas.

6.4.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 26: Una función con asíntota en el intervalo de integración.

Aproxime $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$, emplee $n=6$ con fórmula compuesta de Simpson para la parte aproximada de la integral.

Verificamos las condiciones antes descritas, teniendo $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x}{(x-0)^{1/2}}$ con la asíntota en el límite inferior de la integral por lo que:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x - P_4(x)}{(x-0)^{1/2}} dx + \int_0^1 \frac{P_4(x)}{(x-0)^{1/2}} dx$$

El polinomio de Taylor de cuarto orden alrededor de 0 de g es:

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

Definimos a G entonces:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}{(x-0)^{1/2}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

Transformándose nuestra integral original a:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 G(x) dx + \int_0^1 \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}{(x-0)^{1/2}} dx$$

La parte exacta de la integral $\int_0^1 \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}{(x-0)^{1/2}} dx$ tiene por valor $\frac{11051}{3780}$. Para la integral de G tendremos la siguiente tabla (recordando que en $x=0$, G tiene como valor 0):

j	x_j	$G(x_j)$
0	0	0
1	0.166666667	2.69974E-06
2	0.333333333	6.2862E-05
3	0.5	0.000401312
4	0.666666667	0.001508865
5	0.833333333	0.004245769
6	1	0.009948495

Aplicando la fórmula de Simpson compuesta tenemos que $\int_0^1 G(x) dx \approx 0.00176062$.

Finalmente tenemos que la integral buscada tendrá el valor:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \approx \frac{11051}{3780} + 0.00176062 \approx 2.92530559.$$

Ejercicio resuelto 27: Límites infinitos de integración.

Aproxime $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$ usando fórmula de Simpson compuesta con $n=4$.

Si aplicáramos de forma directa el cambio de variable $x = \frac{1}{u}$ nos encontraríamos con una indeterminación al reemplazar en el valor de $x=0$ para hallar el nuevo valor del límite inferior de la integral. Para evitar este problema usaremos un pequeño artificio:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

Ahora nos ocuparemos de la segunda integral resultante que es la que mantiene el límite infinito superior.

Sea $x = \frac{1}{u}$ entonces $dx = -\frac{1}{u^2} du$, además reemplazamos los límites de la integral dado que para $x = 1, u = 1$ y $x = \infty, u = 0$.

Reemplazando lo antes obtenido en la integral con el límite infinito tenemos:

$$\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{u}\right)^4+1}} \left(-\frac{1}{u^2}\right) du = \int_1^0 -\frac{1}{\sqrt{u^4+1}} du = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^4+1}} du$$

Por lo que nuestra integral original será:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u^4+1}} du$$

Podemos darnos cuenta que la integral del lado derecho a pesar de estar expresada en función de u tiene el mismo valor que la del centro por lo que sin dudar lo podemos escribir:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$$

Aplicando la fórmula de Simpson compuesta con $n=4$ para $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx$ tenemos la siguiente tabla de valores:

j	x_j	$f(x_j)$
0	0	1
1	0.25	0.998052578
2	0.5	0.9701425
3	0.75	0.871575537
4	1	0.707106781

Por lo que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx \approx \frac{1}{3} [1 + 0.707106781 + 4(0.998052578 + 0.871575537) + 2(0.9701425)]$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx \approx 0.92715869$$

Concluimos que la integral solicitada inicialmente es entonces:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} dx \approx 2(0.92715869) \approx 1.85431737$$

6.5 Integrales dobles

6.5.1 Generalidades

En esta sección enfrentaremos el problema de aproximar el valor de integrales de la forma $\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$. Para esto primero puntualizamos ciertos aspectos, utilizaremos n particiones en el eje x y m particiones en el eje y .

El paso en el eje x será fijo y tendrá un valor de: $h_x = \frac{b-a}{n}$, para cada valor de x tendremos diferentes valores de funciones $f(x, y)$ dado que y se comportará como variable, es por esto que el paso en el eje y se define en función de x de la siguiente forma: $h_y = h(x) = \frac{\phi_2(x) - \phi_1(x)}{m}$.

De esta manera presentamos de forma inmediata los algoritmos de Trapecio y Simpson para resolver el tipo de integrales en mención:

Trapecio:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\
& \approx \frac{h_x}{2} \left\{ \frac{h(x_0)}{2} \left[f(x_0, y_0) + f(x_0, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_0, y_j) \right] \right. \\
& \quad + \frac{h(x_n)}{2} \left[f(x_n, y_0) + f(x_n, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_n, y_j) \right] + \\
& \quad \left. + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h(x_i)}{3} \left[f(x_i, y_0) + f(x_i, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{m-1} f(x_i, y_j) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Simpson:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \\
& \approx \frac{h_x}{3} \left\{ \frac{h(x_0)}{3} \left[f(x_0, y_0) + f(x_0, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_0, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f(x_0, y_{2j-1}) \right] \right. \\
& \quad + \frac{h(x_n)}{3} \left[f(x_n, y_0) + f(x_n, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_n, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f(x_n, y_{2j-1}) \right] \\
& \quad + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{h(x_{2i})}{3} \left[f(x_{2i}, y_0) + f(x_{2i}, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i}, y_{2j-1}) \right] \\
& \quad \left. + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{h(x_{2i-1})}{3} \left[f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_{2i-1}, y_m) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

En general el procedimiento a usarse para ambos algoritmos es el mismo, se procede primero por encontrar los valores de x para los cuales se dividirá el intervalo, luego buscamos para cada x los pares ordenados (x, y) y procedemos a evaluar la función f .

Con estos valores generamos una matriz a la cual se le aplicara la regla de Simpson o Trapecio en cada una de sus filas generando así una tabla de dos columnas a la cual nuevamente se le aplicará el algoritmo deseado.

La idea de tener una matriz para luego reducirla a una tabla de dos columnas para finalizar aplicando nuevamente el algoritmo a esta tabla es análoga a la usada en interpolación en dos variables.

6.5.2 Ejemplos

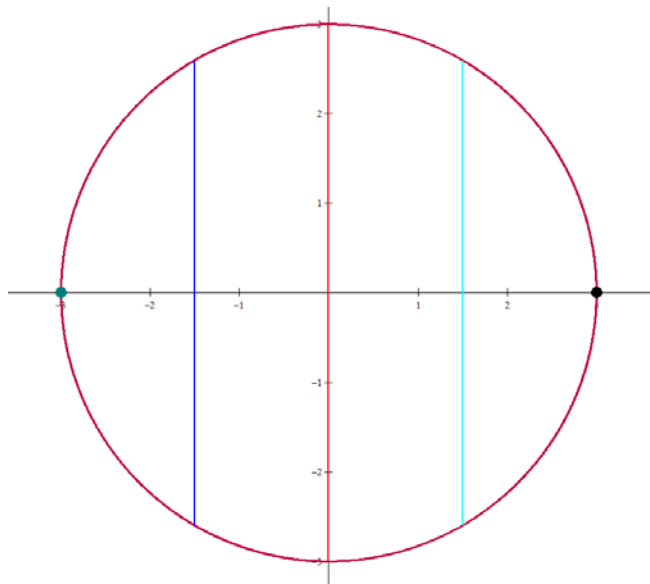
Ejercicio resuelto 28: Uso de la regla de Simpson para integrales dobles.

Calcular la siguiente integral, con el algoritmo de Simpson:

$$\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2} dA$$

Donde R es la región acotada por: $x^2 + y^2 = 9$. Usar $n=m=4$.

La región de integración junto con las particiones en x se muestra en la grafica adjunta:



Como se ve en la grafica los valores de x a usar serán $x = -3, -1.5, 0, 1.5, 3$.

Para cada uno se aplicara el método descrito obteniendo la matriz de datos.

Las tablas para cada x se muestran a continuación:

$x = -3$

x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
-3	0	0	0	0	0
$f(-3, y_j)$	27	27	27	27	27

$x = -1.5$

x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
-1.5	-2.59807621	-1.29903811	0	1.29903811	2.59807621
$f(-1.5, y_j)$	3.375	6.08436778	6.75	6.08436778	3.375

$x = 0$

x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
0	-3	-1.5	0	1.5	3
$f(0, y_i)$	0	0	0	0	0

$x = 1.5$

x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
1.5	-2.59807621	-1.29903811	0	1.29903811	2.59807621
$f(1.5, y_j)$	3.375	6.08436778	6.75	6.08436778	3.375

$x = 3$

x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
3	0	0	0	0	0
$f(3, y_j)$	27	27	27	27	27

Con esto generamos la matriz de datos:

i, j	0	1	2	3	4
0	27	27	27	27	27
1	3.375	6.08436778	6.75	6.08436778	3.375
2	0	0	0	0	0
3	3.375	6.08436778	6.75	6.08436778	3.375
4	27	27	27	27	27

Usando el método de Simpson tenemos la tabla de dos columnas:

0	0
1	44.7680632
2	0
3	29.8453755
4	0

Y finalmente el valor por el método de Simpson es:

$$\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2} dA \approx 149.226877$$

Mediante métodos fuera del análisis del texto, encontramos el valor exacto de la integral $\iint_R x^2 \sqrt{9 - y^2} dA \approx 172.8$ con lo cual vemos un error aceptable respecto al valor teórico considerando que es una integral doble.

Podemos reducir este error aplicando más particiones en ambos ejes.

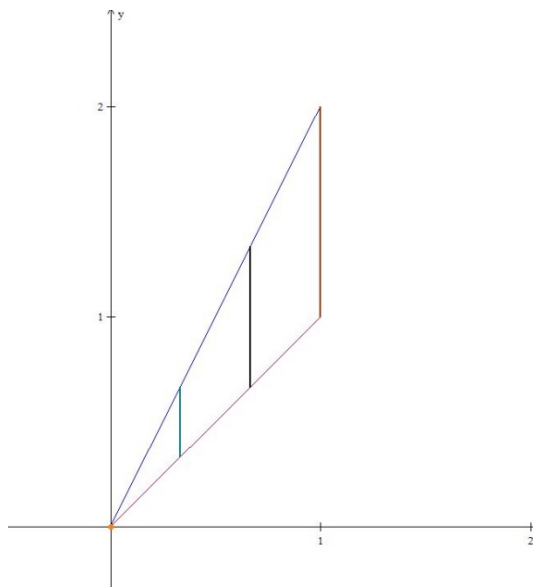
Ejercicio resuelto 29: Uso de la regla del Trapecio para integrales dobles.

Calcular la siguiente integral, con el algoritmo del Trapecio:

$$\iint_R (y^2 + x^3) dydx$$

Donde R es la región acotada por: $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$. Usar $n=m=3$.

La región de integración junto con las particiones en x se muestra en la grafica adjunta:



Como se ve en la grafica los valores de x a usar serán $x = 0, 1/3, 2/3, 1$.

Para cada uno se aplicara el método descrito obteniendo la matriz de datos.

Las tablas para cada x se muestran a continuación:

$x = 0$

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0	0
$f(0, y_i)$	0	0	0	0

$x = 1/3$

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0.33	0.33333333	0.44444444	0.55555556	0.66666667
$f(1/3, y_i)$	0.14814815	0.2345679	0.34567901	0.48148148

$$x = 2/3$$

x	y_0	y_1	y_2	y_3
0.66666667	0.66666667	0.88888889	1.11111111	1.33333333
$f(2/3, y_i)$	0.74074074	1.08641975	1.5308642	2.07407407

$$x = 1$$

x	y_0	y_1	y_2	y_3
1	1	1.33333333	1.66666667	2
$f(1, y_i)$	2	2.77777778	3.77777778	5

La matriz de datos resultante al agrupar todos los valores obtenidos será:

i, j	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0.14814815	0.2345679	0.34567901	0.48148148
2	0.74074074	1.08641975	1.5308642	2.07407407
3	2	2.77777778	3.77777778	5

Usando el algoritmo del Trapecio para simplificar la matriz a una expresión de dos columnas tenemos:

0	0
1	0.0994513
2	0.89437586
3	3.35185185

Aplicamos por última vez el algoritmo del Trapecio, lo que nos da un resultado de:

$$\iint_R (y^2 + x^3) dydx \approx 0.8899177$$

El valor teórico de esta integral es 0.78333... por lo que podemos aceptar la aproximación como válida a pesar de no haber tenido muchas particiones en los ejes.

6.6 Cuadratura Gaussiana

6.6.1 Generalidades

La cuadratura Gaussiana es un método muy poderoso para aproximar valores de integrales sin embargo requiere ciertas manipulaciones a la integral original para poder aplicarlo de forma directa.

Suponga que se le solicita calcular $\int_a^b f(x)dx$ donde a y b son finitos. Para poder aplicar el método de cuadratura se necesitar dejar la integral antes solicitada en la forma $\int_{-1}^1 f(t)dt$ donde $t = \frac{2x-a-b}{b-a}$.

De esta manera $\int_{-1}^1 f(t)dt$ se aproxima mediante $\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^n c_i f(t_i)$ donde n es el orden de la cuadratura y los valores en los cuales se evalúa la función f se denominan raíces de los polinomios de Legendre de orden n , además a cada raíz se le asocia un coeficiente c que aparece también en la sumatoria.

Los polinomios de Legendre de orden $n=2$ y 3 son los siguientes:

$$p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

$$p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$$

Como se dijo cada polinomio tiene sus raíces y cada raíz tiene asociado un coeficiente, para los dos polinomios antes mencionados tenemos:

$n=2$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad c_2 = 1$$

$n=3$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad c_1 = \frac{5}{9}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad c_2 = \frac{5}{9}$$

$$x_3 = 0, \quad c_3 = \frac{8}{9}$$

Con esto ya podemos utilizar el método ya que conocemos las transformaciones de la integral antes de poderla usar además de los valores de las raíces en las cuales debemos evaluar la función y el coeficiente por el cual debemos multiplicar cada imagen de cada raíz.

Cabe recalcar que existe un teorema en el método de la cuadratura Gaussiana:

Teorema 5: Si la función a integrar $f(t)$ en $\int_{-1}^1 f(t)dt$ es un polinomio de grado menor que $2n$, entonces:

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{i=1}^n c_i f(t_i)$$

Donde n es el grado del polinomio de Legendre o el orden de curvatura. Caso contrario si la función $f(t)$ no es polinómica podemos afirmar $\int_{-1}^1 f(t)dt \approx \sum_{i=1}^n c_i f(t_i)$.

El teorema en realidad nos quiere decir que si la función a integrar es polinómica podemos obtener una aproximación con error nulo respecto al valor exacto mientras que si no es polinómica la aproximación obtenida es muy cercana.

Ahora procedemos a hacer la extensión para una integral doble.

Considere que necesita calcular $\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$, se aplicará el mismo razonamiento usado para una integral sencilla es decir primero estandarizaremos los límites usando cambios de variables:

$$t = \frac{2y - \phi_2(x) - \phi_1(x)}{\phi_2(x) - \phi_1(x)}, \quad u = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

Con esto logramos dejar la integral anterior con de la forma:

$$\int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(u, t) dt \right] du$$

Finalmente podemos aproximar este resultado mediante dos sumatorios de la forma:

$$\int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(u, t) dt \right] du \approx \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n c_j c_i F(u_j, t_i)$$

Donde n, m son los órdenes de cuadratura para cada variable u, t .

6.6.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 30: Aproxime la longitud de arco de la curva $y=\cos(x)$ en $\pi/2 \leq x \leq \pi$ empleando cuadratura Gaussiana de orden 2.

Recordamos que por definición la longitud de arco en $[a, b]$ de una función f está dada por:

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Por lo que en este ejercicio la integral a resolver será:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 + (\text{sen}(x))^2} dx$$

Como se puede ver la integral no está en la forma necesaria para poder aplicar de manera directa el método, así que procedemos a transformarla obteniendo:

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a} = \frac{2x - \pi - \frac{\pi}{2}}{\pi - \frac{\pi}{2}} = \frac{2x - \frac{3\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4x - 3\pi}{\pi}$$

De donde podemos obtener:

$$x = \frac{\pi t + 3\pi}{4}, \quad dx = \frac{\pi}{4} dt$$

Reemplazamos en la integral original y tenemos ahora:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 + (\text{sen}(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi t + 3\pi}{4}\right)\right)^2} \left(\frac{\pi}{4}\right) dt = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi t + 3\pi}{4}\right)\right)^2} dt$$

Como nos fue solicitado aproximaremos con cuadratura de orden dos por lo que usaremos las siguientes raíces con sus respectivos coeficientes: $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_1 = 1$ y $t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $c_2 = 1$.

Obtenemos entonces:

$$\frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi t + 3\pi}{4}\right)\right)^2} dt \approx \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^2 c_i \sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi t_i + 3\pi}{4}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{\pi t + 3\pi}{4}\right)\right)^2} dt \approx \frac{\pi}{4} \left[(1) \left(\sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{-\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 3\pi}{4}\right)\right)^2} \right) + (1) \left(\sqrt{1 + \left(\text{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{\sqrt{3}} + 3\pi}{4}\right)\right)^2} \right) \right]$$

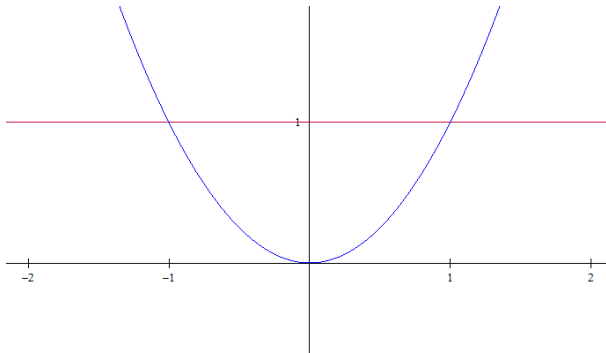
Concluimos al evaluar que:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 + (\text{sen}(x))^2} dx \approx 1.906879707 \dots$$

Ejercicio resuelto 31: Una integral doble por el método de cuadratura.

Calcúlese $\iint_R (3x - 2y)dA$ $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq 1\}$ con el método de Cuadratura Gaussiana de orden 3.

Dejando a x como variable libre, integraremos sobre la siguiente región (graficada):



Esta región está claramente acotada en x desde -1 a 1, así como en y va desde la función $y(x)=x^2$ hasta la función constante $y=1$.

La integral será resuelta usando la aproximación dada por:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (3x - 2y) dy dx \approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{i=1}^3 C_i F(u, t_i) \right] du \approx \sum_{j=1}^3 C_j \sum_{i=1}^3 C_i F(u_j, t_i)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (3x - 2y) dy dx \approx \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 C_i C_j F(u_j, t_i)$$

Donde el orden de la cuadratura es 3, por lo que las sumatorias llegan hasta este valor y las variables u, t se describirán a continuación:

Estandarizamos límites:

$$t = \frac{2y - \phi_2(x) - \phi_1(x)}{\phi_2(x) - \phi_1(x)} = \frac{2y - 1 - x^2}{1 - x^2}$$

De donde:

$$y = \frac{(1 - x^2)t + 1 + x^2}{2}$$

De aquí obtenemos el diferencial de y :

$$dy = \frac{(1 - x^2)dt}{2}$$

Análogamente utilizamos el cambio de variable en x y obtenemos el diferencial necesario:

$$u = \frac{2x - 1 - (-1)}{1 - (-1)}$$

$$u = x$$

$$du = dx$$

Ingresando las relaciones obtenidas en la integral, podemos hallar la función $F(u,t)$:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (3x - 2y) dy dx = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (3u - 2 \frac{(1-u^2)t + 1 + u^2}{2}) du \frac{1-u^2}{2} dt$$

Reordenando y agrupando obtenemos la integral transformada:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (3x - 2y) dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (3u - ((1-u^2)t + 1 + u^2)(1-u^2)) dudt$$

Donde la función $F(u,t)$ a usar en la expresión de la sumatoria es la siguiente:

$$F(u, t) = (3u - ((1 - u^2)t + 1 + u^2))(1 - u^2)$$

Por lo que basta con aplicar la aproximación de la sumatoria a esta función, luego calcular su integral y finalmente dividirla para dos y obtener la aproximación buscada.

Usamos las siguientes raíces de los polinomios de Legendre con sus coeficientes respectivos:

Raíces	Coficientes
-0.77459667	0.56
0	0.888888889
0.77459667	0.555555556

Generamos entonces la siguiente tabla de valores:

j	i	C_j	u_j	C_i	t_j	$C_i C_j F(u_i, t_j)$
	1			0.56	-0.774596669	-0.446166832
1	2	0.56	-0.774596669	0.888888889	0	-0.775069631
	3			0.555555556	0.774596669	-0.522670207
	1			0.56	-0.774596669	-0.111310287
2	2	0.888888889	0	0.888888889	0	-0.790123457
	3			0.555555556	0.774596669	-0.876344034
	1			0.56	-0.774596669	0.127608478
3	2	0.555555556	0.774596669	0.888888889	0	0.142970866
	3			0.555555556	0.774596669	0.051105104

Usando esta tabla de valores obtenemos que la integral es entonces $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 (3x - 2y) dy dx = -\frac{8}{5}$.

Invitamos al lector a resolver la integral de forma exacta y comprobar que el error de la misma respecto a su valor aproximado es cero, esto se explica debido al teorema del método de Cuadratura de Gauss donde si la integral a aproximar es polinómica el error de la aproximación es nulo.

7. Ecuaciones diferenciales ordinarias

"Creo que mientras más a fondo se estudia la ciencia, más se aleja uno de cualquier concepto que se aproxime al ateísmo".

William Thomson

7.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales son un área de estudio y aplicación muy importante del cálculo en general. En un curso específico de ecuaciones diferenciales se trata de hallar una función que satisfaga la ecuación planteada sin embargo en el análisis de las mismas en este texto no se busca específicamente esa función que satisfaga la ecuación sino la evaluación directa de esa función en ciertos puntos.

Existen varios métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales tanto de primer como de segundo orden.

Para todos estos métodos en general definimos un paso h que es la diferencia entre los valores en los cuales queremos encontrar la función evaluada. Este paso se calcula como $h = \frac{b-a}{n}$ donde n es el número de particiones del intervalo $[a, b]$.

7.2 Método de Taylor

7.2.1 Generalidades

El método de Taylor es una herramienta poderosa para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, el mismo se deduce de la fórmula de Taylor.

Para aproximar y_{i+1} conociendo $y' = f(t, y)$ se obtiene el algoritmo:

$$y_{i+1} \approx y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2!}f'(t_i, y_i)h^2 + \frac{1}{3!}f''(t_i, y_i)h^3 + \dots + \frac{1}{n!}f^{n-1}(t_i, y_i)h^n$$

Donde n es el orden del método de Taylor y además se tiene como condición inicial $y_0 = \alpha$ con $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Como se puede esperar en este método se necesitarán aplicar derivadas implícitas debido a la aparición del término f' que depende de t, y .

7.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 32: *Comparación entre valores por el método de Taylor y valor exacto.*

Aproxime la solución de $y' = \cos(t) - y$, $0 \leq t \leq 1$, $y_0 = 1$ empleando $n=4$ con el método de Taylor de orden 3. Además calcule el error de aproximación en cada valor considerando que la solución exacta a dicha ecuación está dada por $y(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} + \sin(t) + \cos(t))$.

En este caso el $n=4$ hace mención al número de particiones del intervalo ya que en otro lado se especifica el orden del método de Taylor.

Primero revisamos nuestro algoritmo general y revisamos cuales derivadas debemos calcular:

$$y_{i+1} \approx y_i + f(t_i, y_i)h + \frac{1}{2!}f'(t_i, y_i) h^2 + \frac{1}{3!}f''(t_i, y_i) h^3$$

Llegando hasta el termino de orden 3 tenemos que calcular f' y f'' .

Procediendo:

$$y' = \cos(t) - y$$

$$f(t, y) = \cos(t) - y$$

$$f'(t, y) = -\text{sen}(t) - y' = -\text{sen}(t) - \cos(t) + y$$

$$f''(t, y) = -\cos(t) + \text{sen}(t) + y' = -\cos(t) + \text{sen}(t) + \cos(t) - y = \text{sen}(t) - y$$

Reemplazamos en el algoritmo original, conociendo además que $h=0.25$.

$$y_{i+1} \approx y_i + 0.25[\cos(t_i) - y_i] + \frac{1}{2}0.25^2[-\text{sen}(t_i) - \cos(t_i) + y_i] + \frac{1}{6}0.25^3[\text{sen}(t_i) - y_i]$$

Con el algoritmo particular generado podemos comenzar a iterar el método para generar una tabla de valores:

i	t_i	y_i	y_{i+1}
0	0	1	0.99739583
1	0.25	0.99739583	0.98148061
2	0.5	0.98148061	0.94246343
3	0.75	0.94246343	0.87437605
4	1	0.87437605	

Para culminar el ejercicio comparamos los valores obtenidos con el valor exacto resultado de evaluar la función que satisface la ecuación en los puntos respectivos:

<i>Aprox</i>	<i>Exacto</i>	<i>Error</i>
0.99739583	0.99755858	0.00016275
0.98148061	0.98176938	0.00028877
0.94246343	0.94284709	0.00038366
0.87437605	0.87482637	0.00045031

7.3 Métodos de Runge Kutta para ecuaciones de primer orden

7.3.1 Generalidades

Existen varios algoritmos clasificados como métodos de Runge Kutta, los mismos parten de las condiciones antes mencionadas, es decir $y' = f(t, y)$ con $y_0 = \alpha; i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Método de Punto Medio:

$$y_{i+1} \approx y_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(t_i, y_i)\right)$$

Método de Euler Modificado:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2}[f(t_i, y_i) + f(t_i + h, y_i + hf(t_i, y_i))]$$

Método de Heun

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, y_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}hf(t_i, y_i)\right)\right]$$

Los métodos de Punto Medio y de Euler se consideran métodos de Runge Kutta de 2do orden.

Finalmente presentamos el último método que es el más exacto de todos:

Método de Runge Kutta de 4to Orden:

$$k_1 = hf(t_i, y_i)$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(t_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{1}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

7.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 33: Resolución de una ecuación diferencial por el método de Runge Kutta de 4to orden.

Empleando el método de Runge Kutta de 4to orden, aproxime $\frac{dy}{dt} - t\text{sen}(ty) - 1 = 0$, $y(0) = 0$, $0 \leq t \leq 2$ en $t=0.5$ con $h=0.1$.

Tenemos primeramente $f(t, y) = t\text{sen}(ty) + 1$ por lo que con esto podemos generar nuestro algoritmo de Runge Kutta de 4to orden.

$$k_1 = 0.1[t_i \text{sen}(t_i y_i) + 1]$$

$$k_2 = 0.1 \left[\left(t_i + \frac{h}{2} \right) \text{sen} \left(\left(t_i + \frac{h}{2} \right) \left(y_i + \frac{k_1}{2} \right) \right) + 1 \right]$$

$$k_3 = 0.1 \left[\left(t_i + \frac{h}{2} \right) \text{sen} \left(\left(t_i + \frac{h}{2} \right) \left(y_i + \frac{k_2}{2} \right) \right) + 1 \right]$$

$$k_4 = 0.1[(t_i + h)\text{sen}((t_i + h)(y_i + k_3)) + 1]$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

Con el algoritmo generamos la siguiente tabla de resultados:

i	t_i	y_i	$f(t_i, y_i)$	k_1	k_2	k_3	k_4	y_{i+1}
0	0	0	1	0.1	0.1000125	0.1000125	0.10005001	0.10001667
1	0.1	0.10001667	1.00100015	0.10010002	0.10033762	0.10033789	0.10060065	0.20035862
2	0.2	0.20035862	1.0080122	0.10080122	0.10156622	0.1015686	0.10225815	0.30191345
3	0.3	0.30191345	1.02713507	0.10271351	0.10431654	0.10432629	0.1056463	0.4061877
4	0.4	0.4061877	1.06470447	0.10647045	0.10923718	0.1092646	0.11141884	0.5153365
5	0.5	0.5153365						

Finalmente con esta tabla concluimos que $y(0.5) \approx 0.5153365$.

7.4 Sistema de ecuaciones diferenciales por el método de Runge Kutta

7.4.1 Generalidades

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ y'_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \vdots \\ y'_m = f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}$$

El mismo puede ser resuelto mediante el algoritmo de Runge Kutta para un sistema de ecuaciones, a saber:

Para aproximar $y_{j\ i+1}$ usamos:

$$y_{j\ i+1} \approx y_{j\ i} + \frac{1}{6}[k_{j1} + 2k_{j2} + 2k_{j3} + k_{j4}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad y_j(a) = \alpha_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Donde:

$$\begin{aligned} k_{j1} &= hf_j(t_i, y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{mi}) \\ k_{j2} &= hf_j\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{k_{11}}{2}, y_{2i} + \frac{k_{21}}{2}, \dots, y_{mi} + \frac{k_{m1}}{2}\right) \\ k_{j3} &= hf_j\left(t_i + \frac{h}{2}, y_{1i} + \frac{k_{12}}{2}, y_{2i} + \frac{k_{22}}{2}, \dots, y_{mi} + \frac{k_{m2}}{2}\right) \\ k_{j4} &= hf_j(t_i + h, y_{1i} + k_{13}, y_{2i} + k_{23}, \dots, y_{mi} + k_{m3}) \\ & \quad j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

Una forma de ver el algoritmo es que se calculan los cuatros k para cada función f y de esta forma se aproxima la solución para cada variable.

7.4.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 34: Sistema de ecuaciones diferenciales

Empleando el método de Runge Kutta de 4to orden, aproxime la solución del sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = -4y_1 + 3y_2 + 6 & ; & y_1(0) = 0 \\ y'_2 = -2.4y_1 + 1.6y_2 + 3.6 & ; & y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Con $h=0.1$ en $0 \leq t \leq 0.5$.

Del sistema podemos obtener las funciones f para generar el algoritmo del sistema:

$$f_1 = -4y_1 + 3y_2 + 6$$

$$f_2 = -2.4y_1 + 1.6y_2 + 3.6$$

Por lo que nuestros k serán como se muestra a continuación, considerando el primer subíndice como el que corresponde a cada función y el segundo como el orden del k calculado.

$$k_{11} = 0.1[-4y_1 + 3y_2 + 6]$$

$$k_{21} = 0.1[-2.4y_1 + 1.6y_2 + 3.6]$$

$$k_{12} = 0.1\left[-4\left(y_1 + \frac{k_{11}}{2}\right) + 3\left(y_2 + \frac{k_{21}}{2}\right) + 6\right]$$

$$k_{22} = 0.1\left[-2.4\left(y_1 + \frac{k_{11}}{2}\right) + 1.6\left(y_2 + \frac{k_{21}}{2}\right) + 3.6\right]$$

$$k_{13} = 0.1\left[-4\left(y_1 + \frac{k_{12}}{2}\right) + 3\left(y_2 + \frac{k_{22}}{2}\right) + 6\right]$$

$$k_{23} = 0.1\left[-2.4\left(y_1 + \frac{k_{12}}{2}\right) + 1.6\left(y_2 + \frac{k_{22}}{2}\right) + 3.6\right]$$

$$k_{14} = 0.1[-4(y_1 + k_{13}) + 3(y_2 + k_{23}) + 6]$$

$$k_{24} = 0.1[-2.4(y_1 + k_{13}) + 1.6(y_2 + k_{23}) + 3.6]$$

Con este algoritmo, además de las condiciones iniciales tenemos la siguiente tabla de valores:

i	t_i	y_{1i}	y_{2i}	f_{1i}	f_{2i}	k_{11}	k_{21}	k_{12}	k_{22}	k_{13}	k_{23}	k_{14}	k_{24}	y_{1i+1}	y_{2i+1}
0	0	0	1	9	5.2	0.9	0.52	0.798	0.4536	0.80844	0.460528	0.7147824	0.39965888	0.8046104	1.457985813
1	0.1	0.8046104	1.457985813	7.15551584	4.001712341	0.715551584	0.400171234	0.632466952	0.346318743	0.641006005	0.351980699	0.564743392	0.302646705	1.442483882	1.807888617
2	0.2	1.442483882	1.807888617	5.653730325	3.030660471	0.565373032	0.303066047	0.497758333	0.259466567	0.504741351	0.264092373	0.442704204	0.224182903	1.944663316	2.070283089
3	0.3	1.944663316	2.070283089	4.432196003	2.245260984	0.4432196	0.224526098	0.388254595	0.189301834	0.393963956	0.193079694	0.343557926	0.1608675	2.336532421	2.261975864
4	0.4	2.336532421	2.261975864	3.439797911	1.611483574	0.343979791	0.161148357	0.299356086	0.132762651	0.304022971	0.135846639	0.263124594	0.109918306	2.638842837	2.396690072
5	0.5	2.638842837	2.396690072												

7.5 Método de diferencias finitas para ecuaciones de segundo orden

7.5.1 Generalidades

Considere el problema de valor inicial con la ecuación diferencial de segundo orden lineal de la forma:

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) ; a \leq x \leq b ; y(a) = \alpha ; y(b) = \beta$$

Supongamos que particionamos el intervalo $[a, b]$ en n intervalos, tal que: $h = \frac{b-a}{n}$. Queremos aproximar entonces $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_{n-1})$, para lo cual usaremos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -\left(1 - \frac{h}{2}p(x_1)\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\left(1 + \frac{h}{2}p(x_2)\right) & 2 + h^2q(x_2) & -\left(1 - \frac{h}{2}p(x_2)\right) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 + \frac{h}{2}p(x_3)\right) & 2 + h^2q(x_3) & -\left(1 - \frac{h}{2}p(x_3)\right) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 + h^2q(x_{n-2}) - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_{n-2})\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\left(1 + \frac{h}{2}p(x_{n-1})\right) & 2 + h^2q(x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha \\ -h^2r(x_2) \\ -h^2r(x_3) \\ \vdots \\ -h^2r(x_{n-2}) \\ -h^2r(x_{n-1}) + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_{n-1})\right)\beta \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema antes descrito obtenemos la función y evaluada en los puntos interiores del intervalo de aproximación.

Cabe recalcar que la linealidad de la ecuación de segundo orden implica en realidad la linealidad de los términos $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$. Además debe cumplirse que estas tres funciones sean continuas en el intervalo $[a, b]$.

7.5.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 35: Un problema de valor inicial:

Aproxime la solución por el método de diferencias finitas utilizando un paso $h=0.25$.

$$y'' = -\frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y + \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x^2} ; 1 \leq x \leq 2 ; y(1) = 1 ; y(2) = 1.5$$

Dado el paso podemos encontrar los puntos interiores en los cuales aproximaremos la solución, los mismos serán:

$$x_1 = 1.25, x_2 = 1.50, x_3 = 1.75$$

Además conocemos las condiciones de frontera, por lo que:

$$\alpha = 1, \beta = 1.5$$

Generamos el sistema de ecuaciones a resolver, el mismo tendrá la forma:

$$\begin{pmatrix} 2 + h^2q(x_1) & -\left(1 - \frac{h}{2}p(x_1)\right) & 0 \\ -\left(1 + \frac{h}{2}p(x_2)\right) & 2 + h^2q(x_2) & -\left(1 - \frac{h}{2}p(x_2)\right) \\ 0 & -\left(1 + \frac{h}{2}p(x_3)\right) & 2 + h^2q(x_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2r(x_1) + \left(1 + \frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha \\ -h^2r(x_2) \\ -h^2r(x_3) + \left(1 - \frac{h}{2}p(x_3)\right)\beta \end{pmatrix}$$

Reconocemos por el algoritmo del método a las funciones p , q , r . Las mismas son:

$$p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$q(x) = \frac{2}{x^2}$$

$$r(x) = \frac{\text{sen}(\ln(x))}{x^2}$$

De esta forma podemos plantear el sistema de ecuaciones a resolver, a saber:

$$\begin{pmatrix} 2.08 & -1.2 & 0 \\ -0.83 & 2.05 & -1.16 \\ 0 & -0.857142857 & 2.040816 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.791148147 \\ -0.010956838 \\ 1.703451824 \end{pmatrix}$$

Al resolver el sistema para las incógnitas estipuladas podemos obtener la función y evaluada en los puntos solicitados, es decir:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.05789204259 \\ 1.17438941799 \\ 1.3279351289 \end{pmatrix}$$

8. Ecuaciones diferenciales parciales

"En ciencia uno intenta decir a la gente, en una manera en que todos lo puedan entender, algo que nunca nadie supo antes. La poesía es exactamente lo contrario".

Paul Dirac

8.1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales aparecen a menudo en ciertos problemas de aplicación de la ingeniería y ciencias. Por ejemplo para describir el comportamiento de una cuerda o el flujo de calor a través de un cuerpo se usan ecuaciones de este tipo.

En el presente folleto se estudiarán los tres tipos de ecuaciones más usuales y conocidos, a saber, ecuación diferencial hiperbólica, parabólica y elíptica.

La ecuación elíptica tiene la forma (donde U es una función de (x, y)):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y)$$

La ecuación parabólica tiene la forma (donde u es una función de (x, t)):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

La ecuación hiperbólica tiene la forma (donde u es una función de (x, t)):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A continuación presentaremos la información necesaria para la resolución de ejercicios que involucren algún tipo de estas ecuaciones.

8.2 Ecuación diferencial parcial elíptica

8.2.1 Generalidades

Sea el problema de valor inicial:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f(x, y) ; (x, y) \in R ; u(x, y) = g(x, y) \text{ en } Fr(R) ; R \subseteq R^2$$

El problema se encuentra definido sobre una región R del plano para lo cual la función g determina una condición inicial del ejercicio. Esta función nos proporciona el valor de la función U en la frontera de R .

De esta forma nuestro trabajo se limita a encontrar el valor de U en los puntos interiores de la región R solicitados.

Los puntos en los cuales se calcula el valor de U se denotan usando U_{ij} donde i denota la posición del punto en el eje x , y j denota la posición del punto en el eje y . Cabe recalcar que al decir posición no nos referimos al valor que toma en ese eje dicho punto.

El algoritmo a utilizar nos generará un sistema de ecuaciones lineales, al resolver el mismo obtendremos el valor de la función U en los puntos deseados.

Al utilizar las formulas para las derivadas respecto a x , y obtenemos el siguiente algoritmo:

$$\frac{1}{h^2} [U_{i+1j} - 2U_{ij} + U_{i-1j}] + \frac{1}{k^2} [U_{ij+1} - 2U_{ij} + U_{ij-1}] = f(x_i, y_j)$$

Donde h , k denotan el paso en el eje x & y respectivamente, considerando que:

$$h = \frac{b-a}{n} ; k = \frac{d-c}{m}$$

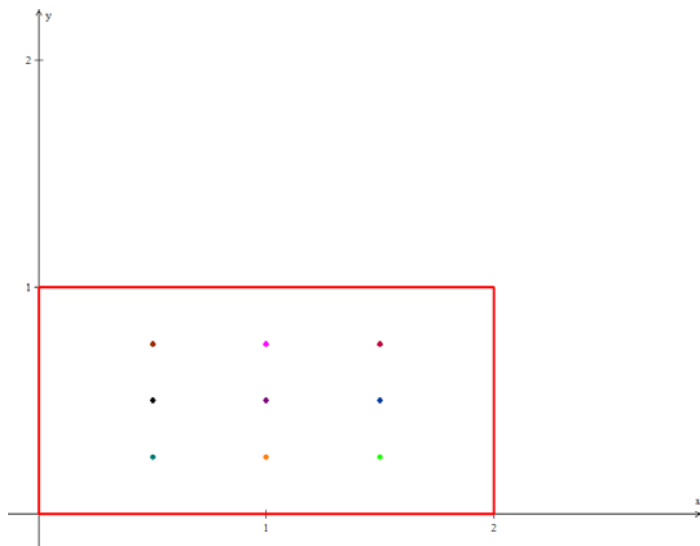
Los contadores cumplen: $i = 1, 2, \dots, n-1$ y $j = 1, 2, \dots, m-1$.

8.2.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 36: Ecuación diferencial hiperbólica

Aproxime la solución de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = xy$ en $R = \{(x, y) / 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$ utilizando $n=m=4$. Para la frontera de R considere una magnitud de 0 en los lados adyacentes desde el origen de coordenadas mientras que en los otros lados la magnitud varía proporcionalmente hasta llegar a 100 en el vértice opuesto al origen.

Antes de establecer de forma clara las condiciones de frontera para nuestro ejercicio, nos valemos de una grafica para entender la región y los puntos donde nos piden aproximar la función U .



Los puntos indicados de diferentes colores representan los lugares donde se nos pide calcular la función U .

Como se indico anteriormente, estos puntos se representan mediante contadores i, j .

Primero calculamos el paso en cada eje, $h=0.5$ y $k=0.25$.

Con esto podemos representar la función U en los puntos buscados mediante:

$$\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{31} \\ U_{32} \\ U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(0.5, 0.25) \\ U(0.5, 0.5) \\ U(0.5, 0.75) \\ U(1, 0.25) \\ U(1, 0.5) \\ U(1, 0.75) \\ U(1.5, 0.25) \\ U(1.5, 0.5) \\ U(1.5, 0.75) \end{pmatrix}$$

Seguimos por definir las condiciones de frontera, las mismas se establecen de forma indirecta en el enunciado del ejercicio. El hecho de que en los lados adyacentes al origen se fije como 0 la función U nos indica que $U(x, 0) = U(0, y) = 0$.

El crecimiento proporcional en los lados restantes hasta el valor de 100 nos permite obtener que $U(x, 1) = 50x$ y $U(2, y) = 100y$.

A continuación particularizamos nuestro algoritmo general con los valores de h, k conocidos para este ejercicio:

$$\frac{1}{0.5^2} [U_{i+1j} - 2U_{ij} + U_{i-1j}] + \frac{1}{0.25^2} [U_{ij+1} - 2U_{ij} + U_{ij-1}] = x_i y_j$$

Simplificando y acomodando obtenemos de forma específica:

$$4U_{i+1j} - 40U_{ij} + 4U_{i-1j} + 16U_{ij+1} + 16U_{ij-1} = x_i y_j$$

Procedemos a realizar las iteraciones para cada posible valor de i, j .

$$i = 1, j = 1 \quad 4U_{21} - 40U_{11} + 4U_{01} + 16U_{12} + 16U_{10} = x_1 y_1$$

$$i = 1, j = 2 \quad 4U_{22} - 40U_{12} + 4U_{02} + 16U_{13} + 16U_{11} = x_1 y_2$$

$$i = 1, j = 3 \quad 4U_{23} - 40U_{13} + 4U_{03} + 16U_{14} + 16U_{12} = x_1 y_3.$$

$$i = 2, j = 1 \quad 4U_{31} - 40U_{21} + 4U_{11} + 16U_{22} + 16U_{20} = x_2 y_1$$

$$i = 2, j = 2 \quad 4U_{32} - 40U_{22} + 4U_{12} + 16U_{23} + 16U_{21} = x_2 y_2$$

$$i = 2, j = 3 \quad 4U_{33} - 40U_{23} + 4U_{13} + 16U_{24} + 16U_{22} = x_2 y_3$$

$$i = 3, j = 1 \quad 4U_{41} - 40U_{31} + 4U_{21} + 16U_{32} + 16U_{30} = x_3 y_1$$

$$i = 3, j = 2 \quad 4U_{42} - 40U_{32} + 4U_{22} + 16U_{33} + 16U_{31} = x_3 y_2$$

$$i = 3, j = 3 \quad 4U_{43} - 40U_{33} + 4U_{23} + 16U_{34} + 16U_{32} = x_3 y_3$$

Mediante las expresiones antes desarrolladas podemos llegar a un sistema de ecuaciones que nos permita aproximar los valores de U solicitados, esto se logra primeramente reemplazando cada valor de x, y en el lado derecho de cada expresión. Además debemos eliminar los valores que no son incógnitas mediante el

uso de las condiciones de frontera, esto quiere decir que todo término U que tenga como subíndice al 0 o al 4 debe ser reemplazado por el valor del mismo dado que se encuentra en la frontera de R .

Tras reemplazar lo antes estipulado llegamos a un sistema de la forma:

$$\begin{pmatrix} -40 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -40 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -40 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -40 & 16 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 16 & -40 & 16 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 16 & -40 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -40 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 16 & -40 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 16 & -40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{31} \\ U_{32} \\ U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0.125 \\ -399.625 \\ 0.25 \\ 0.50 \\ -799.25 \\ -99.625 \\ -199.25 \\ -1498.875 \end{pmatrix}$$

El cual tiene por solución:

$$\begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ U_{23} \\ U_{31} \\ U_{32} \\ U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.23368316839 \\ 12.4753205703 \\ 18.7259025561 \\ 12.4667994027 \\ 24.9461128049 \\ 37.4514932802 \\ 18.712359639 \\ 37.4376367468 \\ 56.1920790267 \end{pmatrix}$$

8.3 Ecuación diferencial parcial parabólica

8.3.1 Generalidades

Como se mencionó anteriormente una ecuación diferencial parabólica tiene la forma $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t)$, la misma está definida para $0 \leq x < l; t > 0$ además de tener por condiciones de frontera $u(0, t) = 0$; $u(l, t) = 0$ y condición inicial $u(x, 0) = f(x)$.

Considere ahora los siguientes valores definidos para h, k :

$$h = \frac{l}{n}; \quad k = \Delta t$$

Donde h representa el paso en los valores de x y k representa para que intervalos de 'tiempo' se trabajará la solución.

Aplicando el método de diferencias progresivas podemos establecer un algoritmo para la aproximación de los valores de la función $U(x, t)$ para un tiempo fijo y las x fijadas inicialmente.

Este algoritmo tiene la forma:

$$U^{j+1} = AU^j + b\Delta t$$

Empezaremos definiendo cada termino del algoritmo, primero comentaremos sobre los vectores U . Para cada iteración en realidad variamos 'el tiempo' en el cual aproximamos la función dado que los valores en x son los mismos para todos los tiempos. De esta forma el vector aproximación U tiene la forma (con $j = 0, 1, 2, \dots$):

$$\begin{pmatrix} U_{1j} \\ U_{2j} \\ \vdots \\ U_{n-1j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x_1, t_j) \\ U(x_2, t_j) \\ \vdots \\ U(x_{n-1}, t_j) \end{pmatrix}$$

Como es de esperarse se necesitará el vector inicial U^0 , el mismo se encuentra por la condición inicial usando a $f(x)$.

$$U^0 = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

La matriz A por su parte es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

Definiendo como $\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2}$. El valor Δt resulta obviamente una constante que es la misma que k , la misma multiplica al vector b que aparece si la ecuación original tiene añadida a alguna función $g(x, t)$ en su expresión.

Para que el método progresivo sea estable se debe cumplir que $\lambda \leq 1$.

Existe también un algoritmo regresivo, dado por:

$$U^j = B^{-1}[U^{j-1} + b\Delta t]$$

Donde los términos participantes representan los mismos antes mencionados y la matriz B es por su parte:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 + 2\lambda & -\lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

De manera general este algoritmo es estable sin importar el valor de λ dado que su matriz B es estrictamente dominante diagonalmente.

8.3.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 37: Aproximación de una ecuación parabólica no homogénea

Aproxime la solución de $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t$, $0 \leq x \leq 1$, $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = \text{sen}(\pi x)$.
 Utilice $h=0.25$, $\Delta t=0.25$ en el instante $t=0.5$.

Realizaremos el ejercicio usando ambos algoritmos para verificar la diferencia entre ambos, comenzamos por dejar la ecuación de la forma que ambos parten.

La ecuación lista para aplicar cualquier de los dos algoritmos tiene la forma $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t$.

Los valores en x donde aproximaremos la solución son 0.25, 0.5, 0.75. Por otro lado el paso del tiempo será 0.25.

Calculamos el valor de λ (que es el mismo para ambos algoritmos) considerando que para este ejercicio α tiene el valor de 1:

$$\lambda = \frac{k\alpha^2}{h^2} = 4$$

De esta forma elaboramos el algoritmo progresivo, considerando a A como:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

De esta forma: $U^{j+1} = AU^j + 0.25b = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{1j} \\ U^{2j} \\ U^{3j} \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} t_j \\ t_j \\ t_j \end{pmatrix}$ para $j=0, 1$.

Como condición inicial tenemos el vector:

$$U^0 = \begin{pmatrix} \text{sen}(\pi(0.25)) \\ \text{sen}(\pi(0.5)) \\ \text{sen}(\pi(0.75)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Haciendo iterar el método progresivo obtenemos:

$$j = 0 (t = 0) \quad U^1 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.949747468295 \\ -1.34314575052 \\ -0.9497468295 \end{pmatrix}$$

$$j = 1 (t = 0.25) \quad U^2 = \begin{pmatrix} -7 & 4 & 0 \\ 4 & -7 & 4 \\ 0 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.949747468295 \\ -1.34314575052 \\ -0.9497468295 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.33814927599 \\ 1.86654050728 \\ 1.33814907599 \end{pmatrix}$$

Podemos ver un salto entre valores consecutivos muy alto debido a que el valor de λ es mayor que 1 por lo que el algoritmo progresivo no es del todo estable.

Consideremos ahora el algoritmo regresivo, su matriz B es la siguiente:

$$B = \begin{pmatrix} 9 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

En el algoritmo usamos B inversa, por lo que la calculamos:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.147392290249 & 8.16326530612 \times 10^{-2} & 3.62811791383 \times 10^{-2} \\ 8.16326530612 \times 10^{-2} & 0.183673469388 & 8.16326530612 \times 10^{-2} \\ 3.62811791383 \times 10^{-2} & 8.16326530612 \times 10^{-2} & 0.147392290249 \end{pmatrix}$$

Por lo que nuestro algoritmo queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} U_{1j} \\ U_{2j} \\ U_{3j} \end{pmatrix} = B^{-1} \left[\begin{pmatrix} U_{1j-1} \\ U_{2j-1} \\ U_{3j-1} \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} t_j \\ t_j \\ t_j \end{pmatrix} \right]$$

De esta forma hacemos iterar el método para $j=1, 2$.

$$j = 1 \quad \begin{pmatrix} U_{11} \\ U_{21} \\ U_{31} \end{pmatrix} = B^{-1} \left[\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0.228091041442 \\ 0.320803147949 \\ 0.228091041442 \end{pmatrix}$$

$$j = 2 \quad \begin{pmatrix} U_{12} \\ U_{22} \\ U_{32} \end{pmatrix} = B^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0.228091041442 \\ 0.320803147949 \\ 0.228091041442 \end{pmatrix} + 0.25 \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0.10124550301 \\ 0.139529727818 \\ 0.10124550301 \end{pmatrix}$$

Podemos observar las aproximaciones para ambos métodos, es claro que el método regresivo muestra más estabilidad que el progresivo por lo que podemos confiar tal vez un poco más en él.

8.4 Ecuación diferencial parcial hiperbólica

8.4.1 Generalidades

La ecuación diferencial hiperbólica constituye el último ejemplo de ecuaciones diferenciales parciales que estudiaremos en el presente. Una ecuación de este tipo, tiene la forma: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. La misma se encuentra definida en $0 < x < l, t > 0$ con condiciones de frontera $u(x, 0) = f(x)$; $\frac{\partial u}{\partial t} = g(x)$.

Mediante el uso de diferencias finitas con los pasos ya conocidos h, k llegamos a un algoritmo de aproximación de la forma:

$$U^{j+1} = AU^j - U^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

En este algoritmo la matriz A corresponde a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2(1-\lambda) & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

Considerando que $\lambda = \frac{k^2\alpha^2}{h^2}$ para este método.

Como lo indica su algoritmo, este método tiene en común con el de la ecuación parabólica el aproximar los valores para x fijadas previamente en valores de t diferentes.

Como podemos ver en el algoritmo, necesitamos los vectores U^0 y U^1 . Los mismos se hallan con las condiciones iniciales, de la siguiente forma:

$$U^0 = \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{20} \\ \vdots \\ u_{n-10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n-11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\lambda)f(x_1) + \frac{\lambda}{2}f(x_0) + kg(x_1) + \frac{\lambda}{2}f(x_2) \\ (1-\lambda)f(x_2) + \frac{\lambda}{2}f(x_1) + kg(x_2) + \frac{\lambda}{2}f(x_3) \\ \vdots \\ (1-\lambda)f(x_{n-1}) + \frac{\lambda}{2}f(x_{n-2}) + kg(x_{n-1}) + \frac{\lambda}{2}f(x_n) \end{pmatrix}$$

En general para U^1 se tiene que sus términos se generan mediante:

$$u_{i1} = (1-\lambda)f(x_i) + \frac{\lambda}{2}f(x_{i-1}) + kg(x_{i+1}) + \frac{\lambda}{2}f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

8.4.2 Ejemplos

Ejercicio resuelto 38: Ecuación diferencial hiperbólica no homogénea

Aproximar la solución en $t=0.1$ de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = x, \quad 0 < x < 1, t > 0.$

Considere $u(0, t) = u(1, t) = 0, u(x, 0) = \text{sen}(\pi x), \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = x$ con $h=0.25$ y $k=0.1$.

Primero reescribimos la ecuación para dejarla en la forma sobre la cual el algoritmo es deducido:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \right]$$

Procedemos a calcular el valor de λ para ingresarlo en la matriz y generar un algoritmo de la forma:

$$\lambda = 0.04$$

$$\begin{pmatrix} u_{1j+1} \\ u_{2j+1} \\ u_{3j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.92 & 0.04 & 0 \\ 0.04 & 1.92 & 0.04 \\ 0 & 0.04 & 1.92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ u_{3j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{1j-1} \\ u_{2j-1} \\ u_{3j-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1/4 \\ x_2/4 \\ x_3/4 \end{pmatrix} k^2$$

Construimos los vectores de condición inicial, pero antes recalamos los valores de x con los que se trabajará:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 0.25 \quad x_2 = 0.50 \quad x_3 = 0.75 \quad x_4 = 1$$

Reconocemos además que $f(x) = \text{sen}(\pi x)$; $g(x) = x$.

Por lo que:

$$U^0 = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(\pi \times 0.25) \\ \text{sen}(\pi \times 0.50) \\ \text{sen}(\pi \times 0.75) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.70710678 \\ 1 \\ 0.70710678 \end{pmatrix}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} (1-\lambda)f(x_1) + \frac{\lambda}{2}f(x_0) + kg(x_1) + \frac{\lambda}{2}f(x_2) \\ (1-\lambda)f(x_2) + \frac{\lambda}{2}f(x_1) + kg(x_2) + \frac{\lambda}{2}f(x_3) \\ (1-\lambda)f(x_3) + \frac{\lambda}{2}f(x_2) + kg(x_3) + \frac{\lambda}{2}f(x_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-0.04)\text{sen}(\pi \times 0.25) + \frac{0.04}{2}\text{sen}(0) + 0.1(0.25) + \frac{0.04}{2}\text{sen}(\pi \times 0.50) \\ (1-0.04)\text{sen}(\pi \times 0.50) + \frac{0.04}{2}\text{sen}(0.25) + 0.1(0.50) + \frac{0.04}{2}\text{sen}(\pi \times 0.75) \\ (1-0.04)\text{sen}(\pi \times 0.75) + \frac{0.04}{2}\text{sen}(0.50) + 0.1(0.75) + \frac{0.04}{2}\text{sen}(\pi) \end{pmatrix}$$

$$U^1 = \begin{pmatrix} 0.72382251 \\ 1.03828427 \\ 0.77382251 \end{pmatrix}$$

Para aproximar el valor de la función en $t=0.1$ basta una sola iteración, por lo que:

$$j = 1 \quad U^2 = \begin{pmatrix} 1.92 & 0.04 & 0 \\ 0.04 & 1.92 & 0.04 \\ 0 & 0.04 & 1.92 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.72382251 \\ 1.03828427 \\ 0.77382251 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.70710678 \\ 1 \\ 0.70710678 \end{pmatrix} - 0.1^2 \begin{pmatrix} 0.25/4 \\ 0.50/4 \\ 0.75/4 \end{pmatrix}$$

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0.72353881 \\ 1.0521615992 \\ 0.81828881 \end{pmatrix}$$