Escuela Superior Politécnica del Litoral

Solucionario de Problemas de Ecuaciones Diferenciales

Primer parcial (3ra versión)

Roberto Cabrera

- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN.
- APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN
- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN: HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS. METODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS Y VARIACION DE PARAMETROS.
- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR: HOMOGENEAS Y NO HOMOGENEAS. METODO LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS Y VARIACION DE PARAMETROS.
- RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN ALREDEDOR DE PUNTOS ORDINARIOS. (SERIE DE TAYLOR)

09

Ecuaciones Diferenciales separables

Se tiene una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = F(x,y)}$$

Se dice que ecuación diferencial de primer orden es separable si se puede expresar la esa ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

Donde $F(x,y)$ se lo expresa como una multiplicación de dos funciones, una que depende de la variable "x" y otra de la variable "y". En este caso se obtiene la siguiente solución de esta ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = F(x)G(y)$$

$$\frac{dy}{G(y)} = F(x)dx$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{G(y)} = \int F(x)dx}$$

Donde la solución de esta ecuación diferencial separable tiene la siguiente forma:

$$\boxed{\Phi(y) = \Psi(x) + C}$$

1.- Encontrar la solución implícita de la siguiente ecuación diferencial:

$$dy(xy - 2x + 4y - 8) - dx(xy + 3x - y - 3) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+3) - (y+3)}{x(y-2) + 4(y-2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y+3)(x-1)}{(y-2)(x+4)} = f(y)g(x);$$

$$\frac{(y-2)dy}{(y+3)} = \frac{(x-1)dx}{(x+4)} \Rightarrow \text{Integramos a ambos lados de la ecuación}$$

$$\int \frac{(y-2)dy}{(y+3)} = \int \frac{(x-1)dx}{(x+4)}$$

$$\int \frac{(y+3)dy}{(y+3)} - \int \frac{5dy}{y+3} = \int \frac{(x+4)dx}{(x+4)} - \int \frac{5dx}{(x+4)}$$

$$\int dy - \int \frac{5dy}{y+3} = \int dx - \int \frac{5dx}{(x+4)}$$

$$y - 5\ln|y+3| = x - 5\ln|x+4| + c$$

2.- Encontrar la solución particular de la siguiente ecuación diferencial:

Si $y(0) = \frac{\pi}{4}$;

$$3e^x\tan(y)dx + (2-e^x)\sec^2(y)dy = 0$$

$$(2-e^x)\sec^2(y)dy = -3e^x\tan(y)dx;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3e^x\tan(y)}{(2-e^x)\sec^2(y)} = f(x).g(y);$$

$$\frac{\sec^2(y)dy}{\tan(y)} = -\frac{3e^x dx}{(2-e^x)};$$

$$\int\frac{\sec^2(y)dy}{\tan(y)} = \int -\frac{3e^x dx}{(2-e^x)};$$

$$u = \tan(y) \Rightarrow du = \sec^2(y);$$

$$v = 2-e^x \Rightarrow dv = -e^x dx;$$

$\Rightarrow$ Reemplazan do :

$$\int\frac{du}{u} = \int\frac{3dv}{v};$$

$$\ln|u| = 3\ln|v| + c;$$

Reemplazando u y v :

$$\ln|\tan(y)| = 3\ln|2-e^x| + c;$$

$$e^{\ln|\tan(y)|} = e^{3\ln|2-e^x|+c};$$

$$\tan(y) = (2-e^x)^3 K;$$

La solución general es :

$$y = \arctan\left[(2-e^x)^3 K\right];$$

si $y(0) = \pi/4$;

$\Rightarrow$

$$\pi/4 = \arctan\left[\left(2-e^0\right)K\right];$$

$$\pi/4 = \arctan(K);$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = K; \Rightarrow K = 1;$$

La solución particular es :

$$y = \arctan\left[(2-e^x)^3\right];$$

3.- Exprese de forma implícita la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$e^{x/2}ydy - \frac{dx}{e^y(1+e^{x/2})} = 0$$

$$e^{x/2}ydy = \frac{dx}{e^y(1+e^{x/2})};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^{x/2}(1+e^{x/2})ye^y} = f(x).g(y);$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{x/2}(1+e^{x/2})};$$

$$g(y) = \frac{1}{ye^y};$$

$$\int ye^y dy = \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})};$$

$$\int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})} = ?$$

$$u = e^{x/2} \Rightarrow du = \frac{1}{2}e^{x/2}dx;$$

$$du = \frac{1}{2}udx \Rightarrow dx = \frac{2du}{u};$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})} = \int\frac{\frac{2du}{u}}{u(1+u)} = \int\frac{2du}{u^2(1+u)}$$

Integrando por fracciones parciales obtenemos :

$$\frac{1}{u^2(u+1)} = \frac{A}{u^2} + \frac{B}{u} + \frac{C}{1+u};$$

Donde los valores de A, B, C son :

$$A = 1; B = -1; C = 1;$$

$$\Rightarrow \int\frac{2du}{u^2(1+u)} = 2\left[\int\left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} + \frac{1}{1+u}\right)du\right];$$

$$\Rightarrow \int\frac{2du}{u^2(1+u)} = 2\int\frac{du}{u^2} - 2\int\frac{du}{u} + 2\int\frac{du}{1+u};$$

$$\Rightarrow \int\frac{2du}{u^2(1+u)} = -\frac{2}{u} - 2\ln|u| + 2\ln|1+u| + c;$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})} = -\frac{2}{e^{x/2}} - 2\ln\left|e^{x/2}\right| + 2\ln\left|1+e^{x/2}\right| + c;$$

$$ye^y - e^y = \int\frac{dx}{e^{x/2}(1+e^{x/2})};$$

La solución implicita general es :

$$\Rightarrow ye^y - e^y = -\frac{2}{e^{x/2}} - 2\ln\left|e^{x/2}\right| + 2\ln\left|1+e^{x/2}\right| + c;$$

4.- Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{\mathbf{2y\ln(x)dx-(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}dy=0}}$$

$$(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}dy=2y\ln(x)dx;$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y\ln(x)}{(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}}=f(y).g(x);$$

$$f(y)=\frac{2y}{(e^{y}-e^{-y})}\ \wedge\ \mathbf{g(x)}=\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y\ln(x)}{(e^{y}-e^{-y})x\sqrt{1+\ln(x)}}$$

$$\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2y}dy=\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Integrando a ambos lados de la ecuación se obtiene :

$$\int\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2y}dy=\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Si observamos que $\frac{(e^{y}-e^{-y})}{2}=\operatorname{senh}(y)$ **entonces tenemos lo siguiente :**

$$\int\frac{\operatorname{senh}(y)}{y}dy=\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Para integrar $\frac{\operatorname{senh}(y)}{y}dy$ **debemos usar series de potencias :**

$$\text{Si }\operatorname{senh}(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Rightarrow\frac{\operatorname{senh}(y)}{y}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!};$$

Reemplazando :

$$\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}dy=\int\frac{\ln(x)}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx;$$

Integrando $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}dy$ **obtenemos que :**

$$\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n}}{(2n+1)!}dy=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!};$$

Ahora integrando $\frac{\mathbf{ln(x)}}{\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}}dx$ **:**

$$\int \frac{\mathbf{ln(x)}}{\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}}dx = ?$$

Si $\mathbf{u} = \mathbf{ln(x)} \Rightarrow \mathbf{du} = \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{x}}$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathbf{ln(x)}}{\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}}dx = \int \frac{\mathbf{udu}}{\sqrt{\mathbf{1+u}}};$$

Ahora $\mathbf{z^2} = 1 + u \Rightarrow 2zdz = du;$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathbf{udu}}{\sqrt{\mathbf{1+u}}} = \int \frac{\mathbf{(z^2 - 1)2zdz}}{z};$$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathbf{(z^2 - 1)2zdz}}{z} = 2\int \mathbf{(z^2 - 1)dz} = \mathbf{2}\left[\frac{z^3}{3} - z\right] + C;$$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathbf{udu}}{\sqrt{\mathbf{1+u}}} = 2\left[\frac{\left(\sqrt{\mathbf{1+u}}\right)^3}{3} - \sqrt{\mathbf{1+u}}\right] + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathbf{ln(x)}}{\mathbf{x}\sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}}dx = 2\left[\frac{\left(\sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}\right)^3}{3} - \sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}\right] + C;$$

La solucion general de forma implícita es :

$$\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2\left[\frac{\left(\sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}\right)^3}{3} - \sqrt{\mathbf{1+ln(x)}}\right] + C$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales

Las ecuaciones diferenciales lineales tienen la siguiente forma:

$$y' + p(x)y = g(x);$$

Existen dos métodos para resolver este tipos de ecuaciones:

- El método del factor integrante.
- Método de variación de parámetros

El método del factor integrante:

$$y' + p(x)y = g(x);$$
$$u(x) = e^{\int p(x)dx};$$
$$u(x)\left[y' + p(x)y\right] = u(x)g(x);$$
$$\frac{d}{dx}\left[u(x)y\right] = u(x)g(x);$$
$$\int d\left[u(x)y\right] = \int u(x)g(x)dx;$$
$$u(x)y = \int u(x)g(x)dx;$$
$$y = \frac{1}{u(x)}\int u(x)g(x)dx;$$

Método de variación de parámetros

$$y' + p(x)y = g(x);$$
$$y_h' + p(x)y_h = 0;$$
$$y_h' = -p(x)y_h;$$
$$\frac{dy_h}{dx} = -p(x)y_h;$$
$$\int \frac{dy_h}{y_h} = \int -p(x)dx;$$
$$\ln\left|y_h\right| = \int -p(x)dx;$$
$$y_h = e^{\int -p(x)dx;}$$

Asumir:

$$y = y_h v(x);$$
$$y' = y_h v'(x) + y'_h v(x);$$

Reemplazando:

$$y' + p(x)y = g(x);$$
$$\left[y_h v'(x) + y'_h v(x)\right] + p(x)y_h v(x) = g(x);$$
$$v'(x)\left[y_h\right] + v(x)\left[y'_h + p(x)y_h\right] = g(x);$$

Pero $y'_h + p(x)y_h = 0$, *entonces:*

$$v'(x)\left[y_h\right] + v(x)\left[0\right] = g(x);$$
$$v'(x)\left[y_h\right] = g(x);$$
$$\frac{dv}{dx}\left[y_h\right] = g(x);$$
$$\int dv = \int \frac{g(x)}{y_h}dx;$$
$$v(x) = \int \frac{g(x)}{y_h}dx;$$
$$y = y_h v(x);$$
$$y = e^{\int -p(x)dx}\int \frac{g(x)}{y_h}dx;$$

1) $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}$;

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x^2}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}};$$

Tiene la forma $y' + p(x)y = g(x)$;

Por lo tanto podemos aplicar el método del factor integrante :

Encontremos el factor integrante $u(x)$ *:*

$$u(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$u(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2};$$

Multipliquemos el factor integrante $u(x)$ *a ambos lados de la ecuación :*

$$\frac{1}{x^2}\left(y' - \frac{2}{x}y\right) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right);$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right);$$

$$\Rightarrow \int d\left(\frac{1}{x^2}y\right) = \int\left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right)dx;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}y = \int\left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right)dx;$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{sen^2(x)\sqrt[4]{ctg(x)}}\right)dx = \int\frac{csc^2(x)}{\sqrt[4]{ctg(x)}}dx;$$

$$\text{Si } u = ctg(x) \Rightarrow du = -csc^2(x)dx;$$

$$\Rightarrow \int\frac{csc^2(x)}{\sqrt[4]{ctg(x)}}dx = \int\frac{-du}{\sqrt[4]{u}} = -\int u^{-1/4}du = -\left[\frac{u^{3/4}}{3/4}\right] = -\frac{4u^{3/4}}{3}$$

$$\Rightarrow \int\frac{csc^2(x)}{\sqrt[4]{ctg(x)}}dx = -\frac{4[ctg(X)]^{3/4}}{3} + C = -\frac{4\sqrt[4]{ctg^3(X)}}{3} + C;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2}y = -\frac{4\sqrt[4]{ctg^3(X)}}{3} + C;$$

La solución general de la ecuacion diferencial es :

$$y = x^2\left[-\frac{4\sqrt[4]{ctg^3(X)}}{3} + C\right];$$

2) $$y'+p(x)y=1; \quad y(0)=1; \quad p(x)=\begin{cases}1 & ;\ 0\le x<2\\ -2x\ ; & x\ge 2\end{cases}$$

Para el intervalo $0\le x<2$ resolvemos la ecuación diferencial, donde $p(x)=1$:

$$y'+y=1;$$
$$\frac{dy}{dx}+y=1;\Rightarrow \frac{dy}{dx}=1-y;\ \textit{(Ec. dif. separable);}$$
$$\frac{dy}{1-y}=dx\Rightarrow\int\frac{dy}{1-y}=\int dx;$$
$$-\ln|1-y|=x+C;$$
$$\ln|1-y|=-x+K$$
$$e^{\ln|1-y|}=e^{-x+K};$$
$$1-y=k_1e^{-x};$$
$$y_1=1-k_1e^{-x};$$
$$\text{Pero } y(0)=1;$$
$$1=1-k_1e^{0};\Rightarrow k_1=0;$$
$$\Rightarrow y_1=1\quad \textit{para}\quad 0\le x<2$$

Ahora para $x\ge 2$, $p(x)=-2x$;

$$y'-2xy=1;\qquad \textit{(Ec. dif. lineal)}$$
$$u(x)=e^{\int -2x\,dx}=e^{-x^2};$$
$$e^{-x^2}(y'-2xy)=e^{-x^2}(1);$$
$$\frac{d(e^{-x^2}y)}{dx}=e^{-x^2};$$
$$\int d(e^{-x^2}y)=\int e^{-x^2}dx;\Rightarrow e^{-x^2}y=\int e^{-x^2}dx;$$

Pero para integrar $e^{-x^2}dx$ *necesitamos usar series de potencias :*

$$\Rightarrow e^{-x^2}y=\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx;$$
$$\Rightarrow e^{-x^2}y=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+k_2;$$
$$\Rightarrow y_2=e^{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{x^2}k_2;\ \textit{para } x>2;$$

Ahora para encontrar k_2 usaremos la condición de continuidad de dos funciones :
Esta condición dice :

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x);$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}y_1=\lim_{x\to 2^+}y_2;$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-}1=\lim_{x\to 2^+}\left[e^{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{x^2}k_2\right];$$
$$\Rightarrow 1=e^{2^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{2^2}k_2;\Rightarrow 1=e^4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}2}{(2n+1)n!}+e^4k_2;$$
$$\Rightarrow 1-e^4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}2}{(2n+1)n!}=e^4k_2;\Rightarrow k_2=\frac{1}{e^4}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}2}{(2n+1)n!};$$
$$\Rightarrow k_2=\frac{1}{e^4}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)n!};$$

La solución queda expresada con la siguiente regla de correspondencia :

$$y=\begin{cases}1; & 0\le x<2\\ e^{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}+e^{x^2}\left[\frac{1}{e^4}-2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n+1)n!}\right]; & x\ge 2\end{cases}$$

3.- Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{y}{e^{y}+2x}}$$

Si observamos que esta es una ecuación diferencial no separable, no lineal con respecto a y, que tal si hacemos que nuestra variable independiente sea "**y"**, y que "**x**" nuestra variable dependiente, es decir obtener nuestra solución en función de "**y"** $(x=f(y))$.

$$(e^{y}+2x)dy=ydx;$$

$$(e^{y}+2x)=y\frac{dx}{dy};$$

$$y\frac{dx}{dy}-e^{y}-2x=0;\quad\equiv\quad yx'-e^{y}-2x=0;$$

$$\Rightarrow x'-\frac{e^{y}}{y}-\frac{2x}{y}=0;\quad\Rightarrow\quad x'-\frac{2x}{y}=\frac{e^{y}}{y};$$

Tiene la forma $x'+p(y)x=g(y);$

Ahora y es la variable independiente:

Apliquemos el método del factor integrante:

$$x'+p(y)x=g(y);$$

** El factor integrante ahora depende de y :*

$$u(y)=e^{\int p(y)dy};$$

$$p(y)=-\frac{2}{y};\ \ entonces\ \ u(y)=e^{\int-\frac{2}{y}dy}=e^{-2\ln y}=y^{-2}\ \Rightarrow\ u(y)=y^{-2}$$

Multiplicando el factor integrante $u(y)=y^{-2}$ *a ambos lados de la ecuación diferencial:*

$$x'-\frac{2x}{y}=\frac{e^{y}}{y}\quad\Rightarrow\quad\underbrace{y^{-2}\left(x'-\frac{2x}{y}\right)}_{\frac{d}{dy}[y^{-2}x]}=y^{-2}\frac{e^{y}}{y}.$$

$$\frac{d}{dy}[y^{-2}x]=\frac{e^{y}}{y^{3}}\ \Rightarrow\ d[y^{-2}x]=\frac{e^{y}}{y^{3}}dy\ \Rightarrow\ \int d[y^{-2}x]=\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy$$

$$y^{-2}x=\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy\quad\Rightarrow\quad x=y^{2}\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy$$

Para integrar $\frac{e^{y}}{y^{3}}dy$ *usamos series de potencias:*

$$e^{y}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n}}{n!}\Rightarrow\frac{e^{y}}{y^{3}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n-3}}{n!}$$

$$\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n-3}}{n!}dy=\int\left[\frac{1}{0!y^{3}}+\frac{1}{1!y^{2}}+\frac{1}{2!y}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{y^{n-3}}{n!}\right]$$

$$x(y)=y^{2}\int\frac{e^{y}}{y^{3}}dy=y^{2}\left[-\frac{1}{2y^{2}}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}\ln(y)+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{y^{n-2}}{(n-2)n!}+C;\right]$$

La solución es:

$$x=\left[-\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}y^{2}ln(y)+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{y^{n}}{(n-2)n!}+Cy^{2}\right]$$

4.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$xy' - y = x^2 sen(ln(x)); \qquad y(1) = 0;$$

Utilizando el método del factor integrante:

$$xy' - y = x^2 sen(\ln(x));$$

$$y' - \frac{y}{x} = x sen(\ln(x));$$

Tiene la siguiente forma $y' + p(x)y = g(x)$, entonces :

$$u(x) = e^{\int p(x)dx;}$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\int p(x)dx}; \qquad donde \qquad p(x) = -\frac{1}{x};$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{1}{x}dx} = e^{-\ln(x)};$$

$$\Rightarrow u(x) = x^{-1};$$

Multiplicando el factor integrante a ambos lados de la ecuación diferencial se obtiene :

$$\underbrace{x^{-1}y' - x^{-1}\frac{y}{x}}_{\frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right]} = x^{-1} x sen(\ln(x));$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-1}y\right] = sen(\ln(x)) \quad \Rightarrow \quad d\left[x^{-1}y\right] = sen(\ln(x))dx \quad \Rightarrow \quad \int d\left[x^{-1}y\right] = \int sen(\ln(x))dx$$

$$x^{-1}y = \int sen(\ln(x))dx$$

$$y = x\int sen(\ln(x))dx$$

$$\int sen(\ln(x))dx = ?$$

$$z = \ln(x); \qquad \Rightarrow \qquad dz = \frac{dx}{x};$$

$dx = xdz;$ *Pero $x = e^z$;*

$$dx = e^z dz;$$

$$\int sen(\ln(x))dx = \int sen(z)e^z dz;$$

$\int sen(z)e^z dz$, *integrando por partes obtenemos que :*

$$\int sen(z)e^z dz = \frac{e^z\left[sen(z) - cos(z)\right]}{2} + C;$$

$$\Rightarrow \int sen(\ln(x))dx = \frac{x\left[sen(\ln(x)) - cos(\ln(x))\right]}{2} + C;$$

$$\Rightarrow y = x\left[\frac{x\left[sen(\ln(x)) - cos(\ln(x))\right]}{2} + C\right]$$

$$y = \frac{x^2\left[sen(\ln(x)) - cos(\ln(x))\right]}{2} + Cx;$$

Encontremos ahora la solución particular si $y(1) = 0$;

$$y = \frac{x^2\left[sen(\ln(x)) - cos(\ln(x))\right]}{2} + Cx;$$

$$y(1) = 0;$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1^2\left[sen(\ln(1)) - cos(\ln(1))\right]}{2} + C(1);$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\left[sen(0) - cos(0)\right]}{2} + C;$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} + C; \Rightarrow C = \frac{1}{2};$$

La solución es :

$$y = \frac{x^2\left[sen(ln(x)) - cos(ln(x))\right]}{2} + \frac{x}{2}$$

Ecuaciones diferenciales Exactas

Las ecuaciones diferenciales exactas tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{M(x,y) + N(x,y)y' = 0;}$$

Es exacta si :

$$\frac{\partial \boldsymbol{M(x,y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \frac{\partial \mathrm{N}\boldsymbol{(x,y)}}{\partial \boldsymbol{x}};$$

$$\mathrm{M_y} = \mathrm{N_x};$$

Entonces existe :

F(x, y) tal que :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y);$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y);$$

Si escogemos $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \boldsymbol{M(x,y)}$***, se obtiene :***

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\int \partial F(x,y) = \int M(x,y)\partial x;$$

$$F(x,y) = G(x,y) + h(y);$$

Luego derivando F(x, y) con respecto a y :

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = G'(x,y) + h'(y);$$

Luego igualando con $\frac{\partial \boldsymbol{F(x,y)}}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{N(x,y);}$

$$G'(x,y) + h'(y) = N(x,y);$$

$$h'(y) = N(x,y) - G'(x,y);$$

$h(y) =$ ***La constante de F(x, y).***

Entonces :

$$F(x,y) = G(x,y) + h(y);$$

La solucíon es :

$$F(x,y) = 0;$$

$$G(x,y) + h(y) = 0;$$

Si se elige $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$***, y procedemos de la misma forma, se obtiene :***

$$\boldsymbol{F(x,y) = H(x,y) + h(x);}$$

Donde la solución es :

$$\boldsymbol{F(x,y) = 0;}$$

1.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\left[4x^3y-\frac{e^{xy}}{x}+yln(x)+x\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\right]dx+\left[x^4-\frac{e^{xy}}{y}+xln(x)-x\right]dy=0$$

$$\left[4x^3y-\frac{e^{xy}}{x}+yln(x)+x\left(\sqrt[3]{x-4}\right)\right]+\left[x^4-\frac{e^{xy}}{y}+xln(x)-x\right]y'=0$$

$$M(x,y)=4x^3y-\frac{e^{xy}}{x}+y\ln(x)+x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

$$M_y=4x^3-e^{xy}+\ln(x);$$

$$N(x,y)=x^4-\frac{e^{xy}}{y}+xln(x)-x;$$

$$Nx=4x^3-e^{xy}+\ln(x);$$

$My=Nx$***; entonces la ecuacion diferencia l es exacta;***

$$\Rightarrow \text{Existe } \textit{una función } F(x,y), \textit{ donde } \begin{cases} Fx=M(x,y) \\ Fy=N(x,y) \end{cases}$$

Si $Fy=N(x,y)$, ***entonces se obtiene lo siguiente :***

$$Fy=x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x;$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial y}=x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x;$$

$$\partial(F(x,y))=\left(x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x\right)\partial y;$$

Entonces integrando a ambos lados de la ecuación :

$$\int\partial(F(x,y))=\int\left(x^4-\frac{e^{xy}}{y}+x\ln(x)-x\right)\partial y;$$

$$F(x,y)=x^4y-\int\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\partial y+yx\ln(x)-xy+h(x);$$

Para integrar $\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\partial y$ ***se usa series de potencias :***

$$\frac{e^{xy}}{y}=\frac{1}{y}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xy)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^{n-1}}{n!}=\frac{1}{y}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^{n-1}}{n!};$$

$$\int\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)\partial y=\int\left(\frac{1}{y}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^{n-1}}{n!}\right)\partial y=\ln(y)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)};$$

$$F(x,y)=x^4y-\ln(y)-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)}+yx\ln(x)-xy+h(x);$$

Ahora si Fx = M, entonces se obtiene lo siguiente :

Fx = M(x, y);

$$Fx = 4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

$$Fx = 4x^3y - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n(x)^{n-1}(y)^n}{(n)(n!)} + y[1+\ln(x)] - y + h'(x);$$

$$Fx = 4x^3y - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^{n-1}(y)^n}{(n!)} + y + y\ln(x) - y + h'(x);$$

$$Fx = 4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + h'(x);$$

Entonces reemplazando Fx :

$$4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + h'(x) = 4x^3y - \frac{e^{xy}}{x} + y\ln(x) + x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

Eliminando términos :

$$h'(x) = x\left(\sqrt[3]{x-4}\right);$$

Obteniendo h(x) :

$$h(x) = \int x\left(\sqrt[3]{x-4}\right)dx;$$

$$z^3 = x-4; \Rightarrow 3z^2dz = dx;$$

$$z = \left(\sqrt[3]{x-4}\right)$$

$$x = z^3 + 4;$$

$$h(z) = \int (z^3+4)\left(\sqrt[3]{z^3}\right)3z^2dz;$$

$$h(z) = 3\int (z^6 + 4z^3)dz;$$

$$h(z) = 3\left[\frac{z^7}{7} + z^4 + C\right];$$

$$h(x) = 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^7}{7} + \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^4 + C\right];$$

Entonces :

$$F(x,y) = x^4y - \ln(y) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)} + yx\ln(x) - xy + 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^7}{7} + \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^4 + C\right];$$

La solución implicitaes F(x, y) = 0, es decir :

$$x^4y - \ln(y) - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x)^n(y)^n}{(n)(n!)} + yx\ln(x) - xy + 3\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^7}{7} + \left(\sqrt[3]{x-4}\right)^4 + C\right] = 0;$$

2.- Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\left(y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2\right)+\left(2xy-x+ln(x+1)+x^2y+\frac{y^3}{y^8-2}\right)y'=0\,;$$

$$M(x,y)=y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2$$

$$N(x,y)=2xy-x+\ln|x+1|+x^2y+\frac{y^3}{y^8-2}$$

$$My=2y-\frac{x}{x+1}+2xy$$

$$Nx=2y-1+\frac{1}{x+1}+2xy;$$

$$Nx=2y+\frac{1-x-1}{x+1}+2xy;$$

$$Nx=2y-\frac{x}{x+1}+2xy;$$

$My=Nx;$ ***la ecuación diferencial es exacta.***

$$\Rightarrow \text{Existe } \textit{una función } F(x,y), \textit{ donde } \begin{cases} Fx=M(x,y) \\ Fy=N(x,y) \end{cases}$$

Si $Fx=M(x,y)$, *entonces se obtiene lo siguiente :*

$$Fx=M(x,y)=y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2;$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x}=y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2$$

$$\partial(F(x,y))=\left(y^2-\frac{xy}{x+1}+xy^2\right)\partial x;$$

$$F(x,y)=xy^2-y\int\frac{x}{x+1}\partial x+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

$$F(x,y)=xy^2-y\int\frac{x+1-1}{x+1}\partial x+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

$$F(x,y)=xy^2-y\int\partial x+y\int\frac{1}{x+1}\partial x+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

$$F(x,y)=xy^2-xy+y\ln|x+1|+\frac{x^2y^2}{2}+h(y);$$

Ahora si $Fy=N(x,y)$, entonces se obtiene lo siguiente :

$Fy=N(x,y);$

$$Fy=2xy-x+\ln|x+1|+x^2y+h'(y);$$

Entonces reemplazando Fy :

$$2xy - x + \ln|x+1| + x^2 y + h'(y); = 2xy - x + \ln|x+1| + x^2 y + \frac{y^3}{y^8 - 2}$$

Eliminando términos :

$$h'(y) = \frac{y^3}{y^8 - 2};$$

Obteniendo h(y) :

$$h(y) = \int \frac{y^3}{y^8 - 2} dy;$$

$$h(y) = \int \frac{y^3}{\left(y^4\right)^2 - 2} dy;$$

$$z = y^4 ; \Rightarrow dz = 4y^3 dy;$$

$$h(z) = \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2 - 2} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + K\right];$$

$$h(z) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C;$$

$$h(y) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{y^4-\sqrt{2}}{y^4+\sqrt{2}}\right| + C;$$

Entonces :

$$F(x, y) = xy^2 - xy + y\ln|x+1| + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{y^4-\sqrt{2}}{y^4+\sqrt{2}}\right| + C;$$

La solución implicitaes F(x, y) = 0, es decir :

$$xy^2 - xy + y\ln|x+1| + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln\left|\frac{y^4-\sqrt{2}}{y^4+\sqrt{2}}\right| + C = 0;$$

3.- Determine el valor de N(x,y) para que la siguiente ecuación diferencial sea exacta, luego encuentre la solución de forma implícita:

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)dy = 0$$

Para que la ecuación diferencial sea exacta debe cumplirse que My = Nx

$$Nx = My;$$

$$Nx = \frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2} - \frac{x}{\left(x^2+y\right)^2};$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2} - \frac{x}{\left(x^2+y\right)^2};$$

$$\partial N(x,y) = \left(\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2} - \frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right)\partial x;$$

$$\int \partial N(x,y) = \int\left(\frac{1}{2}y^{-1/2}x^{-1/2} - \frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right)\partial x;$$

$$N(x,y) = y^{-1/2}x^{1/2} - \int\left(\frac{x}{\left(x^2+y\right)^2}\right)\partial x;$$

$$u = x^2 + y;$$
$$\partial u = 2x\partial x;$$

$$N(x,y) = y^{-1/2}x^{1/2} - \frac{1}{2}\int\frac{\partial u}{u^2};$$

$$N(x,y) = y^{-1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2u} + C;$$

$$N(x,y) = y^{-1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2\left(x^2+y\right)} + C;$$

$$\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y}\right)dx + \left(y^{-1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2\left(x^2+y\right)} + C\right)dy = 0$$

Ahora como My = Nx;

$\Rightarrow$ Existe ***una función F(x, y), donde*** $\begin{cases} \boldsymbol{Fx = M(x,y)} \\ \boldsymbol{Fy = N(x,y)} \end{cases}$

Si ***Fx = M(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :***

$$Fx = M(x,y) = y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y};$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y}$$

$$\partial(F(x,y)) = \left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y}\right)\partial x;$$

$$F(x,y) = \int\left(y^{1/2}x^{-1/2} + \frac{x}{x^2+y}\right)\partial x;$$

$$F(x,y) = 2y^{1/2}x^{1/2} + \int\frac{x}{x^2+y}\partial x;$$

$$u = x^2 + y;$$
$$\partial u = 2x\partial x;$$

$$F(x,y) = 2y^{1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial u}{u};$$

$$F(x,y) = 2y^{1/2}x^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right| + h(y);$$

Ahora si Fy = N(x, y), entonces se obtiene lo siguiente :

Fy = N(x, y);

$$Fy = x^{1/2}y^{-1/2} + \frac{1}{2(x^2+y)} + h'(y);$$

Entonces reemplazando Fy :

$$x^{1/2}y^{-1/2}+\frac{1}{2(x^2+y)}+h'(y);=y^{-1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2\left(x^2+y\right)}+C;$$

Eliminando términos :

$$h'(y)=C;$$

Obteniendo h(y) :

$$h(y)=Cx+K;$$

Entonces :

$$F(x,y)=2y^{1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right|+h(y);$$

$$F(x,y)=2y^{1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right|+Cx+K;$$

La solución implicitaes F(x, y) = 0, es decir :

$$2y^{1/2}x^{1/2}+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+y\right|+Cx+K;=0;$$

Ecuaciones diferenciales exactas con factor integrante

$M(x,y)+N(x,y)y'=0;$

Si $My \neq Nx$;

Entonces es una ecuación diferencial no exacta, por lo tanto se necesita un factor integrante :

Un factor integrante que solo depende de x es :

$u(x)=e^{\int \frac{My-Nx}{N(x,y)}dx};$

$u(x)M(x,y)+u(x)N(x,y)y'=0;$

Ahora *la ecuación diferencial es exacta.*

Un factor integrante que depende de y :

$u(y)=e^{\int \frac{Nx-My}{N(x,y)}dx};$

$u(y)M(x,y)+u(y)N(x,y)y'=0;$

Ahora la ecuación diferencial es exacta.

1) $\boxed{xydx+\left(2x^2+3y^2-20\right)dy=0; \quad Si \quad y(1)=1;}$

$M(x,y)=xy;$

$My=x;$

$N(x,y)=2x^2+3y^2-20;$

$Nx=4x;$

$My \neq Nx$; entonces la ecuación diferencial no es exacta;

Por lo tanto debemos encontrar su factor integrante :

$u(y)=e^{\int\left(\frac{Nx-My}{M(x,y)}\right)dy}$

$u(y)=e^{\int\left(\frac{4x-x}{xy}\right)dy}=e^{\int\left(\frac{3}{y}\right)dy}=y^3;$

$u(y)=y^3;$

Luego mulitiplicando u(y) a ambos lados de la ecuación :

$y^3\left(xydx\right)+y^3\left(2x^2+3y^2-20\right)dy=0;$

$xy^4dx+\left(2x^2y^3+3y^5-20y^3\right)dy=0;$

$M(x,y)=xy^4;$

$My=4xy^3;$

$N(x,y)=2x^2y^3+3y^5-20y^3;$

$Nx=4xy^3;$

$My = Nx$, por lo tanto la ecuación diferencial es exacta :

$$\exists(F(x,y)) \text{ talque}: \begin{cases} Fx = M(x,y); \\ Fy = N(x,y); \end{cases}$$

$$Fx = M(x,y);$$

$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = xy^4;$$

$$F(x,y) = \int xy^4 \partial x;$$

$$F(x,y) = \frac{x^2y^4}{2} + h(y);$$

$$Fy = N(x,y);$$

$$2x^2y^3 + h'(y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3;$$

$$h'(y) = 3y^5 - 20y^3;$$

$$h(y) = \int \left(3y^5 - 20y^3\right)dy;$$

$$h(y) = \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C;$$

Entonces :

$$F(x,y) = \frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C;$$

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C = 0;$$

2) $\boxed{2xdy - \left[y + xy^3\left(1 + ln(x)\right)\right]dx = 0;}$

Si $y(1) = 1;$

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + C = 0;$$

$$\frac{(1^2)(1^4)}{2} + \frac{(1^6)}{2} - 5(1^4) + C = 0;$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 5 + C = 0;$$

$$C = 5 - 1;$$

$$C = 4;$$

$$\frac{x^2y^4}{2} + \frac{y^6}{2} - 5y^4 + 4 = 0;$$

La solución :

$$x^2y^4 + y^6 - 10y^4 + 8 = 0;$$

$\left[y+xy^3(1+ln(x))\right]dx \text{ - } 2xdy = 0;$

$M(x,y) = y + xy^3(1+\ln(x));$

$My = 1 + 3xy^2 + 3xy^2 \ln(x);$

$N(x,y) = -2x;$

$Nx = -2;$

$u(y) = e^{\int\left(\frac{Nx-My}{M(x,y)}\right)dy};$

$u(y) = e^{\int\left(\frac{-2-1-3xy^2-3xy^2\ln(x);}{y+xy^3(1+\ln(x))}\right)dy} = e^{\int\left(\frac{-3-3xy^2-3xy^2\ln(x);}{y(1+xy^2(1+\ln(x)))}\right)dy}$

$u(y) = e^{\int\left(\frac{-3(1+xy^2(1+\ln(x)))}{y(1+xy^2(1+\ln(x)))}\right)dy} e^{\int\frac{-3}{y}dy} = \frac{1}{y^3};$

Luego mulitiplicando u(y) a ambos lados de la ecuación :

$\frac{1}{y^3}\left[y + xy^3(1+\ln(x))\right]dx\text{-}\frac{1}{y^3}(2xdy) = 0;$

$\left[\frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x))\right]dx - \left(\frac{2x}{y^3}\right)dy = 0;$

$M(x,y) = \frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x));$

$My = -\frac{2}{y^3};$

$N(x,y) = -\frac{2x}{y^3};$

$Nx = -\frac{2}{y^3};$

My = Nx, por lo tanto la e.d. es exacta :

$\exists(F(x,y))\ talque: \begin{cases} Fx = M(x,y); \\ Fy = N(x,y); \end{cases}$

$Fx = M(x,y);$

$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = \frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x));$

$F(x,y) = \int\left[\frac{1}{y^2} + x(1+\ln(x))\right]\partial x;$

$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + h(y);$

$Fy = N(x,y);$

$-\frac{2x}{y^3} + h'(y) = -\frac{2x}{y^3};$

$h'(y) = 0;$

$h(y) = C$

Entonces :

$F(x,y) = \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C;$

$\frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + C = 0;$

3) $\boxed{x^2 + \left(y^2\sqrt{y^2+1}\right)y' = -2xy\ln(y);}$

$$2xy\ln(y) + \left[x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right]y' = 0;$$
$$M(x,y) = 2xy\ln(y);$$
$$My = 2x\left[1 + \ln(y)\right];$$
$$N(x,y) = \left[x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right];$$
$$Nx = 2x;$$
$$u(y) = e^{\int\left(\frac{Nx-My}{M(x,y)}\right)dy};$$
$$u(y) = e^{\int\left(\frac{2x-2x[1+\ln(y)]}{2xy\ln(y)}\right)dy} = e^{\int\left(\frac{-2x\ln(y)}{2xy\ln(y)}\right)dy} = e^{\int -\frac{1}{y}dy};$$
$$u(y) = \frac{1}{y};$$

Luego se multiplica u(y) a ambos lados de la ecuación :

$$\frac{1}{y}\left(2xy\ln(y)\right) + \frac{1}{y}\left[x^2 + y^2\sqrt{y^2+1}\right]y' = 0;$$
$$2x\ln(y) + \left[\frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1}\right]y' = 0;$$
$$M(x,y) = 2x\ln(y);$$
$$My = \frac{2x}{y};$$
$$N(x,y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1};$$
$$Nx = \frac{2x}{y};$$

My = Nx, por lo tanto la e.d. es exacta :

$$\exists(F(x,y))\ talque : \begin{cases} Fx = M(x,y); \\ Fy = N(x,y); \end{cases}$$

$$Fx = M(x,y);$$
$$\frac{\partial(F(x,y))}{\partial x} = 2x\ln(y);;$$
$$F(x,y) = \int\left[2x\ln(y)\right]\partial x;$$
$$F(x,y) = x^2\ln(y) + h(y);$$
$$Fy = N(x,y);$$
$$\frac{x^2}{y} + h'(y) = \frac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2+1};$$
$$h'(y) = y\sqrt{y^2+1};$$
$$h(y) = \int\left(y\sqrt{y^2+1}\right)dy;$$
$$u = y^2 + 1;$$
$$du = 2ydy;$$
$$h(y) = \frac{1}{2}\int\sqrt{u}du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{3/2} + C\right] = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C;$$

$$h(y) = \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)\sqrt{y^2+1} + C;$$

Entonces :

$$F(x,y) = x^2\ln(y) + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)\sqrt{y^2+1} + C;$$
$$\boxed{x^2\ln(y) + \frac{1}{3}\left(y^2+1\right)\sqrt{y^2+1} + C = 0;}$$

Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Sea

$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)y^n$ una ecuación diferencial de Bernoulli, donde $n\neq 0,1$.

Esta es una ecuación diferencial no lineal, que se la convierte en lineal haciendo el siguiente cambio de variable:

$v=y^{1-n}$

Donde :

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

Se multiplicará el factor $(1-n)y^{-n}$ a ambos lados de la ecuación de Bernoulli:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)y^{-n}p(x)y=(1-n)y^{-n}g(x)y^n$$

Se obtiene lo siguiente:

$$\underbrace{(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}}_{\text{Esto es: }\frac{dv}{dx}}+(1-n)p(x)\underbrace{y^{1-n}}_{v}=(1-n)g(x)$$

$\left.\frac{dv}{dx}+(1-n)p(x)v=(1-n)g(x)\right\}$ Esto es una ecuación diferencial Lineal, que se puede resolver por el método del factor integrante.

1) $\boxed{xdy - [y + xy^3(1 + ln(x))]dx = 0;}$

$$xdy\text{-}[y + xy^3(1 + \ln(x))]dx = 0;$$

$$y' - \left[\frac{y}{x} + y^3(1 + \ln(x))\right] = 0;$$

$$y' - \frac{y}{x} = y^3(1 + \ln(x)); \qquad n = 3;$$

Se sustituye $v = y^{1-n}$ *;*

$$v = y^{-2};$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx};$$

Luego se multiplica $-2y^{-3}$ *a ambos de la ecuación :*

$$-2y^{-3}y' + 2y^{-3}\frac{y}{x} = -2y^{-3}y^3(1 + \ln(x));$$

$$-2y^{-3}y' + 2\frac{y^{-2}}{x} = -2(1 + \ln(x));$$

Reemplazando v y v' :

$$v' + \frac{2v}{x} = -2(1 + \ln(x));$$

Resolviendo por factor integrante :

$$u(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = x^2;$$

$$x^2v' + x^2\frac{2v}{x} = -2x^2(1 + \ln(x));$$

$$\frac{d[x^2v]}{dx} = -2x^2(1 + \ln(x));$$

$$x^2v = \int -2x^2(1 + \ln(x))dx;$$

$$x^2v = -2\int(x^2 + x^2\ln(x))dx;$$

$$x^2v = -\frac{2}{3}x^3 - 2\int(x^2\ln(x))dx;$$

$$\int(x^2\ln(x))dx = ?$$

$$u = \ln(x); \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{x};$$

$$dv = x^2dx; \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{x^3}{3};$$

$$\int(x^2\ln(x))dx = \frac{x^3\ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C;$$

$$x^2v = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{2x^3\ln(x)}{3} + \frac{2x^3}{9} + K;$$

Despejandola solución:

$$v = -\frac{2}{3}x - \frac{2x\ln(x)}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{K}{x^2};$$

Reemplazando $v = y^{-2}$ **:**

$$y^{-2} = -\frac{2}{3}x - \frac{2x\ln(x)}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{K}{x^2};$$

La solución general es:

$$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{-\frac{2}{3}x - \frac{2xln(x)}{3} + \frac{2x}{9} + \frac{K}{x^2}}};}$$

2) $\boxed{xy'+y=y^2 ln(x); \quad si \quad y(1)=1;}$

$y'+\frac{y}{x}=y^2\frac{\ln(x)}{x}; \qquad n=2;$

$v=y^{1-n}=y^{-1};$

$\frac{dv}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx};$

Luego se multiplica $-y^{-2}$ *a ambos lados de la ecuación :*

$-y^{-2}y'-y^{-2}\frac{y}{x}=-y^{-2}y^2\frac{\ln(x)}{x};$

Reemplazando v y v' en la ecuación :

$v'-\frac{v}{x}=\frac{\ln(x)}{x};$

Resolviendo por el método del factor integrante :

$u(x)=e^{\int -\frac{dx}{x}}=\frac{1}{x};$

$\frac{1}{x}v'-\frac{v}{x^2}=\frac{\ln(x)}{x^2};$

$\frac{d\left[\frac{1}{x}v\right]}{dx}=\frac{\ln(x)}{x^2};$

$\frac{1}{x}v=\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx;$

Integrando $\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx=?$

$u=\ln(x); \qquad \Rightarrow \qquad du=\frac{dx}{x};$

$dv=\frac{dx}{x^2}; \qquad \Rightarrow \qquad v=-\frac{1}{x};$

$\frac{1}{x}v=-\frac{\ln(x)}{x}+\int\frac{dx}{x^2};$

$\frac{1}{x}v=-\frac{\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+C;$

$v=-\ln(x)-1+Cx;$

$y^{-1}=-\ln(x)-1+Cx;$

$y=\frac{1}{-\ln(x)-1+Cx};$

Si $y(1)=1$, *entonces :*

$1=\frac{1}{C-1}$

$C-1=1;$

$C=2;$

La solución es :

$$\boxed{y=\frac{1}{-ln(x)-1+2x};}$$

3) $\boxed{4(1+x)dy + y\left[1+4xy^2(1+x)\right]dx = 0;}$

$$y'+y\left[\frac{1}{4(1+x)}+xy^2\right]=0$$

$$y'+\frac{y}{4(1+x)}=-xy^3; \quad \boldsymbol{n=3;}$$

$$v=y^{1-n}=y^{-2};$$

$$\frac{dv}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx};$$

Luego se multiplica - $2y^{-3}$ a ambos lados de la ecuación :

$$-2y^{-3}y'+\frac{-2y^{-3}y}{4(1+x)}=2y^{-3}xy^3;$$

$$v'-\frac{2v}{4(1+x)}=2x;$$

$$u(x)=e^{\int -\frac{1}{2(1+x)}dx}=e^{-\frac{1}{2}\ln|1+x|}=\frac{1}{\sqrt{1+x}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}v'-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{2v}{4(1+x)}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}};$$

$$\frac{d\left[\frac{1}{\sqrt{1+x}}v\right]}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{1+x}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}v=\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx;$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx=?;$$

$$z^2=1+x; \qquad \Rightarrow \qquad 2zdz=dx;$$

$$x=z^2-1;$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx=2\int\frac{(z^2-1)2zdz}{z}=4\int(z^2-1)dz;$$

$$4\int(z^2-1)dz=\frac{4z^3}{3}-4z+C;$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{1+x}}dx=\frac{4\sqrt{(1+x)^3}}{3}-4\sqrt{1+x}+C;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}v=\frac{4\sqrt{(1+x)^3}}{3}-4\sqrt{1+x}+C;$$

$$v=\frac{4(1+x)^2}{3}-4(1+x)+C;$$

$$y^{-2}=\frac{4(1+x)^2}{3}-4(1+x)+C\sqrt{1+x};$$

La solución general es:

$$\boxed{y=\frac{1}{\sqrt{\frac{4(1+x)^2}{3}-4(1+x)+C\sqrt{1+x}}};}$$

4) $\boxed{3y'+4csc(2x)y = 2y^{-1/2}ctg(x);}$

$y'+\frac{4}{3}\csc(2x)y = \frac{2}{3}y^{-1/2}ctg(x); \qquad n = -\frac{1}{2};$

$v = y^{1-n} = y^{3/2};$

$v' = \frac{3}{2}y^{1/2}y';$

Se multiplica $\frac{3}{2}y^{1/2}$ ***a ambos lados de la ecuación :***

$\frac{3}{2}y^{1/2}y'+\frac{3}{2}y^{1/2}\frac{4}{3}\csc(2x)y = \frac{3}{2}y^{1/2}\frac{2}{3}y^{-1/2}ctg(x);$

$v'+2\csc(2x)v = ctg(x);$

$u(x) = e^{\int 2\csc(2x)dx} = e^{\ln|\csc(2x)-ctg(2x)|}$

$u(x) = \csc(2x) - ctg(2x);$

$u(x) = \frac{1}{sen(2x)} - \frac{\cos(2x)}{sen(2x)};$

$$u(x) = \frac{1-\cos(2x)}{sen(2x)} = \frac{\frac{1-\cos(2x)}{2}}{\frac{sen(2x)}{2}} = \frac{sen^2(x)}{sen(x)\cos(x)} = \tan(x);$$

$\tan(x)v'+2\tan(x)\csc(2x)v = \tan(x)ctg(x);$

$\frac{d[\tan(x)v]}{dx} = 1;$

$\tan(x)v = \int dx;$

$\tan(x)v = \int dx;$

$\tan(x)v = x + C;$

$v = xctg(x) + Cctg(x);$

$y^{3/2} = xctg(x) + Cctg(x);$

$y = \sqrt[3]{(xctg(x)+Cctg(x))^2};$

Si $y(\pi/4) = 1;$

$1 = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{4}+C\right)^2};$

$1 = \frac{\pi}{4} + C;$

$C = 1 - \frac{\pi}{4};$

La solución particular es :

$$y = \sqrt[3]{\left(x\operatorname{ctg}(x) + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}(x)\right)^2};$$

Ecuaciones diferenciales homogéneas de la forma $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Se dice que la ecuación $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ *es homogénea si se puede expresar esta ecuación como :*

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

Se hace la siguiente sustitución :

$$v = \frac{y}{x}; \quad \text{entonces} \quad y = vx;$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx};$$

Reemplazando v, y y' en la ecuación :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v);$$

$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v;$$

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x};$$

$$v = \phi(x);$$

$$\frac{y}{x} = \phi(x);$$

$$y = x\phi(x);$$

1)Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2};$$

Asumiendo que :

$$v=\frac{y}{x}\quad\Rightarrow\quad y=xv;$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v;$$

Reemplazando en la ecuación diferencial , $y=xv,\ v=\frac{y}{x},\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$, se obtiene :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{sec^2\left(\frac{y}{x}\right)}{y^2}\quad\Rightarrow\quad x\frac{dv}{dx}+v=v+\frac{sec^2(v)}{x^2v^2};$$

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{sec^2(v)}{x^2v^2}\quad\Rightarrow\quad \left.x^3\frac{dv}{dx}=\frac{sec^2(v)}{v^2}\right\}\text{Ecuación diferencial separable.}$$

$$\Rightarrow\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{dx}{x^3}\quad \text{Integrando :}\quad\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int\frac{dx}{x^3};$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=?$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int v^2cos^2(v)dv=\int v^2\left(\frac{1+cos(2v)}{2}\right)dv=\int\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v^2cos(2v)}{2}\right)dv$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int\left(\frac{v^2}{2}+\frac{v^2cos(2v)}{2}\right)dv=\int\left(\frac{v^2}{2}\right)dv+\int\left(\frac{v^2cos(2v)}{2}\right)dv$$

$$m=v^2\ \Rightarrow\ dm=2vdv;$$

$$dn=cos(2v)dv\ \Rightarrow\ n=\frac{sen(2v)}{2};$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\int\left(\frac{v^2}{2}\right)dv+\frac{1}{2}\int\left(v^2cos(2v)\right)dv=\frac{v^3}{6}+\frac{1}{2}\left[\frac{v^2sen(2v)}{2}-\int\frac{2vsen(2v)}{2}dv\right]$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}-\frac{1}{2}\int vsen(2v)dv$$

$$m=v\ \Rightarrow\ dm=dv.$$

$$dn=sen(2v)dv\ \Rightarrow\ n=-\frac{1}{2}cos(2v)$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}-\frac{1}{2}\int vsen(2v)dv=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{2}-\left[-\frac{v}{4}cos(2v)+\int\frac{1}{4}cos(2v)\,dv\right]$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}-\left[-\frac{v}{4}cos(2v)+\int\frac{1}{4}cos(2v)\,dv\right]=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}+\frac{v}{4}cos(2v)-\frac{1}{8}sen(2v)$$

$$\int\frac{v^2dv}{sec^2(v)}=\frac{v^3}{6}+\frac{v^2sen(2v)}{4}+\frac{v}{4}cos(2v)-\frac{1}{8}sen(2v)$$

$$\int \frac{v^2 dv}{sec^2(v)} = \int \frac{dx}{x^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v^3}{6} + \frac{v^2 sen(2v)}{4} + \frac{v}{4}cos(2v) - \frac{1}{8}sen(2v) = -\frac{1}{x^2} + C$$

$$\frac{v^3}{6} + \frac{v^2 sen(2v)}{4} + \frac{v}{4}cos(2v) - \frac{1}{8}sen(2v) = -\frac{1}{x^2} + C$$

Reemplazando $v = \frac{y}{x}$;

La *solución de forma implícita queda expresada por :*

$$\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 sen\left(2\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{4} + \frac{v}{4}cos\left(2\left(\frac{y}{x}\right)\right) - \frac{1}{8}sen\left(2\left(\frac{y}{x}\right)\right) = -\frac{1}{x^2} + C$$

2) $\boxed{\left(xy + 4y^2 + 2x^2\right)dx - \left(x^2\right)dy = 0; \;\; si\ y(1) = \sqrt{2}/2;}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(xy + 4y^2 + 2x^2\right)}{x^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{4y^2}{x^2} + 2;$$

$$v = \frac{y}{x};$$

$$y = xv;$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx};$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + 4v^2 + 2;$$

$$x\frac{dv}{dx} = 4v^2 + 2;$$

$$\frac{dv}{4v^2 + 2} = \frac{dx}{x};$$

$$\frac{dv}{4\left(v^2 + 1/2\right)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{\left(v^2 + 1/2\right)} = \int \frac{4dx}{x};$$

$$\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}v\right) = 4\ln|x| + C;$$

$$\arctan\left(\sqrt{2}v\right) = \frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K;$$

Aplicando tan a ambos lados se obtiene :

$$\sqrt{2}v = \tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + K\right);$$

Si $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan(K);$$

$$K = \frac{\pi}{4};$$

La solución particular es :

$$y = \frac{x}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{4\ln|x|}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right);$$

3) $\boxed{x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}; \quad y(x_0) = 0; \;\; donde\, x_0 > 0;}$

$y(1) = \pi/4;$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2}};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}};$$

Se asume :

$$v = \frac{y}{x};$$

$$y = xv;$$

$$y' = v + xv';$$

$$v + xv' = v + \sqrt{1 - v^2};$$

$$xv' = \sqrt{1 - v^2};$$

$$x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 - v^2};$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2};} = \frac{dx}{x};$$

$$arcsen(v) = \ln|x| + C;$$

$$v = sen(\ln|x| + C);$$

$$\frac{y}{x} = sen(\ln|x| + C);$$

$$y = xsen(\ln|x| + C);$$

Si $y(1) = 1;$

$$1 = sen(C);$$

$$\frac{\pi}{2} = C;$$

La solución paticular es :

$$y = xsen\left(\ln|x| + \frac{\pi}{2}\right);$$

4) $\boxed{x(ln(x) - ln(y))dy - ydx = 0;}$

$$x(\ln(x) - \ln(y))dy - ydx = 0;$$

$$x(\ln(y) - \ln(x))dy + ydx = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x(\ln(y) - \ln(x))};$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x\left(\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)};$$

Se asume :

$$v = \frac{y}{x};$$

$$y = xv;$$

$$y' = v + xv';$$

$$v + xv' = -\frac{v}{(\ln(v))};$$

$$xv' = -\frac{v}{(\ln(v))} - v;$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v(1 + \ln(v))}{(\ln(v))};$$

$$\int\left(\frac{(\ln(v))}{v(1 + \ln(v))}\right)dv = -\int\left(\frac{dx}{x}\right);$$

$$u = \ln(v);$$

$$du = \frac{dv}{v};$$

$$\int\left(\frac{u}{(1 + u)}\right)du = -\ln|x| + C;$$

$$\int du - \int\left(\frac{1}{(1 + u)}\right)du = -\ln|x| + C;$$

$$u - \ln|1 + u| = -\ln|x| + C;$$

$$\ln|v| - \ln|1 + \ln(v)| = -\ln|x| + C;$$

La solución general de forma implícita es:

$$\boxed{ln\left|\frac{y}{x}\right| - ln\left|1 + ln\left(\frac{y}{x}\right)\right| = -ln|x| + C;}$$

Ecuaciones Diferenciales de Coeficientes Lineales

1) $$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{(2y-x+5)}{(2x-y-4)};}$$

$(x-2y-5)dx-(2x-y-4)dy=0;$

$a_1b_2 \neq a_2b_1;$

$(1)(1) \neq (-2)(-2);$

$1 \neq 4;$

Se asume :

$x=(u+h);$

$y=(v+k);$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du};$

Reemplazando x, y, y' en la ecuación, se obtiene

$$\frac{dv}{du}=\frac{2(v+k)-(u+h)+5}{2(u+h)-(v+k)-4};$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{2v-u+2k-h+5}{2u-v+2h-k-4};$$

$$\begin{cases}2k-h+5=0;\\ 2h-k-4=0;\end{cases}$$

Resolviendo el sistema :

$k=-1;$

$h=3;$

Entonces :

$$\frac{dv}{du}=\frac{2v-u}{2u-v};$$

Divivdiendo para u, para poder obtener una ecuación homogénea :

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{2v}{u}-1}{2-\frac{v}{u}};$$

Resolviendo como una ecuación diferencial homogénea :

$z=\frac{v}{u};$

$v=zu;$

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du};$$

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{2z-1}{2-z};$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2z-1}{2-z}-z;$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{2z-1-2z+z^2}{2-z};$$

$$\frac{(z-2)dz}{(z^2-1)}=-\frac{du}{u};$$

$$\int\frac{(z)dz}{(z^2-1)}-\int\frac{(2)dz}{(z^2-1)}=\int-\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2-1\right|-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{1}{2}\ln|(z-1)(z+1)|-\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{1}{2}\ln|(z-1)|+\frac{1}{2}\ln|(z+1)|-\ln|(z-1)|+\ln|(z+1)|=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{3}{2}\ln|(z+1)|-\frac{1}{2}\ln|(z-1)|=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}+1\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}-1\right)\right|=-\ln|u|+C;$$

$$v=y-k;\qquad\Rightarrow\qquad v=y+1;$$

$$u=x-h;\qquad\Rightarrow\qquad u=x-3;$$

La solución de forma implícita es :

$$\frac{3}{2}\ln\left|\left(\frac{y+1}{x-3}+1\right)\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y+1}{x-3}-1\right)\right|=-\ln|x-3|+C;$$

2) $\boxed{(3y-7x+7)dx-(3x-7y-3)dy=0;}$

$$a_1b_2\neq a_2b_1;$$

$$(-7)(7)\neq(-3)(3);$$

$$-49\neq-9;$$

Usando :

$$x=(u+h);$$

$$y=(v+k);$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-7x+3y+7}{-3x+7y+3};$$

Reemplazando x, y y y':

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7(u+h)+3(v+k)+7}{-3(u+h)+7(v+k)+3};$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7u+3v-7h+3k+7}{-3u+7v-3h+7k+3}$$

$$\begin{cases}-7h+3k+7=0;\\ -3h+7k+3=0;\end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$$k=0;$$

$$h=1;$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7u+3v}{-3u+7v};$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{-7+\frac{3v}{u}}{-3+\frac{7v}{u}};$$

$$z=\frac{v}{u};$$

$$v=zu;$$

$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du};$$

$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{-7+3z}{-3+7z};$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{-7+3z}{-3+7z}-z;$$

$$u\frac{dz}{du}=\frac{-7+3z+3z-7z^2}{-3+7z};$$

$$u\frac{dz}{du}=-\frac{7z^2-6z+7}{7z-3};$$

$$\int\frac{(7z-3)dz}{7z^2-6z+7}=\int\frac{-du}{u};$$

$$u=7z^2-6z+7;\qquad\Rightarrow\qquad du=14z\text{-}6;$$

$$7z-3=\frac{7}{14}(14z\text{-}6)-3+3;$$

$$\int\frac{\frac{7}{14}(14z\text{-}6)dz}{7z^2-6z+7}=\int\frac{-du}{u};$$

$$\frac{7}{14}\int\frac{(14z\text{-}6)dz}{7z^2-6z+7}=-\ln|u|+C;$$

$$\frac{\ln\left|7z^2-6z+7\right|}{2}=-\ln|u|+C;$$

$$\ln\left|7z^2-6z+7\right|=-\ln\left|u^2\right|+K;$$

$$\ln\left|7\left(\frac{v}{u}\right)^2-6\frac{v}{u}+7\right|=-\ln\left|u^2\right|+K;$$

$$\ln\left|7\left(\frac{y}{x-1}\right)^2-6\frac{y}{x-1}+7\right|=-\ln\left|(x-1)^2\right|+K;$$

La solución de forma implícita es:

$$7\left(\frac{y}{x-1}\right)^2-6\frac{y}{x-1}+7=\frac{C}{(x-1)^2};$$

3) $\boxed{(y-x-5)y'-(1-x-y)=0;}$

$$(1\text{-}x\text{-}y)-(y-x-5)y'=0;$$
$$a_1b_2 \neq a_2b_1;$$
$$(-1)(-1)\neq(1)(-1);$$
$$1\neq -1;$$
$$x=(u+h);$$
$$y=(v+k);$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-y}{y-x-5};$$

Reemplazando x,y, y y' en la ecuación:

$$\frac{dv}{du}=\frac{1\text{-}(u+h)\text{-}(v+k)}{(v+k)-(u+h)-5};$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{-u-v-h-k+1}{-u+v-h+k-5};$$
$$\begin{cases}-h-k+1=0;\\ -h+k-5=0;\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones :

$$h=\text{-}2;$$
$$k=3;$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{-u-v}{-u+v}$$
$$\frac{dv}{du}=\frac{-1-\frac{v}{u}}{-1+\frac{v}{u}};$$
$$z=\left(\frac{v}{u}\right);$$
$$v=zu;$$
$$\frac{dv}{du}=z+u\frac{dz}{du};$$
$$z+u\frac{dz}{du}=\frac{-1-z}{-1+z};$$
$$u\frac{dz}{du}=\frac{-1-z}{-1+z}-z;$$
$$u\frac{dz}{du}=\frac{-1-z+z-z^2}{-1+z};$$

$$u\frac{dz}{du} = -\frac{z^2+1}{z-1};$$

$$\int\frac{(z-1)dz}{(z^2+1)} = \int -\frac{du}{u};$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right| - \arctan(z) = -\ln|u| + C;$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{v}{u}\right)^2+1\right| - \arctan\left(\frac{v}{u}\right) = -\ln|u| + C;$$

La solución implicita de la ecuación diferencial es :

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y-3}{x+2}\right)^2+1\right| - \arctan\left(\frac{y-3}{x+2}\right) = -\ln|x+2| + C;$$

Ecuaciones diferenciales de la forma G(ax+by)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = G(ax+by)}$$

Se asume el siguiente cambio de variable

$$z = ax + by$$

Despejando y:

$$y = \frac{z}{b} - \frac{a}{b}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}$$

Reemplazando y, y' en:

$$\frac{dy}{dx} = G(ax+by)$$

Se obtiene una ecuación diferencial de la forma:

$$\boxed{\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = G(Z)}$$

$$\frac{1}{b}\frac{dz}{dx} = \frac{a}{b} + G(Z)$$

Se obtiene una ecuación diferencial separable dela forma:

$$\boxed{\frac{dz}{\frac{a}{b} + G(Z)} = bdx}$$

1. $\boxed{y' = (x+y+1)^2 - (x+y-1)^2; \qquad si\ y(0) = 7/4;}$

Se sustituye :

$$z = x + y;$$
$$y = z - x;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1;$$
$$y' = (x+y+1)^2 - (x+y-1)^2;$$
$$\frac{dz}{dx} - 1 = (z+1)^2 - (z-1)^2;$$
$$\frac{dz}{dx} = z^2 + 2z + 1 - (z^2 - 2z + 1) + 1;$$
$$\frac{dz}{dx} = 4z + 1;$$
$$\int \frac{dz}{4z+1} = \int dx;$$
$$\frac{1}{4}\ln|4z+1| = x + C_1;$$
$$\ln|4z+1| = 4x + C_2;$$
$$4z + 1 = ke^{4x};$$
$$z = ke^{4x} - \frac{1}{4};$$
$$x + y = ke^{4x} - \frac{1}{4};$$
$$y = ke^{4x} - \frac{1}{4} - x;$$

$$\boldsymbol{Si\ y(0) = \frac{7}{4};}$$
$$\frac{7}{4} = k - \frac{1}{4};$$
$$k = 2;$$

La solución particular es :

$$y = 2e^{4x} - \frac{1}{4} - x;$$

2. $y' = \tan^2(x+y);$ $\quad$ ***si*** $y(0) = \pi;$

$z = x + y;$

$y = z - x;$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1;$

$y' = \tan^2(x+y);$

$\frac{dz}{dx} - 1 = \tan^2(z);$

$\frac{dz}{dx} = 1 + \tan^2(z);$

$\frac{dz}{dx} = \sec^2(z);$

$\int \frac{dz}{\sec^2(z)} = \int dx;$

$\int \cos^2(z)dz = x + C;$

$\int \left(\frac{1+\cos(2z)}{2}\right)dz = x + C;$

$\frac{z}{2} + \frac{\text{sen}(2z)}{4} = x + C;$

$\frac{x+y}{2} + \frac{\text{sen}(2x+2y)}{4} = x + C;$

$2x + 2y + \text{sen}(2x+2y) = 4x + K;$

Si $y(0) = \pi;$

$2\pi + \text{sen}(2\pi) = K;$

$k = 2\pi;$

La solución particular es :

$2x + 2y + \text{sen}(2x+2y) = 4x + 2\pi;$

3. $\boldsymbol{y' = \sqrt{10x - 2y + 5} - 5;}$

$$\boldsymbol{y' = \sqrt{10x - 2y + 5} - 5;}$$

$$z = 10x - 2y;$$

$$y = \frac{10x}{2} - \frac{z}{2};$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx};$$

$$5 - \frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = \sqrt{z+5} - 5;$$

$$10 - \frac{dz}{dx} = 2\sqrt{z+5} - 10;$$

$$\frac{dz}{dx} = 20 - 2\sqrt{z+5};$$

$$\int \frac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = \int dx;$$

$$u^2 = z + 5;$$

$$2udu = dz;$$

$$\int \frac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = \int \frac{2udu}{20 - 2u} = \int \frac{udu}{10 - u};$$

$$\int \frac{udu}{10 - u} = -\int \frac{udu}{u - 10};$$

Dividiendo u para u - 10;

$$\frac{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{u - 10}} = 1 + \frac{10}{u - 10};$$

$$-\int \frac{udu}{u - 10} = -\int du - 10\int \frac{du}{u - 10};$$

$$\int \frac{udu}{10 - u} = -u - 10\ln|u - 10|;$$

$$\int \frac{dz}{20 - 2\sqrt{z+5}} = -\sqrt{z+5} - 10\ln\left|\sqrt{z+5} - 10\right|;$$

Reemplazando las integrales :

$$-\sqrt{z+5} - 10\ln\left|\sqrt{z+5} - 10\right| = x + C;$$

$$z = 10x - 2y;$$

La solucion de forma explicita es :

$$-\sqrt{10x - 2y + 5} - 10\ln\left|\sqrt{10x - 2y + 5} - 10\right| = x + C;$$

4. $\boldsymbol{(2x+y)dx-(4x+2y-1)dy=0;}$

$$a_1b_2 = a_2b_1$$
$$(2)(-2) = (-4)(1)$$
$$-4 = -4;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2(2x+y)-1};$$
$$z = 2x+y;$$
$$y = z-2x;$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}-2;$$

Reemplazando :

$$\frac{dz}{dx}-2 = \frac{z}{2z-1};$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{2z-1}+2;$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+2(2z-1)}{2z-1};$$
$$\frac{(2z-1)dz}{5z-2} = dx;$$

Dividiendo $\frac{\boldsymbol{2z-1}}{\boldsymbol{5z-2}} = \frac{2}{5}-\frac{1}{5(5z-2)};$

$$\int\frac{2dz}{5}-\int\frac{dz}{5(5z-2)} = \int dx;$$
$$\frac{2}{5}z-\frac{1}{25}\ln|5z-2| = x+C;$$

La solución de forma implícita es :

$$\frac{2}{5}(2x+y)-\frac{1}{25}\ln|5(2x+y)-2| = x+C;$$

Ecuaciones de Primer Orden

Aplicaciones

1. Una taza de café caliente que inicialmente se encuentra a 95ºC, se enfría y llega a 80ºC en 5 minutos mientras permanece servida en un cuarto cuya temperatura está a 21ºC. Determine en que momento el café estará a la temperatura ideal de 50ºC.

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_a)$$

$$\int\frac{dT}{T-T_a}=\int kdt$$

$$\ln(T-T_a)=kt+C$$

$$\underline{T(t)=Ce^{kt}+T_a}$$

sabemos que la temperatura del cuarto es $21^{\circ}C\ \therefore$

$$T(t)=Ce^{kt}+21$$

en $t=0$ *el café está a* $95^{\circ}C\ \therefore$

$$T(0)=Ce^{k(0)}+21=95\rightarrow C=95-21=74$$

$$T(t)=74e^{kt}+21$$

en $t=5\min$ *el café está a* $80^{\circ}C\ \therefore$

$$T(5)=74e^{5k}+21=80\rightarrow k=\frac{\ln\left(\frac{59}{74}\right)}{5}=-0.0453\frac{^{\circ}C}{\min}$$

$$\underline{T(t)=74e^{-0.0453t}+21}$$

en $t=t_1\min$ *el café está a* $50^{\circ}C\ \therefore$

$$T(t_1)=74e^{-0.0453t_1}+21=50\rightarrow t_1=\frac{\ln\left(\frac{29}{74}\right)}{-0.0453}=\underline{\underline{20.67\min}}$$

2. El Sábado 24 de Febrero del 2007 a las 07h00 A.M. un conserje del básico encuentra el cuerpo de un estudiante de ecuaciones diferenciales en el aula donde rindió su examen el día anterior, que se conserva a temperatura constante de 26° C. En ese momento la temperatura del cuerpo es de 28° C y pasada hora y media la temperatura es de 27.5° C. Considere la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte de 37° C y que se ha enfriado según la Ley de Enfriamiento de Newton, cuál fue la hora de la muerte?

Ley de enfriamiento de Newton :

$$\frac{dT}{dt}=-\mathrm{K}(\mathrm{T_c}-\mathrm{T_a})$$

$\frac{dT}{dt}$: (*Variación de la temperatura con respecto al tiempo*)

$\mathrm{T_c}$: (*Temperatura del cuerpo*)

$\mathrm{T_a}$: (*Temperatura del aula*) *t : tiempo en horas.*

$T_a = 26° C$

La temperatura del cuerpo cuando es hallado es 28° C.

El tiempo en que la temperatura es de 28° C es t_1.

$\Rightarrow T(t_1) = 28° C$

Después de una hora y media la temperatura del cuerpo desciende a 27.5° C.

El tiempo en que la temperatura es de 27.5° C será entonces : $t_1 + 1.5$.

$\Rightarrow T(t_1 + 1.5) = 27.5° C$

$$\frac{dT}{dt} = -K(T_c - 26);$$

$$\frac{dT}{(T_c - 26)} = -Kdt \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dT}{(T_c - 26)} = \int -Kdt \quad \Leftrightarrow \quad \ln|T_c - 26| = -Kt + C$$

$$e^{\ln|T_c - 26|} = e^{-Kt + C} \quad \Leftrightarrow \quad T_c - 26 = Ce^{-Kt} \quad \Rightarrow \quad T_c(t) = Ce^{-Kt} + 26;$$

$$\Rightarrow T_c(t) = Ce^{-Kt} + 26;$$

Si la temperatura antes de morir era de 37° C entonces:

$T(0) = 37° C;$

$37 = C + 26 \quad \Rightarrow \quad C = 11$

$$\Rightarrow T_c(t) = 11e^{-Kt} + 26$$

Si $T(t_1) = 28° C$

$$\Rightarrow T(t_1) = 11e^{-Kt_1} + 26 = 28 \quad \Rightarrow \quad 11e^{-Kt_1} = 2 \quad \Rightarrow e^{-Kt_1} = \frac{2}{11};$$

$$\Rightarrow -kt_1 = \ln\left(\frac{2}{11}\right) \Rightarrow kt_1 = 1.7047 \Rightarrow k = \frac{1.7047}{t_1} \quad \textit{(ecuación 1)};$$

Si $T(t_1 + 1.5) = 27.5° C$

$$\Rightarrow T(t_1 + 1.5) = 11e^{-K(t_1+1.5)} + 26 = 27.5 \quad \Rightarrow \quad 11e^{-K(t_1+1.5)} = 1.5 \quad \Rightarrow e^{-K(t_1+1.5)} = \frac{1.5}{11};$$

$$\Rightarrow -k(t_1 + 1.5) = \ln\left(\frac{1.5}{11}\right) \Rightarrow k(t_1 + 1.5) = 1.9924 \Rightarrow k = \frac{1.9924}{t_1 + 1.5} \quad \textit{(ecuación 2)};$$

Si se iguala ecuación 1 y 2 :

$$\frac{1.7047}{t_1} = \frac{1.9924}{t_1 + 1.5} \Rightarrow \quad (t_1 + 1.5)1.7047 = 1.9924t_1 \Rightarrow \quad 1.7047t_1 + 2.55705 = 1.9924t_1$$

$$\Rightarrow 1.9924t_1 - 1.7047t_1 = 2.55705 \Rightarrow t_1 = \frac{2.55705}{1.9924 - 1.7047} = 8.89 \textit{ horas}$$

Por lo tanto el estudiante murio 8.89 horas antes de ser encontrado es decir. A las 22h06.

3. Supóngase que un alumno de la ESPOL es portador del virus de la gripe y a pesar de ella va a la escuela donde hay 5000 estudiantes. Si se supone que la razón con la que se propaga el virus es proporcional no solo a la cantidad de infectados sino también a al cantidad de no infectados. Determine la cantidad de alumnos infectados a los 6 días después, si se observa que a los 4 días la cantidad de infectados era de 50.

$x :\#\text{ de } \textit{infectados}$

$5000 - x :\#\text{ de sanos}$

$$\frac{dx}{dt} = kx(5000-x) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dx}{x(5000-x)} = \int kdt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5000}\ln\left(\frac{x}{x-5000}\right) = kt + C$$

$$\ln\left(\frac{x}{x-5000}\right) = 5000kt + C$$

$$\underline{x(t) = \frac{-5000Ce^{5000kt}}{1-Ce^{5000kt}}}$$

en $t=0$ $x=1$

$$\therefore x(0) = \frac{-5000Ce^{0}}{1-Ce^{0}} = 1 \rightarrow C = -\frac{1}{4999}$$

$$x(t) = \frac{e^{5000kt}}{1} \rightarrow x(t) = e^{5000kt}$$

en $t=4$ $x=50$

$$\therefore x(4) = e^{20000k} = 50 \rightarrow k = \frac{\ln(50)}{20000}$$

$$x(t) = e^{0.25t\ln(50)} \rightarrow \underline{x(t) = 50^{0.25t}}$$

$$\therefore x(6) = 50^{0.25*6} = 50^{1.5} = \underline{\underline{353\ \textit{infectados}}}$$

4. En un cultivo de levadura la rapidez de cambio es proporcional a la cantidad existente. Si la cantidad de cultivo se duplica en 4 horas, ¿Qué cantidad puede esperarse al cabo de 16 horas, con la misma rapidez de crecimiento?

$x : \text{cantidad existente}$

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kd$$

$$\ln(x) = kt + C$$

$$\underline{x(t) = Ce^{kt}}$$

en $t=0$ $\quad x = x_0$

$$x(0) = Ce^{0} = x_0 \rightarrow \underline{C = x_0}$$

en $t=4$ $\quad x = 2x_0$

$$x(4) = x_0e^{4k} = 2x_0 \rightarrow \underline{k = \frac{\ln(2)}{4}}$$

$$x(t) = x_0 e^{\frac{t\ln(2)}{4}} \rightarrow \underline{x(t) = x_0 2^{\frac{t}{4}}}$$

$$x(16) = x_0 2^{\frac{16}{4}} = 2^4 x_0 = \underline{\underline{32x_0}}$$

5. Un objeto que pesa 30Kg se deja caer desde una altura de 40 mt, con una velocidad de 3m/s. supóngase que la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del cuerpo. Se sabe que la velocidad límite debe ser 40m/s. Encontrar la expresión de la velocidad en un tiempo t. La expresión para la posición del cuerpo en un tiempo t cualquiera.

$$mg - f_r = m\frac{dv}{dt}$$

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int m\frac{dv}{kv - mg} = -\int dt \rightarrow \frac{m}{k}\ln(kv - mg) = -t + C \rightarrow \ln(kv - mg) = -\frac{k}{m}t + C$$

$$v(t) = \frac{1}{k}\left[Ce^{-\frac{k}{m}t} + mg\right] \rightarrow v(t) = \frac{1}{k}\left[Ce^{-\frac{k}{30}t} + 300\right]$$

en t = 0 , v = 3m/s

$$v(0) = \frac{1}{k}\left[Ce^{0} + 300\right] = 3 \rightarrow \underline{C - 3k = -300}$$

en t = ∞ , v = 40m/s

$$v(\infty) = \frac{1}{k}\left[Ce^{-\infty} + 300\right] = 40 \rightarrow \frac{300}{k} = 40 \rightarrow \underline{k = 7.5} \therefore \underline{C = -277.5}$$

$$\underline{\underline{v(t) = -37e^{-0.25t} + 40}}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \rightarrow x(t) = \int v(t)dt + C$$

$$x(t) = \int\left[-37e^{-0.25t} + 40\right]dt + C = 148e^{-0.25t} + 40t + C$$

$$x(t) = 148e^{-0.25t} + 40t + C$$

en t = 0 , x = 0m

$$x(0) = 148e^{0} + 40(0) + C = 0 \rightarrow \underline{C = -148}$$

$$\underline{\underline{x(t) = 148e^{-0.25t} + 40t - 148}}$$

6. La fuerza resistente del agua que opera sobre un bote es proporcional a su velocidad instantánea y es tal que cuando la velocidad es de 20m/seg la resistencia es de 40 Newtons. Se conoce que el motor ejerce una fuerza constante de 50Newtons. En la dirección del movimiento. El bote tiene una masa de 420 Kg. y el pasajero de 80 Kg.

a) Determine la distancia recorrida y la velocidad en l cualquier instante suponiendo que el bote parte del reposo.
b) Determine la máxima velocidad a la que puede viajar el bote.

Aplicando la segunda ley de Newton se obtiene:

.

$$\sum \mathrm{F_x} = \mathrm{ma}$$

a)

Fm: fuerza del motor

Fr: Fuerza de resistencia del agua

$Fm = 50$ *Newtons*

$Fr = kv$

Como la velocidad es de $20 m/seg$

y la fuerza de resistencia de 40 *Newtons.*

$$Entonces\ k = \frac{40 Newtons}{20 m/seg} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 2$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = ma \quad \Rightarrow \quad Fm - Fr = ma;$$

$$50 - kv = m\frac{dv}{dt}$$

m: masa total del sistema

$$m = 420kg + 80\ kg = 500kg.$$

$$\Rightarrow 50 - kv = 500\frac{dv}{dt}, \qquad k = 2$$

$$\left. 500\frac{dv}{dt} + 2v = 50, \quad \right\} Ecuación\ \ dif.\ \ separable$$

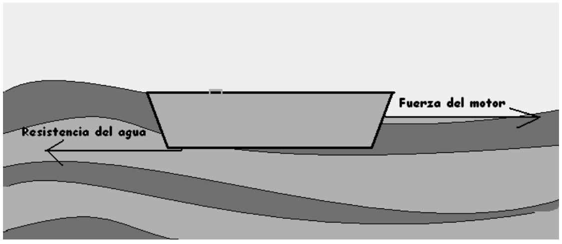
$$500\frac{dv}{dt} = 50 - 2v \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dv}{50 - 2v} = \frac{dt}{500}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dv}{2(v - 25)} = -\frac{dt}{500}$$

$$\int \frac{dv}{(v - 25)} = -\int \frac{dt}{250} + C \quad \Leftrightarrow \quad \ln|v\text{-}25| = -\frac{t}{250} + C$$

$$e^{\ln|v-25|} = e^{-\frac{t}{250} + C} \quad \Leftrightarrow \quad v\text{-}25 = ke^{-\frac{t}{250}}$$

$$\Rightarrow v = 25 + ke^{-\frac{t}{250}}$$



Si la velocidad inicial es 0 *por partir del reposo entonces* $v(0) = 0;$

$$0 = 25 + k \ \Rightarrow \ k = -25$$

La ecuación de la velocidad:

$$v = 25 - 25e^{-\frac{t}{250}}$$

Como $v = dx/dt$

Entonces:

$$\frac{dx}{dt} = 25 - 25e^{-\frac{t}{250}}$$

$$x(t) = \int \left(25 - 25e^{-\frac{t}{250}} \right) dt = 25t + 25(250)e^{-\frac{t}{250}} + C$$

$$x(t) = \ 25t + 25(250)e^{-\frac{t}{250}} + C$$

Si parte del reposo $x(0) = 0;$

$$0 = 25(250) + C \ \Rightarrow \ C = -25(250)$$

La ecuación del movimiento es:

$$\Rightarrow x(t) = \ 25t + 25(250)e^{-\frac{t}{250}} - 25(250)$$

b)

La velocidad limite o máxima es :

$$v_{\max} = \lim_{t \to \infty} \left(25 - 25e^{-\frac{t}{250}} \right) = 25\, pies/seg$$

7. Un circuito RL tiene una fem de 9 voltios, una resistencia de 30 ohmios, una inductancia de 1 henrio y no tiene corriente inical. Hallar la corriente para t=1/5 segundos.

$$v = iR + L\frac{di}{dt}$$

$$9 = 30i + \frac{di}{dt}$$

$$\int \frac{di}{30i - 9} = -\int dt$$

$$\frac{1}{30}\ln(30i - 9) = -t + C$$

$$30i - 9 = -30t + C$$

$$i(t) = \frac{1}{30}\left[Ce^{-30t} + 9\right]$$

$$\text{en t} = 0 \quad \text{i} = 0$$

$$i(0) = \frac{1}{30}\left[Ce^{0} + 9\right] \rightarrow \underline{C = 21}$$

$$i(t) = \frac{1}{30}\left[21e^{-30t} + 9\right] \rightarrow \underline{i(t) = 0.7e^{-30t} + 0.3}$$

$$\text{en t} = 1/5$$

$$i(t) = 0.7e^{-6} + 0.3 \rightarrow \underline{\underline{i(1/5) = 0.301 amp}}$$

8. Una Fem. de $200e^{-5t}$ voltios se conecta en serie con una resistencia de 20 Ohmios y una capacitancia de 0.01 Faradios. Asumiendo que la carga inicial del capacitor es cero. Encuentre la carga y la corriente en cualquier instante de tiempo.

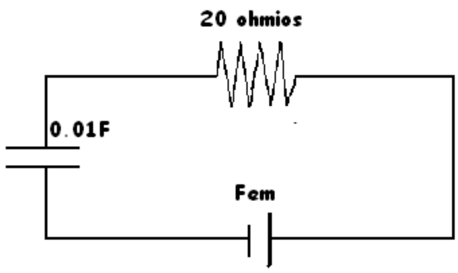
$$\left.R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \text{fem}\right\} \textit{Ecuación diferencial para el circuito RC.}$$

R : *resistencia* $\Rightarrow$ *R = 20 ohmios*

q : carga

C : capacitancia $\Rightarrow$ *C = 0.01 F*

fem = 200e^{-5t}



$$20\frac{dq}{dt}+\frac{q}{0.01}=20e^{-5t};$$

$$\Rightarrow 20\frac{dq}{dt}+100q=20e^{-5t};$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dt}+5q=e^{-5t};\Big\}\textit{Ecuación diferencial lineal.}$$

$$u(t)=e^{\int 5dt}=e^{5t}$$

$$\Rightarrow q(t)=\frac{1}{u(t)}\int u(t)e^{-5t}dt$$

$$\Rightarrow q(t)=e^{-5t}\int e^{5t}e^{-5t}dt=e^{-5t}\int dt=e^{-5t}(t+c)$$

$$q(t)=e^{-5t}(t+c)=e^{-5t}t+e^{-5t}c$$

Si inicialmente no hay carga en el capacitor, entonces :

$$q(0)=0;$$

$$0=c$$

$$\Rightarrow q(t)=e^{-5t}t;$$

$$\Rightarrow i(t)=\int q(t)dt=\int e^{-5t}tdt;$$

$$u=t;\quad \Rightarrow \quad du=dt;$$

$$dv=e^{-5t}dt \quad v=-\frac{1}{5}e^{-5t};$$

$$i(t)=\int e^{-5t}tdt=-\frac{t}{5}e^{-5t}+\int\frac{1}{5}e^{-5t}dt$$

$$i(t)=-\frac{t}{5}e^{-5t}-\frac{1}{25}e^{-5t}+C$$

Si la carga inicial es cero, entonces la corriente inicial es cero :

$$i(o)=0;$$

$$\Rightarrow i(t)=-\frac{t}{5}e^{-5t}-\frac{1}{25}e^{-5t}$$

Casos especiales de ecuaciones diferenciales de segundo orden

Ecuaciones diferenciales en la que falta la variable "y"

1) $\left(3x\sqrt{(1+x)^3}-y'\right)+y''=x^2y';$

$$v=\frac{dy}{dx}=y';$$
$$\frac{dv}{dx}=\frac{d^2y}{dx}=y'';$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\left(3x\sqrt{(1+x)^3}-y'\right)+y''=x^2y'';$$
$$\left(3x\sqrt{(1+x)^3}-v\right)+v'=x^2v';$$
$$3x\sqrt{(1+x)^3}-v+v'\text{-}x^2v'=0;$$
$$3x\sqrt{(1+x)^3}-v+v'\left(1-x^2\right)=0;$$
$$v'\left(1-x^2\right)-v=-3x\sqrt{(1+x)^3};$$
$$v'-\frac{v}{\left(1-x^2\right)}=\frac{-3x\sqrt{(1+x)^3}}{\left(1-x^2\right)};$$
$$u(x)=e^{-\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)}}=e^{\int\frac{dx}{\left(x^2-1\right)}}=e^{\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|};$$
$$u(x)=\left|\frac{x-1}{x+1}\right|^{1/2}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}};$$
$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}}\left(v'-\frac{v}{\left(1-x^2\right)}\right)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\frac{-3x\sqrt{(1+x)^3}}{\left(1-x^2\right)}=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\left(\frac{-3x\sqrt{(1+x)^3}}{(1-x)(1+x)}\right);$$
$$\frac{d\left[\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}v\right]}{dx}=\frac{3x}{\sqrt{x-1}};$$
$$\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}v=\int\frac{3xdx}{\sqrt{x-1}};$$
$$u^2=(x-1);$$
$$x=1+u^2;$$
$$dx=2udu;$$

$$\int \frac{3x dx}{\sqrt{x-1}} = \int \frac{3(1+u^2)(2u du)}{u}$$

$$\int 6(1+u^2)du = 6u + 2u^3 + C;$$

$$\int \frac{3x dx}{\sqrt{x-1}} = 6\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)^3} + C;$$

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}} v = 6\sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)^3} + C;$$

$$v = 6\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}(x-1) + C\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$v = 6\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}(x-1) + C\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}};$$

$$v = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 6\sqrt{1+x} + 2\sqrt{1+x}(x-1) + C\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}};$$

$$y = \int 6\sqrt{1+x}dx + \int 2\sqrt{1+x}(x-1)dx + C\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1}}dx;$$

$$z^2 = 1+x;$$

$$z = \sqrt{1+x};$$

$$2zdz = dx;$$

$$x = z^2 - 1;$$

$$x - 1 = (z^2 - 2);$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} - \int 2z(z^2-2)2zdz + C\int \frac{(1+x)dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} - 4\int (z^4 - 2z^2)dz + C\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} + C\int \frac{(x)dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} - \frac{4}{5}z^5 + \frac{8}{3}z^3 + C\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - C\sqrt{x^2-1} + K;$$

$$y = 4(1+x)^{3/2} + \frac{8}{3}\left(\sqrt{1+x}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(\sqrt{1+x}\right)^5 + C\ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| - C\sqrt{x^2-1} + K;$$

2) $x^{-1}y'+\dfrac{(y')^2}{x}=y'';$

$$v=\frac{dy}{dx}=y';$$

$$v'=\frac{dv}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}=y'';$$

Reemplazando en la ecuación :

$$x^{-1}y'+\frac{(y')^2}{x}=y'';$$

$$x^{-1}v+\frac{(v)^2}{x}=v';$$

$$v'-x^{-1}v=\frac{v^2}{x};$$

Es una E. diferencial de Bernoulli :

$$z=v^{1-n};\qquad n=2;$$

$$z=v^{-1};$$

$$\frac{dz}{dx}=-v^{-2}\frac{dv}{dx};$$

$$-v^{-2}v'-\left(-v^{-2}\right)x^{-1}v=-v^{-2}\frac{v^2}{x};$$

$$z'+x^{-1}z=-\frac{1}{x};$$

$$u(x)=e^{\int x^{-1}dx}=x;$$

$$xz'+xx^{-1}z=-x\frac{1}{x};$$

$$\frac{d[x.z]}{dx}=-1;$$

$$xz=-\int dx=-x+C;$$

$$z=-1+\frac{C}{x};$$

$$v^{-1}=-1+\frac{C}{x}=\frac{C-x}{x};$$

$$v=\frac{x}{C-x};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{C-x}=-\frac{x}{x-C};$$

$$y=-\int\frac{xdx}{x-C};$$

$$y=-\int\frac{x-C}{x-C}dx-\int\frac{Cdx}{x-C};$$

$$y=-x-\ln|x-C|+K;$$

Ecuaciones diferenciales en las que falta la variable " x"

Cuando hace falta la variable "x" se hace el siguiente cambio de variable:

$$\frac{dy}{dx}=v;$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}=v\frac{dv}{dy};$$

3) $2y^2y''+2y(y')^2=1;$ (HACE FALTA X)

$2y^2y''+2y(y')^2=1;$

Reemplazando y', y'' en la ecuación:

$2y^2v\frac{dv}{dy}+2y(v)^2=1;$

$\frac{dv}{dy}+\frac{v}{y}=\frac{v^{-1}}{2y^2};$ **Ecuacion diferencial de Bernoulli, n = -1.**

$z=v^{1-(-1)};$

$z=v^2;$

$\frac{dz}{dy}=\frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}=2v\frac{dv}{dy};$

Multiplicando 2v a ambos lados de la ecuación:

$2v\frac{dv}{dy}+\frac{2v.v}{y}=\frac{2v.v^{-1}}{2y^2};$

$\frac{dz}{dy}+\frac{2z}{y}=\frac{1}{y^2};$

$u(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=y^2;$

$y^2\frac{dz}{dy}+y^2\frac{2z}{y}=\frac{y^2}{y^2};$

$\frac{d\left[y^2z\right]}{dy}=1;$

$y^2z=\int dy=y+C;$

$y^2z=y+C;$

$z=\frac{1}{y}+\frac{C}{y^2};$ $\Rightarrow$ $v^2=\frac{1}{y}+\frac{C}{y^2};$

$v^2=\frac{y+C}{y^2};$ $\Rightarrow$ $v=\frac{\sqrt{y+C}}{y};$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y+C}}{y}$ entonces separando variables $\frac{y}{\sqrt{y+C}}dy=dx$

$u^2=y+C;$

$2zdz=dy;$

$y=u^2-C;$

Reemplazando en:

$$\int \frac{y}{\sqrt{y+C}}dy = \int dx$$

$$\int dx = \int \frac{(u^2 - C)(2udu)}{u}, \quad \text{entonces} \quad x + K = \int (u^2 - C)(2du),$$

Entonces: $x + K = \dfrac{2u^3}{3} - 2Cu$

Pero $u = (y + C)^{1/2}$

Por lo tanto la solución de la forma $x = f(y)$ **es:**

$$x + K = \frac{2(y+C)^{3/2}}{3} - 2C(y+C)^{1/2}$$

4) $y' y^2 + yy'' - (y')^2 = 0;$

$$v = \frac{dy}{dx};$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy};$$

Reemplazando en la ecuación :

$$y' y^2 + yy'' - (y')^2 = 0;$$

$$vy^2 + yv\frac{dv}{dy} - (v)^2 = 0;$$

$$y + \frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = 0;$$

$$\frac{dv}{dy} - \frac{v}{y} = -y;$$

$$u(y) = e^{\int \frac{-dy}{y}} = \frac{1}{y};$$

$$\frac{1}{y}\frac{dv}{dy} - \frac{1}{y}\frac{v}{y} = -y\frac{1}{y};$$

$$\frac{d\left[\frac{1}{y}v\right]}{dy} = -1;$$

$$\frac{1}{y}v = -\int dy;$$

$$\frac{1}{y}v = -y + C;$$

$$v = -y^2 + Cy;$$

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + Cy;$$

$$x = \int \frac{dy}{Cy - y^2} = \int \frac{dy}{Cy} + \int \frac{dy}{C(C-y)};$$

La solución es:

$$\boxed{x = \frac{1}{C}\ln|y| - \frac{1}{C}\ln|C - y| + K;}$$

Ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

1) Resuelva: $y''+3y'+2y = sen(e^x);$

$$\cdot\ y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$$

Solución:

1. Solución de $y'' + 3y' + 2y = 0$

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m+2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = -2,\ m = -1$$

$$y_h = C_1 \underbrace{e^{-2x}}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}$

3.

$$u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{-e^{-x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)$$

$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} = \frac{e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x)}{e^{-3x}} = e^{x}\operatorname{sen}(e^x)$$

4.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int u_1'\, dx \\
&= \int -e^{2x}\operatorname{sen}(e^x)\, dx \text{ y haciendo } \begin{cases} z &= e^x \\ dz &= e^x\, dx \\ dx &= \frac{dz}{z} \end{cases} \\
&= -\int z^2 \operatorname{sen}(z)\frac{dz}{z} \\
&= -\int z\operatorname{sen}(z)\, dz \qquad \begin{cases} & \text{integrando por partes} \\ v &= z \Rightarrow dv = dz \\ dw &= -\operatorname{sen} z dz \Rightarrow w = \cos z \end{cases} \\
&= z\cos z - \int \cos z\, dz
\end{aligned}$$

$$= z\cos z - \operatorname{sen} z = e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = \int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx = \int z \operatorname{sen} z \frac{dz}{z} = \int \operatorname{sen} z\,dz$$
$$= -\cos z = -\cos(e^x)$$

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= [e^x\cos(e^x) - \operatorname{sen}(e^x)]\,e^{-2x} - e^{-x}\cos(e^x) \\ &= -e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_h \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen}(e^x) \end{aligned}$$

2) Resuelva: $y'' - y = \sec^3 x - \sec x$ ***si y(0)=3/16 , y'(0)=5/16;***

1. $y'' - y = 0$ (homogénea asociada)
   $m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$
   $y_h = C_1 \underbrace{e^x}_{y_1} + C_2 \underbrace{e^{-x}}_{y_2}$

2. $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^x(e^{-x}) = -1 - 1 = -2$

$$\begin{aligned} u_1' &= -\frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\ &= -\frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = \frac{e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)}{2} \\ u_2' &= \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)} \\ &= \frac{e^x(\sec^3 x - \sec x)}{-2} = -\frac{e^{-x}}{2}(\sec^3 x - \sec x) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - 1)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int e^{-x}\sec x \tan^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec x \tan x)\tan x\,dx \end{aligned}$$

integremos por partes, haciendo:

$$u = e^{-x}\tan x, \quad dv = \tan x \sec x\,dx,$$

luego

$$du = (-e^{-x}\tan x + e^{-x}\sec^2 x)\,dx, \qquad v = \sec x$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x \sec x - \int e^{-x}\sec x(\sec^2 x - \tan x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x \sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + \int e^{-x}\sec x \tan x\,dx\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-x}\tan x \sec x - \int e^{-x}\sec^3 x\,dx + e^{-x}\sec x + \int e^{-x}\sec x\,dx\right] \\ &= \frac{e^{-x}}{2}\tan x \sec x - \frac{e^{-x}}{2}\sec x - \frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx, \end{aligned}$$

despejando la integral :

$$\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{e^{-x}}{2}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{2}\sec x$$
$$\frac{1}{2}\int e^{-x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx = \frac{e^{-x}}{4}\tan x \sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x$$

$$u_2 = \int u_2'\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x}(\sec^3 x - \sec x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int e^{-(-x)}\sec^3(-(-x)) - \sec(-(-x))\,d(-(-x))$$

hagamos: $z = -x$, $dz = -dx$

$$u_2 = \frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3(-z) - \sec(-z))\,d(-z) = -\frac{1}{2}\int e^{-z}(\sec^3 z - \sec z)\,dz$$
$$= -\frac{e^{-z}}{4}\tan z \sec z - \frac{e^{-z}}{4}\sec z = -\frac{e^{x}}{4}\tan(-x)\sec(-x) - \frac{e^{x}}{4}\sec(-x)$$
$$= \frac{e^{x}}{4}\tan x \sec x - \frac{e^{x}}{4}\sec x$$

4.

$$\begin{aligned} y_p &= u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= \left(\frac{e^{-x}}{4}\tan x\sec x + \frac{e^{-x}}{4}\sec x\right)e^{x} + \left(\frac{e^{x}}{4}\tan x\sec x - \frac{e^{x}}{4}\sec x\right)e^{-x} \\ &= \frac{\tan x \sec x}{2} \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= C_1e^{x} + c_2e^{-x} + \frac{\tan x\sec x}{2} \quad \text{solucion general} \end{aligned}$$

$$y' = C_1e^{x} - C_2e^{-x} + \frac{1}{2}\left(\tan^2(x)\sec(x) + \sec^3(x)\right)$$

$$y(0) = \frac{3}{16};$$

$$\frac{3}{16} = C_1 + C_2;$$

$$y'(0) = \frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{16} = C_1 - C_2 + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{8}\right)$$

$$C_1 - C_2 = \frac{1}{4};$$

Resolviendo :

$$C_1 = \frac{7}{32};$$

$$C_2 = \frac{-1}{32};$$

$$y = \frac{7}{32}e^{x} - \frac{1}{32}e^{-x} + \frac{\tan(x)\sec(x)}{2}$$

3) Resuelva $\boxed{y''-5y'+6y=xe^{x};}$

$y''-5y'+6y=0;$

$y=e^{rx};\qquad y'=re^{rx};\qquad y''=r^{2}e^{rx};$

Reemplazando y, y', y'':

$e^{rx}\left[r^{2}-5r+6\right]=0;$

$\underbrace{r^{2}-5r+6}_{\text{Ecuación Característica}}=0;$

$(r-3)(r-2)=0;$

$r_1=3;\quad r_2=2;$

$y_1=e^{3x};$

$y_2=e^{2x};$

$y_h=\underbrace{C_1e^{3x}+C_2e^{2x}}_{\text{Solución homogénea}};$

Encontremos la solución particular:

$y''-5y'+6y=xe^{x};$

$y_p=x^{S}\left[a_0+a_1x\right]e^{\alpha x};$

$s=0;\quad \alpha=\boldsymbol{1;}$

$y_p=\left[a_0+a_1x\right]e^{x};$

$y_p=a_0e^{x}+a_1xe^{x};$

$y'_p=a_0e^{x}+a_1\left[xe^{x}+e^{x}\right];$

$y''_p=a_0e^{x}+a_1\left[xe^{x}+2e^{x}\right];$

Reemplazando en la ecuación diferencial no homogénea:

$y''-5y'+6y=xe^{x};$

$a_0e^{x}+a_1\left[xe^{x}+2e^{x}\right]-5\left[a_0e^{x}+a_1\left[xe^{x}+e^{x}\right]\right]+6\left[a_0e^{x}+a_1xe^{x}\right]=xe^{x};$

$(2a_0-3a_1)e^{x}+2a_1xe^{x}=xe^{x};$

$\begin{cases}2a_0-3a_1=0;\\ 2a_1=1;\end{cases}$

Resolviendo el sistema:

$a_0=\frac{3}{4};\qquad a_1=\frac{1}{2};$

$y_p=a_0e^{x}+a_1xe^{x};$

$y_p=\frac{3}{4}e^{x}+\frac{1}{2}xe^{x};$

$y=y_h+y_p;$

$y=C_1e^{3x}+C_2e^{2x}+\frac{3}{4}e^{x}+\frac{1}{2}xe^{x};$

4) Resuelva: $y'+2y'+2y = e^{-x}cosx;$

$y'+2y'+2y = 0;$

$y = e^{rx};$ $\quad y' = re^{rx};$ $\quad y'' = r^2e^{rx};$

Reemplazando y, y', y'':

$e^{rx}\left[r^2 + 2r + 2\right] = 0;$

$\underbrace{r^2 + 2r + 2}_{\text{Ecuación Característica}} = 0;$

$r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4(2)}}{2} = -1 \pm i;$

$\lambda = -1;$ $\quad \beta = 1;$

$y_1 = e^{-x}\cos x;$

$y_2 = e^{-x}\operatorname{sen}x;$

$y_h = \underbrace{C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\operatorname{sen}x}_{\text{Solución homogénea}};$

Encontremos la solución particular :

$y''+2y'+2y = e^{-x}\cos(x);$

$y_p = x^S\left[a_0\cos x + b_0\operatorname{sen}x\right]e^{\alpha x};$

$s = 0;$ $\quad \alpha = -1;$

$y_p = \left[a_0\cos x + b_0\operatorname{sen}x\right]e^{-x};$

$y_p = a_0e^{-x}\cos x + b_0e^{-x}\operatorname{sen}x;$

No se puede asumir esta solución particular ya que contiene términos linealmente dependiente con respecto a mi solución homogénea.

$s = 1$

$y_p = x\left[a_0e^{-x}\cos x + b_0e^{-x}\operatorname{sen}x\right];$

$y_p = a_0xe^{-x}\cos x + b_0xe^{-x}\operatorname{sen}x;$

$y'_p = a_0\left[x\left(-e^{-x}\operatorname{sen}x - e^{-x}\cos x\right) + e^{-x}\cos x\right] + b_0\left[x\left(e^{-x}\cos x - e^{-x}\operatorname{sen}x\right) + e^{-x}\operatorname{sen}x\right];$

$y'_p = a_0\left[-xe^{-x}\operatorname{sen}x - xe^{-x}\cos x + e^{-x}\cos x\right] + b_0\left[xe^{-x}\cos x - xe^{-x}\operatorname{sen}x + e^{-x}\operatorname{sen}x\right];$

$y''_p = a_0\left[2xe^{-x}\operatorname{sen}x - 2e^{-x}\operatorname{sen}x - 2e^{-x}\cos x\right] + b_0\left[-2xe^{-x}\cos x - 2e^{-x}\operatorname{sen}x + 2e^{-x}\cos x\right];$

Reemplazando y simplificando y_p, y'_p, y''_p *en la ecuación diferencial no homogénea :*

$y''+2y'+2y = e^{-x}\cos(x);$

$a_0\left[-2e^{-x}\operatorname{sen}x\right] + b_0\left[2e^{-x}\cos x\right] = e^{-x}\cos(x);$

$-2a_0 = 0;$

$2b_0 = 1;$

$a_0 = 0;$

$b_0 = \dfrac{1}{2};$

$y_p = \frac{1}{2}xe^{-x}\text{sen}(x);$

$y = y_h + y_p;$

$y = C_1e^{-x}\cos x + C_2e^{-x}\text{senx} + \frac{1}{2}xe^{-x}\text{sen}(x);$

$$y''-2y'+y = cosx + 3e^x + x^2 - 1;$$

Encontrando la solución homogénea :

$y''-2y'+y = 0;$

$y = e^{rx};$

$y' = re^{rx};$

$y'' = r^2e^{rx};$

Reemplazando y, y' , y'' en la ecuación homogénea :

$e^{rx}\left[r^2 - 2r + 1\right] = 0;$

$r^2 - 2r + 1 = 0;$

$(r-1)^2 = 0;$

$r_{1,2} = 1;$

$y_1 = e^x;$

$y_2 = xe^x;$

$y_h = C_1e^x + C_2xe^x;$

Encontrando la solución particular :

$y''-2y'+y = cosx + 3e^x + x^2 - 1;$

Encontrando la primera solución particular :

$y''-2y'+y = cosx;$ ***Ecuación 1.***

$y_{p1} = x^s[a\cos x + b\text{senx}];$

$s = 0;$

$y_{p1} = a\cos x + b\text{senx};$

$y'_{p1} = -a\text{senx} + b\cos x = a[-\text{senx}] + b[\cos x];$

$y''_{p1} = -a\cos x - b\text{senx} = a[-\cos x] + b[-\text{senx}];$

Reemplazando $y''_{p1}, y'_{p1}, y_{p1}$ *en la ecuacion 1;*

$a[2\text{senx}] + b[-2\cos x] = cosx;$

$\begin{cases} 2a = 0; \\ -2b = 1; \end{cases}$ ***Resolviendo*** $a = 0;$ $b = -\frac{1}{2};$

$y_{p1} = -\frac{1}{2}\text{senx};$

Encontrando la segunda solución particular :

$y''-2y'+y=3e^{x}$; *Ecuación 2.*

$y_{p2}=x^{s}[a]e^{x};$

$s=0;$

$y_{p2}=[a]e^{x};$

No se puede asumir esta solución particular, ya que es lienalmente dependiente con respecto a la solución homogénea.

$s=1;$

$y_{p2}=x[a]e^{x};$

Tampoco se puede asumir esta solución, por la misma razón anterior.

$s=2;$

$y_{p2}=x^{2}[a]e^{x};$

En este caso, esta solución es linealmente independiente, respecto a la solución homogénea

$y_{p2}=ax^{2}e^{x};$

$y'_{p2}=a\left[x^{2}e^{x}+2xe^{x}\right];$

$y''_{p2}=a\left[x^{2}e^{x}+4xe^{x}+2e^{x}\right];$

Reemplazando $y''_{p2}, y'_{p2}, y_{p2}$ *en la ecuación 2.*

$y''-2y'+y=3e^{x}$

$2ae^{x}=3e^{x};$

$a=\frac{3}{2};$

La segunda solución particular es :

$y_{p2}=\frac{3}{2}x^{2}e^{x};$

Encontrando la tercera solución particular :

$y''-2y'+y=x^{2}-1;$ *Ecuación 3.*

$y_{p3}=x^{s}\left[a+bx+cx^{2}\right];$

$s=0;$

$y_{p3}=a+bx+cx^{2};$

$y'_{p3}=b+2cx;$

$y''_{p3}=2c;$

Reemplazando $y''_{p3}, y'_{p3}, y_{p3}$ *en la ecuación 2.*

$y''-2y'+y=x^{2}-1$

$2c-2[b+2cx]+\left[a+bx+cx^{2}\right]=x^{2}-1;$

$$\left[2c-2b+a\right]+\left[2c+b\right]x+\left[c\right]x^{2}=x^{2}-1;$$

$$\begin{cases} 2c-2b+a=-1 \\ -4c+b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$c=1;$

$b=4;$

$a=5;$

La tercera solución particular:

$y_{p3}=5+4x+x^{2};$

$y_{p}=y_{p1}+y_{p2}+y_{p3};$

$$y_{p}=-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)+\frac{3}{2}x^{2}e^{x}+5+4x+x^{2};$$

La solución general:

$y=y_{h}+y_{p};$

$$y=C_{1}e^{x}+C_{2}xe^{x}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)+\frac{3}{2}x^{2}e^{x}+5+4x+x^{2};$$

Ecuacion diferencial de Euler – Cauchy

1) Demuestre que la ecuación diferencial $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0,\quad donde\ \alpha,\beta\in R$**, se la puede transformar en una ecuación de coeficientes constantes haciendo el cambio de variable** $x=e^z$**, y luego resuelva:**

$x^2y''+2xy'+4y=4sen(lnx)+e^{2ln(X)}$;

$$Si\ x=e^z;$$

$$z=\ln(x);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{x};$$

Ahora:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{1}{x};$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dz};$$

Se necesita luego y'':

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}x\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x};$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right);$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$$x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0;$$

$$x^2\left(\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz}\right)+\alpha x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)+\beta y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}+\alpha\frac{dy}{dz}+\beta y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0;$$

Resolviendo la ecuación $x^2y''+2xy'+4y=4sen(lnx)+e^{2ln(X)}$;

Encontrando primero la solución homogénea:

$$x^2y''+2xy'+4y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(2-1)\frac{dy}{dz}+4y=0;$$

$$y''+y'+4y=0;$$

$$e^{rz}\left[\underbrace{r^2+r+4}_{\textit{Ecuación característica}}\right]=0;$$

$$r^2+r+4=0;$$

$$r_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i;$$

$$y_1=e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right);$$

$$y_2=e^{-z/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right);$$

$$y_h=C_1e^{-z/2}\cos\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right)+C_2e^{-z/2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}z}{2}\right);$$

$$y_h=C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right)+C_2\sqrt{x}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right);$$

Ahora encontremos la solución particular :

Como se asume que $x=e^z$ y $z=ln(x)$, al reemplazar

en la ecuación $x^2y''+2xy'+4y=4sen(lnx)+5e^{2ln(X)}$, se obtiene :

$$y''+y'+4y=4\operatorname{sen}(z)+5e^{2z};$$

Donde se tiene 2 soluciones particulares :

$$y''+y'+4y=4\operatorname{sen}(z);\ \textbf{\textit{Ecuación 1.}}$$

La primera solución tiene la siguiente forma :

$$y_p=a\cos(z)+b\operatorname{sen}(z);$$

$$y'_p=-a\operatorname{sen}(z)+b\cos(z)=a[-\operatorname{sen}(z)]+b[\cos(z)];$$

$$y''_p=-a\cos(z)-b\operatorname{sen}(z)=a[-\cos(z)]+b[-\operatorname{sen}(z)];$$

Reemplazando y''_p, y'_p, y_p en la ecuación 1 :

$$y''+y'+4y=4\operatorname{sen}(z);\ \textbf{\textit{Ecuación 1.}}$$

$$a[3\cos(z)-\operatorname{sen}(z)]+b[3\operatorname{sen}(z)+\cos(z)]=4\operatorname{sen}(z);$$

$$\begin{cases}3a+b=0\\-a+3b=4\end{cases}$$

Resolviendo el sistema se obtiene :

$$a=-\frac{2}{5};\qquad\qquad b=\frac{6}{5};$$

$$y_{p1}=-\frac{2}{5}\cos(z)+\frac{6}{5}\operatorname{sen}(z);$$

$$y_{p1}=-\frac{2}{5}\cos(\ln(x))+\frac{6}{5}\operatorname{sen}(\ln(x));$$

Encontrando la segunda la solución particular :

$$y''+y'+4y=5e^{2z};\quad \textbf{\textit{Ecuación 2.}}$$

Se asume la siguiente solución :

$y_{p2} = ae^{2z};$

$y'_{p2} = 2ae^{2z};$

$y''_{p2} = 4ae^{2z};$

Reemplazando y''_{p2} , y'_{p2} , y_{p2} ***en la ecuación 2 :***

$y''+y'+4y = 5e^{2z};$ ***Ecuación 2.***

$4ae^{2z} + 2ae^{2z} + 4ae^{2z} = 5e^{2z};$

$10ae^{2z} = 5e^{2z};$

$a = \frac{1}{2};$

$y_{p2} = \frac{1}{2}e^{2z};$

$y_{p2} = \frac{1}{2}e^{2\ln(x)} = \frac{x^2}{2};$

$y_p = y_{p1} + y_{p2};$

$y_p = -\frac{2}{5}\cos(\ln(x)) + \frac{6}{5}\text{sen}(\ln(x)) + \frac{x^2}{2};$

$y = y_h + y_p;$

$$y = C_1\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right) + C_2\sqrt{x}\text{sen}\left(\frac{\sqrt{15}\ln(x)}{2}\right) - \frac{2}{5}\cos(\ln(x)) + \frac{6}{5}\text{sen}(\ln(x)) + \frac{x^2}{2};$$

2) Resuelva: $(x-2)^2 y'' + 3(x-2)y' + y = \ln^2(x-2) - 5\ln(x-2) + 6;$

Si $x - 2 = e^z$; ***entonces*** $z = \ln(x-1);$

$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x-2};$

Ahora :

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x-2};$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x-2}\frac{dy}{dz};$

Se necesita luego y'' :

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right);$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx};$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{x-2}\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{(x-2)^2}\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx};$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{x-2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{(x-2)^2}(x-2)\frac{dy}{dz}\right)\frac{1}{x-2};$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{(x-2)^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\frac{dy}{dz}\right);$$

Reemplazando en la ecuación diferencial homog{enea :

$$(x-2)^2y''+3(x-2)y'+y=0;$$

$$(x-2)^2\left(\frac{1}{(x-2)^2}\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\frac{dy}{dz}\right)+3(x-2)\left(\frac{1}{x-2}\frac{dy}{dz}\right)+y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}+3\frac{dy}{dz}+y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(3-1)\frac{dy}{dz}+y=0;$$

Resolviendo la ecuación $y''+2y'+y=0;$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+2\frac{dy}{dz}+y=0;$$

$$y=e^{rz};$$

$$y'=re^{rz};$$

$$y''=r^2e^{rz};$$

Reemplazando y, y', y'' ***en la ecuación homogénea :***

$$e^{rz}\left[\underbrace{r^2+2r+1}_{\text{Ecuación Característica}}\right]=0;$$

$$r^2+2r+1=0;$$

$$(r+1)^2=0;$$

$$r_{1,2}=-1;$$

$$y_1=e^{-z};$$

$$y_2=ze^{-z};$$

$$y_h=C_1e^{-z}+C_2ze^{-z};$$

$$z=\ln(x-2);$$

$$y_h=C_1e^{-z}+C_2ze^{-z};$$

$$y_h=C_1e^{-\ln(x-2)}+C_2\ln(x-2)e^{-\ln(x-2)};$$

$$y_h=\frac{C_1}{x-2}+\frac{C_2\ln(x-2)}{x-2};$$

Ahora encontremos la solución particular :

Como se asume que $x-2=e^z$ ***y*** $z=\ln(x-2)$***, al reemplazar***

en la ecuación $(x-2)^2y''+3(x-2)y'+y=\ln^2(x-2)-5\ln(x-2)+6;$ ***, se obtiene :***

$$y''+2y'+y=z^2-5z+6;$$

Donde la solución particular tiene la siguiente forma :

$\boldsymbol{y_p} = x^S\left[a + bz + cz^2\right];$

$s = 0;$

$\boldsymbol{y_p} = \left[a + bz + cz^2\right];$

$\boldsymbol{y'_p} = b + 2cz;$

$y''_p = 2c;$

Reemplazando $\boldsymbol{y''_p, y'_p, y_p}$ ***en la ecuación*** $\boldsymbol{y''+2y'+y = z^2 - 5z + 6;}$

$2c + 2(b + 2cz) + \left(a + bz + cz^2\right) = z^2 - 5z + 6;$

$$\begin{cases} 2c + 2b + a = 6 \\ 4c + b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema :

$c = 1;$

$b = -9;$

$a = 22;$

$y_p = 22 - 9z + z^2;$

$y_p = 22 - 9\ln(x-2) + \ln^2(x-2);$

$y = y_h + y_p;$

$$y = \frac{C_1}{x-2} + \frac{C_2\ln(x-2)}{x-2} + 22 - 9\ln(x-2) + \ln^2(x-2);$$

3) $x^2y''+xy'+9y=3tan(3ln(x));$

$Si\ x=e^z,\quad entonces\ z=ln(x);$

Encontrando la solución homogénea :

$x^2y''+xy'+9y=0;$

Usando :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(\alpha-1)\frac{dy}{dz}+\beta y=0;$$

Se obtiene :

$$\frac{d^2y}{dz^2}+(1-1)\frac{dy}{dz}+9y=0;$$

$$\frac{d^2y}{dz^2}+9y=0;$$

$$y''+9y=0;$$

$$y=e^{rz};$$

$$y''=r^2e^{rz};$$

$$e^{rz}\left[r^2+9\right]=0;$$

$$r^2+9=0;$$

$$r=\pm 3i;$$

$$y_1=\cos z;$$

$$y_2=\operatorname{sen} z;$$

$$y_h=C_1\cos(3z)+C_2\operatorname{sen}(3z);$$

$$y_h=C_1\cos(3\ln(x))+C_2\operatorname{sen}(3\ln(x));$$

Encontremos la solución particular :

$x^2y''+xy'+9y=3tan(3ln(x));$

Reemplazando $z=ln(x)$ *y* $x=e^z$*, se obtiene :*

$$y''+9y=3\tan(3z);$$

$$g(z)=3\tan(3z);$$

$$y_p=u_1y_1+u_2y_2;$$

$$u'_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & \operatorname{sen}3z\\ g(z) & 3\cos 3z\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)};$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ y'_1 & y'_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos 3z & \operatorname{sen}3z\\ -3\operatorname{sen}3z & 3\cos 3z\end{vmatrix}=3\cos^2(3z)+3\operatorname{sen}^2(3z);$$

$$W(y_1,y_2)=3$$

$$u'_1=-\frac{3\tan(3z)\operatorname{sen}(3z)}{3}=\frac{-\operatorname{sen}(3z)\operatorname{sen}(3z)}{\cos(3z)};$$

$$\boldsymbol{u'_1} = -\frac{\mathrm{sen}^2(3z)}{\cos(3z)} = -\frac{1-\cos^2(3z)}{\cos(3z)};$$

$$\boldsymbol{u'_1} = \cos(3z) - \frac{1}{\cos(3z)};$$

$$u_1' = \cos(3z) - \sec(3z);$$

$$u_1 = \int (\cos(3z) - \sec(3z))dz$$

$$u_1 = \frac{\mathrm{sen}(3z)}{3} - \frac{\ln|\sec(3z) + \mathrm{tg}(3z)|}{3};$$

$$\boldsymbol{u'_2} = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3z & 0 \\ -3\mathrm{sen}3z & 3\tan(3z) \end{vmatrix}}{\boldsymbol{W(y_1, y_2)}} = \frac{3\cos(3z)\tan(3z)}{3}$$

$$u'_2 = \frac{\cos(3z)\mathrm{sen}(3z)}{\cos(3z)};$$

$$u'_2 = \mathrm{sen}(3z);$$

$$u_2 = \int \mathrm{sen}(3z)dz = -\frac{1}{3}\cos(3z)$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2;$$

$$y_p = \left[\frac{\mathrm{sen}(3z)}{3} - \frac{\ln|\sec(3z) + \mathrm{tg}(3z)|}{3}\right]\cos(3z) - \frac{1}{3}\cos(3z)\mathrm{sen}(3z);$$

$$y = y_h + y_p;$$

$$y = C_1\cos(3z) + C_2\mathrm{sen}(3z) + \left[\frac{\mathrm{sen}(3z)}{3} - \frac{\ln|\sec(3z) + \mathrm{tg}(3z)|}{3}\right]\cos(3z) - \frac{1}{3}\cos(3z)\mathrm{sen}(3z);$$

$$y = C_1\cos(3\ln x) + C_2\mathrm{sen}(3\ln x) + \left[\frac{\mathrm{sen}(3\ln x)}{3} - \frac{\ln|\sec(3\ln x) + \mathrm{tg}(3\ln x)|}{3}\right]\cos(3\ln x) - \frac{1}{3}\cos(3\ln x)\mathrm{sen}(3\ln x);$$

4) Si $y_1 = x^{-1/2}\cos x,\ y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ forman un conjunto linealmente independiente y son soluciones de $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0;$

Hallar la solución particular para $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x^{3/2};$ si

$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\quad y'(\pi)=0;$

Como $y_1 = x^{-1/2}\cos x$, y $y_2 = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$ son soluciones de

$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0$, entonces se obtiene :

$$y_h = C_1x^{-1/2}\cos x + C_2x^{-1/2}\operatorname{sen}x;$$

Para encontrar la solución de $x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x^{3/2};$

Se aplica variación de parámetros :

$$\frac{x^2}{x^2}y''+\frac{x}{x^2}y'+\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{4x^2}\right)y=\frac{x^{3/2}}{x^2};$$

$$y''+\frac{y'}{x}+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=x^{-1/2};$$

$$y_p = u_1y_1+u_2y_2;$$

$$g(x)=x^{-1/2};$$

$$u'_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & y_2\\ g(x) & y'_2\end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)};$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & x^{-1/2}\operatorname{sen}x \\ -x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x & x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x \end{vmatrix}$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1/2}\cos x\left[x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x\right]-x^{-1/2}\operatorname{sen}x\left[-x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x\right];$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1}\cos^2 x-\frac{1}{2}x^{-2}\operatorname{sen}x\cos x+x^{-1}\operatorname{sen}^2x+\frac{1}{2}x^{-2}\operatorname{sen}x\cos x;$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1}\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2x\right)=x^{-1}(1)=x^{-1};$$

$$W(y_1,y_2)=x^{-1};$$

$$u'_1=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2}\operatorname{sen}x \\ x^{-1/2} & x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x \end{vmatrix}}{x^{-1}}=-\frac{x^{-1}\operatorname{sen}x}{x^{-1}}=-\operatorname{sen}(x);$$

$$u_1=\int-\operatorname{sen}(x)dx=\cos x;$$

$$u'_2=\frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & g(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2)}=\frac{\begin{vmatrix} x^{-1/2}\cos x & 0 \\ -x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x & x^{-1/2} \end{vmatrix}}{x^{-1}};$$

$$u'_2=\frac{x^{-1}\cos x}{x^{-1}}=\cos x;$$

$$u_2=\operatorname{sen}x;$$

$$y_p=(\cos x)\left(x^{-1/2}\cos x\right)+(\operatorname{sen}x)\left(x^{-1/2}\operatorname{sen}x\right)$$

$$y_p=x^{-1/2}\left(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2x\right)=x^{-1/2}(1)=x^{-1/2};$$

$$y_p=x^{-1/2};$$

$$y=y_h+y_p;$$

$$y=C_1x^{-1/2}\cos x+C_2x^{-1/2}\operatorname{sen}x+x^{-1/2};$$

Si $\boldsymbol{y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0;\quad y\quad y'(\pi)=0;}$

$$y=C_1x^{-1/2}\cos x+C_2x^{-1/2}\operatorname{sen}x+x^{-1/2};$$

$$0=C_1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(0)+C_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(1)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}};$$

$$C_2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}(1)+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=0;$$

$$C_2=-1;$$

$$y'=C_1\left[-x^{-1/2}\operatorname{sen}x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\cos x\right]+C_2\left[x^{-1/2}\cos x-\frac{1}{2}x^{-3/2}\operatorname{sen}x\right]-\frac{x^{-3/2}}{2};$$

$$0=C_1\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}(0)-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}(-1)\right]+C_2\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}(-1)-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}(0)\right]-\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}};$$

$$0 = C_1\left[\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}}\right] - C_2\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right] - \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} = \frac{C_1}{2\pi\sqrt{\pi}} - \frac{C_2}{\sqrt{\pi}};$$

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} = \frac{C_1}{2\pi\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}};$$

$$1 = C_1 + 2\pi;$$

$$C_1 = 1 - 2\pi;$$

$$y = (1 - 2\pi)x^{-1/2}\cos x - x^{-1/2}\operatorname{sen} x + x^{-1/2};$$

Identidad de Abel

1. Resuelva la siguiente ecuación diferencial usando la identidad de Abel:

$$\left(1-2x-x^2\right)y''+2(1+x)y'-2y=0;\ Si\ y(0)=y'(0)=1.$$

Si una solución es $y_1=x+1;$

Se usará la identidad de abel :

$$W(y_1,y_2)=e^{\int -p(x)dx};$$

Donde la ecuación diferencial debe tener la siguiente forma :

$$y''+\mathrm{p}(x)y'+q(x)y=0;$$

$$\frac{\left(1-2x-x^2\right)}{\left(1-2x-x^2\right)}y''+\frac{2(1+x)}{\left(1-2x-x^2\right)}y'-\frac{2}{\left(1-2x-x^2\right)}y=0;$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix};$$

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} x+1 & y_2 \\ 1 & y'_2 \end{vmatrix}=(x+1)y'_2-y_2;$$

Entonces :

$$(x+1)y'_2-y_2=e^{\int -\frac{2(1+x)dx}{\left(1-2x-x^2\right)}};$$

$$(x+1)y'_2-y_2=e^{\int \frac{(-2-2x)dx}{\left(1-2x-x^2\right)}};$$

$$u(x)=\left(1-2x-x^2\right);$$

$$du=(-2-2x)dx;$$

$$(x+1)y'_2-y_2=e^{\ln\left|1-2x-x^2\right|};$$

$$(x+1)y'_2-y_2=1-2x-x^2;$$

$$y'_2-\frac{y_2}{x+1}=\frac{1-2x-x^2}{x+1};$$

$$u(x)=e^{-\int\frac{dx}{x+1}}=\frac{1}{x+1};$$

$$\frac{1}{x+1}y'_2-\frac{y_2}{(x+1)^2}=\frac{1-2x-x^2}{(x+1)^2};$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x+1}y_2\right]=\frac{1-2x-x^2}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=\int\frac{\left(1-2x-x^2\right)dx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=\int\frac{\left(2-1-2x-x^2\right)dx}{(x+1)^2};$$

$$\frac{1}{x+1}y_2=-\int\frac{(x+1)^2dx}{(x+1)^2}+\int\frac{2dx}{(x+1)^2};$$
$$\frac{1}{x+1}y_2=-\int dx+\int\frac{2dx}{(x+1)^2};$$
$$\frac{1}{x+1}y_2=-x-\frac{2}{x+1};$$
$$\frac{1}{x+1}y_2=-x-\frac{2}{x+1};$$
$$y_2=-x(x+1)-2;$$
$$y_2=-x^2-x-2;$$
$$y=C_1(x+1)+C_2\left(-x^2-x-2\right);$$
$\boldsymbol{Si\ y(0)=1;}$
$$1=C_1(1)+C_2(-2);$$
$\boldsymbol{Si\ y'(0)=1;}$
$\boldsymbol{y'=C_1+C_2(-2x-1);}$
$$1=C_1+C_2(-1);$$
$$\begin{cases}C_1-C_2=1\\ C_1-2C_2=1\end{cases}$$
Resolviendo el sistema :
$$\left(\begin{array}{cc|c}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1}\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{1}\end{array}\right)$$
$$C_2=0;$$
$$C_1=1+2C_2;$$
$$C_1=1;$$
La solución es :
$$y=x+1;$$

Método de Reducción de Orden

2) Resuelva: $xy''+(x+1)y'+y=0;$ $Si\ y_1=e^{-x};$

Usando el método de reducción de orden :

Se asume que $y_2=u(x)y_1;$

$$y_2=u(x)e^{-x};$$

$$y'_2=-u(x)e^{-x}+u'(x)e^{-x};$$

$$y''_2=-\left[-u(x)e^{-x}+u'(x)e^{-x}\right]+\left[-u'(x)e^{-x}+u''(x)e^{-x}\right];$$

$$y''_2=u(x)e^{-x}-2u'(x)e^{-x}+u''(x)e^{-x};$$

Reemplazando en la ecuación diferencial

$xy''+(x+1)y'+y=0$*, se obtiene :*

$$x\left[u(x)e^{-x}-2u'(x)e^{-x}+u''(x)e^{-x}\right]+(x+1)\left[-u(x)e^{-x}+u'(x)e^{-x}\right]+u(x)e^{-x}=0;$$

$$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-2xe^{-x}+(x+1)e^{-x}\right]+u(x)\left[xe^{-x}-(x+1)e^{-x}+e^{-x}\right]=0;$$

$$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]+u(x)\left[xe^{-x}-xe^{-x}-e^{-x}+e^{-x}\right]=0;$$

$$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]+u(x)[0]=0;$$

$$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]=0;$$

Falta y :

$v(x)=u'(x);$

$v'(x)=u''(x);$

Reemplazando $v(x)$ *y* $v'(x)$ *en la ecuación diferencial :*

$$u''(x)\left[xe^{-x}\right]+u'(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]=0;$$

$$v'(x)\left[xe^{-x}\right]+v(x)\left[-xe^{-x}+e^{-x}\right]=0;$$

$$\frac{dv}{dx}\left[xe^{-x}\right]=v(x)\left[xe^{-x}-e^{-x}\right];$$

$$\frac{dv}{dx}=v(x)\left[1-\frac{1}{x}\right];$$

$$\int\frac{dv}{v(x)}=\int\left[1-\frac{1}{x}\right]dx;$$

$$\ln|v(x)|=x-\ln|x|;$$

$$v(x)=\frac{e^{x}}{x};$$

$$u'(x)=\frac{e^{x}}{x};$$

$$u(x)=\int\frac{e^{x}dx}{x};$$

$$u(x)=\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}dx;$$

$$u(x)=\int\left[\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}\right]dx;$$

$$u(x)=\ln|x|+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{(n)n!};$$

$$y_2=u(x)y_1;$$

$$y_2=\left[\ln|x|+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{(n)n!}\right]e^{-x};$$

La solución es :

$$y=C_1e^{-x}+C_2\left[\ln|x|+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n}}{(n)n!}\right];$$

Ecuación homogénea de orden superior

1. **Las raíces de la ecuación auxiliar, que corresponden a una cierta ecuación diferencial homogénea de orden 10, con coeficientes constantes, son:**
   4, 4, 4, 4, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i, 2+3i, 2-3i,
   Escriba la solución general.

Se tienen 4 *raíces reales iguales y un par complejo conjugado* 3 *veces entonces* :

$$y(x)=e^{4x}\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3\right)+e^{2x}\cos(3x)\left(C_5+C_6x+C_7x^2\right)+e^{2x}sen(3x)\left(C_8+C_9x+C_{10}x^2\right)$$

2. $\boxed{y'''-6y''+12y'-8y=0}$

$$\phi(m)=m^3-6m^2+12m-8=0$$

1	−6	12	−8	| 2
	2	−8	8	
1	−4	4	0	

$$\phi(m)=(m-2)\left(m^2-4m+4\right)=0$$

$$\phi(m)=(m-2)^3=0\rightarrow m_1=m_2=m_3=2$$

$$y(x)=e^{2x}\left(C_1+C_2x+C_3x^2\right)$$

3. $\boxed{\dfrac{d^5y}{dx^5}+32y=0}$

$$\phi(m)=m^5+32=0\rightarrow m_k=2e^{\frac{i\pi+2\pi ki}{5}};k=0,1,2,3,4$$

$$m_{0,4}=2e^{\frac{i\pi}{5}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\,sen\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)=1.618\pm1.175i$$

$$m_{1,5}=2e^{\frac{i3\pi}{5}}=2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)+i\,sen\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)=-0.618\pm1.902\,i$$

$$m_3=2e^{i\pi}=2(\cos(\pi)+i\,sen(\pi))=-2$$

$$y(x)=(C_1\cos(1.175x)+C_2sen(1.175x))e^{1.618x}+(C_3\cos(1.902x)+C_4sen(1.902x))e^{-0.618x}+C_5e^{-2x}$$

4. $\boxed{\left(D^2-2D+5\right)^2y=0}$

$$\phi(m)=\left(m^2-2m+5\right)^2=0$$

$$\phi(m)=\left(m^2-2m+5\right)\left(m^2-2m+5\right)=0$$

$$m_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4.1.5}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}=1\pm2i$$

$$m_{3,4}=1\pm2i$$

$$y(x)=e^x\cos(2x)(C_1+C_2x)+e^xsen(2x)(C_3+C_4x)$$

Ecuaciones de Orden Superior

Ecuación no homogénea de orden superior

1. $\boxed{y'''+3y''+2y'=x^2+4x+8}$

$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$

Encuentro la solución complementaria :

$y'''+3y''+2y'=0 \rightarrow \phi(m)=m^3+3m^2+2m=0$

$\phi(m)=m(m^2+3m+2)=0$

$\phi(m)=m(m+1)(m+2)=0$

$m_1=0,\ m_2=-1,\ m_3=-2 \rightarrow \underline{y_c(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}}$

Encuentro la solución particular :

$g(x)=x^2+4x+8 \rightarrow y_p(x)=x^s\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$s=0 \rightarrow y_p(x)=Ax^2+Bx+C$ *pero no es linealmente independiente con* $y_c(x)$

$s=1 \rightarrow y_p(x)=x(Ax^2+Bx+C)=Ax^3+Bx^2+Cx$ *si es l.i. con* $y_c(x)$

$y_p(x)=Ax^3+Bx^2+Cx$

$y_p'(x)=3Ax^2+2Bx+C$

$y_p''(x)=6Ax+2B$

$y_p'''(x)=6A$

$y_p'''+3y_p''+2y_p'=x^2+4x+8$

$6A+3(6Ax+2B)+2(3Ax^2+2Bx+C)=x^2+4x+8$

$(6A)x^2+(18A+4B)x+(6A+6B+2C)=x^2+4x+8$

$$\begin{cases} 6A=1 \rightarrow \underline{A=\dfrac{1}{6}} \\ 18A+4B=4 \rightarrow B=\dfrac{4-18A}{4} \rightarrow \underline{B=\dfrac{1}{4}} \\ 6A+6B+2C=8 \rightarrow C=\dfrac{8-6A+6B}{2} \rightarrow \underline{C=\dfrac{11}{4}} \end{cases}$$

Por lo que decimos :

$\underline{y_p(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{4}x}$

Solución general :

$$\underline{\underline{y(x)=C_1+C_2e^{-x}+C_3e^{-2x}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{4}x}}$$

2. $\boxed{y'''-y''-4y'+4y = 2x^2-4x-1+2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}}$

$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$

Encuentro la solución complementaria :

$y'''-y''-4y'+4y=0 \rightarrow \phi(m)=m^3-m^2-4m+4=0$

$\phi(m)=m^2(m-1)-4(m-1)=0$

$\phi(m)=(m-1)(m^2-4)=(m-1)(m-2)(m+2)$

$m_1=1,\ m_2=2,\ m_3=-2 \rightarrow \underline{y_c(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}}$

Encuentro la solución particular :

$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$

$g_1(x)=2x^2-4x-1 \rightarrow y_p(x)=x^s\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$s=0 \rightarrow y_p(x)=Ax^2+Bx+C$ *si es l.i. con* $y_c(x)$

$y_p(x)=Ax^2+Bx+C$

$y_p'(x)=2Ax+B$

$y_p''(x)=2A$

$y_p'''(x)=0$

$y_p'''-y_p''-4y_p'+4y_p=2x^2-4x-1$

$0-2A-4(2Ax+B)+4\left(Ax^2+Bx+C\right)=2x^2-4x-1$

$(4A)x^2+(-8A+4B)x+(-2A-4B+4C)=2x^2-4x-1$

$$\begin{cases} 4A=2 \rightarrow \underline{A=\dfrac{1}{2}} \\ -8A+4B=-4 \rightarrow B=\dfrac{-4+8A}{4} \rightarrow \underline{B=0} \\ -2A-4B+4C=-1 \rightarrow C=\dfrac{-1+2A+4B}{4} \rightarrow \underline{C=0} \end{cases}$$

Por lo que decimos :

$\underline{y_{p_1}(x)=\frac{1}{2}x^2}$

$g_2(x)=2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x} \rightarrow y_p(x)=x^se^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$

$s=0 \rightarrow y_p(x)=e^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)$ *pero no es linealmente independiente con* $y_c(x)$

$s=1 \rightarrow y_p(x)=xe^{2x}\left(Ax^2+Bx+C\right)=e^{2x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)$ *si es l.i. con* $y_c(x)$

$y_p(x)=e^{2x}\left(Ax^3+Bx^2+Cx\right)$

$y_p'(x)=e^{2x}\left(2Ax^3+(3A+2B)x^2+(2B+2C)x+C\right)$

$y_p''(x)=e^{2x}\left(4Ax^3+(12A+4B)x^2+(6A+8B+4C)x+(2B+4C)\right)$

$y_p'''(x)=e^{2x}\left(8Ax^3+(36A+8B)x^2+(36A+24B+8C)x+(6A+12B+12C)\right)$

$y_p'''-y_p''-4y_p'+4y_p=2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

$e^{2x}\left((12A)x^2+(30A+8B)x+(6A+10B+4C)\right)=2x^2e^{2x}+5xe^{2x}+e^{2x}$

$$\begin{cases} 12A = 2 \rightarrow A = \dfrac{1}{6} \\ 30A + 8B = 5 \rightarrow B = \dfrac{5 - 30A}{8} \rightarrow \underline{B = 0} \\ 6A + 10B + 4C = 1 \rightarrow C = \dfrac{1 - 6A - 10B}{4} \rightarrow \underline{C = 0} \end{cases}$$

$$\underline{y_{p_2}(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{2x}}$$

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}}}$$

3. $\boldsymbol{y''' + y' = \csc(x)}$

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$

Encuentro la solución complementaria:

$y''' + y' = 0 \rightarrow \phi(m) = m^3 + m = 0$

$\phi(m) = m(m^2 + 1) = 0$

$m_1 = 0,\ m_2 = i,\ m_3 = -i \rightarrow \underline{y_c(x) = C_1 + C_2\cos(x) + C_3 sen(x)}$

Encuentro la solución particular:

$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3$

$$W(1, \cos(x), sen(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & sen(x) \\ 0 & -sen(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix} = 1\left(\cos^2(x) + sen^2(x)\right) = 1$$

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos(x) & sen(x) \\ 0 & -sen(x) & \cos(x) \\ \csc(x) & -\cos(x) & -sen(x) \end{vmatrix}}{1} = \csc(x)(1) \rightarrow u_1 = \int \csc(x)dx = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & sen(x) \\ 0 & 0 & \cos(x) \\ 0 & \csc(x) & -sen(x) \end{vmatrix}}{1} = -\csc(x)\cos(x) \rightarrow u_2 = -\int \csc(x)\cos(x)dx = \ln(\csc(x))$$

$$u_3' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & 0 \\ 0 & -sen(x) & 0 \\ 0 & -\cos(x) & \csc(x) \end{vmatrix}}{1} = -\csc(x)sen(x) \rightarrow u_3 = -\int 1dx = -x$$

$$y_p = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)(1) + \ln(\csc(x))(\cos(x)) + (-x)sen(x)$$

$$\underline{y_p(x) = \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\ln(\csc(x)) - x\ sen(x)}$$

$$\underline{\underline{y(x) = C_1 + C_2\cos(x) + C_3 sen(x) + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \cos(x)\ln(\csc(x)) - x\ sen(x)}}$$

4. $y'''=x\ln(x)$

$y(x)=y_c(x)+y_p(x)$

Encuentro la solución complement aria :

$y'''=0 \rightarrow \phi(m)=m^3=0$

$\phi(m)=m^3=0$

$m_1=0,\ m_2=0,\ m_3=0 \rightarrow \underline{y_c(x)=C_1+C_2x+C_3x^2}$

Encuentro la solución particular :

$y_p(x)=u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3$

$$W(1,\cos(x),sen(x))=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=1(2x^2-x^2)=x^2$$

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix}0 & x & x^2\\ 0 & 1 & 2x\\ x\ln(x) & 0 & 2\end{vmatrix}}{x^2}=\frac{x\ln(x)(x^2)}{x^2}\rightarrow u_1=\int x\ln(x)dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & x^2\\ 0 & 0 & 2x\\ 0 & x\ln(x) & 2\end{vmatrix}}{x^2}=-\frac{x\ln(x).2x}{x^2}\rightarrow u_2=-2\int\ln(x)dx=-2x(\ln(x)-1)$$

$$u_3'=\frac{\begin{vmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x\ln(x)\end{vmatrix}}{x^2}=\frac{x\ln(x)}{x^2}\rightarrow u_3=\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{\ln^2(x)}{2}$$

$$y_p=\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{1}{2}\right)(1)+(-2x(\ln(x)-1))(x)+\left(\frac{\ln^2(x)}{2}\right)x^2$$

$\underline{y_p=\frac{x^2}{4}\left(2\ln^2(x)-6\ln(x)+7\right)}$ *no es l.i.* $\therefore\ y_p=\frac{x^2}{4}\left(2\ln^2(x)-6\ln(x)\right)$

Solución general :

$$\underline{\underline{y(x)=C_1+C_2x+C_3x^2+\frac{x^2}{4}\left(2\ln^2(x)-6\ln(x)\right)}}$$

Ecuación de Euler de orden n

1. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-6x\dfrac{dy}{dx}+18y=0$

La resolveremos por dos métodos :

1° Método :

asumo $y=x^r$ *como solución entonces la escución se reduce a :*

$$x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3}-x^2r(r-1)x^{r-2}-6xrx^{r-1}+18x^r=0$$
$$[r(r-1)(r-2)-r(r-1)-6r+18]x^r=0$$
$$[r(r-1)(r-2)-r(r-1)-6r+18]=0$$
$$r(r-1)(r-3)-6(r-3)=0$$
$$(r-3)(r^2-r-6)=0$$
$$(r-3)^2(r+2)=0$$
$$r_1=r_2=3 \qquad r_3=-2$$
$$\underline{\underline{y(x)=(C_1+C_2\ln x)x^3+C_3x^{-2}}}$$

2° Método :

aplicando el cambio $x=e^t \rightarrow t=\ln x$ *se obtiene* :

$$D(D-1)(D-2)-D(D-1)-6D+18=0$$
$$D^3-4D^2-3D+18=0$$
$$(D-3)^2(D+2)=0$$
$$y'''-4y''-3y'+18y=0 \quad \textit{ecuación en } t$$
$$\phi(m)=(m-3)^2(m+2)=0\rightarrow m_1=3 \qquad m_2=3 \qquad m_3=-2$$
$$y(t)=C_1e^{3t}+C_2te^{3t}+C_3e^{-2t}$$
$$\underline{\underline{y(x)=(C_1+C_2\ln x)x^3+C_3x^{-2}}}$$

2. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-10x\dfrac{dy}{dx}-8y=0$

asumo $y=x^r$ *como solución entonces la escución se reduce a :*

$$x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3}+2x^2r(r-1)x^{r-2}-10xrx^{r-1}-8x^r=0$$
$$[r(r-1)(r-2)+2r(r-1)-10r-8]x^r=0$$
$$[r^2(r-1)-2(5r+4)]=0$$
$$r^3-r^2-10r-8=0$$
$$(r-4)(r+1)(r+2)=0$$
$$r_1=4 \qquad r_2=-1 \qquad r_3=-2$$
$$\underline{\underline{y(x)=C_1x^4+C_2x^{-1}+C_3x^{-2}}}$$

3. $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-4x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+8x\dfrac{dy}{dx}-8y=4\ln x$

aplicando el cambio $x=e^t \to t=\ln x$ *se obtiene*:

Encuentro la solución complementaria:

$D(D-1)(D-2)-4D(D-1)+8D-8=0$

$D(D-1)(D-2)-4D(D-1)+8(D-1)=0$

$(D-1)(D(D-2)-4D+8)=0$

$(D-1)(D^2-6D+8)=0$

$(D-1)(D-2)(D-4)=0 \to y'''-7y''+14y'-8y=0$ *ecuación en t*

$\phi(m)=(m-1)(m-2)(m-4)=0 \to m_1=1 \quad m_2=2 \quad m_3=4$

$y_c(t)=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{4t} \to \underline{y_c(x)=C_1x+C_2x^2+C_3x^4}$

Encuentro la solución particular:

$y'''-7y''+14y'-8y=4t$

$y_p=t^s(At+B)$

$s=0 \to y_p=At+B$ *si es linealmente independiente con* y_c

$y_p=At+B$

$y_p'=A$

$y_p''=y_p'''=0$

Re*emplazando*:

$0-7(0)+14(A)-8(At+B)=4t$

$(-8A)t+(14A-8B)=4t$

$$\begin{cases} -8A=4 & A=-\dfrac{1}{2} \\ 14A-8B=0 & B=\dfrac{7}{8} \end{cases} \to y_p(t)=-\frac{1}{2}t+\frac{7}{8} \to \underline{y_p(x)=-\frac{1}{2}\ln x+\frac{7}{8}}$$

$$\underline{\underline{y(x)=C_1x+C_2x^2+C_3x^4-\frac{1}{2}\ln x+\frac{7}{8}}}$$

4. $\boldsymbol{x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}-x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3}$

asumo $y=x^r$ *como solución entonces la escución se reduce a :*

$x^3r(r-1)(r-2)x^{r-3}-x^2r(r-1)x^{r-2}+2xrx^{r-1}-2x^r=0$

$[r(r-1)(r-2)-r(r-1)+2r-2]x^r=0$

$[r(r-1)(r-2)-r(r-1)+2(r-1)]=0$

$(r-1)(r(r-2)-r+2)=0$

$(r-1)(r(r-2)-(r-2))=0$

$(r-1)^2(r-2)=0$

$r_1=r_2=1 \qquad r_3=2$

$\underline{y_c=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2}$

encuentro la solución particular :

$y_p(x)=u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3$

$$W(x,x\ln x,x^2)=\begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & \ln x+1 & 2x \\ 0 & x^{-1} & 2\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}\ln x+1 & 2x \\ x^{-1} & 2\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} x\ln x & x^2 \\ x^{-1} & 2\end{vmatrix}=x$$

$$u_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & x\ln x & x^2 \\ 0 & \ln x+1 & 2x \\ 1 & x^{-1} & 2\end{vmatrix}}{x}=\frac{(2x)(x\ln x)-(\ln x+1)(x^2)}{x}\to u_1=\int x(\ln(x)-1)dx=\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)$$

$$u_2'=\frac{\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}}{x}=-\frac{(x)(2x)-x^2}{x}\to u_2=-\int xdx=-\frac{x^2}{2}$$

$$u_3'=\frac{\begin{vmatrix} x & x\ln x & 0 \\ 1 & \ln x+1 & 0 \\ 0 & x^{-1} & 1\end{vmatrix}}{x}=\frac{x(\ln x+1)-x\ln x}{x}\to u_3=\int 1dx=x$$

$$y_p=\frac{x^2}{2}\left(\ln(x)-\frac{3}{2}\right)(x)-\frac{x^2}{2}(x\ln x)+(x)x^2$$

$$\underline{y_p=\frac{x^3}{4}}$$

Solución general :

$$\underline{\underline{y(x)=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{x^3}{4}}}$$

Ecuaciones de segundo orden de coeficientes variables

Solución en serie alrededor de un punto ordinario

1. $\boldsymbol{(x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+xy=0, \qquad y(0)=4; y'(0)=6}$

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}+3x\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^n=0$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}+3\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^{n+1}=0$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+2}(n+2)(n+1)x^n+3\sum_{n=1}^{+\infty}C_n nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{n-1}x^n=0$$

$$-2C_2-6C_3x+3C_1x+C_0x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[C_n n(n+2)-C_{n+2}(n+2)(n+1)+C_{n-1}\right]x^n=0$$

$$-2C_2=0\rightarrow \underline{C_2=0}$$

$$-6C_3+3C_1+C_0=0\rightarrow \underline{C_3=\frac{C_1}{2}+\frac{C_0}{6}}$$

$$C_n n(n+2)-C_{n+2}(n+2)(n+1)+C_{n-1}=0\rightarrow \underline{C_{n+2}=\frac{C_n n(n+2)+C_{n-1}}{(n+2)(n+1)};\ n\geq 2}$$

$$n=2\rightarrow C_4=\frac{C_2 2(2+2)+C_1}{(2+2)(2+1)}=\frac{8C_2+C_1}{12}=\underline{\frac{C_1}{12}}$$

$$n=3\rightarrow C_5=\frac{C_3 3(3+2)+C_2}{(3+2)(3+1)}=\frac{15C_3+C_2}{20}=\underline{\frac{3C_1}{8}+\frac{C_0}{8}}$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots.$$

$$y(x)=C_0\left[1+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{8}+\ldots\right]+C_1\left[x+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{12}+\frac{3x^5}{8}+\ldots\right]\rightarrow y(0)=\underline{C_0=4}$$

$$y'(x)=C_0\left[x+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{8}+\ldots\right]+C_1\left[1+\frac{3x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{15x^4}{8}+\ldots\right]\rightarrow y'(0)=\underline{C_1=6}$$

$$\underline{\underline{y(x)=4+6x+\frac{11}{3}x^3+\frac{x^4}{3}+\frac{11x^5}{4}+\ldots}}$$

2. $y''-xy'=e^{-x}$ *alrededor de* $x_0=0$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{+\infty}C_n n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty}C_n n(n-1)x^{n-2}-\sum_{n=1}^{+\infty}C_n n x^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}C_n n x^{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$2C_2+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(C_{n+2}(n+2)(n+1)-C_n n\right)x^{n}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$2C_2=1\rightarrow \underline{C_2=\frac{1}{2}}$$

$$C_{n+2}(n+2)(n+1)-C_n n=\frac{(-1)^n}{n!}\rightarrow \underline{C_{n+2}=C_n\frac{n}{(n+2)(n+1)}+\frac{(-1)^n}{n!(n+2)(n+1)}}\quad n\geq 1$$

$$n=1\rightarrow C_3=C_1\frac{1}{(1+2)(1+1)}+\frac{(-1)^1}{1!(1+2)(1+1)}\rightarrow \underline{C_3=\frac{C_1}{6}-\frac{1}{6}}$$

$$n=2\rightarrow C_4=C_2\frac{2}{(2+2)(2+1)}+\frac{(-1)^2}{2!(2+2)(2+1)}=\frac{C_2}{6}+\frac{1}{24}\rightarrow \underline{C_4=\frac{1}{8}}$$

$$n=3\rightarrow C_5=C_3\frac{3}{(3+2)(3+1)}+\frac{(-1)^3}{3!(3+2)(3+1)}=\frac{3C_3}{20}-\frac{1}{120}\rightarrow \underline{C_4=\frac{C_1}{40}-\frac{1}{30}}$$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n x^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+.....$$

$$y(x)=C_0+C_1x+\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{C_1}{6}-\frac{1}{6}\right)x^3+\frac{1}{8}x^4+\left(\frac{C_1}{40}-\frac{1}{30}\right)x^5+......$$

$$\underline{\underline{y(x)=C_0+C_1\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{40}+....\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^5}{30}+....\right)}}$$

3) Resolver la siguiente ecuación diferencial alrededor del punto $x_0 = 0$. Determine las soluciones homogéneas de esta ecuación diferencial en términos de series indicando a que función converge cada una de ellas. (Sugerencia: para encontrar la solución particular use el método de variación de parámetros).

$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$$

Desarrollo.

$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$$

$$P(x) = (x^2-1); \qquad x_0 = 0 \qquad entonces\ P(0) = -1 \neq 0$$

$Por\ lo\ tanto\ x_0 = 0\ \ es\ un\ punto\ ordinario$

Se asume:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \ ,pero \ \ x_0 = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n \ , \qquad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)(x)^{n-1}, \qquad y''$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2}$$

Primero se obtendrá las soluciones homogéneas. Se reemplaza y, y', y'' en la ecuación:

$$(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = 0$$

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2} + 4x\sum_{n=1}^{\infty} a_n(n)(x)^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n = 0$$

Luego se introduce los coeficientes dentro de las sumatorias

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x)^n$$
$$= 0$$

Se igualan las patencias de x de todas la sumatorias, en este caso a la que más se repite que en este caso es n:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x)^n$$
$$= 0$$

Para la
m = n – 2
Si n = 2, entonces m = 0
Pero n = m + 2
Luego m = n

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(x)^n = 0$$

Se igualan los subíndices de todas las sumatorias al mayor, en este caso n=2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n(n)(n-1)(x)^n - 2a_2 - 6a_3x - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x)^n + 4a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 4a_n(n)(x)^n + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(x)^n = 0$$

$$-2a_2 - 6a_3x + 4a_1x + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{\infty}[a_n(n)(n-1) - a_{n+2}(n+2)(n+1) + 4a_n(n) + 2a_n](x)^n = 0$$

Se igualan los coeficientes:

$$-2a_2 + 2a_0 = 0, \quad entonces\ se\ tiene\ que \quad a_2 = a_0$$
$$-6a_3x + 6a_1x = 0, entonces\ se\ tiene\ que \quad a_3 = a_1$$
$$a_n(n)(n-1) - a_{n+2}(n+2)(n+1) + 4a_n(n) + 2a_n = 0$$

La fórmula de recurrencia es:

$$a_{n+2} = \frac{a_n(n)(n-1) + 4a_n(n) + 2a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad \forall n \geq 2.$$

$$a_{n+2} = \frac{(n^2 - n + 4n + 2)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n^2 + 3n + 2)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n^2 + 3n + 2)}{(n+2)(n+1)}a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+2)(n+1)}a_n = a_n$$

Por lo tanto:

$a_{n+2} = a_n, \quad \forall n \geq 2$

Encontrando los coeficientes:

$$Si\ n = 2, entonces\ a_4 = a_2 = a_0$$
$$Si\ n = 3, entonces\ a_5 = a_3 = a_1$$
$$Si\ n = 4, entonces\ a_6 = a_4 = a_0$$
$$Si\ n = 5, entonces\ a_7 = a_5 = a_1$$
$$Si\ n = 6, entonces\ a_8 = a_6 = a_0$$
$$Si\ n = 7, entonces\ a_9 = a_7 = a_0$$

Volviendo a la solución:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \cdots$$
$$y(x) = \quad a_0 + a_1x + a_0x^2 + a_1x^3 + a_0x^4 + a_1x^5 + a_0x^6 + \cdots$$

La solución homogénea:

$$y(x) = \quad a_0\left(\underbrace{1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + \cdots}_{y_1(x)}\right) + a_1\left(\underbrace{x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots}_{y_2(x)}\right)$$

$$= a_0\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + a_1 x(1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots)$$

$$y_h(X) = a_0\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + a_1\left(\frac{x}{1-x^2}\right), \qquad ya\ que\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Ahora se encuentra la solución particular y_p:

Normalizando la ecuación diferencial $(x^2-1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{1}{x}$, se obtiene:

$$y'' + \frac{4xy'}{(x^2-1)} + \frac{2y}{(x^2-1)} = \frac{1}{x(x^2-1)}$$

Usando el método de variación de parámetros:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Encontrando el wronskiano: $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1{}' & y_2{}' \end{vmatrix}$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1-x^2} & \dfrac{x}{1-x^2} \\ \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} & \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-x^2)^2}$$

$$Donde\ u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{1}{x(x^2-1)} & y_2{}' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{x}{1-x^2} \\ \dfrac{1}{x(x^2-1)} & \dfrac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}$$

$$u_1' = \frac{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}} = 1, \qquad entonces\ \ u_1 = x$$

$$Donde\ u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1{}' & \dfrac{1}{x(x^2-1)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{1-x^2} & 0 \\ \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} & \dfrac{1}{x(x^2-1)} \end{vmatrix}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{-\dfrac{1}{x(1-x^2)^2}}{\dfrac{1}{(1-x^2)^2}}$$

$$u_2' = -\frac{1}{x}, \qquad entonces\ \ u_2 = -\ln(x)$$

Por lo tanto a solución particular es:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$y_p = x\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - \ln(x)\frac{x}{1-x^2}$$

La solución general es:

$$y(x) = a_0\left(\frac{1}{1-x^2}\right) + a_1\left(\frac{x}{1-x^2}\right) + x\left(\frac{1}{1-x^2}\right) - \ln(x)\frac{x}{1-x^2}$$

Este es un solucionario de problemas de Ecuaciones Diferenciales correspondiente a la Primera Evaluación, donde constan ejercicios tipo examen. Esta obra ha sido elaborada por Roberto Cabrera y Christian de La Rosa, ex – estudiante de la ESPOL, con el auspicio de la directiva A.E.F.I.E.C. de los años 2006, 2007, 2008. Modificado y corregido dos veces por Roberto Cabrera.

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Solucionario de problemas de Ecuaciones Diferenciales

2do Parcial (3ra versión)

- **Resolución de ecuaciones diferenciales alrededor de puntos singulares**
- **Transformada de Laplace**
- **Resolución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace**
- **Resolución de sistemas de Ecuaciones diferenciales**
- **Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden**
- **Series de Fourier**
- **Ecuaciones en Derivadas Parciales**

Roberto Cabrera V.
dcabrera@fiec.espol.edu.ec
06/02/2009

Este es un solucionario de problemas de Ecuaciones Diferenciales correspondiente a la Segunda Evaluación, donde constan ejercicios tipo examen. Esta obra ha sido elaborada por Roberto Cabrera y Christian de La Rosa, ex – estudiante de la ESPOL, con el auspicio de la directiva A.E.F.I.E.C. de los años 2006, 2007, 2008. Modificado y corregido dos veces por Roberto Cabrera.

Resumen de problemas resueltos de Ecuaciones Diferenciales

II Parcial

i. **Resolución de ecuaciones diferenciales alrededor de puntos singulares:**
   - **Método de Frobenius**

ii. **Transformada de Laplace:**
   - **Teoremas**
   - **Transformada de Laplace de algunas funciones**
   - **Transformada inversa de Laplace**

iii. **Resolución de ecuaciones diferenciales mediante la transformada de Laplace:**
   - **Ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes**
   - **Ecuaciones diferenciales de coeficientes variables**
   - **Ecuaciones integro diferenciales**

iv. **Resolución de sistemas de Ecuaciones diferenciales:**
   - **Método de Eliminación**
   - **Método de los operadores diferenciales**
   - **Método de Laplace**
   - **Método de los valores y vectores propios.**

v. **Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden:**
   - **Aplicaciones de Sistema: Masa – Resorte – Amortiguador**
   - **Aplicaciones de circuitos eléctricos**

vi. **Series de Fourier**
   - **Definición de la serie de Fourier**
   - **Serie de Fourier de una función par e impar**
   - **Convergencia de una serie de Fourier**
   - **Extensiones pares o impares periódicas de una serie de Fourier**

vii. **Problema de la ecuación del calor**

viii. **Anexos:**
   - **Problemas propuestos**
   - **Tabla de transformadas de Laplace de ciertas funciones**
   - **Tabla de transformadas inversas de Laplace de ciertas funciones**

Método de Frobenius

1. Determine la solución general de la ecuación diferencial:
$xy''+2y'+xy=0$, mediante series de potencias de x. Utilice la raíz de mayor valor de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial dada para establecer la primera solución, ésta como una función elemental; y, luego utilice algún procedimiento conocido para definir la segunda solución linealmente independiente e igualmente exprésela como una función elemental.

Asumiendo la solución alrededor del punto $x_0=0$, se tiene que verificar que clase de punto es, en este caso $P(x)=x$, entonces $P(x_0)=0$, por lo tanto $x_0=0$ es un punto singular.

Lugo se verifica si es singular regular.

i) $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}(x)\frac{2}{x}=2=p_0$(existe)

ii) $\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0}(x)^2\frac{x}{x}=0=q_0$(existe)

Los dos límites existen, por lo tanto x_0 es un punto singular regular.

La fórmula de la ecuación indicial indica:

$r(r-1)+p_0r+q_0=0$

$r(r-1)+2r=0$

$r(r-1+2)=0$, se obtiene que: $r(r+1)=0$

Las raíces de la ecuación indicial son: $r_1=0$, y $r_2=-1$.

Asumiendo la solución como:

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r},\qquad a_0\neq 0$$

Obteniendo la 1ra y 2da derivada:

$$y'=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}\qquad\qquad y''=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

Reemplazando y, y’,y’’ en la ecuación diferencial $xy''+2y'+xy=0$ se obtiene:

$$x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

Introduciendo los coeficientes de cada sumatoria:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}2a_n(n+r)x^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}=0$$

Se iguala las potencias de todas las sumatorias, en esta caso a $n+r-1$, haciendo un cambio de parámetro en alguna en la tercera sumatoria.

$m-1=n+1$

$Si\ n=0, entonces\ m=2$

$n=m-2$

$Luego\ m=n$

La nueva ecuación queda así:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r-1} = 0$$

Se iguala los subíndices de cada sumatoria al mayor de todas, en este caso a $n = 2$. Luego se desarrollan dos términos en la primera y segunda sumatoria:

$$a_0(r)(r-1)x^{r-1} + a_1(r+1)(r)x^r + 2a_0(r)x^{r-1} + 2a_1(r+1)x^r + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n+r-1} = 0$$

Se agrupan los coeficientes de cada sumatoria en una sola sumatoria:

$$a_0(r)(r-1)x^{r-1} + a_1(r+1)(r)x^r + 2a_0(r)x^{r-1} + 2a_1(r+1)x^r + \sum_{n=2}^{\infty} [a_n(n+r)(n+r-1) + 2a_n(n+r) + a_{n-2}]x^{n+r-1} = 0$$

Igualmente los coeficientes de $x^{r-1}, y\ x^r$:

$Para\ x^{r-1},\ \ se\ tiene: \quad a_0(r)(r-1) + 2a_0(r) = 0$

Como $a_0 \neq 0$, se obtiene $(r)(r-1) + 2(r) = 0$, que es la misma ecuación indicial anterior.

$Para\ x^{r},\ \ se\ tiene: \quad a_1(r+1)(r) + 2a_1(r+1) = 0$

En este caso a_1 si puede ser igual a cero. $a_1 = 0$

La ecuación de recurrencia es:

$$a_n(n+r)(n+r-1) + 2a_n(n+r) + a_{n-2} = 0$$

Despejando el valor de a_n , se obtiene la fórmula de recurrencia general:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)(n+r-1) + 2(n+r)}; \qquad \forall n \geq 2$$

Reemplazando la raíz mayor $r_1 = 0$, se obtiene la fórmula de recurrencia particular para la primera solución:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n)(n-1) + 2(n)} \ , donde \qquad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n)(n+1)}; \quad \forall n \geq 2$$

$$n = 2 \quad \rightarrow \qquad a_2 = -\frac{a_0}{(2)(3)} = -\frac{a_0}{3!}$$

$$n = 3 \quad \rightarrow \qquad a_3 = -\frac{a_1}{(3)(4)} ,pero\ \ a_1 = 0, entonces \qquad a_3 = 0$$

$$n = 4 \quad \rightarrow \qquad a_4 = -\frac{a_2}{(4)(5)} = \frac{a_0}{(2)(3)(4)(5)} = \frac{a_0}{5!}$$

$$n = 5 \quad \rightarrow \qquad a_5 = -\frac{a_3}{(5)(6)} = 0,$$

$$n = 6 \quad \rightarrow \qquad a_6 = -\frac{a_4}{(6)(7)} = -\frac{a_0}{(2)(3)(4)(5)(6)(7)} = -\frac{a_0}{7!}$$

$$n = 7 \quad \rightarrow \qquad a_7 = -\frac{a_5}{(7)(8)} = 0,$$

Entonces la primera solución es, para el varlo de r=0:

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6 + a_7 x^7 + \cdots]$$

Reemplazando los coeficientes en la solución

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left[a_0 - \frac{a_0}{3!}x^2 + \frac{a_0}{5!}x^4 - \frac{a_0}{7!}x^6 + \cdots\right] = a_0\left[1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \cdots\right]$$

$$y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \; entonces\,, \qquad y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1-1}}{(2n+1)!} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$y_1 = x^{-1} Sen(x)$$

Por lo tanto y_2, lo podemos encontrar de la siguiente forma:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{(y_1)^2} dx = x^{-1} Sen(x) \int \frac{e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{x^{-2} Sen^2(x)} dx$$

$$y_2 = x^{-1} Sen(x) \int \frac{x^{-2}}{x^{-2} Sen^2(x)} dx = x^{-1} Sen(x) \int Csc^2(x)\, dx$$

$$y_2 = x^{-1} Sen(x)[-ctg(x)] = -x^{-1} Cos\,(x)$$

$$La\ solución\ general: \qquad y = C_1 x^{-1} Sen(x) + C_2 x^{-1} Cos(x)$$

2) Resuelva:

- $$\boxed{x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left(x^2-3x\right)\frac{dy}{dx}+3y=0,\ \ alrededor\, de\, x_0=0}$$

$$\boldsymbol{p(x)=x^2\quad\Rightarrow\quad p(x_0)=0,}\quad \textbf{es singular}$$

$$x^2\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+\left(x^2-3x\right)\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(n+r)x^{n+r-1}+3\sum_{n=0}^{+\infty}C_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(n+r)x^{n+r+1}-3\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(n+r)x^{n+r}+3\sum_{n=0}^{+\infty}C_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+r-3)(n+r-1)]C_nx^{n+r}+\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(n+r)x^{n+r+1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[(n+r-3)(n+r-1)]C_nx^{n+r}+\sum_{n=1}^{+\infty}C_{n-1}(n+r-1)x^{n+r}=0$$

$$[(r-3)(r-1)]C_0x^r+\sum_{n=1}^{+\infty}[[(n+r-3)(n+r-1)]C_n+(n+r-1)C_{n-1}]x^{n+r}=0$$

$$[(r-3)(r-1)]C_0=0\rightarrow(r-3)(r-1)=0\rightarrow \underline{r_1=3}\ \ \underline{r_2=1}\quad r_1-r_2=entero$$

$$[(n+r-3)(n+r-1)]C_n+(n+r-1)C_{n-1}=0\rightarrow \underline{C_n=-\frac{C_{n-1}}{n+r-3};\ n\ge1}$$

$$r_1=3\rightarrow \underline{C_n=-\frac{C_{n-1}}{n};\ n\ge1}\qquad r_2=1\rightarrow \underline{C_n=-\frac{C_{n-1}}{n-2};\ n\ge1}\ \ no\ esta\ definida\ para\ n=2$$

la primera solución será utilizando $r_1=3$

$$n=1\rightarrow C_1=-\frac{C_0}{1}=-\underline{\frac{C_0}{1!}}$$

$$n=2\rightarrow C_2=-\frac{C_1}{2}=\underline{\frac{C_0}{2!}}$$

$$n=3\rightarrow C_3=-\frac{C_2}{3}=-\underline{\frac{C_0}{3!}}\qquad\Rightarrow y_1(x)=C_0x^3\left[1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right]\therefore\ \ \underline{\underline{y_1(x)=C_0x^3e^{-x}}}$$

$$y_2(x)=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^{\,2}}dx=x^3e^{-x}\int\frac{e^{-\int 1-\frac{3}{x}dx}}{x^6e^{-2x}}dx=x^3e^{-x}\int\frac{x^3e^{-x}}{x^6e^{-2x}}dx=x^3e^{-x}\int\frac{e^x}{x^3}dx$$

$$y_2(x)=x^3e^{-x}\int\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n-3}}{n!}dx=x^3e^{-x}\int\left(x^{-3}-x^{-2}+\frac{x^{-1}}{2}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n-3}}{n!}\right)dx=$$

$$=x^3e^{-x}\left(-\frac{x^{-2}}{2}+x^{-1}+\frac{\ln x}{2}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n-2}}{n!(n-2)}\right)\therefore$$

$$\underline{\underline{y_2(x)=\frac{y_1\ln x}{2}+x^3e^{-x}\left(-\frac{x^{-2}}{2}+x^{-1}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{n-2}}{n!(n-2)}\right)}}$$

3) Resuelva la siguiente ecuación difrencial alrededor del punto $x_0 = 0$

- $$\boxed{\left(x^2 - x\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(3x - 1\right)\frac{dy}{dx} + y = 1}$$

$\boldsymbol{p(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad p(x_0) = 0,}$ **es singular**

$$\left(x^2 - x\right)\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + (3x-1)\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]C_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+r)^2 C_n x^{n+r-1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]C_n x^{n+r} - \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+r+1)^2 C_{n+1} x^{n+r} = 0$$

$$-\left[r^2\right]C_0 x^r + \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]C_n - (n+r+1)^2 C_{n+1}\right]x^{n+r} = 0$$

$$-\left[r^2\right]C_0 = 0 \rightarrow \underline{r_1 = r_2 = 0}$$

$$\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]C_n - (n+r+1)^2 C_{n+1} \rightarrow \underline{C_{n+1} = \frac{\left[(n+r)(n+r-1) + 3(n+r) + 1\right]C_n}{(n+r+1)^2}; \quad n \geq 0}$$

$$r_1 = 0 \rightarrow \underline{C_{n+1} = C_n; \quad n \geq 0}$$

la primera solución será utilizando $r_1 = 0$

$n = 1 \rightarrow C_1 = \underline{C_0}$

$n = 2 \rightarrow C_2 = \underline{C_0}$

$$n = 3 \rightarrow C_3 = \underline{C_0} \qquad \Rightarrow y_1(x) = C_0 x^0 \left[1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\right] \therefore \quad \underline{\underline{y_1(x) = C_0 \frac{1}{1-x}}}$$

$$y_2(x) = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx = \frac{1}{1-x}\int \frac{e^{-\int \frac{3x-1}{x^2-x}dx}}{x^2 e^{2x}}dx = \frac{1}{1-x}\int \frac{x^{-1}(x-1)^{-2}}{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}dx = \frac{1}{1-x}\int \frac{1}{x}dx \rightarrow \underline{\underline{y_2(x) = C_1 \frac{\ln x}{1-x}}}$$

$$\underline{\underline{y_h(x) = k_1 \frac{1}{1-x} + k_2 \frac{\ln x}{1-x}}}$$

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 \rightarrow W = \begin{vmatrix} \frac{1}{1-x} & \frac{\ln x}{1-x} \\ \frac{1}{(x-1)^2} & \frac{\ln x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} \end{vmatrix} = \frac{1}{x(x-1)^2}$$

$$u_1 = -\int \frac{g(x)y_2}{W}dx = -\int \left(\frac{1}{x^2 - x}\right)\left(\frac{\ln x}{1-x}\right)x(x-1)^2 dx = \int \ln x dx = \underline{-x + x\ln x}$$

$$u_2 = \int \frac{g(x)y_1}{W}dx = \int \left(\frac{1}{x^2 - x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)x(x-1)^2 dx = -\int 1 dx = \underline{-x}$$

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2 = (-x + x\ln x)\left(\frac{1}{1-x}\right) - x\frac{\ln x}{1-x} = \underline{\underline{\frac{x}{x-1}}}$$

$$\underline{\underline{y(x) = k_1 \frac{1}{1-x} + k_2 \frac{\ln x}{1-x} + \frac{x}{x-1}}}$$

Transformada de Laplace

Halle:

- $L\{4e^{5t}+6t^3-3\,sen(4t)+2\cos(2t)\}$

Por la propiedad de linealidad tenemos que:

$$L\{4e^{5t}+6t^3-3\,sen(4t)+2\cos(2t)\}$$

$$\begin{aligned}
L\{4e^{5t}+6t^3-3\,sen(4t)+2\cos(2t)\} &= L\{4e^{5t}\}+L\{6t^3\}+L\{-3\,sen(4t)\}+L\{2\cos(2t)\}\\
&= 4L\{e^{5t}\}+6L\{t^3\}-3L\{sen(4t)\}+2L\{\cos(2t)\}\\
&= 4\frac{1}{s-5}+6\frac{3!}{s^4}-3\frac{4}{s^2+16}+2\frac{s}{s^2+4}\\
&= \underline{\underline{\frac{4}{s-5}+\frac{36}{s^4}-\frac{12}{s^2+16}+\frac{2s}{s^2+4}}}
\end{aligned}$$

Halle

- $L\{(t+2)^2e^t+e^{-4t}\cosh(2t)\}$

Por la propiedad de linealidad tenemos que:

$$L\{(t+2)^2e^t+e^{-4t}\cosh(2t)\}$$

$$\begin{aligned}
L\{(t+2)^2e^t+e^{-4t}\cosh(2t)\} &= L\{(t+2)^2e^t\}+L\{e^{-4t}\cosh(2t)\}\\
&= L\{(t^2+4t+4)e^t\}+L\{e^{-4t}\cosh(2t)\}\\
&= L\{t^2e^t\}+L\{4te^t\}+L\{4e^t\}+L\{e^{-4t}\cosh(2t)\}\\
&= L\{t^2e^t\}+4L\{te^t\}+4L\{e^t\}+L\{e^{-4t}\cosh(2t)\}
\end{aligned}$$

Aplicando el primer teorema de la traslación:

$$L\{t^2e^t\}+4L\{te^t\}+4L\{e^t\}+L\{e^{-4t}\cosh(2t)\}$$

$$\begin{aligned}
L\{t^2e^t\}+4L\{te^t\}+4L\{e^t\}+L\{e^{-4t}\cosh(2t)\} &= \frac{2!}{(s-1)^3}+4\frac{1}{(s-1)^2}+4\frac{1}{s-1}+\frac{s+4}{(s+4)^2-4}\\
&= \underline{\underline{\frac{5s^4+29s^3+9s^2-21s+20}{(s-1)^3(s+2)(s+6)}}}
\end{aligned}$$

Demuestre:

- **Demuestre el primer teorema de la traslación**

$$\text{Si } L\{f(t)\} = F(s), \text{ entonces } L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a)$$

$$\text{Tenemos}: L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

$$\text{Entonces}: L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t)dt \rightarrow si\ \bar{s} = s-a$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\bar{s}t} f(t)dt = F(\bar{s}) = F(s-a)$$

Halle:

- $L\{senh^3(2t)\cos(t)\}$

Por la propiedad de linealidad tenemos que:

$$L\{senh^3(2t)\cos(t)\}$$

$$L\{senh^3(2t)\cos(t)\} = L\left\{\left(\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{2}\right)^3 \cos(t)\right\}$$

$$= \frac{1}{8} L\{(e^{6t} - 3e^{2t} + 3e^{-2t} - e^{-6t})\cos(t)\}$$

$$= \frac{1}{8}\left[L\{e^{6t}\cos(t)\} + L\{-3e^{2t}\cos(t)\} + L\{3e^{-2t}\cos(t)\} + L\{-e^{-6t}\cos(t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[L\{e^{6t}\cos(t)\} - 3L\{e^{2t}\cos(t)\} + 3L\{e^{-2t}\cos(t)\} - L\{e^{-6t}\cos(t)\}\right]$$

Aplicando el primer teorema de la traslación:

$$\frac{1}{8}\left[L\{e^{6t}\cos(t)\} - 3L\{e^{2t}\cos(t)\} + 3L\{e^{-2t}\cos(t)\} - L\{e^{-6t}\cos(t)\}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{s-6}{(s-6)^2+1} - 3\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + 3\frac{s+2}{(s+2)^2+1} - \frac{s+6}{(s+6)^2+1}\right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{48(s^4 - 46s^2 + 185)}{(s^2-12s+37)(s^2-4s+5)(s^2+4s+5)(s^2+12s+37)}}}$$

- **Encuentre la transformada de la primera derivada de f(t)**

$$Si\ L\{f(t)\} = F(s),\ entonces\ L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

$$Tenemos : L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^{P} e^{-st} f'(t)dt$$

$$Integrando\ por\ partes :\ u = e^{-st} \to du = \text{-}s\, e^{-st}dt$$

$$dv = f'(t)dt \to v = f(t)$$

$$\lim_{P\to\infty} \int_0^{P} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{P\to\infty} \left[f(t)e^{-st}\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st} f(t)dt \right]$$

$$= \lim_{P\to\infty} \left[e^{-sP} f(P) - f(0) + s\int_0^P e^{-st} f(t)dt \right]$$

$$= s\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt - f(0) + \lim_{P\to\infty} e^{-sP} f(P)$$

$$pero \lim_{P\to\infty} e^{-sP} f(P) = 0\ \ asumiendo\ que\ f(t) es\ de\ orden\ exponencial$$

$$= sF(s) - f(0)$$

- **Encuentre la transformada de la función tf(t)**

$$Si\ L\{f(t)\} = F(s),\ entonces\ L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$Tenemos : L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

$$Derivando\ ambos\ lados\ de\ la\ igualdad\ tenemos :$$

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} -te^{-st} f(t)dt$$

$$= -\int_0^{\infty} e^{-st} [tf(t)]dt$$

$$\to L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s)$$

- $\boxed{L\{t^2\cos(at)\}}$

Por la propiedad de la derivada de la transformada tenemos que:
$L\{t^2\cos(at)\}$

$$L\{t^2\cos(at)\}=(-1)^2\frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

$$=\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)$$

$$=\frac{d}{ds}\left(\frac{a^2-s^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right)$$

$$=\left(\frac{-2s\left(s^2+a^2\right)^2-2\left(s^2+a^2\right)2s\left(a^2-s^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right)$$

$$=\frac{2s\left(s^2-3a^2\right)}{\left(s^2+a^2\right)^3}$$

Halle:

- $\boxed{L\left\{\dfrac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right\}}$

Usando la propiedad de la transformada de la derivada

$$L\left\{\frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right\}$$

Si $f(t)=sen\left(\sqrt{t}\right)$, *entonces* $f'(t)=\dfrac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}$, *además* $f(0)=0$

$$L\{f'(t)\}=sF(s)-f(0)$$

$$L\left\{\frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{2\sqrt{t}}\right\}=sL\left\{sen\left(\sqrt{t}\right)\right\}$$

$$L\left\{\frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right\}=2s\ L\left\{sen\left(\sqrt{t}\right)\right\}$$

Encuentro la transformada de $sen\left(\sqrt{t}\right)$

Por serie de potencias sabemos que $sen\left(\sqrt{t}\right)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{\frac{2n+1}{2}}}{(2n+1)!}$

$$sen\left(\sqrt{t}\right)=\sqrt{t}-\frac{\left(\sqrt{t}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\sqrt{t}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\sqrt{t}\right)^7}{7!}+....=t^{\frac{1}{2}}-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{3!}+\frac{t^{\frac{5}{2}}}{5!}-\frac{t^{\frac{7}{2}}}{7!}+....$$

$$L\left\{sen\left(\sqrt{t}\right)\right\}=\frac{\Gamma\left(3/2\right)}{s^{3/2}}-\frac{\Gamma\left(5/2\right)}{3!s^{5/2}}+\frac{\Gamma\left(7/2\right)}{5!s^{7/2}}-\frac{\Gamma\left(9/2\right)}{7!s^{9/2}}+....$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left[1-\left(\frac{1}{2^2 s}\right)+\frac{\left(1/2^2 s\right)^2}{2!}-\frac{\left(1/2^2 s\right)^3}{3!}+...\right]$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-\frac{1}{4s}}$$

$$L\left\{\frac{\cos\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\right\}=2s\ \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}e^{-\frac{1}{4s}}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}e^{-\frac{1}{4s}}}}$$

- **Encuentre la transformada de la integral de f(t)**

$$Si\ L\{f(t)\} = F(s),\ entonces\ L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$Si\ g(t) = \int_0^t f(u)du,\ entonces\ g'(t) = f(t)\ y\ g(0) = 0$$

Entonces sabemos que :

$$L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0)$$

$$L\{f(t)\} = sL\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

Despejando tenemos que :

$$L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{L\{f(t)\}}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

- **Encuentre la transformada f(t)/t**

$$Si\ L\{f(t)\} = F(s),\ entonces\ L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u)du$$

$$Si\ g(t) = \frac{f(t)}{t},\ entonces\ f(t) = t\,g(t)$$

Entonces sabemos que :

$$L\{f(t)\} = L\{t\,g(t)\}$$

$$L\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}L\{g(t)\}$$

Integrando ambos lados tenemos que :

$$L\{g(t)\} = -\int_\infty^s f(u)du = \int_s^\infty f(u)du$$

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$$

Halle:

- $\boxed{L\left\{e^{4t}t\int_0^t \frac{1}{\theta}e^{-4\theta}sen(3\theta)d\theta\right\}}$

$$L\left\{e^{4t}t\int_0^t \frac{1}{\theta}e^{-4\theta}sen(3\theta)d\theta\right\}$$

Por el primer teorema de la traslación tenemos que :

$$L\{e^{4t}g(t)\} = G(s-4)$$

Debo encontrar G(s) que es $L\left\{t\int_0^t \frac{1}{\theta}e^{-4\theta}sen(3\theta)d\theta\right\}$,

por el teorema de la derivada de la transformada sabemos que :

$$L\{t\ h(t)\} = -\frac{d}{ds}H(s)$$

Encuentro H(s) $= L\left\{\int_0^t \frac{1}{\theta}e^{-4\theta}sen(3\theta)d\theta\right\} = \frac{M(s)}{s}$*, si* $M(s) = L\left\{\frac{1}{\theta}e^{-4\theta}sen(3\theta)\right\}$

De donde hallamos M(s) $= L\left(\frac{x(\theta)}{\theta}\right) = \int_s^\infty X(u)du$

$X(u) = L\{e^{-4\theta}sen(3\theta)\}$ *que por el primer teorema de traslación es :*

$$X(u) = L\{e^{-4\theta}sen(3\theta)\} = \frac{3}{(u+4)^2+9} = \frac{3}{u^2+8u+25}$$

$$M(s) = L\left(\frac{x(\theta)}{\theta}\right) = \int_s^\infty X(u)du = \int_s^\infty \frac{3}{u^2+8u+25}du = \arctan\left(\frac{u+4}{3}\right)\Bigg|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s+4}{3}\right)$$

$$H(s) = \frac{M(s)}{s} = \frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s+4}{3}\right)\right)$$

$$G(s) = L\{t\ h(t)\} = -\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{s}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s+4}{3}\right)\right)\right] = \frac{\pi}{2s^2} + \frac{3}{s(s^2+8s+25)} - \frac{\arctan\left(\frac{s+4}{3}\right)}{s^2}$$

$$L\left\{e^{4t}t\int_0^t \frac{1}{\theta}e^{-4\theta}sen(3\theta)d\theta\right\} = G(s-4) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2(s-4)^2} + \frac{3}{(s-4)\left((s-4)^2+8(s-4)+25\right)} - \frac{\arctan\left(\frac{s}{3}\right)}{(s-4)^2}}}$$

- **Demuestre el segundo teorema de la traslación**

$$Si\ L\{f(t)\} = F(s),\ entonces\ L\{\mu(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

$$Tenemos: L\{\mu(t-a)f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\mu(t-a)f(t-a)dt$$

$$Entonces: L\{\mu(t-a)f(t-a)\} = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt$$

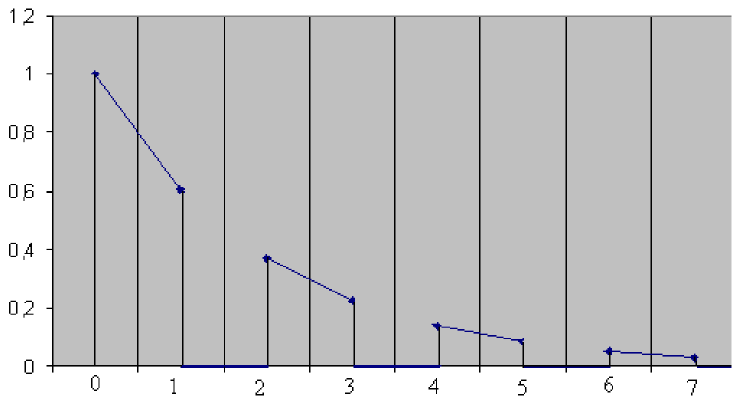
$$Si\ t = u + a \rightarrow u = t - a\ y\ dt = du$$

$$Cuando\ t = a \rightarrow u = 0\ \ y\ t = \infty \rightarrow u = \infty$$

$$L\{\mu(t-a)f(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-s(u+a)}f(u)du$$

$$L\{\mu(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}\int_0^\infty e^{-su}f(u)du = e^{-as}F(s)$$

- **Encuentre la transformada** $f(t) = \begin{cases} e^{-t/2} & ;2n < t < 2n+1 \\ 0 & ;2n+1 < t < 2n+2 \end{cases} \quad n = 0,1,2,3,....$



$$f(t) = e^{-\frac{t}{2}}[\mu_0(t) - \mu_1(t) + \mu_2(t) - \mu_3(t) + \mu_4(t) - \mu_5(t)....]$$

$$Por\ el\ primer\ teorema\ de\ la\ traslación\ tenemos\ que\ L\{f(t)\} = G\left(s + \frac{1}{2}\right)$$

$$G(s) = L\{\mu_0(t) - \mu_1(t) + \mu_2(t) - \mu_3(t) + \mu_4(t) - \mu_5(t)...\}$$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} - ... = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - ...\right)$$

$$G(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{e^s}\right)^n = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{e^s}}\right) = \frac{e^s}{s(e^s + 1)}$$

$$L\{f(t)\} = G\left(s + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{e^{s+1/2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)\left(e^{s+1/2} + 1\right)}}}$$

- $\boxed{L\left\{sen(t)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)+\dfrac{sen(3t)}{t}\delta(t)\right\}}$

$$L\left\{sen(t)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)+\frac{sen(3t)}{t}\delta(t)\right\}$$

$$L\left\{sen(t)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)+\frac{sen(3t)}{t}\delta(t)\right\}=L\left\{sen(t)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)\right\}+L\left\{\frac{sen(3t)}{t}\delta(t)\right\}$$

Para la primera transformada utilizo el segundo teorema de la traslación :

$$L\left\{f\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)\right\}=e^{-\frac{\pi}{4}s}F(s)$$

Pero debo desplazar la función que multiplica al escalón :

$$sen\left(t-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$L\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)\right\}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[L\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)\right\}+L\left\{sen\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)\right\}\right]$$

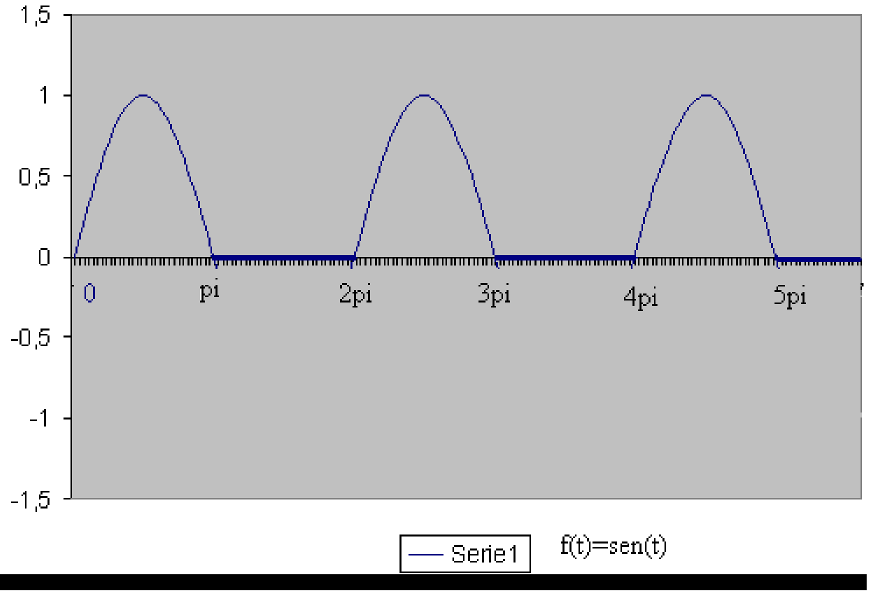
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\left[\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\left[\frac{s+1}{s^2+1}\right]$$

Para la segunda transformada utilizo la función impulso :

$$L\left\{\frac{sen(3t)}{t}\delta(t)\right\}=e^{-0s}\lim_{t\to 0}\frac{sen(3t)}{t}=1(3)=3$$

$$L\left\{sen(t)\mu_{\frac{\pi}{4}}(t)+\frac{sen(3t)}{t}\delta(t)\right\}=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}s}\left[\frac{s+1}{s^2+1}\right]+3}}$$

- **Encuentre la transformada de la siguiente gráfica**



Tenemos que encontrar la transformada de una función periódica:

$$g(t)=\begin{cases} sen(t) & 0<t<\pi \\ 0 & \pi<t<2\pi \end{cases} \quad extendida\ periodicamente\ con\ periodo\ 2\pi$$

$$L\{g(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}g(t)dt$$

$$L\{g(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}sen(t)dt$$

$$Integro\ por\ partes:\ u=e^{-st}\rightarrow du=-s\,e^{-st}$$

$$dv=sen(t)dt\rightarrow v=-\cos(t)$$

$$\int e^{-st}sen(t)dt=-\cos(t)e^{-st}-s\int e^{-st}\cos(t)dt$$

$$Integro\ por\ partes:\ u=e^{-st}\rightarrow du=-s\,e^{-st}$$

$$dv=\cos(t)dt\rightarrow v=sen(t)$$

$$\int e^{-st}sen(t)dt=-\cos(t)e^{-st}-s\left(e^{-st}sen(t)+s\int e^{-st}sen(t)dt\right)$$

$$\left(s^2+1\right)\int e^{-st}sen(t)dt=e^{-st}\left(-s\,sen(t)-\cos(t)\right)$$

$$\int e^{-st}sen(t)dt=\frac{e^{-st}\left(-s\,sen(t)-\cos(t)\right)}{s^2+1}$$

$$\mathrm{Re}\,emplazando:$$

$$L\{g(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{e^{-st}\left(-s\,sen(t)-\cos(t)\right)}{s^2+1}\right\}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$L\{g(t)\}=\frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}=\underline{\underline{\frac{1}{\left(1-e^{-\pi s}\right)\left(s^2+1\right)}}}$$

- **Demuestre el teorema de la convolución**

$$Si\ L^{-1}\{F(s)\} = f(t)\ y\ L^{-1}\{G(s)\} = g(t),\ entonces\ L\{F(s)G(s)\} = \int_0^t f(u)g(t-u)du = f(t)*g(t)$$

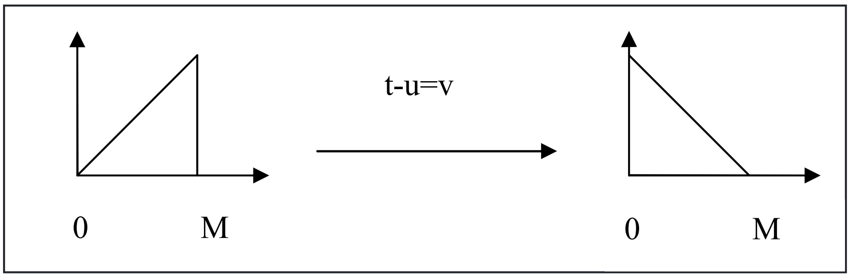
$$L\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = F(s)G(s)$$

$$donde\ F(s) = L\{f(t)\},\ G(s) = L\{g(t)\}\ por\ lo\ que:$$

$$L\left\{\int_0^t f(u)g(t-u)du\right\} = \int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left\{\int_{u=0}^{t} f(u)g(t-u)du\right\}dt = \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st} f(u)g(t-u)du\ dt = \lim_{M\to\infty} S_M$$

$$donde\ S_M = \int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st} f(u)g(t-u)du\ dt$$

La región en el plano en donde se llevará a cabo la integración es:



Luego de hacer el cambio t-u=v la región cambia, por lo que el integral se transforma en:

$$S_M = \iint_{R_{tu}} e^{-st} f(u)g(t-u)du\ dt = \iint_{R_{uv}} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)\left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right|du\ dv$$

Donde el Jacobiano de la transformación es :

$$J = \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$De\ donde\ S_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)du\ dv$$

$$Definamos\ otra\ función\ K(u,v) = \begin{cases} e^{-s(u+v)} f(u)g(v) & u+v \le M \\ 0 & u+v > M \end{cases}$$

$$S_M = \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)du\ dv\ ,entonces\ \lim_{M\to\infty} S_M = \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} K(u,v)du\ dv$$

$$= \int_{v=0}^{\infty}\int_{u=0}^{\infty} e^{-s(u+v)} f(u)g(v)du\ dv = \left\{\int_0^{\infty} e^{-su} f(u)du\right\}\left\{\int_0^{\infty} e^{-sv} g(v)dv\right\} = F(s)G(s)$$

Halle:

- $\boxed{L^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}}$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}$$

Usando el integral de convolución tenemos que :

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)}\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)}\right\}=\cos(at)*\frac{1}{a}sen(at)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)}\frac{1}{\left(s^2+a^2\right)}\right\}=\int_0^t\cos(au)\frac{sen(a(t-u))}{a}du$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^t\cos(au)[sen(at)\cos(au)-\cos(at)sen(au)]du$$

$$=\frac{1}{a}sen(at)\int_0^t\cos^2(au)du-\frac{1}{a}\cos(at)\int_0^t sen(au)\cos(au)du$$

$$=\frac{1}{a}sen(at)\int_0^t\left(\frac{1+\cos(2au)}{2}\right)du-\frac{1}{a}\cos(at)\int_0^t\frac{sen(2au)}{2}du$$

$$=\frac{1}{a}sen(at)\left(\frac{t}{2}+\frac{sen(2at)}{4a}\right)-\frac{1}{a}\cos(at)\left(\frac{1-\cos(2at)}{4a}\right)$$

$$=\frac{1}{a}sen(at)\left(\frac{t}{2}+\frac{sen(at)\cos(at)}{2a}\right)-\frac{1}{a}\cos(at)\left(\frac{sen^2(at)}{2a}\right)$$

$$=\underline{\underline{\frac{t\ sen(at)}{2a}}}$$

Resolución de ecuaciones diferenciales mediante las transformada de Laplace

Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial:

- $\boxed{y'''+4y''+5y'+2y=10\cos(t), \quad y(0)=y'(0)=0 \quad y''(0)=3}$

Aplicando la transformada de Laplace

$L\{y'''\}+4L\{y''\}+5L\{y'\}+2L\{y\}=10L\{\cos(t)\}$

Encuentro las transformadas necesarias :

$L\{y'''\}=s^3Y(s)-s^2y(0)-sy'(0)-y''(0)=s^3Y(s)-3$

$L\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$

$L\{y'\}=sY(s)-y(0)=sY(s)$

$L\{y\}=Y(s)$

$L\{\cos(t)\}=\frac{s}{s^2+1}$

Re*emplazando las transformadas :*

$\left(s^3Y(s)-3\right)+4\left(s^2Y(s)\right)+5\left(sY(s)\right)+2Y(s)=10\frac{s}{s^2+1}$

$\left(s^3+4s^2+5s+2\right)Y(s)-3=10\frac{s}{s^2+1}$

$(s+1)^2(s+2)Y(s)=\frac{3s^2+10s+3}{s^2+1}$

$Y(s)=\frac{3s^2+10s+3}{\left(s^2+1\right)(s+1)^2(s+2)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+1}$

$\rightarrow 3s^2+10s+3=A(s+1)^2\left(s^2+1\right)+B(s+1)\left(s^2+1\right)(s+2)+C\left(s^2+1\right)(s+2)+(Ds+E)(s+1)^2(s+2)$

$3s^2+10s+3=(A+B+D)s^4+(2A+3B+C+4D+E)s^3+(2A+3B+2C+5D+4E)s^2+(2A+3B+C+2D+5E)s+(A+2B+2C+2E)$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones :

$A+B+D=0$

$2A+3B+C+4D+E=0$

$2A+3B+2C+5D+4E=3$

$2A+3B+C+2D+5E=10$

$A+2B+2C+2E=3$

De donde $A=-1, B=2, C=-2, D=-1, E=2$

$Y(s)=\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{-s+2}{s^2+1}$

$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+2}+\frac{2}{s+1}-\frac{2}{(s+1)^2}+\frac{-s+2}{s^2+1}\right\}$

$\underline{\underline{y(t)=-e^{-2t}+2e^{-t}-2te^{-t}-\cos(t)+2sen(t)}}$

Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial:

- $\dfrac{d^2y}{dt^2}+4y=h(t),\quad donde\ h(t)=\begin{cases}-4t+8\pi & ;0<t<2\pi\\ 0 & ;t>2\pi\end{cases},\quad y(0)=2, y'(0)=0$

Aplicando la transforma da de Laplace

$L\{y''\}+4L\{y\}=L\{h(t)\}$

Encuentro las transforma das necesarias :

$L\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-2s$

$L\{y\}=Y(s)$

$L\{h(t)\}=L\{(\mu_0(t)-\mu_{2\pi}(t))(-4t+8\pi)\}=L\{(\mu_0(t))(-4t+8\pi)\}+4L\{(\mu_{2\pi}(t))(t-2\pi)\}$

$L\{h(t)\}=\dfrac{-4}{s^2}+\dfrac{8\pi}{s}+4e^{-2\pi s}\dfrac{1}{s^2}$

Re *emplazando* :

$s^2Y(s)-2s+4Y(s)=\dfrac{-4}{s^2}+\dfrac{8\pi}{s}+4e^{-2\pi s}\dfrac{1}{s^2}$

$(s^2+4)Y(s)=\dfrac{2s^3+8\pi s-4}{s^2}+e^{-2\pi s}\dfrac{4}{s^2}$

$Y(s)=\dfrac{2s^3+8\pi s-4}{s^2(s^2+4)}+e^{-2\pi s}\dfrac{4}{s^2(s^2+4)}$

Encuentro fracciones parciales :

- $\dfrac{2s^3+8\pi s-4}{s^2(s^2+4)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{Cs+D}{s^2+4}$

$2s^3+8\pi s-4=As(s^2+4)+B(s^2+4)+(Cs+D)s^2$

$2s^3+8\pi s-4=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A)s+(4B)$

$A+C=2$

$B+D=0$

$4A=8\pi$

$4B=-4$

Re *solviendo el sistema tenemos que :* $A=2\pi, B=-1, C=2-2\pi, D=1$

- $\dfrac{4}{s^2(s^2+4)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{Cs+D}{s^2+4}$

$4=As(s^2+4)+B(s^2+4)+(Cs+D)s^2$

$4=(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A)s+(4B)$

$A+C=0$

$B+D=0$

$4A=0$

$4B=4$

Re *solviendo el sistema tenemos que :* $A=0, B=1, C=0, D=-1$

$Y(s)=\dfrac{2\pi}{s}-\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{(2-2\pi)s+1}{s^2+4}+e^{-2\pi s}\left(\dfrac{1}{s^2}-\dfrac{1}{s^2+4}\right)$

$y(t)=2\pi-t+(2-2\pi)\cos(2t)+\dfrac{sen(2t)}{2}+\mu_{2\pi}(t)\left[(t-2\pi)-\dfrac{sen(2(t-2\pi))}{2}\right]$

- **Determinar la solución del siguiente problema de valor inicial:**

$$y''(t) + y(t) = f(t) + \delta(t - 2\pi); \quad y(0) = 0 \ \wedge \ y'(0) = 1 \ \wedge f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \pi \\ 1, & \pi \le t < 2\pi \\ 0, & t \ge 2\pi \end{cases}$$

Primero se expresa $f(t)$ en términos de funciones escalones de la siguiente manera:
$f(t) = u(t - \pi) - u(t - 2\pi)$

Se reemplaza $f(t)$ en la ecuación diferencial y se procede a resolverla usando transformadas de Laplace:

$$y''(t) + y(t) = u(t - \pi) - u(t - 2\pi) + \delta(t - 2\pi)$$
$$\mathcal{L}[y''(t)] + \mathcal{L}[y(t)] = \mathcal{L}[u(t - \pi)] - \mathcal{L}[u(t - 2\pi)] + \mathcal{L}[\delta(t - 2\pi)]$$
$$[S^2Y(S) - Sy(0) - y'(0)] + [Y(S)] = \frac{e^{-\pi S}}{S} - \frac{e^{-2\pi S}}{S} + e^{-2\pi S}$$
$$[S^2Y(S) - 1] + [Y(S)] = \frac{e^{-\pi S}}{S} - \frac{e^{-2\pi S}}{S} + e^{-2\pi S}$$
$$(S^2 + 1)Y(S) = \frac{e^{-\pi S}}{S} - \frac{e^{-2\pi S}}{S} + e^{-2\pi S} + 1$$

Despejando Y(S):
$$Y(S) = \frac{e^{-\pi S}}{S(S^2 + 1)} - \frac{e^{-2\pi S}}{S(S^2 + 1)} + \frac{e^{-2\pi S}}{(S^2 + 1)} + \frac{1}{(S^2 + 1)}$$

Encontrando la solución mediante transformada inversa de Laplace:
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi S}}{S(S^2 + 1)}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi S}}{S(S^2 + 1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi S}}{(S^2 + 1)}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S^2 + 1)}\right]$$

i) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(S^2+1)}\right] = Sen(t)$

ii) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi S}}{(S^2+1)}\right] = Sen(t - 2\pi)u(t - 2\pi)$

$$*** \ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{S(S^2 + 1)}\right] = \int_0^t Sen(u)du = -[\cos(u)]_0^t = 1 - \cos(t)$$

iii) Entonces $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2\pi S}}{S(S^2+1)}\right] = [1 - \cos(t - 2\pi)]u(t - 2\pi)$

iv) $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi S}}{S(S^2+1)}\right] = [1 - \cos(t - \pi)]u(t - \pi)$

$$y(t) = [1 - \cos(t - \pi)]u(t - \pi)$$
$$-[1 - \cos(t - 2\pi)]u(t - 2\pi) + Sen(t - 2\pi)u(t - 2\pi) + Sen(t)$$

Encuentre la solución de la siguiente ecuación integro - diferencial:

- $\boxed{\int_0^t y(u)y(t-u)du = 2y(t) + \frac{t^3}{6} - \delta(t)}$

Aplicando la transformada de Laplace

$$L\left\{\int_0^t y(u)y(t-u)du\right\} = 2L\{y(t)\} + L\left\{\frac{t^3}{6}\right\} - L\{\delta(t)\}$$

Encuentro las transformadas necesarias :

$$L\left\{\int_0^t y(u)y(t-u)du\right\} = L\{y(t) * y(t)\} = Y^2(s)$$

$$L\{y(t)\} = Y(s)$$

$$L\left\{\frac{t^3}{6}\right\} = \frac{3!}{6s^4} = \frac{1}{s^4}$$

$$L\{\delta(t)\} = 1$$

Reemplazando :

$$Y^2(s) = 2Y(s) + \frac{1}{s^4} - 1$$

$$Y^2(s) - 2Y(s) + \left(\frac{s^4-1}{s^4}\right) = 0$$

$$Y_{1,2}(s) = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\left(\frac{s^4-1}{s^4}\right)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{\frac{4s^4 - 4s^4 + 4}{s^4}}}{2}$$

$$Y_1(s) = 1 + \frac{1}{s^2} \rightarrow \underline{\underline{y_1(t) = \delta(t) + t}}$$

$$Y_2(s) = 1 - \frac{1}{s^2} \rightarrow \underline{\underline{y_2(t) = \delta(t) - t}}$$

Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial de coeficientes variables:

- $\boxed{ty''+(1-2t)y'-2y=0, \quad y(0)=1,\ y'(0)=2}$

Aplicando la transformada de Laplace

$L\{ty''\}+L\{(1-2t)y'\}-2L\{y\}=0$

Encuentro las transformadas necesarias :

$L\{ty''\}=-\dfrac{d}{ds}L\{y''\}=-\dfrac{d}{ds}\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]=-s^2Y'(s)-2sY(s)+1$

$L\{(1-2t)y'\}=L\{y'\}-2L\{ty'\}=(sY(s)-y(0))+2\dfrac{d}{ds}\left[sY(s)-y(0)\right]$

$L\{(1-2t)y'\}=(sY(s)-1)+2(Y(s)+sY'(s))=2sY'(s)+(s+2)Y(s)-1$

$L\{y\}=Y(s)$

Re*emplazando* :

$(-s^2Y'(s)-2sY(s)+1)+(2sY'(s)+(s+2)Y(s)-1)-2Y(s)=0$

$(-s^2+2s)Y'(s)+(-2s+s+2-2)Y(s)=0$

$-s(s-2)Y'(s)-sY(s)=0$

$-s(s-2)Y'(s)=sY(s)$

$\dfrac{Y'(s)}{Y(s)}=\dfrac{s}{-s(s-2)}$

$\displaystyle\int\frac{Y'(s)}{Y(s)}=-\int\frac{ds}{(s-2)}$

$\ln(Y(s))=-\ln(s-2)+\ln(K)$

$Y(s)=\dfrac{K}{s-2}\rightarrow \underline{y(t)=Ke^{2t}}$

$y(0)=Ke^{2(0)}=1\rightarrow \underline{K=1}$

$\underline{\underline{y(t)=e^{2t}}}$

Encuentre la solución de la siguiente ecuación diferencial de coeficientes variables:

- $\boxed{ty''-(t+2)y'+3y=t-1}$

Aplicando la transforma da de Laplace

$$L\{ty''\}-L\{(t+2)y'\}+3L\{y\}=L\{t\}-L\{1\}$$

Encuentro las transforma das necesarias :

$$L\{ty''\}=-\frac{d}{ds}L\{y''\}=-\frac{d}{ds}\left[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\right]=-s^2Y'(s)-2sY(s)+k_1$$

$$L\{(t+2)y'\}=L\{ty'\}+2L\{y'\}=-\frac{d}{ds}\left[sY(s)-y(0)\right]+2(sY(s)-y(0))$$

$$L\{(t+2)y'\}=2(sY(s)-k_1)-(Y(s)+sY'(s))=-sY'(s)+(2s-1)Y(s)-2k_1$$

$$L\{y\}=Y(s)$$

$$L\{t\}-L\{1\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s}=\frac{1-s}{s^2}$$

Re *emplazando* :

$$\left(-s^2Y'(s)-2sY(s)+k_1\right)-\left(-sY'(s)+(2s-1)Y(s)-2k_1\right)+3Y(s)=\frac{1-s}{s^2}$$

$$\left(-s^2+s\right)Y'(s)+(-2s-2s+1+3)Y(s)+(k_1+2k_1)=\frac{1-s}{s^2}$$

$$-s(s-1)Y'(s)-4(s-1)Y(s)=\frac{1-s-3k_1s^2}{s^2}$$

$$Y'(s)+\frac{2}{s}Y(s)=\frac{-1+s+3k_1s^2}{s^3(s-1)}$$

$$u(s)=e^{\int\frac{2}{s}ds}=e^{2\ln(s)}=(s)^2$$

$$u(s)Y(s)=\int u(s)\left(\frac{-1+s+3k_1s^2}{s^3(s-1)}\right)ds$$

$$(s)^2Y(s)=\int\left(\frac{-1+s+3k_1s^2}{s(s-1)}\right)ds=\int\left(\frac{1}{s}+3k_1\frac{1}{s-1}\right)ds$$

$$s^2Y(s)=\ln(s)+3k_1\ln(s-1)+k_2=\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)+k_2$$

$$Y(s)=\frac{\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)}{s^2}+\frac{k_2}{s^2}\rightarrow y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}$$

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)}{s^2}+\frac{k_2}{s^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)}{s^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{k_2}{s^2}\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)}{s^2}\right\}=L^{-1}\left\{\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)\frac{1}{s^2}\right\}=L^{-1}\{F(s)G(s)\}=f(t)*g(t)$$

$$f(t)=L^{-1}\left\{\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)\right\}\rightarrow tf(t)=-L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\ln\left(s(s-1)^{3k_1}\right)\right\}=-L^{-1}\left\{\frac{(3k_1+1)s-1}{s(s-1)}\right\}$$

$$tf(t)=-\left[L^{-1}\left\{\frac{(3k_1)}{(s-1)}+\frac{1}{s}\right\}\right]=-\left(3k_1e^t+1\right)\rightarrow f(t)=\frac{-\left(3k_1e^t+1\right)}{t}$$

$$g(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$$

$$y(t)=\frac{-\left(3k_1e^t+1\right)}{t}*t+k_2t\rightarrow \underline{\underline{y(t)=\int_0^t\frac{-\left(3k_1e^u+1\right)}{u}(t-u)du+k_2t}}$$

Método de eliminación

1) Usando el método de eliminación, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\boxed{\begin{cases} 2x'+y'-x-y=e^{-t} & (1) \\ x'+y'+2x+y=e^{t} & (2) \end{cases}}$$

Restando: (1)-(2);

Se obtiene:
$x'-3x-2y=e^{-t}-e^{t}$

Despejando y:
$$y=\frac{x'}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

Reemplazando y en (1):
$$2x'+\left(\frac{x'}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2}\right)'-x-\left(\frac{x'}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2}\right)=e^{-t}$$
$$\Rightarrow\quad 2x'+\frac{x''}{2}-\frac{3x'}{2}+\frac{e^{t}}{2}+\frac{e^{-t}}{2}-x-\frac{x'}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{e^{t}}{2}+\frac{e^{-t}}{2}=e^{-t}$$
$$\Rightarrow\quad \frac{x''}{2}+\frac{x}{2}=0 \qquad \Rightarrow\quad x''+x=0$$
$$\Rightarrow\quad \text{si } x=e^{rt}$$
$$\Rightarrow\quad e^{rt}[r^{2}+1]=0$$
$$\Rightarrow\quad r^{2}+1=0$$
$$\Rightarrow\quad r_{1,2}=\pm i$$
$$\Rightarrow\quad x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t$$
$$\Rightarrow\quad y=\frac{x'}{2}-\frac{3x}{2}+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2}$$

$$x'=-C_1\operatorname{sen}t+C_2\cos t$$

$$\Rightarrow\quad y=-\frac{C_1}{2}\operatorname{sen}t+\frac{C_2}{2}\cos t-\frac{3}{2}(C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t)+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2}$$
$$y=\underbrace{\left(-\frac{C_1}{2}-\frac{3C_2}{2}\right)}_{K_1}\operatorname{sen}t+\underbrace{\left(\frac{C_2}{2}-\frac{3C_1}{2}\right)}_{K_2}\cos t+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2}$$
$$\Rightarrow\quad y=k_1\operatorname{sen}t+k_2\cos t+\frac{e^{t}}{2}-\frac{e^{-t}}{2};\qquad \textit{Pero}\quad \frac{e^{t}-e^{-t}}{2}=\operatorname{senh}t$$

Solución:
$$\begin{cases} x=C_1\cos t+C_2\operatorname{sen}t \\ y=k_1\operatorname{sen}t+k_2\cos t+\operatorname{senh}t \end{cases}$$

2) Utilice el método de eliminación para encontrar la solución general del sistema lineal dado, donde x´, y´, z´ denotan diferenciación con respecto a t.

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y \qquad ①$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 2x \qquad ②$$

De la primera ecuación despejamos y;

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}(2x) - \frac{1}{3}\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{x'}{3}$$

Reemplazando y en la segunda ecuación:

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}x' - \frac{x''}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x' - \frac{x''}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{x'}{3} - 2x$$

Multiplicando la ecuación por 3;

$$\Rightarrow 2x' - x'' = 2x - x' - 6x$$

$$\Rightarrow x'' - 3x' - 4x = 0$$

Obtenemos una ecuación diferencial de coeficientes constantes:
Resolviendo la ecuación 3 con $x=e^{rt}$;

$$\Rightarrow e^{rt}\left[\underbrace{r^2 - 3r - 4}_{\text{Ecuación Característica}}\right] = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 3r - 4 = 0$$

$$(r-4)(r+1) = 0$$

$$\Rightarrow r_1 = 4, r_2 = -1$$

$$\Rightarrow x_1 = e^{4t}, x_2 = e^{-t}$$

$$\Rightarrow x = c_1e^{4t} + c_2e^{-t};$$

Ahora encontremos y:

$$y = \frac{2}{3}(x) - \frac{1}{3}(x')$$

$$x = C_1e^{4t} + C_2e^{-t}$$

$$x' = 4C_1e^{4t} - C_2e^{-t}$$

$\Rightarrow$ Reemplazando x, y x' en y:

$$\Rightarrow\ y=\frac{2}{3}\left[C_1e^{4t}+C_2e^{-t}\right]-\frac{1}{3}\left[4C_1e^{4t}-C_2e^{-t}\right]$$

$$y=-\frac{2}{3}C_1e^{4t}+C_2e^{-t}$$

*** Encuentre la solución particular del problema anterior dado:**
x (0)=8, y (0)=3

Del ejercicio anterior:

$$\begin{cases} x=C_1e^{4t}+C_2e^{-t} \\ y=-\dfrac{2}{3}C_1e^{4t}+C_2e^{-t} \end{cases}$$

Como x (0)=8, entonces:

$8= C_1+C_2$ ①

Como y (0)=3, entonces:

$3=-\frac{2}{3}C_1+C_2$ ②

Con ① y ② se obtiene un sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas; resolviendo el sistema se obtiene:

$C_2=5$, $C_1=3$

$\Rightarrow$ La solución particular es:
$$\begin{cases} x=3e^{4t}+5e^{-t} \\ y=-2e^{4t}+5e^{-t} \end{cases}$$

Método de los operadores diferenciales

1) Usando el método de las operaciones diferenciales resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} (D^2-4D+4)x_1+(D^2+2D)x_2=t \\ (D^2-2D)x_1+(D^2+4D+4)x_2=e^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} (D-2)^2x_1+D(D+2)x_2=t \\ D(D-2)x_1+(D+2)^2x_2=e^t \end{cases}$$

Encontrando $x_1(t)$ *usando la regla de Kramer se obtiene que:*

$$x_1(t)=\frac{\begin{vmatrix} t & D(D+2) \\ e^t & (D+2)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D-2)^2 & D(D+2) \\ D(D-2) & (D+2)^2 \end{vmatrix}}=\frac{(D+2)^2t-D(D+2)e^t}{(D-2)^2(D+2)^2-D(D+2)D(D-2)}=\frac{(D+2)\left[(D+2)t-De^t\right]}{(D+2)(D-2)\left[(D+2)(D-2)-D^2\right]}$$

$$x_1(t)=\frac{(D+2)\left(1+2t-e^t\right)}{(D^2-4)\left(D^2-4-D^2\right)}=\frac{2-e^t+2+4t-2e^t}{-4(D^2-4)}=\frac{4+4t-3e^t}{-4(D^2-4)}$$

$$x_1(t)=\frac{4+4t-3e^t}{-4(D^2-4)};$$

$$-4(D^2-4)x_1(t)=4+4t-3e^t;$$

$$(D^2-4)x_1(t)=-1-t+\frac{3}{4}e^t;$$

$$x_1''(t)-4x_1(t)=-1-t+\frac{3}{4}e^t;$$

Encontrando la solución homogénea:

$$x_1''(t)-4x_1(t)=0;$$

$$x_1(t)=e^{rt};$$

$$e^{rt}\left[r^2-4\right]=0;$$

$$r^2-4=0; \qquad r_{1,2}=\pm 2;$$

$$x_{1h}(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t};$$

Encontrando la solución particular x_{p1}:

$$x_{p1}=a+bt+ce^t;$$

$$x'_{p1}=b+ce^t;$$

$$x''_{p1}=ce^t;$$

Reemplazando en $x_1''(t)-4x_1(t)=-1-t+\frac{3}{4}e^t$*, se obtiene :*

$$ce^t-4\left(a+bt+ce^t\right)=-1-t+\frac{3}{4}e^t;$$

$$-4a-4bt-3ce^t=-1-t+\frac{3}{4}e^t;$$

Ahora se procede a encontrar la solución $x_2(t)$, usando la regla de Kramer :

$$x_2(t)=\frac{\begin{vmatrix}(D-2)^2 & t\\ D(D-2) & e^t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(D-2)^2 & D(D+2)\\ D(D-2) & (D+2)^2\end{vmatrix}}=\frac{(D-2)^2e^t-D(D-2)t}{-4(D^2-4)}=\frac{(D-2)\left[(D-2)e^t-Dt\right]}{-4(D^2-4)}=\frac{(D-2)\left(e^t-2e^t-1\right)}{-4(D^2-4)}$$

$$x_2(t)=\frac{(D-2)\left(-e^t-1\right)}{-4(D^2-4)}=\frac{-e^t+2e^t+2}{-4(D^2-4)}=\frac{e^t+2}{-4(D^2-4)};$$

$$-4(D^2-4)x_2(t)=e^t+2;$$

$$(D^2-4)x_2(t)=-\frac{e^t}{4}-\frac{1}{2};$$

$$x_2''(t)-4x_2(t)=-\frac{e^t}{4}-\frac{1}{2};$$

$$r_{1,2}=\pm 2;$$

$$x_{2h}(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t};$$

Encontrando la solución particular :

$$x_{2p}=a+be^t;$$

$$x'_{2p}=be^t;$$

$$x''_{2p}=be^t;$$

Reemplazando x_{2p} en $x_2''(t)-4x_2(t)=-\frac{e^t}{4}-\frac{1}{2}$:

$$be^t-4\left(a+be^t\right)=-\frac{e^t}{4}-\frac{1}{2};$$

$$-3be^t-4a=-\frac{e^t}{4}-\frac{1}{2};$$

$$b=\frac{1}{12}; \qquad a=\frac{1}{8};$$

$$x_{2p}=\frac{1}{8}+\frac{e^t}{12};$$

$$x_2(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+\frac{1}{8}+\frac{e^t}{12};$$

La solución es:

$$\begin{cases}x_1(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}e^t;\\ x_2(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}+\frac{1}{8}+\frac{e^t}{12};\end{cases}$$

2.-) Usando el método de los operadores diferenciales resuelva el sistema:

$$\begin{cases}(D+2)(x_1)+(D-1)(x_2)=-\text{sent} & (1)\\(D-3)(x_1)+(D+2)(x_2)=4\cos t & (2)\end{cases}$$

Multiplico 1 por $(D-3)$ $\wedge$ 2 por $(D+2)$

$$\begin{array}{l}\quad (D+2)(D-3)x_1 \;+\; (D-1)(D-3)x_2 = (D-3)(-\text{sent})\\ -\\ \quad (D+2)(D-3)x_1 \;+\; (D+2)^2 x_2 \quad = (D+2)(4\cot)\\ \hline\end{array}$$

$(D^2-4D+3)x_2-(D^2+4D+4)x_2=-\cos t+3\text{sent}+t\text{sent}-8\cos t$

$(-8D-1)x_2 = 7\text{sent}-9\cos t$

$-8x_2' - x_2 = 7\text{sent}-9\cos t$

$8x_2'+x_2 = 9\cos t-7\text{sent};$

$8x_2'+x_2 = 0;$

$x_2 = e^{rt};$

$x_2' = re^{rt};$

$8r+1=0;$

$r=-\dfrac{1}{8};$

$x_2 = Ce^{-\frac{1}{8}t};$

$x_2 = A\cos t+B\text{sent};$

$x_2' = -A\text{sent}+B\cos t;$

$8x_2'+x_2=0;$

$8(-A\text{sent}+B\cos t)+A\cos t+B\text{sent}=0;$

$(-8A+B)\text{sent}+(8B+A)\cos t=9\cos t-7\text{sent};$

$$\begin{cases}-8A+B=-7;\\8B+A=9;\end{cases}$$

Resolviendo el sistema:

$\boldsymbol{A=1,}\quad \boldsymbol{B=1,}$

La solución particular es:

$x_{2p}=\cos t+\text{sent};$

$x_2 = Ce^{-\frac{1}{8}t}+\cos t+\text{sent};$

Ahora procedemos a encontrar x_1 del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases}(D+2)(x_1)+(D-1)(x_2)=-\text{sent} & (1)\\(D-3)(x_1)+(D+2)(x_2)=4\cos t & (2)\end{cases}$$

$x_1'+2x_1+x_2'-x_2=-\text{sent};$ ***(1)***

$x_1'-3x_1+x_2'+2x_2=4\cos t$ ***(2)***

Restando (1) y (2), se obtiene :

$5x_1-3x_2=-\text{sent}-4\cos t;$

$x_1=3x_2-\text{sent}-4\cos t;$

$$x_1=3\left(Ce^{-\frac{1}{8}t}+\cos t+\text{sent}\right)-\text{sent}-4\cos t;$$

$$x_1=3Ce^{-\frac{1}{8}t}-\cos t+2\text{sent};$$

La solución del sistema es :

$$\begin{cases}x_1=3Ce^{-\frac{1}{8}t}-\cos t+2\text{sent};\\x_2=Ce^{-\frac{1}{8}t}+\cos t+\text{sent};\end{cases}$$

Método de Laplace

1) Utilice el método de las transformadas de Laplace para resolver el problema de valor inicial dado. Aquí x', y', etc. denotan diferenciación con respecto a t.

$$\begin{cases} x' - 3x' + 2y = sent; \quad x(0) = 0; & ① \\ 4x - y' - y = \cos t; \quad y(0) = 0; & ② \end{cases}$$

Aplicando transformada de Laplace a las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\,[x'] \text{-3 } \mathcal{L}\,[x] \text{+2 } \mathcal{L}\,[y] = \mathcal{L}\,[sent] \\ \mathcal{L}\,[4x] \text{- } \mathcal{L}\,[y'] \text{ - } \mathcal{L}\,[y] = \mathcal{L}\,[\cos t] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x(s) - x(0) - 3x(s) + 2y(s) = \dfrac{1}{s^2+1}; & ① \\ 4x(s) - sy(s) - y(0) - y(s) = \dfrac{s}{s^2+1}; & ② \end{cases} \approx \begin{cases} (-4)(s-3)x(s) - 8y(s) = -\dfrac{4}{s^2+1}; \\ 4(s-3)x(s) - (s-3)(s+1)y(s) = \dfrac{s(s-3)}{s^2+1}; \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (-4) \\ (s-3) \end{matrix} \begin{cases} (s-3)x(s) + 2y(s) = \dfrac{1}{s^2+1} \\ 4x(s) - (s+1)y(s) = \dfrac{s}{s^2+1} \end{cases}$$

Sumo ① y ②, entonces se obtiene:

$$-[8 + (s-3)(s+1)]y(s) = \frac{s^2 - 3s - 4}{s^2+1}$$

$$-[s^2 - 2s + 5]y(s) = \frac{(s-4)(s+1)}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow y(s) = -\frac{(s^2 - 3s - 4)}{(s^2 - 2s + 5)(s^2+1)} = -\left[\frac{As + B}{s^2 - 2s + 5} + \frac{Cs + D}{s^2+1}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{s^2 - 3s - 4}{(s^2 - 2s + 5)(s^2+1)} = \frac{(A+C)(s^3) + (B + D - 2C)s^2 + (A - 2D + 5C)s + (B + 5D)}{(s^2 - 2s + 5)(s^2+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{A + C = 0} \\ \mathrm{B + D - 2C = 1} \\ \mathrm{A - 2D + 5C = -3} \\ \mathrm{B + 5D = -4} \end{cases} \quad \text{Resolviendo el sistema:} \quad \begin{cases} \mathrm{A = 11/10;} \\ \mathrm{B = -1/2;} \\ \mathrm{C = -11/10;} \\ \mathrm{D = -7/10;} \end{cases}$$

$$⇨ \quad \mathrm{y(s)} = -\left[\frac{\frac{11}{10}\mathrm{s} - \frac{1}{2}}{\mathrm{s}^2 - 2\mathrm{s} + 5} + \frac{-\frac{11}{10}\mathrm{s} - \frac{7}{10}}{\mathrm{s}^2 + 1}\right]$$

$$y(s)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{11}{10}s}{\left[(s-1)^2+4\right]}+\frac{\frac{11}{10}s+\frac{7}{10}}{s^2+1}$$

$$y(s)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left[(s-1)^2+4\right]}-\frac{11}{10}\cdot\frac{s}{\left[(s-1)^2+4\right]}+\frac{11}{10}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\left[(s-1)^2+4\right]}-\frac{11}{10}\cdot\frac{(s-1+1)}{\left[(s-1)^2+4\right]}+\frac{11}{10}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

$$y(s)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\left[(s-1)^2+4\right]}-\frac{11}{10}\cdot\frac{(s-1)}{\left[(s-1)^2+4\right]}-\frac{11}{20}\cdot\frac{2}{\left[(s-1)^2+4\right]}+\frac{11}{10}\cdot\frac{s}{s^2+1}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

⇨ Aplicando transformada inversa de Laplace a y(s):

$$L^{-1}\left[y(s)\right]=y(t);$$

$$y(t)=\frac{1}{4}L^{-1}\left[\frac{2}{\left[(s-1)^2+4\right]}\right]-\frac{11}{10}L^{-1}\left[\frac{(s-1)}{\left[(s-1)^2+4\right]}\right]-\frac{11}{20}L^{-1}\left[\frac{2}{\left[(s-1)^2+4\right]}\right]+\frac{11}{10}L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]+\frac{7}{10}L^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]$$

$$y(t)=\frac{1}{4}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-\frac{11}{10}e^{-t}\cos(2t)-\frac{11}{20}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)+\frac{11}{10}\cos(t)+\frac{7}{10}\mathrm{sen}(t)$$

$$y(t)=-\frac{3}{10}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-\frac{11}{10}e^{-t}\cos(2t)+\frac{11}{10}\cos(t)+\frac{7}{10}\mathrm{sen}(t)$$

De la ecuación 4x-y’-y=cos(t); podemos encontrar x(t):

$$x(t)=\frac{y'+y+\cos(t)}{4}$$

$$y'(t)=-\frac{3}{10}[e^{-t}\cos(2t)-e^{-t}\mathrm{sen}(2t)]-\frac{11}{10}[-2e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-e^{-t}\cos(2t)]-\frac{11}{10}\mathrm{sen}(t)+\frac{7}{10}\cos(t)$$

$$\frac{y'(t)}{4}=\frac{1}{5}e^{-t}\cos(2t)+\frac{5}{8}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-\frac{11}{40}\mathrm{sen}(t)+\frac{7}{40}\cos(t)$$

$$\frac{y(t)}{4}=-\frac{3}{40}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-\frac{11}{40}e^{-t}\cos(2t)+\frac{11}{40}\cos(t)+\frac{7}{40}\mathrm{sen}(t)$$

La solución:

$$\begin{cases}x(t)=-\frac{3}{40}e^{-t}\cos(2t)+\frac{11}{20}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-\frac{1}{10}\mathrm{sen}(t)+\frac{7}{10}\cos(t)\\ y(t)=-\frac{3}{10}e^{-t}\mathrm{sen}(2t)-\frac{11}{10}e^{-t}\cos(2t)+\frac{11}{10}\cos(t)+\frac{7}{10}\mathrm{sen}(t)\end{cases}$$

2) Resolver $\begin{cases} X''+Y'+3X = 15e^{-t} \\ Y''-4X'+3Y = 15t \end{cases}$ **con las condiciones X(0)=0, X'(0)=0, Y(0)=0, Y'(0)=0.**

Aplicando la transformada de Laplace a ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[x''+y'-x] = \mathcal{L}[15e^{-t}] \\ \mathcal{L}[y''-4x'-y] = \mathcal{L}[15t] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + [sY(S) - y(0)] - X(S) = \dfrac{15}{s+1}; \\ [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 4[sX(S) - x(0)] - Y(S) = \dfrac{15}{s^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} [s^2X(s)] + [sY(S)] - X(S) = \dfrac{15}{s+1}; \\ [s^2Y(s)] - 4[sX(S)] - Y(S) = \dfrac{15}{s^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s^2-1)X(s) + sY(S) = \dfrac{15}{s+1}; \\ -4sX(S) + (s^2-1)Y(s) = \dfrac{15}{s^2}; \end{cases}$$

Aplicando la regla de Kramer :

$$X(S) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{15}{s+1} & s \\ \frac{15}{s^2} & (s^2-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (s^2-1) & s \\ -4s & (s^2-1) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{15(s^2-1)}{s+1} - \frac{15s}{s^2}}{(s^2-1)^2 + 4s^2} = \frac{\frac{15(s-1)(s+1)}{s+1} - \frac{15}{s}}{s^4+2s^2+1} = \frac{\frac{15(s-1)}{1} - \frac{15}{s}}{(s^2+1)^2} = \frac{\frac{15(s^2-s)-15}{s}}{(s^2+1)^2}$$

$$X(S) = \frac{15(s^2-s)-15}{s(s^2+1)(s^2+1)} = \frac{15(s^2-s-1)}{s(s^2+1)(s^2+1)} = 15\left[\frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s^2+1)^2} + \frac{Ds+E}{(s^2+1)}\right]$$

Expresando X(s) como la suma de fracciones parciales se obtiene que los valores de los coeficientes son :

A = -1, B = 2, C = -1, D = 1, E = 0

Por lo tanto X(s) lo expresamos como :

$$X(S) = 15\left[\frac{-1}{s} + \frac{2s-1}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)}\right]$$

Obteniendo x(t) aplicando transformada de Laplace inversa a X(S) :

$$x(t) = 15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s} + \frac{2s-1}{(s^2+1)^2} + \frac{s}{(s^2+1)}\right] = 15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right] + 15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{(s^2+1)^2}\right] + 15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right];$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right] = -1;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right] = \cos t;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{(s^2+1)^2}\right] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)(s^2+1)}\right]=(\text{sent}*\cos t);$$

$$(\text{sent}*\cos t)=\int_0^t \text{sen}(u)\cos(t-u)du=\int_0^t\left[\frac{\text{sen}(t)+\text{sen}(2u-t)}{2}\right]du=\left[\frac{u\text{sen}(u)}{2}-\frac{\cos(2u-t)}{4}\right]_0^t$$

$$(\text{sent}*\cos t)=\left[\frac{t\text{sen}(t)}{2}-\frac{\cos(t)}{4}-0+\frac{\cos(-t)}{4}\right]_0^t=\frac{t\text{sent}}{2};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right]=(\text{sent}*\cos t)=\frac{t\text{sent}}{2};$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)(s^2+1)}\right]=(\text{sent}*\text{sent})=\int_0^t \text{sen}(u)\text{sen}(t-u)du=\int_0^t\left[\frac{\cos(2u-t)-\cos(t)}{2}\right]du;$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\left[\frac{\text{sen}(2u-t)}{4}-\frac{u\cos t}{2}\right]_0^t=\frac{\text{sen}(t)}{4}-\frac{t\cos t}{2}-\frac{\text{sen}(-t)}{4}=\frac{\text{sent}-t\cos t}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+1)^2}\right]=\frac{\text{sent}-t\cos t}{2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{(s^2+1)^2}\right]=2\left[\frac{t\text{sent}}{2}\right]-\left[\frac{\text{sent}-t\cos t}{2}\right]=t\text{sent}-\frac{\text{sent}}{2}+\frac{t\cos t}{2}$$

$$x(t)=15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-1}{s}\right]+15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{(s^2+1)^2}\right]+15\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)}\right]$$

$$x(t)=-15+15\left[t\text{sent}-\frac{\text{sent}}{2}+\frac{t\cos t}{2}\right]+15[\cos t]$$

$$x(t)=-15+15t\text{sent}-7.5\text{sent}+7.5t\cos t+15\cos t$$

Ahora encontremos y(t) usando una ecuación del sistema:

$$X''+Y'+3X=15e^{-t}$$

$$y'=15e^{-t}-x''-3x;$$

$$x=-15+15t\text{sent}-7.5\text{sent}+7.5t\cos t+15\cos t;$$

$$x'=15t\cos t+15\text{sent}-7.5\cos t-7.5t\text{sent}+7.5\cos t-15\text{sent};$$

$$x'=15t\cos t-7.5t\text{sent};$$

$$x''=-15t\text{sent}+15\cos t-7.5t\cos t-7.5\text{sent};$$

$$y'=15e^{-t}+15t\text{sent}-15\cos t+7.5t\cos t+7.5\text{sent}-3(-15+15t\text{sent}-7.5\text{sent}+7.5t\cos t+15\cos t);$$

$$y'=15e^{-t}-30t\text{sent}-15t\cos t-60\cos t+30\text{sent};$$

$$y=\left(\int 15e^{-t}-30t\text{sent}-15t\cos t-60\cos t+30\text{sent}\right)$$

$$y=-15e^{-t}+30t\cos t-30\text{sent}-15t\text{sent}-15\cos t-60\text{sent}-30\cos t+C;$$

$$y(0)=0,\ \textit{entonces}\ C=45;$$

La solucion es :

$$\begin{cases} x(t)=-15+15t\text{sent}-7.5\text{sent}+7.5t\cos t+15\cos t \\ y(t)=-15e^{-t}+30t\cos t-15t\text{sent}-90\text{sent}-45\cos t+45; \end{cases}$$

Método de los valores y vectores propios

1) Resuelva por el método de los valores y vectores propios el siguiente sistema:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= -4x + y + z \\ y' &= x + 5y - z \\ z' &= y - 3z \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \det(A-\lambda I)=0$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-4-\lambda)[(5-\lambda)(-3-\lambda)+1] - 1[(-3-\lambda)-1] = 0$$

$$(\lambda+4)(\lambda-5)(\lambda+3)=0$$

$$\lambda_1 = -4 \qquad \lambda_2 = 5 \qquad \lambda_3 = -3$$

$\lambda = -4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y+z=0 \\ x+9y-z=0 \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} y &= -z \\ x &= 10z \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

$$\upsilon_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -y+8z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \ldots\ldots \quad \begin{aligned} y &= 8z \\ x &= z \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ 8z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

$$\upsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} z$$

$$\upsilon_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x(t) = c_1\upsilon_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\upsilon_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\upsilon_3 e^{\lambda_3 t}$$

$$x(t)c_1\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-4t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$$

2) Resolver el sistema

$$\boxed{X' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X}$$

$$\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(-3-\lambda)[\lambda(\lambda+1)] + 2[-1-2(1+\lambda)] = 0$$
$$-(\lambda+3)(\lambda)(\lambda+1) + 2(-3-2\lambda) = 0$$
$$-\lambda^3 - 4\lambda^2 - 3\lambda - 6 - 4\lambda = 0$$
$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -1+\sqrt{2}i \qquad \lambda_3 = -1-\sqrt{2}i$$

Se procede a encontrar el vector propio asociado al siguiente valor:
$* \lambda_1 = -2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y= -2z
x= 2z

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se procede a encontrar el vector propio asociado al siguiente valor $\lambda_3 = -1-\sqrt{2}i$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2+\sqrt{2}i & 0 & 2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1+\sqrt{2}i & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2(-2-\sqrt{2}i) & 0 \\ 1 & \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 0 & 2(-2-\sqrt{2}i) & 0 \\ 1 & \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1+\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \approx$$

$6x = \left(4 + 2\sqrt{2}i\right)z;$

$3y = \left(-1 + \sqrt{2}i\right)z;$

$z \in \text{Reales}.$

Entonces:

$x = \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}i}{3}\right)z;$.

$y = \left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}i}{3}\right)z;$

$z \in \text{Reales}.$

Entonces podemos concluir que el vector propio complejo asociado a este valor de $\lambda_3 = -1 - \sqrt{2}i$ es:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{2}i}{3}\right)z \\ \left(-\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}i}{3}\right)z \\ z \end{pmatrix},$$

Podemos usar un vector propio que tenga la forma de v, si z = 3 :

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(2 + \sqrt{2}i\right) \\ \left(-1 + \sqrt{2}i\right) \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\bar{a}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} i,$$

Entonces procedemos a encontrar la primera solución l.i. con $\lambda_1 = -2$:

$$x_1 = e^{-2t}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora procedemos a encontrar la segunda y tercera solución l.i. con $\lambda_3 = -1 - \sqrt{2}i$, tiene la siguiente forma $\lambda = \alpha + \beta i$, por lo tanto las otras dos soluciones son:

$$x_2 = e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\left(\bar{a}\right) + e^{\alpha t}\cos(\beta t)\left(\bar{b}\right);$$

$$x_3 = e^{\alpha t}\cos(\beta t)\left(\bar{a}\right) - e^{\alpha t}\operatorname{sen}(\beta t)\left(\bar{b}\right);$$

$$x_2 = e^{-t}\cos\left(-\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - e^{-t}\operatorname{sen}\left(-\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$x_3 = e^{-t}\operatorname{sen}\left(-\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + e^{-t}\cos\left(-\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = -e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix};$$

Por lo tanto la solución general es:

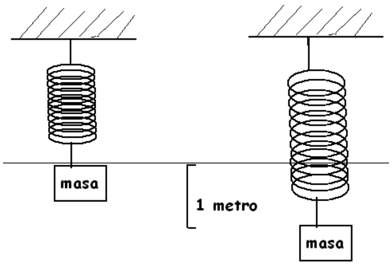
$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3;$$

$$x = C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + C_2\left[e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right] + C_3\left[-e^{-t}\operatorname{sen}\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + e^{-t}\cos\left(\sqrt{2}t\right)\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right];$$

Aplicaciones de Sistema: Masa – Resorte – Amortiguador

1) Una masa de 1 kilogramo sujeta a un resorte con una constante k = 9 m/seg se suelta del reposo 1 metro debajo de la posición de equilibrio del sistema masa-resorte, y empieza a vibrar. Después de $\pi/2$ segundos, la masa es golpeada hacia arriba por un martillo que ejerce un impulso de 3 newtons.

a) Determine una función que defina la posición ''y'' de la masa en cualquier instante ''t''.
b) Halle la posición de la masa en los tiempos t=$\pi/4$ segundos y t=π segundos.



$$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+Ky=f(t)$$

Como no hay amortiguador C=0;
En t = $\pi/2$ segundos hay un impulso hacia arriba de 3 Newtons, por lo tanto hay una perturbación

$f(t)=-3\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$, el signo negativo se debe a que tomamos el eje de referencia positivo hacia abajo.

La ecuación diferencial que representa al sistema es:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+9Ky=-3\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right);$$

Para resolver esta ecuación diferencial aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}+9y\right]=\mathscr{L}\left[-3\delta\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+9y(s)=-3e^{-\frac{\pi}{2}s};$$

La posición inicial del sistema es y(0)=1 metro, y la velocidad inicial es y'(0)=0:

$$s^2y(s)-s+9y(s)=-3e^{-\frac{\pi}{2}s};$$

$$\left(s^2+9\right)y(s)=s-3e^{-\frac{\pi}{2}s};$$

$$y(s)=\frac{s-3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}=\frac{s}{s^2+9}-\frac{3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9};$$

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}-\frac{3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+9}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{3e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+9}\right];$$

$$y(t)=\cos 3t-\operatorname{sen}3\left(t-\frac{\pi}{2}\right)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right);$$

a)

$$y(t)=\begin{cases}\cos 3t; & t<\dfrac{\pi}{2}\\ \cos 3t-\operatorname{sen}3\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) & t\geq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

b)

$$y(\pi/4)=\cos(3\pi/4)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{m},$$

$$y(\pi)=\cos(3\pi)-\operatorname{sen}3(\pi-\pi/2)=-1-(-1)=0\mathrm{m}$$

2) Un sistema vibratorio compuesto de un resorte de constante $k=4N/m$, un amortiguador de $c=6Ns/m$, tiene adherido una bola metálica de 20 Newton de peso. Determine la forma en que vibra la masa si inicialmente esta en la posición de equilibrio y sin velocidad inicial, y si desde el tiempo t = 0 actúa una fuerza perturbadora definida así:

$$f(t)=\begin{cases}100t; & t\in[0,2)\\ 400-100t; & t\in(2,4]\end{cases}$$

La ecuación diferencial que representa al sistema es:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+c\frac{dy}{dt}+Ky=f(t);$$

Asumiendo que la gravedad es $10m/s^2$:

$$m=\frac{w}{g}=\frac{20}{10}=2\,\mathrm{Kg}.$$

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y=f(t);$$

Antes de resolver la ecuación diferencial aplicando la transformada de Laplace, se recomienda expresar la función f(t) en términos de de funciones escalones multiplicadas por las funciones que se encuentran en cada uno de los intervalos mostrados en la regla de correspondencia:

$$f(t)=100tu(t)-100tu(t-2)+(400-100t)u(t-2)-(400-100t)u(t-4);$$
$$f(t)=100tu(t)-100(t)u(t-2)+(400)u(t-2)-100tu(t-2)-(400)u(t-4)+100tu(t-4);$$
$$f(t)=100tu(t)-200(t)u(t-2)+(400)u(t-2)-(400)u(t-4)+100tu(t-4);$$
$$f(t)=100tu(t)-200(t-2+2)u(t-2)+(400)u(t-2)-(400)u(t-4)+100(t-4+4)u(t-4);$$
$$f(t)=100tu(t)-200(t-2)u(t-2)-400u(t-2)+(400)u(t-2)-(400)u(t-4)+100(t-4)u(t-4)+400u(t-4);$$
$$f(t)=100tu(t)-200(t-2)u(t-2)+100(t-4)u(t-4);$$

La ecuación diferencial queda expresada de la siguiente forma:

$$2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y=100tu(t)-200(t-2)u(t-2)+100(t-4)u(t-4);$$

Ahora se puede proceder a resolver la ecuación diferencial mediante la transformada de Laplace:

$$\mathscr{L}\left[2\frac{d^2y}{dt^2}+6\frac{dy}{dt}+4y\right]=\mathscr{L}[100tu(t)-200(t-2)u(t-2)+100(t-4)u(t-4)];$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y\right]=\mathscr{L}[50tu(t)-100(t-2)u(t-2)+50(t-4)u(t-4)];$$

La posición inicial del sistema es y(0)=0 metro, y la velocidad inicial es y'(0)=0:

$$[s^2y(s)-sy(0)-y'(0)+3sy(s)-3y(0)+2y(s)]=\frac{50}{s^2}-\frac{100}{s^2}e^{-2s}+\frac{50}{s^2}e^{-4s}$$

$$s^2y(s)+3sy(s)+2y(s)=\frac{50}{s^2}-\frac{100}{s^2}e^{-2s}+\frac{50}{s^2}e^{-4s};$$

$$y(s)[s^2+3s+2]=\frac{50}{s^2}-\frac{100}{s^2}e^{-2s}+\frac{50}{s^2}e^{-4s};$$

$$y(s)=\frac{50}{s^2(s^2+3s+2)}-\frac{100}{s^2(s^2+3s+2)}e^{-2s}+\frac{50}{s^2(s^2+3s+2)}e^{-4s};$$

$$y(s)=\underbrace{\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}}_{y_{1(s)}}-\underbrace{\frac{100}{s^2(s+2)(s+1)}e^{-2s}}_{y_{2(s)}}+\underbrace{\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}e^{-4s}}_{y_{3(s)}};$$

$$y_1(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}\right]$$

Para encontrar $y_1(t)$, se procede a usar el teorema de la integral de la transformada de Laplace:

Si $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{(s+2)(s+1)}\right]=f(t)$, entonces $\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}\right]=\int_0^t\int_0^u f(\theta)d\theta du$

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{(s+2)(s+1)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A}{(s+2)}+\frac{B}{(s+1)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{A(s+1)+B(s+2)}{(s+2)(s+1)}\right];$$

$$\begin{cases}A+B=0\\A+2B=50\end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se obtiene:
B = 501, A = -50;

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{(s+2)(s+1)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{(s+1)}-\frac{50}{(s+2)}\right]=50e^{-t}-50^{-2t};$$

Entonces:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}\right]=\int_0^t\int_0^u f(\theta)d\theta=\int_0^t\int_0^u\left(50e^{-\theta}-50^{-2\theta}\right)d\theta du;$$

$$\int_0^t \left[-50e^{-\theta}+25^{-2\theta}\right]_0^u du = \int_0^t \left[-50e^{-u}+25^{-2u}-(-50+25)\right]_0^u du = \int_0^t \left[-50e^{-u}+25^{-2u}+25\right]du;$$

$$\int_0^t \left[-50e^{-u}+25^{-2u}+25\right]du = \left[50e^{-u}-12.5e^{-2u}+25u\right]_0^t = \left[50e^{-t}-12.5e^{-2t}+25t-(50-12.5)\right];$$

$$\int_0^t \left[-50e^{-u}+25^{-2u}+25\right]du = 50e^{-t}-12.5e^{-2t}+25t-37.5;$$

Por lo tanto:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}\right] = 50e^{-t}-12.5e^{-2t}+25t-37.5;$$

$$y_1(t) = 50e^{-t}-12.5e^{-2t}+25t-37.5;$$

$$y_2(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{100}{s^2(s+2)(s+1)}e^{-2s}\right] = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}e^{-2s}\right]$$

$$y_2(t) = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}e^{-2s}\right] = 2\left(50e^{-(t-2)}-12.5e^{-2(t-2)}+25(t-2)-37.5\right)u(t-2);$$

$$y_3(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{50}{s^2(s+2)(s+1)}e^{-4s}\right] = \left(50e^{-(t-4)}-12.5e^{-2(t-4)}+25(t-4)-37.5\right)u(t-4);$$

Ahora y(t) es:

$$y(t) = y_1(t)+y_2(t)+y_3(t);$$

$$y(t) = 50e^{-t}-12.5e^{-2t}+25t-37.5+2\left(\left(50e^{-(t-2)}-12.5e^{-2(t-2)}+25(t-2)-37.5\right)u(t-2)\right)$$
$$+\left(\left(50e^{-(t-4)}-12.5e^{-2(t-4)}+25(t-4)-37.5\right)u(t-4)\right);$$

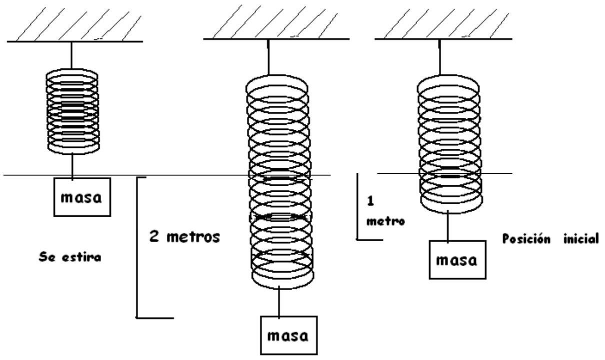
Se puede representar y(t) en como una función con regla de correspondencia:

$$y(t) = \begin{cases} 50e^{-t}-12.5e^{-2t}+25t-37.5 & 0 \le t < 2; \\ 50e^{-t}\left(1+2e^2\right)-12.5e^{-2t}\left(1+2e^4\right)+75t-212.5 & 2 \le t < 4; \\ 50e^{-t}\left(1+2e^2+e^4\right)-12.5e^{-2t}\left(1+2e^4+e^8\right)+100t-350; & t \ge 4; \end{cases}$$

3) Una masa de 5kg se sujeta a un resorte suspendido del techo y ocasiona que el resorte se estire 2 metros al llegar al reposo en equilibrio. Se eleva luego la masa 1 metro sobre el punto de equilibrio y se le aplica una velocidad dirigida hacia arriba de 1/3 m/seg. Determine:

a) La ecuación del movimiento armónico simple de la masa.

b) La posición del objeto en t = $\frac{\pi}{4}$ segundos



$$m\frac{d^2y}{dt^2}+C\frac{dy}{dt}+Ky=f(t)$$

a)

Como no hay amortiguador C=0, además no existe fuerza perturbadora que se aplique al sistema por lo tanto f(t)=0, la posición inicial de la masa es 1 metro sobre la posición de equilibrio por lo tanto si tomamos el eje de referencia positivo hacia arriba la posición inicial de la masa sera 1 metro. Y la velocidad es 1/3 m/seg.

La ecuación diferencial que representa al sistema es:

$$5\frac{d^2y}{dt^2}+ky=0;$$

Se debe encontrar el valor de k:

Como la masa es 5kg y si se asume la gravedad $10m/seg^2$, el peso será de 50 Newton, al sujetar el resorte la masa se estira 2 metros, lo que me indica de manera implícita la constante del resorte que se la puede calcular mediante:

$F=k\Delta l$, donde F es el peso del objeto y Δl la longitud del estiramiento. Despejando k se obtiene k=25N/m.

Para resolver esta ecuación diferencial aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación:

$$\mathscr{L}\left[5\frac{d^2y}{dt^2}+25y\right]=\mathscr{L}[0];$$

$$5s^2Y(s)-5sy(0)-5y'(0)+25y(s)=0;$$

La posición inicial del sistema es y(0)=1 metro, y la velocidad inicial es y'(0)=1/3:
Reemplazando las condiciones se obtiene:

$$5s^2 y(s) - 5s - \frac{5}{3} + 25y(s) = 0;$$

$$\left(5s^2 + 25\right)y(s) = 5s + \frac{5}{3}$$

$$\left(s^2 + 5\right)y(s) = s + \frac{1}{3}$$

$$y(s) = \frac{s}{\left(s^2 + 5\right)} + \frac{1}{3\left(s^2 + 5\right)};$$

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2 + 5\right)} + \frac{1}{3\left(s^2 + 5\right)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{\left(s^2 + 5\right)}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{3\left(s^2 + 5\right)}\right];$$

$$y(t) = \cos 5t + \frac{1}{15}\operatorname{sen}5(t)$$

b)

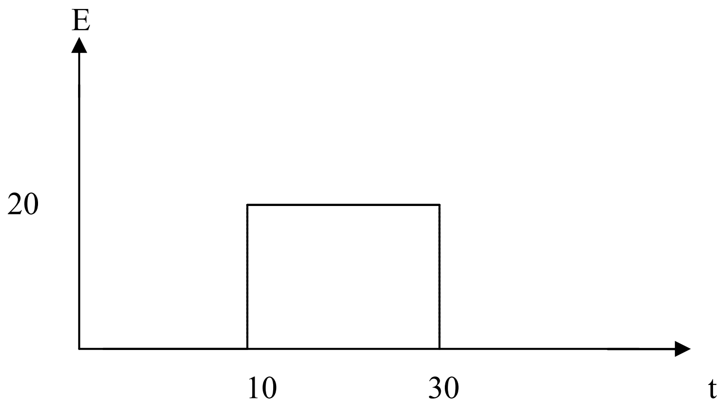
La posición del objeto en $\pi/4$ segundos es:

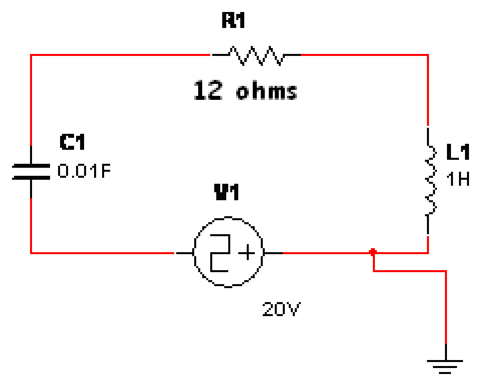
$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 5\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{15}\operatorname{sen}5\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{15}\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{1}{15}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{16}{15}\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{15}$$

Aplicaciones de Circuitos Eléctricos

1) Un circuito LRC con R=12 ohmios, L=1, C=0.01 faradios se conecta a una batería que transmite un voltaje de 20 voltios. Si el interruptor esta inicialmente apagado y se lo enciende después de 10 segundos, permaneciendo conectada por un lapso de 20 segundos y luego desconectada definitivamente. Si inicialmente no hay carga en el condensador y la corriente inicial es cero, determine:
a) La carga acumulada en el condensador en los tiempos t=5s, y t=20s.
b) La intensidad de corriente que atraviesa el circuito en los tiempos t=8s, y t=40s.





$$LQ''+RQ'+\frac{1}{C}Q = \varepsilon(t) = 20u(t-10)-20u(t-30)$$

$$\ell[LQ''] + \ell[RQ'] + \ell[\frac{1}{C}Q] = \ell[\varepsilon(t)]$$

$$s^2Q(s) + 12sQ(s) + 100Q(s) = 20\left[\frac{e^{-10s} - e^{-30s}}{s}\right]$$

$$(s^2 + 12s + 100)Q(s) = 20\left[\frac{e^{-10s}}{s} - \frac{e^{-30s}}{s}\right]$$

$$Q(s) = 20\left[\frac{e^{-10s}}{s(s^2 + 12s + 100)} - \frac{e^{-30s}}{s(s^2 + 12s + 100)}\right]$$

$$\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+12s+100}\Rightarrow As^2+12As+100A+Bs^2+Cs=1$$

$$A=\frac{1}{100}$$

$$B=-\frac{1}{100}$$

$$C=-\frac{12}{100}$$

$$\frac{1/100}{s}-1/100\left(\frac{s+12}{s^2+12s+100}\right)$$

$$Q(s)=\frac{1}{5}\left[e^{10s}\left(1/s-\frac{s+6}{(s+6)^2+64}-\frac{6}{(s+6)^2+64}\right)-e^{-30s}\left(1/s-\frac{s+6}{(s+6)^2+64}-\frac{6}{(s+6)^2+64}\right)\right]$$

$$Q(t)=\ell^{-1}\left[Q(s)\right]$$

$$\mathrm{Q(t)}=\frac{1}{5}\left[\left(1-\mathrm{e}^{-6(t-10)}\cos 8(t-10)-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-6(t-10)}\mathrm{sen}8(t-10)\right)\mathrm{U}_{10}(t)\right]$$

$$-\frac{1}{5}\left(1-\mathrm{e}^{-6(t-30)}\cos 8(t-30)-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-6(t-30)}\mathrm{sen}8(t-30)\right)\mathrm{U}_{30}(t)$$

Cuando t=5s

$Q(5)=0$ Condensador descargado

Cuando t=20s

$$Q(t)=\frac{1}{5}-1/5\,e^{-6(t-10)}\cos 8(t-10)-\frac{3}{20}e^{-6(t-10)}sen8(t-10)$$

$$Q(20)=\frac{1}{5}-1/5\,e^{-60}\cos 80-\frac{3}{20}e^{-60}sen80$$

$$Q(20)=\frac{1}{5}-1/5\,e^{-60}(-0.110)-\frac{3}{20}e^{-60}(-0.993)$$

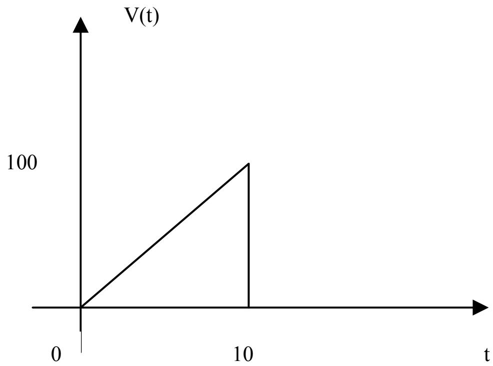
$$\boxed{Q(20)=2.08x10^{-25}\,coulombs}$$

2) Un circuito LRC con R=150 ohmios, L=1 Henrio, C=0.0002 faradios en t=0 se le aplica un voltaje que crece linealmente de 0 a 100 voltios, durante 10 segundos, para luego cesar por tiempo indefinido. Si inicialmente no hay carga en el condensador y la corriente inicial es cero, determine:
a) La carga en cualquier instante de tiempo
b) La corriente del circuito en t=20s.

$R = 150r$ $\qquad Q(0) = 0$

$L = 1H$ $\qquad Q'(0) = 0$

$C = 2\times 10^{-4} F$



$$LQ'' + RQ' + 1/C\,Q = V(t)$$
$$Q'' + 150Q' + 5000Q = 10t\left(\mu_0(t) - \mu_{10}(t)\right)$$
$$Q'' + 150Q' + 5000Q = 10t\mu_0(t) - 10t\mu_{10}(t) + 100\mu_{10}(t) - 100\mu_{10}(t)$$
$$Q'' + 150Q' + 5000Q = 10t\mu_0(t) - 10(t-10)\mu_{10}(t) - 100\mu_{10}(t)$$

Encontrando la transformada:

$$s^2Q(s) - sQ(0) - Q'(0) + 150s\,Q(s) - 150\,Q(0) + 5000Q(s) = \frac{10}{s^2} - \frac{10e^{-10s}}{s^2} - \frac{100e^{-10s}}{s}$$
$$\left(s^2 + 150s + 5000\right)Q(s) = \frac{10}{s^2} - e^{-10s}\frac{10}{s^2} - e^{-10s}\frac{100}{s}$$
$$(s+50)(s+100)Q(s) = \frac{10}{s^2} - e^{-10s}\frac{10}{s^2} - e^{-10s}\frac{100}{s}$$

$$Q(S) = \frac{10}{s^2(s+50)(s+100)} - \frac{10e^{-10s}}{s^2(s+50)(s+100)} - \frac{100e^{-10s}}{s(s+50)(s+100)}$$

- $\dfrac{10}{s^2(s+50)(s+100)} = \dfrac{A}{s^2} + \dfrac{B}{s} + \dfrac{C}{s+50} + \dfrac{D}{s+100} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1/500 \\ B = -3/50000 \\ C = 1/12500 \\ D = -1/50000 \end{cases}$

- $\dfrac{100}{s(s+50)(s+100)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+50} + \dfrac{C}{s+100} \xrightarrow{\text{LA SOLUCION}} \begin{cases} A = 1/50 \\ B = -1/25 \\ C = 1/50 \end{cases}$

$$Q(S) = \frac{1}{50000}\left[\frac{100}{S^2} - \frac{3}{S} + \frac{4}{S+50} - \frac{1}{S+100}\right] - \frac{e^{-10S}}{50000}\left[\frac{100}{S^2} - \frac{3}{S} + \frac{4}{S+50} - \frac{1}{S+100}\right] - \frac{e^{-10S}}{50}\left[\frac{1}{s} - \frac{2}{s+50} + \frac{1}{s+100}\right]$$

$$Q(t) = \frac{1}{50000}\left[100t - 3 + 4e^{-50t} - e^{-100t}\right] - \frac{1}{50000}\left[100(t-10) - 3 + 4e^{-50(t-10)} - e^{-100(t-10)}\right]u_{10}(t) - \frac{1}{50}\left[1 - 2e^{-50(t-10)} + e^{-100(t-100)}\right]u_{10}(t)$$

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{1}{50000}\left[100t - 3 + 4e^{-50t} - e^{-100t}\right] & t < 10 \\ \frac{1}{50000}\left[100t - 3 + 4e^{-50t} - e^{-100t}\right] - \frac{1}{50000}\left[100(t-10) - 3 + 4e^{-50(t-10)} - e^{-100(t-10)}\right] - \frac{1}{50}\left[1 - 2e^{-50(t-10)} + e^{-100(t-10)}\right] & ;\ t \geq 10 \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} \frac{1}{50000}\left[100t - 3 + 4e^{-50t} - e^{-100t}\right] & t < 10 \\ \frac{1}{50000}\left[1000 + 4e^{-50t} - 4e^{-50(t-10)} - e^{-100t} + e^{-100(t-10)}\right] - \frac{1}{50}\left[1 - 2e^{-50(t-10)} + e^{-100(t-10)}\right] & ;\ t \geq 10 \end{cases}$$

Q(20segundos)=0

$$\boxed{i(t) = \frac{\partial Q(t)}{\partial t}}$$

$$i(t) = \begin{cases} \frac{1}{50000}\left[100 - 200e^{-50t} + 100e^{-100t}\right] & t < 10 \\ \frac{1}{50000}\left[-200e^{-50t} + 200e^{-50(t-10)} + 100e^{-100t} - 100e^{-100(t-10)}\right] - \frac{1}{50}\left[100e^{-50(t-10)} - 100e^{-100(t-10)}\right] & ;\ t \geq 10 \end{cases}$$

i(20segundos)=0

Series

De Fourier

Contenido:

- **Definición de la serie de Fourier**
- **Serie de Fourier de una función par.**
- **Serie de Fourier de una función impar.**
- **Convergencia de una serie de Fourier.**
- **Extensiones pares e impares periódicas de una serie de Fourier**

Serie de Fourier de una función f(x)

Definición: Sea f una función continua por segmentos en el intervalo de $[-\mathbf{p},\mathbf{p}]$ la serie de Fourier de f es la serie trigonométrica:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right]$$

Donde:

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

$\forall n\in N,\quad n=1,2,3,....,n.$

Series de Fourier cuando f(x) es par

Si la función f(x) es una función par se dice que:

$$a_0=\frac{2}{p}\int_{0}^{p}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_{0}^{p}f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

$b_n=0;$

$\forall n\in N,\quad n=1,2,3,....,n.$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right]$$

Series de Fourier cuando f(x) es impar

Si la función f(x) es una función impar se dice que:

$a_0=0$

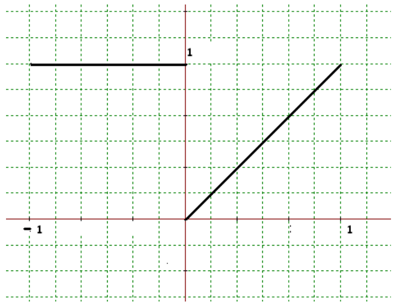
$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{p}\int_{0}^{p}f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx;$$

$\forall n\in N,\quad n=1,2,3,....,n.$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right]$$

1) Exprese la función f definida por $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{-1 < x < 0} \\ \mathbf{x}, & \mathbf{0 < x < 1} \end{cases}$ como un desarrollo en series de Fourier.



$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right]$$

$$p = 1$$

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$$

$$a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} xdx = [x]_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1;$$

$$a_0 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0}\cos(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\cos(n\pi x)dx$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx,$$

$$dv = \cos(n\pi x)dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}$$

$$a_n = \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right]_{-1}^{0} + \left[x\frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}dx$$

$$a_n = \left[0 - \frac{\operatorname{sen}(-n\pi)}{n\pi}\right] + \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi} - 0\right]_0^1 + \left[\frac{\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^1$$

$$a_n = \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi}\right] + \left[\frac{\operatorname{sen}(n\pi)}{n\pi}\right] + \left[\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right]$$

$$\operatorname{sen}(n\pi) = 0, \quad \forall n \in N, \quad n = 1,2,3,\ldots,n.$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \ \forall n \in N, \quad n = 1,2,3,\ldots,n.$$

$$a_n = \left[\frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2}\right] = \frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx = \int_{-1}^{0} \mathrm{sen}(n\pi x)dx + \int_{0}^{1} x\,\mathrm{sen}(n\pi x)dx$$

$$u = x \ \Rightarrow \ du = dx,$$

$$dv = \mathrm{sen}(n\pi x)dx \ \Rightarrow \ v = -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}$$

$$b_n = -\left[\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{-1}^{0} - \left[x\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{0}^{1} + \int_{0}^{1}\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}dx$$

$$b_n = -\left[\frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi}\right] - \left[\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - 0\right] + \left[\frac{\mathrm{sen}(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_{0}^{1}$$

$$b_n = -\left[\frac{1}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\right] - \left[\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}\right] + \left[\frac{\mathrm{sen}(n\pi)}{n^2\pi^2} - 0\right]$$

$$\mathrm{sen}(n\pi) = 0, \quad \forall n \in N, \quad n = 1,2,3,\ldots,n.$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \ \forall n \in N, \quad n = 1,2,3,\ldots,n.$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos(n\pi x) - \frac{1}{n\pi}\mathrm{sen}(n\pi x)\right]}$$

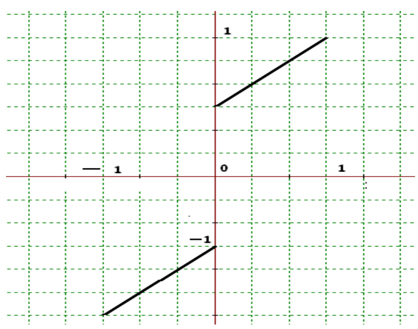
Convergencia de una Serie de Fourier

Teorema: Si $f(x)$ y $f'(x)$ son funciones continuas por segmentos en el intervalo $(-p,p)$, entonces la serie de Fourier de $f(x)$ en dicho intervalo converge hacia $f(a)$ en un punto de continuidad, mientras que en un punto de discontinuidad a converge a:

$$\frac{f(a^-)+f(a^+)}{2}, \quad \textbf{donde:}$$

$$f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$



Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 < x < \pi \\ x-1, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

En la gráfica se observa que en x=0 hay un punto de discontinuidad por lo tanto el valor a que converge la serie de Fourier en x=0 es:

$$\frac{f(a^-)+f(a^+)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0, \quad \textbf{donde:}$$

$$f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x) = -1$$

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 1$$

Extensión periódica de la función f(x)

Sea f(x) una función continua por segmentos en $(-\mathbf{p},\mathbf{p})$. Entonces la Serie de Fourier de f es:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a}_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{p}}\right) + \boldsymbol{b}_n \boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{p}}\right)\right]$$

Donde se define la frecuencia angular de las funciones coseno y seno como “w”, entonces:

$w = \dfrac{n\pi}{p}$, donde $w = 2\pi f$,

$\Rightarrow 2\pi f = \dfrac{n\pi}{p}$, despejando f:

$f = \dfrac{n\pi}{2\pi p} = \dfrac{n}{2p}$, encontrando $\dfrac{1}{f} = T_f = \dfrac{2p}{n}$

Entonces $nT_f = 2p = T$.

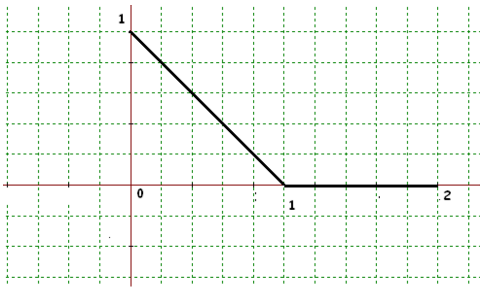
Por lo tanto la función f puede extenderse a una función periódica con período = 2p, de manera talque

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a}_0}{2} + \sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty}\left[\boldsymbol{a}_n\ \boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{p}}\right) + \boldsymbol{b}_n \boldsymbol{sen}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{p}}\right)\right]$$, y donde $\mathbf{f(x+2p) = f(x),} \quad \mathbf{x \in R}$.

Donde la serie converge a f(x) si es que f es continua en x y converge a $\dfrac{\mathbf{f(x^-)+f(x^+)}}{\mathbf{2}}$, si es que f es discontinua en x.

2) Encuentre los coeficientes de la serie de Fourier: a) sólo en términos de senos de la función f(x), b) luego sólo en términos de cosenos.

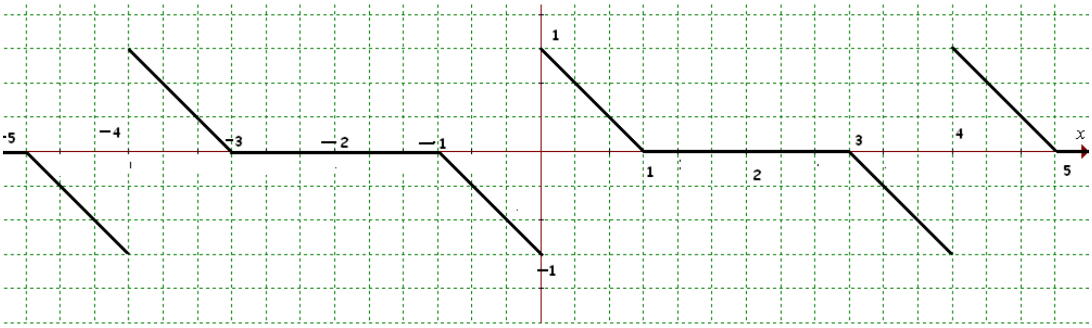
$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}1-x, & 0<x<1\\ 0, & 1<x<2\end{cases}}$$



a) En términos de senos.

Antes de comenzar el desarrollo de este problema se recomienda graficar la función f(x)
Como se observa en la gráfica esta no es función impar ni par, por lo tanto para obtener el desarrollo en series de Fourier sólo en términos de senos de esta función se debe proceder a hacer una extensión periódica impar de f(x).

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases}f(x), & 0<x<p\\ -f(-x), & -p<x<0\end{cases},\quad donde\ \ T=2p}$$



Como se observa en la gráfica ahora el periódo de la función es T=2p, donde p = 2, por lo tanto el período T es 4.

Ahora si la función f(x) es una función impar se cumple las siguientes condiciones:

$$a_0=0$$
$$a_n=0$$
$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx;$$
$$\forall n\in N,\quad n=1,2,3,\ldots,n.$$
$$\therefore\ \ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n sen\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right]$$

Encontrando los coeficientes:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^2 f(x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$b_n = \int_0^1 (1-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 0.\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$b_n = \int_0^1 (1-x)\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx;$$

$$u = 1-x, \quad \Rightarrow \quad du = -dx;$$

$$dv = \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right);$$

$$\Rightarrow b_n = -\left[(1-x)\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1;$$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{2}{n\pi}[0-1] - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 0\right] = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Ahora la función en términos de senos es:

Como es impar ,entonces: $\mathbf{a_n = 0, \quad y \quad a_0 = 0}$

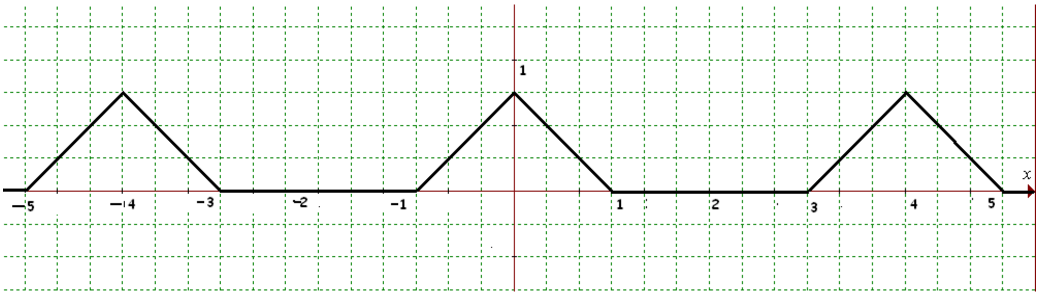
$$\therefore \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{p}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

b) En términos de cosenos:

Igualmente que en el caso anterior para obtener la serie de Fourier sólo en terminos de cosenos de f(x), la función debe ser una función par, si no lo es se debe hacer una extensión periódica de forma par. Es decir:

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{f(x),} & \mathbf{0 < x < p} \\ \mathbf{f(-x),} & \mathbf{-p < x < 0} \end{cases}, \quad \mathbf{donde\ \ T = 2p}$$



Como se observa en la gráfica ahora el período de la función es T=2p, donde p = 2, por lo tanto el período T es 4.

Ahora si la función f(x) es una función impar se cumple las siguientes condiciones:

$$\boldsymbol{a_0} = \frac{2}{\boldsymbol{p}}\int_0^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{2}{\boldsymbol{p}}\int_0^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{f(x)\cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{p}}\right)\boldsymbol{dx}$$

$$\boldsymbol{b_n = 0;}$$

$$\forall \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{n = 1,2,3,\ldots,n.}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{f(x)} = \frac{\boldsymbol{a_0}}{2} + \sum_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}\left[\boldsymbol{a_n \cos}\left(\frac{\boldsymbol{n\pi x}}{\boldsymbol{p}}\right)\right]$$

Encontrando los coeficientes $\mathbf{a_n, a_0}$:

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$$

$$a_0 = \int_0^2 f(x)dx = a_0 = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 0.dx$$

$$a_0 = \int_0^1 (1-x)dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{2} - 0 + 0\right] = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^P f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{P}\right)dx$$

$$a_n = \int_0^2 f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \int_0^1 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx + \int_1^2 0.\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$a_n = \int_0^1 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx;$$

$$u = 1-x, \qquad \Rightarrow \qquad du = -dx;$$

$$dv = \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx, \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \int_0^1 (1-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx = \left[(1-x)\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_0^1$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{n\pi}[0-0] - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-1\right] = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

Como ahora f(x) es una función par, entonces $\mathbf{b_n = 0}$

La serie de fourier de f(x) en términos de cosenos es :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)$$

$$p = 2$$

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$$

EJERCICIO DE LA ECUACIÓN DEL CALOR DE UNA VARILLA

Una varilla de longitud L coincide con el eje X en el intervalo $[0, L]$, tal que la temperatura en los extremos de la varilla se mantiene a 0ºC en cualquier instante y la temperatura inicial de toda la varilla esta dada por $f(x) = x(L-x)$. Determina la temperatura $u(x,t)$, de la varilla, conociendo que el modelo matemático de este problema viene dado por:

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} \quad , & 0 \le x \le L \quad \wedge \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = x(L-x) \quad , & 0 \le x \le L \end{cases}$$

Para resolver esta ecuación en derivadas parciales se procede a usar el método de separación de variables, se asume la solución de la siguiente manera:

$u(x,t) = X(x)T(t)$

Se obtiene las correspondientes derivadas de la ecuación, usando la solución que se asume.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

Reemplazando en la ecuación en derivadas parciales se obtiene:

$kX''(x)T(t) = X(x)T'(t)$

Separando a un lado de la ecuación todo lo que depende de la variable "x", y al otro lado lo de "y".

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = \lambda$$

Se obtiene dos ecuaciones diferenciales:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$X''(x) = \lambda X(x)$

$X''(x) - \lambda X(x) = 0$

La solución para esta ecuación se asume como $X(x) = e^{rx}$:

Se obtiene: $r^2 - \lambda = 0$

Como el valor de λ es una constante, entonces se analiza de la siguiente forma:

Para $\lambda > 0$

$r^2 = \lambda$, por lo tanto las raíces son: $r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$

Por lo tanto, para este caso la solución es: $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

Luego se obtiene los valores de A y B, usando los valores de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$:

$u(0,t) = 0, \quad entonces \quad X(0) = 0$

$u(L,t) = 0, \quad entonces \quad X(L) = 0$

$X(0) = A + B = 0$

$X(L) = Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$

Se forma un sistema homogéneo de ecuaciones donde A=B=0, por lo tanto, la solución queda la trivial:

$X(x) = 0$, entonces $u(x,t) = 0T(t) = 0$

Para $\lambda = 0$

$r^2 = 0$, por lo tanto las raíces son: $r_{1,2} = 0$

Por lo tanto, para este caso la solución es: $X(x) = A + Bx$

Luego se obtiene los valores de A y B, usando los valores de frontera $u(0,t) = u(L,t) = 0$:

$u(0,t)=0, \quad entonces \quad X(0)=0$
$u(L,t)=0, \quad entonces \quad X(L)=0$
$X(0)=A=0$
$X(L)=A+BL=0$
Se forma un sistema homogéneo de ecuaciones donde A=B=0, por lo tanto, la solución queda la trivial:
$X(x)=0,$ entonces $\boldsymbol{u(x,t)=0T(t)=0}$
Para $\lambda<0$, para indicar que λ es un valor negativo se pondrá el singo menos dentro del radical.
$\boldsymbol{r^2=\lambda}$, **por lo tanto las raíces son:** $\boldsymbol{r_{1,2}=\pm\sqrt{-\lambda}i}$
Por lo tanto, para este caso la solución es: $X(x)=Acos(\sqrt{-\lambda})x+Bsen(\sqrt{-\lambda})x$
Luego se obtiene los valores de A y B, usando los valores de frontera $u(0,t)=u(L,t)=0$:
$u(0,t)=0, \quad entonces \quad X(0)=0$
$u(L,t)=0, \quad entonces \quad X(L)=0$
$X(0)=A=0$
$X(L)=Acos(\sqrt{-\lambda})L+Bsen(\sqrt{-\lambda})L=0$
Se forma un sistema homogéneo de ecuaciones donde A =0, pero queda $Bsen(\sqrt{-\lambda})L=0$, donde el valor de B no puede ser cero para que no quede la solución trivial por lo tanto lo que si puede suceder es que $sen(\sqrt{-\lambda})L=0$
Donde $(\sqrt{-\lambda})L=n\pi, \quad \forall n\geq 1,$ luego se despeja $(\sqrt{-\lambda})$:

$$(\sqrt{-\lambda})=\frac{n\pi}{L}, \quad o\ que\ es\ lo\ mismo\ \lambda=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad \forall n\geq 1$$

Ahora $X(x)$ es :

$$X(x)=Bsen\left(\frac{n\pi}{L}\right)x, \quad \forall n\geq 1$$

Luego se obtiene la solución para la segunda ecuación diferencial que está en función de t:

$$\boldsymbol{\frac{T'(t)}{kT(t)}}=\lambda, \quad se\ puede\ expresar\ como: \ \boldsymbol{T'(t)=\lambda kT(t)}$$

$$\boldsymbol{T'(t)-\lambda kT(t)=0}$$

$$Se\ asume\ T(t)=e^{rt}, \quad entonces \quad r-\lambda k=0$$

$$r=\lambda k=-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2k, \quad con\ esto\ la\ solución\ es: \quad T(t)=Ce^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2kt}$$

Como $u(x,t)=X(x)T(t)$, entonces:

$$u(x,t)=A_n sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2kt}, \quad \forall n\geq 1$$

Expresando en sumatoria:

$$\boldsymbol{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2kt}}$$

Ahora se usa la condición inicial $u(x,0)=x(L-x)$:

$$x(L-x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]$$

Donde:

$$\boldsymbol{A_n=\frac{2}{L}\int_0^L x(L-x)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx}$$

Se procede a integrar por partes:

$$\int_0^L x(L-x)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx = \int_0^L (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx$$

$u = xL - x^2, \quad entonces \quad du = (L-2x)dx$

$dv = sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx, \quad entonces\ v = -\frac{L}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]$

$$\int (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx = -\frac{L(xL-x^2)}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] + \int \frac{L(L-2x)}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx$$

$$\int (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx = \frac{(Lx^2-xL^2)}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] + \int \frac{(L^2-2Lx)}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx$$

Otra vez por partes:

$u = (L^2-2Lx), \quad entonces \quad du = -2Ldx$

$dv = \frac{1}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx, \quad entonces \quad v = \frac{L}{(n\pi)^2}sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]$

$$\int (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx$$
$$= \frac{(Lx^2-xL^2)}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] + \left[\frac{L(L^2-2Lx)}{(n\pi)^2}sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] + \int \frac{2L^2}{(n\pi)^2}sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx\right]$$

$$\int_0^L (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx$$
$$= \left[\frac{(Lx^2-xL^2)}{n\pi}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]\right]_0^L + \left[\frac{(L^3-2L^2x)}{(n\pi)^2}sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] - \frac{2L^3}{(n\pi)^3}cos\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]\right]_0^L$$

$$\int_0^L (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx = \left[\frac{(L^3-L^3)}{n\pi}cos[n\pi] - 0\right] + \left[0 - \frac{2L^3}{(n\pi)^3}cos[n\pi] + \frac{2L^3}{(n\pi)^3}\right]$$

$$\int_0^L (xL-x^2)sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]dx = \frac{2L^3}{(n\pi)^3}[1-cos[n\pi]]$$

$$A_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2L^3}{(n\pi)^3}[1-cos[n\pi]]\right]$$

$$A_n = \frac{4L^2}{(n\pi)^3}[1-cos[n\pi]]$$

La solución es:

$$\boldsymbol{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4L^2}{(n\pi)^3}[1-\cos(n\pi)]sen\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right]e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kt}}$$

Transformada de Laplace de ciertas funciones

1). $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s} \quad , \quad s > 0,$

$\mathcal{L}\{k\}(s) = \frac{k}{s}\ , s > 0, k\ constante.$

2). $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\ , \quad s > 0,\ n = 1, 2, \ldots$

3). $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}\ , \quad \text{para}\ s > a$

4). $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\}(s) = \frac{k}{s^2+k^2}\ , \quad s > 0$

5). $\mathcal{L}\{\cos kt\}(s) = \frac{s}{s^2+k^2}\ , \quad s > 0$

6). $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} kt\}(s) = \frac{k}{s^2-k^2}\ , \quad s > |k|$

7). $\mathcal{L}\{\cosh kt\}(s) = \frac{s}{s^2-k^2}\ , \quad s > |k|$

8). $\mathcal{L}\{t^n\, e^{at}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\ , \quad s > a,\ n = 1, 2, \ldots$

Transformada inversa de Laplace de ciertas funciones

1). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1,\ y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s}\right\} = k\ ,\ si\ \ s > 0$

2). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^n\ y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}\ ,\ si\ \ s > 0$

3). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}\ ,\ si\ \ s > a$

4). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \operatorname{sen} kt,\ y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+k^2}\right\} = \frac{\operatorname{sen} kt}{k}\ ,\ si\ \ s > 0$

5). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt\ ,\ si\ \ s > 0$

6). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \operatorname{senh} kt\ y \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-k^2}\right\} = \frac{\operatorname{senh} kt}{k}\ ,\ si\ \ s > |k|$

7). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt\ ,\ si\ \ s > |k|$

8). $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n\, e^{at}\ y\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right\} = \frac{t^n\, e^{at}}{n!}\ ,\ si\ \ s > a$

Problemas propuestos

1.-) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales alrededor del punto Xo = 0. Determine si es posible la función a la que converge la primera solución, y luego halle por cualquier método la segunda solución linealmente independiente.

a) $xy''-y'+4x^3y=0;$

b) $4x^2y''-4xy'+(3-4x^2)y=0;$

c) $x(x-1)y''+3y'-2y=0;$

d) $x(x-1)y''-(1-3x)y'+y=0;$

e) $x(x-1)y''-3y'+2y=0;$

f) $x^2y''-x(4-x)y'+(6-2x)y=0;$

g) $xy''+2y'-xy=0$

h) $x^2y''+4xy'+(x^2+2)y=0$

2.-) Halle:

a)

$\mathscr{L}[10\text{sen}2\text{sen}5t];$

$\mathscr{L}\left[\left(t^2+1\right)^2\right];$

$\mathscr{L}\left[(\text{sent}-\cos t)^2\right];$

$\mathscr{L}[3\cosh 5t-4\text{senh}5t;]$

$\mathscr{L}\left[\left(5e^{2t}-3\right)^2\right];$

$\mathscr{L}\left[4\cos^2(2t)\right];$

$\mathscr{L}\left[\cosh^2 4t\right];$

$\mathscr{L}\left[t^{3/2}e^{-3t}\right];$

$\mathscr{L}\left[2e^{3t}\text{sen}4t\right];$

$\mathscr{L}\left[(t+2)^2e^t\right];$

b)
Para las siguientes funciones encuentre $\mathscr{L}[f''(t)]$:

$t^2e^{-t}\cos t;$

$5t^3\text{senh}2t;$

$2(t-1)^4\cos t;$

$\dfrac{t^3\text{sen}2t}{e^{-2t}};$

$5\text{sen}2t\cos 3t;$

c) Para las siguientes funciones encuentre $\mathscr{L}[f'(t)]$:

$6\cos 3t\text{sen}2t;$

$5\text{sen}2t\cos 2t;$

$10\text{senh}5t\cosh 3t;$

$2e^{-3t}\text{sen}^2(2t);$

$(3\cos t-\text{sen}2t)^2;$

d) Halle:

$\mathscr{L}\left[\int_0^t \left(u^2 - u + e^{-u}\right)du\right]$;

$\mathscr{L}\left[\int_0^t \left(\frac{1-e^{-u}}{u}\right)du\right]$;

$\mathscr{L}\left[\int_0^t \left(\frac{senu}{u}\right)du\right]$;

$\mathscr{L}\left[\int_0^t \left(\cos^2 3u\right)du\right]$;

$\mathscr{L}\left[\int_0^t \left(u^2 senhu\right)du\right]$;

e) Halle:

$\mathscr{L}[t(3sen2t - 2\cos 2t)]$;

$\mathscr{L}\left[t^2\left(\cos^2 t\right)\right]$;

$\mathscr{L}\left[t^2(f'(t))\right]$, si $f(t) = e^{-t}sent$;

$\mathscr{L}\left[t^3(senht)\right]$;

$\mathscr{L}\left[t\int_0^t \left(\frac{sen^2 2u}{e^{-2u}}\right)du\right]$;

f) Halle:

$\mathscr{L}\left[\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right]$;

$\mathscr{L}\left[\frac{\cos at - \cos bt}{t}\right]$;

$\mathscr{L}\left[\frac{senh3t}{t}\right]$;

$\mathscr{L}\left[5t^{-1}\cos 2t sen2t\right]$;

$\mathscr{L}\left[\frac{sen^2 t}{t^2}\right]$;

g) Halle:

$\mathscr{L}\left[e^{-2t} t \cos 3(t-\pi)u(t-\pi)\right]$;

$\mathscr{L}\left[e^{2t} t.senh\,(t)u(t-2)\right]$;

$\mathscr{L}\left[t^2 e^{-3t} u(t-1)\right]$;

$\mathscr{L}\left[sen\,(t)u(t-\pi)\right]$;

$\mathscr{L}\left[(t^2 - 3)u(t-5)\right]$;

$\mathscr{L}\left[\frac{sen2t}{t}\delta(t)\right]$;

$\mathscr{L}\left[\frac{1-e^{-(t-1)}}{t-1}\delta(t-1)\right]$;

$\mathscr{L}\left[\frac{3+(t^2-3)\delta(t)}{t^2+2t+5}\right]$;

3.-) Grafique las siguientes funciones y halle sus transformadas de Laplace:

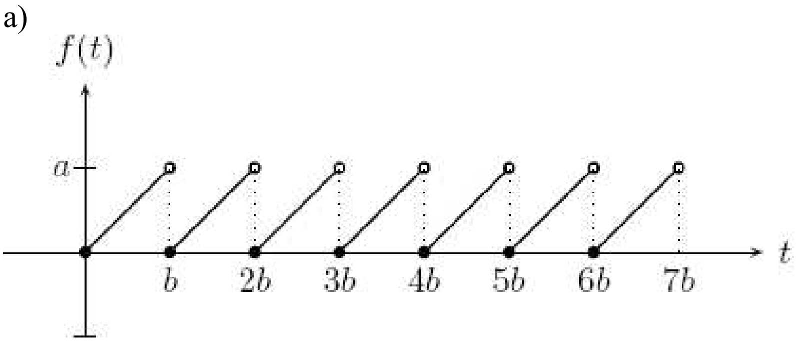
$$f(t)=\begin{cases} t-1; & 0\le t<5 \\ 0; & 5\le t<10 \\ t+5; & 10\le t<15 \\ 0; & t\ge 15 \end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases} 5; & 0\le t<3 \\ 10; & 3\le t<6 \\ -20; & 6\le t<9 \\ 0; & t\ge 9 \end{cases}$$

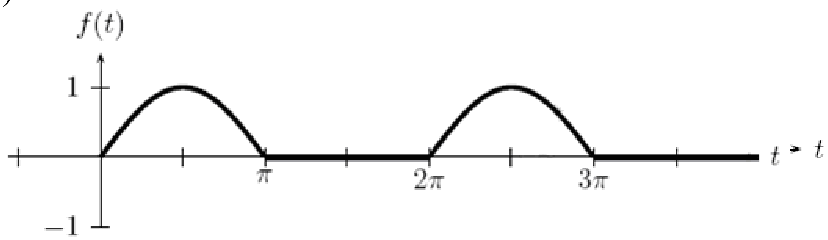
$$g(t)=\begin{cases} 5\text{sent}; & 0\le t<\pi \\ 0; & \pi\le t<2\pi \\ -5\text{sent}; & 2\pi\le t<3\pi \\ 0, & t\ge 3\pi \end{cases}$$

4.) Encuentre el período de las siguientes gráficas y halle la transformada de Laplace de cada una de ellas:

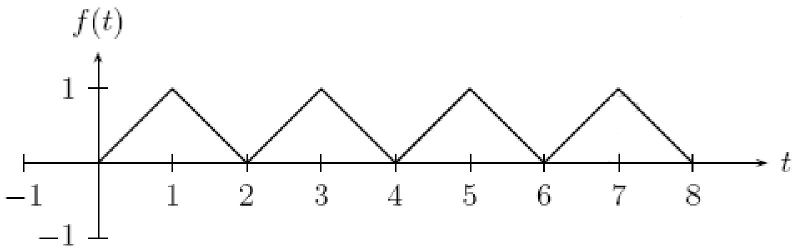
a)



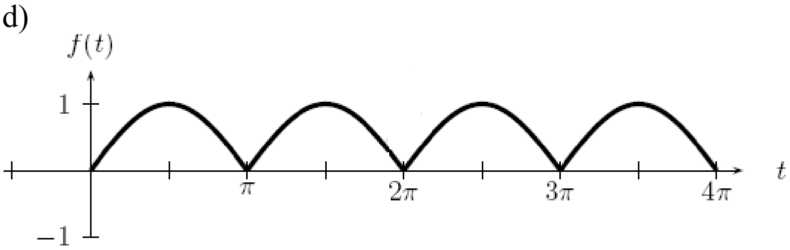
b)



c)



d)



5.-) Encuentre las transformadas inversas de Laplace de las siguientes funciones:

$F(S)=\dfrac{1}{s^2+9};$

$F(S)=\dfrac{1}{s^4};$

$F(S)=\dfrac{s}{s^2+2};$

$F(S)=\dfrac{1}{s^2-3};$

$F(S)=\dfrac{1}{s^{3/2}};$

$F(S)=\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

$F(S)=\dfrac{4s+2}{s^2+8s+16};$

$F(S)=\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3};$

$F(S)=\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}};$

$F(S)=\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2};$

$F(S)=\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right);$

$F(S)=\dfrac{1}{s^3\left(s^2+1\right)};$

$F(S)=\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)};$

$F(S)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$

$F(S)=\dfrac{1}{(s+1)^5}$

$F(S)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2}$

$F(S)=\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}$

$F(S)=\dfrac{e^{-2s}}{s^2-2s+5}$

$F(s)=\dfrac{s+1}{\left(s^2+2s+2\right)^2}$

$F(s)=\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right);$

$F(s)=\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)$

$F(s)=\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right);$

$F(s)=\left(\dfrac{1}{s(s+1)^3}\right);$

$F(s)=\dfrac{s+2}{s^2(s+3)};$

$F(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s-1)^5};$

$F(s)=\dfrac{s^2}{\left(s^2+4\right)^2};$

$F(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^3};$

$F(S)=\dfrac{3s^3-3s^2-40s+36}{\left(s^2-4\right)^2};$

$F(S)=\dfrac{4se^{-2s}}{\left(s^2-6s+25\right)};$

$F(S)=\operatorname{arc\,cot}(s+1);$

$F(S)=\ln\left(\dfrac{s^2+1}{(s-1)^2}\right);$

$F(S)=\ln\left(\dfrac{s^2+9}{s^2+1}\right);$

$F(S)=\dfrac{2}{s^2\left(s^2-2s+5\right)};$

6.-) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace:

a) $y''-7y'+10y=9\cos t+7\operatorname{sen} t;\quad y(0)=5,\quad y'(0)=-4$

b) $y''+5y'=2te^{t};\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=9$

c) $y''+y=3\operatorname{sen}2t-3(\operatorname{sen}2t)u(t-2\pi);\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-2$

d) $y''+4y=4u(t-\pi)+e^{2t}\delta(t-2\pi);\quad y(0)=y'(0)=0.$

e) $ty''+2ty'+ty=0;\quad y(0)=1,\quad y'(\pi)=0;$

f) $y''-ty'+y=1;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2;$

g) $ty''-2y'+ty=2;\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0;$

h) $y'(t)+y(t)-\int_0^t y(\theta)\operatorname{sen}(t-\theta)d\theta=-\operatorname{sen} t;\qquad y(0)=1$

i) $y(t)+\int_0^t y(\theta)(t-\theta)^2 d\theta=t^3+3;$

j) $y'(t)-2\int_0^t y(\theta)e^{t-\theta}d\theta=t;\qquad y(0)=2;$

7.-) En los siguientes problemas utilice el método de eliminación para encontrar la solución general del sistema lineal dado, donde x', y', z' denotan diferenciación con respecto a t.

a) $\begin{cases} x'=3y, \\ y'=2x-y; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x'+y'-x=5; \\ x'+y'+y=1; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x'=3x-2y+\operatorname{sen} t; \\ y'=4x-y-\cos t; \end{cases}$

e) $\begin{cases} x''+5x-4y=0; \\ -x+y''+2y=0; \end{cases}$

8.-) En los siguientes problemas utilice el método de los operadores diferenciales para encontrar la solución general del sistema lineal dado:

a) $\begin{cases} (D^2-4D+4)x+(D^2+2D)y=t; \\ (D^2-2D)x+(D^2+4D+4)y=e^{t}; \end{cases}$ dadas : $x(0)=1,\quad x'(0)=2$

b) $\begin{cases} (D+2)x+(D-1)y=-\operatorname{sen} t; \\ (D-3)x+(D+2)y=4\cos t; \end{cases}$

c) $\begin{cases} (D^2+2)x-y=0; \\ -x+(D^2+2)y=0; \end{cases}$ $y(0)=2\ ,\ x(0)=x'(0)=y'(0)=0$

9.-) En los siguientes problemas utilice el método de la transformada de Laplace para encontrar la solución general del sistema lineal dado:

a) $\begin{cases} y'-z'-2y+2z=\operatorname{sen} t; \\ y''+2z'+y=0; \end{cases}$ $y(0)=y'(0)=z(0)=0;$

b) $\begin{cases} ty+z+tz'=(t-1)e^{-t}; \\ y'-z=e^{-t}; \end{cases}$ $y(0)=1, z(0)=-1.$

c) $\begin{cases} -3y''+3z''=te^{-t}-3\cos t; \\ ty''-z'=\operatorname{sen} t; \end{cases}$ $y(0)=-1, y'(0)=2;\ z(0)=4, z''(0)=0;$

10.-) En los siguientes problemas utilice el método de los valores y vectores propios para encontrar la solución general del sistema lineal dado:

a) $\mathcal{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X, \qquad \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} 2x' + 3x + 5y = 0; \\ 2y' - 5x - 3y = 0; \end{cases}$

c) $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X', \quad \mathcal{X}(0) = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \end{pmatrix}$

<u>APLICACIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN</u>

1) Una masa de 100 gramos esta sujeta a un resorte de acero de longitud natural igual a 50 cm. El resorte se alarga cuando se le agrega esta masa. Si la masa se pone en movimiento con una velocidad de 10cm/s, determine el movimiento subsiguiente. (Desprecie la resistencia del aire)

2) Un circuito mecánico vibratorio compuesto de un resorte de constante K=4 N/m. Un amortiguador de constante e=6 Ns/m, tiene adherido una bola metálica de 20 N de peso. Determine la forma en que vibra la masa si inicialmente esta en la posición de equilibrio y sin velocidad inicial, y si desde el tiempo t=0 actúa sobre una fuerza perturbadora periódica definida así:

$$f(t) = \begin{cases} 100t; & t \in [0,2) \\ 400 - 100t & t \in [2,4) \end{cases}; \qquad f(t) = f(t-4).$$

3) Un resorte se estira 50cm con una fuerza de 2 Newton. El resorte en referencia forma parte de un sistema m-c-k el cual tiene una masa de 1 Kg, y un amortiguador con una constante c = 4N.m/s. Si la masa es puesta en movimiento desde su posición de equilibrio y sin velocidad inicial con una fuerza perturbadora de 20 Newton que actúa los primeros 5 segundos y luego cesa durante 5 segundos, y luego crece linealmente hasta 10 Newton durante 10 segundos, para nuevamente cesar definitivamente. Determine la forma en que vibra la masa.

a) **¿Cuál es la posición de la masa a los 2 segundos y a los 8 segundos?**

4) Un inductor de 0.5 henrios es conectado en serie con una resistencia de 6 ohmios y un condensador de 0.02 faradios. Inicialmente el condensador no tiene carga. Si el sistema es perturbado por una fuerza electromotriz de 12 voltios en el intervalo de tiempo.
2< t < 8 (seg), y luego por un voltaje instantáneo de 24 voltios en el instante t= 15 seg, determine:

a) **La carga acumulada en el capacitor en el tiempo t= 6 seg.**
b) **La intensidad de corriente que atraviesa el circuito en el tiempo t= 10 seg.**

Este documento fue creado con fines académicos, de apoyo para los estudiantes politécnicos.

Agradecimiento: Agradezco a Dios por haberme dado fuerza, paciencia para la elaboración de esta obra. A mi profesora de esta materia, Yadira Moreno. Y a los profesores a los que colaboré en la materia como ayudante de cátedra puesto que ellos fueron los que me dieron su confianza y apoyo para impartir las clases y compartir el conocimiento, los cuales pongo a continuación:
Janet Valdiviezo, Eduardo Rivadeneira, Fernando Sandoya, Enrique Bayot, Félix Ramírez.

Dedicado a todos mis compañeros politécnicos.

Roberto Cabrera Velasco.

Referencias

- Zill, Dennis G. (2006). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica

- Nagle Kent, Saff Edward, Zinder Arthur, *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera,* Editorial Addison –Wesley Iberoamericana, 2001.

- William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 4a ed. México, Limusa, 1998