1 Vectores en R3

Objetivos.
Se persigue que el estudiante:

- Represente geométricamente un vector de R^3
- Determine magnitud y dirección de un vector.
- Sume vectores, multiplique por un escalar a un vector, obtenga el producto escalar y el producto vectorial entre vectores
- Obtenga el área de un paralelogramo sustentados por dos vectores.
- Obtenga el volumen del paralelepípedo sustentado por tres vectores.

Tomando como referencia la teoría de vectores en el plano, se obtienen definiciones y propiedades de los vectores en el espacio.

1.1 DEFINICIÓN

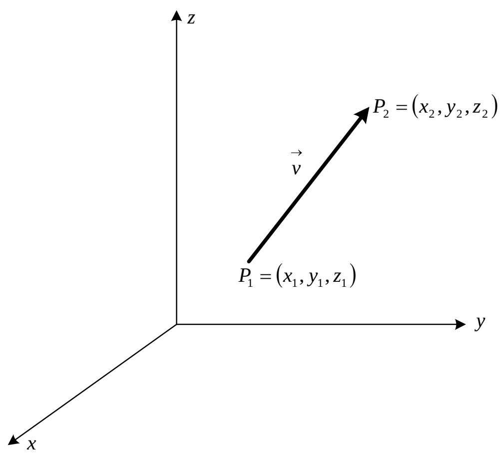
Un vector de R^3 es una terna ordenada de números reales. Denotada de la siguiente manera:

$$\vec{v} = (x, y, z)$$

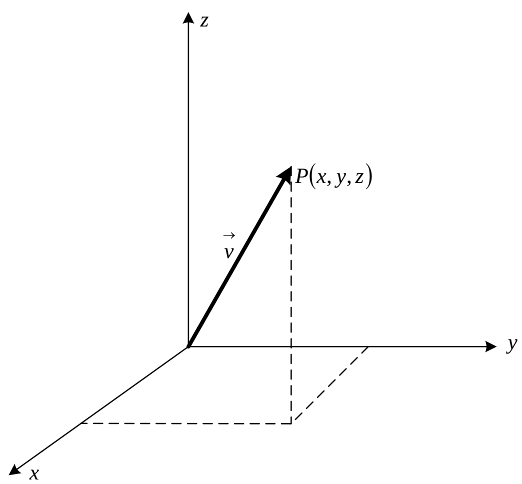
1.2 ENFOQUE GEOMÉTRICO

Geométricamente a un vector de R^3 se lo representa en el Espacio como un segmento de recta dirigido.

Suponga que se tienen los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Si trazamos un segmento de recta dirigido desde P_1 hacia P_2 tenemos una representación del vector $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1\ ,\ y_2 - y_1, z_1 - z_2)$



Este vector puede tener muchas otras representaciones equivalentes en el espacio. Una representación equivalente útil es aquella que se realiza ubicando al vector con el origen como punto de partida.



1.2.1 Magnitud o norma

Sea $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$. La *magnitud o norma* de $\overrightarrow{v}$ denotada como $\left\|\overrightarrow{v}\right\|$, se define como:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

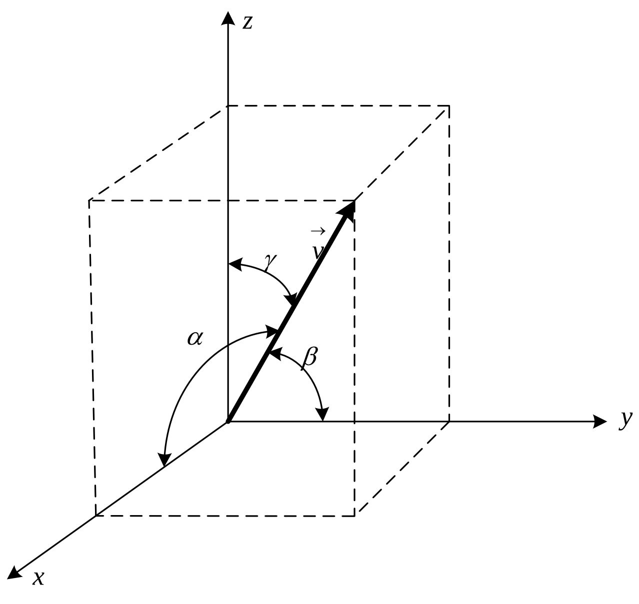
Note que la norma sería la longitud del segmento de recta que define el vector. Es decir, sería la distancia entre los puntos que lo definen.

Para $\overrightarrow{v} = (x_2 - x_1\ , y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ sería:

$$\left\|\overrightarrow{v}\right\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

1.2.2 Dirección

La *dirección* de $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ está definida por la medida de los ángulo que forma la línea de acción del segmento de recta con los ejes x, y, z



Los ángulos α, β y γ son llamados **Ángulos Directores.**

Observe que:

$$Cos\alpha = \frac{x}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\beta = \frac{y}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$Cos\gamma = \frac{y}{\left\| \vec{v} \right\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ejercicio.

Demostrar que $\boxed{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1}$

1.2.3 Sentido

El *sentido* de $\vec{v}$ lo define la flecha dibujada sobre el segmento de recta.

1.3 IGUALDAD DE VECTORES DE R^3

Dos vectores $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ son iguales si y sólo si $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ y $z_1 = z_2$

1.4 OPERACIONES

1.4.1 Suma

Sean $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ dos vectores de R^3 tales que $\vec{v_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v_2} = (x_2, y_2, z_2)$ entonces la suma de $\vec{v_1}$ con $\vec{v_2}$, denotada como $\vec{v_1} + \vec{v_2}$, se define como:

$$\vec{v_1} + \vec{v_2} = (x_1 + x_2 \ , y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

1.4.1.1 Propiedades

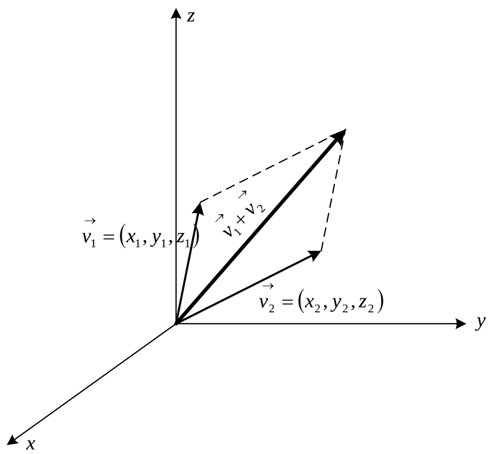
Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de R^3, entonces:

1. $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}_2+\vec{v}_1$ la suma es conmutativa
2. $\vec{v}_1+\left(\vec{v}_2+\vec{v}_3\right)=\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)+\vec{v}_3$ la suma es asociativa
3. $\exists\vec{0}\in R^3$, $\forall\vec{v}\in R^3$ tal que $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$,

   Donde $\vec{0}=(0,0,0)$ es llamado **Vector Neutro**
4. $\forall\vec{v}\in R^3$, $\exists\left(-\vec{v}\right)\in R^3$ tal que $\vec{v}+\left(-\vec{v}\right)=\vec{0}$

   Donde $\left(-\vec{v}\right)$ es llamado **Vector Inverso Aditivo** de $\vec{v}$

Geométricamente:



Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ sustentan un paralelogramo, el vector de la **diagonal mayor** es el **Vector Suma** y el vector de la **diagonal menor** es el **Vector Diferencia**.

1.4.2 Multiplicación por escalar

Sea $\alpha\in R$ y $\vec{v}=(x,y,z)$ un vector de R^3 entonces:

$$\alpha\vec{v}=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$$

1.4.2.1 Propiedades

1. $\forall \alpha \in R, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in R^3 \left[\alpha\left(\vec{v}_1 + \vec{v}_2\right) = \alpha \vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 \right]$
2. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{v} \in R^3 \left[(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{v} \right]$
3. $\forall \alpha, \beta \in R, \forall \vec{v} \in R^3 \left[\alpha\left(\beta \vec{v}\right) = (\alpha\beta)\vec{v} \right]$

Cualquier vector de R^3, $\vec{v} = (x, y, z)$, puede ser expresado en combinación lineal de los vectores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ y $\vec{k} = (0,0,1)$

$$\vec{v} = (x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$$
$$\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

1.4. 3. Producto Escalar. Producto Punto o Producto Interno

Sean $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de R^3. El Producto escalar de $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ denotado como $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$ se define como:

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Ejemplo

Si $\vec{v}_1 = (3,1,-2)$ y $\vec{v}_2 = (-1,4,0)$ entonces

$$\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = (3)(-1) + (1)(4) + (-2)(0) = -3 + 4 + 0 = 1$$

1.4.3.1 Propiedades

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ vectores de R^3. Entonces:

1. $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = \vec{v}_2 \bullet \vec{v}_1$

2. $\vec{v}_1 \bullet \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2$

3. $\left(\alpha \vec{v}_1\right) \bullet \left(\beta \vec{v}_2\right) = \alpha\beta\left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)$

Si $\vec{v} = (x, y, z)$ entonces:

$$\vec{v} \bullet \vec{v} = (x, y, z) \bullet (x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Por lo tanto $\vec{v} \bullet \vec{v} = \left\|\vec{v}\right\|^2$ o también $\left\|\vec{v}\right\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}}$

1.4. 4. Producto Vectorial. Producto Cruz

Sean $\vec{v}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vectores de R^3. El Producto Vectorial de $\vec{v}_1$ con $\vec{v}_2$ denotado como $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ se define como:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left(y_1 z_2 - z_1 y_2, -\left(x_1 z_2 - x_2 z_1\right), x_1 y_2 - y_1 x_2\right)$$

Una manera práctica para obtener el resultado de la operación Producto Cruz entre dos vectores es resolver el siguiente determinante, para la primera fila:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Ejemplo.

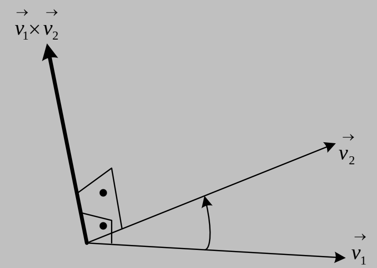
Sea $\vec{v}_1 = (1,2,-1)$ y $\vec{v}_2 = (2,-1,0)$ entonces

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$$

1.4.4.1 Propiedades.

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ vectores de R^3

1. El vector $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ es tanto perpendicular a $\vec{v}_1$ como a $\vec{v}_2$
2. El sentido del vector $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$ se lo puede obtener empleando la mano derecha. Mientras los dedos se dirigen desde $\vec{v}_1$ hacia $\vec{v}_2$, el pulgar indica la dirección de $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$.



3. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1\right)$
4. $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{0}$
5. Si $\vec{v}_1 // \vec{v}_2$ entonces $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0}$
6. $\left(\alpha_1 \vec{v}_1\right) \times \left(\alpha_2 \vec{v}_2\right) = \alpha_1 \alpha_2 \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right)$
7. $\vec{v}_1 \times \left(\vec{v}_2 + \vec{v}_3\right) = \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) + \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_3\right)$
8. $\left\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2 \left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2\right)^2$

De la última expresión, empleando la propiedad del producto escalar, se obtiene un resultado muy importante:

$$\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\vec{v}_1\bullet\vec{v}_2\right)^2$$
$$= \left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left(\left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\|\cos\theta\right)^2$$
$$= \left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2 - \left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2\cos^2\theta$$
$$= \left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2\left[1-\cos^2\theta\right]$$
$$\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|^2 = \left\|\vec{v}_1\right\|^2\left\|\vec{v}_2\right\|^2 sen^2\theta$$

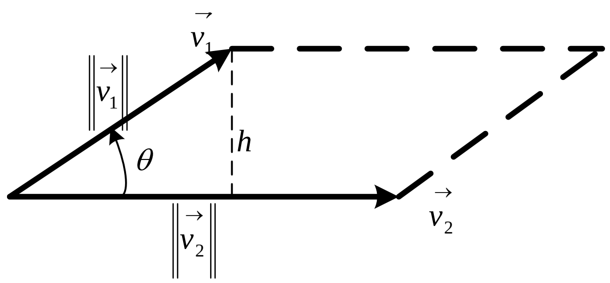
Finalmente:

$$\left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\| = \left\|\vec{v}_1\right\|\left\|\vec{v}_2\right\| sen\theta$$

1.5 APLICACIONES

1.5.1 CALCULO DEL ÁREA DEL PARALELOGRAMO SUSTENTADO POR DOS VECTORES.

Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ dos vectores, no paralelos. Observe la figura:



Tomando como base a $\vec{v}_2$, tenemos:

$$Area = base \bullet altura$$
$$= \left\|\vec{v}_2\right\| h$$

Observe que $\boxed{sen\theta = \dfrac{h}{\left\|\vec{v}_1\right\|}}$ entonces $\boxed{Area = \left\|\vec{v}_2\right\|\left\|\vec{v}_1\right\| sen\theta}$

Y por la propiedad del producto cruz:

$$Area = \left\|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right\|$$

Ejemplo 1

Hallar el área del triángulo sustentado por los vectores $\overrightarrow{v_1} = (1, 2, -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (2, -1, 0)$

SOLUCIÓN:

El área del triángulo sustentado por dos vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ es la mitad del área del paralelogramo sustentado por los vectores, es decir:

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \right\|}{2}$$

Como $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -i - 2j - 5k$

entonces

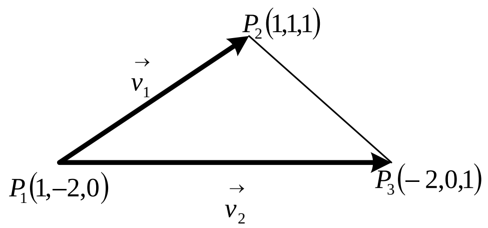
$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-5)^2}}{2} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

Ejemplo 2

Hallar el área del triángulo que tiene por vértices los puntos $(1,-2,0)$, $(1,1,1)$ y $(-2,0,1)$

SOLUCIÖN:

Primero se forman dos vectores entre los puntos dados, tomando arbitrariamente el orden de estos puntos; luego se procede de manera análoga a lo mencionado anteriormente debido a que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.



En este caso, $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1-1, 1-(-2), 1-0) = (0,3,1)$

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{P_2P_3} = (-2-1, 0-(-2), 1-0) = (-3,2,1)$$

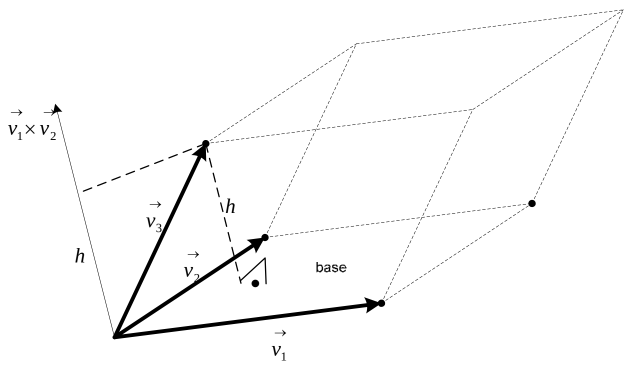
Entonces,

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i - 3j - 9k$$

$$Area\ Triángulo = \frac{\left\| \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (9)^2}}{2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$$

1.5.2 CALCULO DEL VOLUMEN DEL PARALELEPÍPEDO SUSTENTADO POR TRES VECTORES

Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ tres vectores. Observe la figura.



Tomando como base el paralelogramo sustentado por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, la altura h del paralelepípedo será la proyección escalar $\vec{v}_3$ sobre $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$, entonces:

$$Volumen = Area\ base \times altura$$

Donde $Area\ base = \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|$

$$altura = h = \left| \Pr oy_{\vec{v}_1 \times \vec{v}_2} \vec{v}_3 \right| = \left| \frac{\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3}{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|} \right|$$

Por tanto.

$$Volumen = \left| \left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\| \frac{\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3}{\left\| \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right\|} \right|$$

Finalmente, simplificando resulta:

$$Volumen = \left| \left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \right) \bullet \vec{v}_3 \right|$$

Esta última expresión es denominada, EL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR de los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$, y su interpretación es el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$. Observe además que no importa el orden de operación de los vectores, ¿por qué?.

Ejemplo

Hallar el volumen del paralelepípedo sustentado por los vectores $\vec{v}_1 = (1,-2,1)$, $\vec{v}_2 = (2,0,-1)$ y $\vec{v}_3 = (1,2,3)$.

SOLUCIÖN.

Por lo definido anteriormente,

$$Volumen = \left|\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) \bullet \vec{v}_3\right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2+14+4 = 20u^3$$

Ejercicios propuestos

1. Sean los vectores $\vec{V}_1 = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$.

   a) Determinar la proyección vectorial de $\vec{V}_1$ sobre el vector $\vec{V}_2$.

   b) Calcular la componente de $\vec{V}_1$ perpendicular a $\vec{V}_2$.

   Resp. a) $\overrightarrow{\Pr oy_{\vec{V}_2} \vec{V}_1} = \left(-\frac{15}{22}, -\frac{15}{22}, \frac{10}{22}\right)$ b)

2. Sean los vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - B_z\hat{k}$. Calcule los valores de A_x y B_z para los cuales $\vec{A} \times \vec{B}$ es paralelo a: a) al eje x b) al eje y

   Resp. a) $A_x = \frac{15}{2}$ $B_z = \frac{4}{5}$ b) $A_x = \frac{15}{2}$ $B_z = \frac{4}{5}$

3. Calcular el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos (-3,2,4); (2,1,7) ; (4,2,6)

   Resp. $Area = \frac{\sqrt{174}}{2}$

4. Dados tres vectores $V_1 = (5,2,6)$, $V_2 = (-1,8,3)$, $V_3 = (2,-7,4)$ forman un tetraedro con vértice en el origen. Determinar su altura desde el origen. Resp. $h = \frac{77}{\sqrt{746}}$

5. Un tetraedro tiene por base el triángulo de vértices (3.-6,-1) , (4,4,-2) y (-3,-1,2); Si el vértice opuesto es el punto (8,10,6) , determine su altura. Resp. $h = \frac{938}{\sqrt{5459}}$

6. Sean u y v vectores no nulos, diferentes tales que: $w_1 = u + v$, $w_2 = u - v$, $w_3 = \frac{1}{2}(u+v)$. Hallar $w_1 \bullet (w_2 \times w_3)$ Resp. 0

7. Sea $\vec{V}$ un vector diferente de cero, entonces, demostrar que si $\vec{U}$ es un vector cualquiera, el vector $\vec{W} = \vec{U} - \frac{\vec{U} \bullet \vec{V}}{\left\|\vec{V}\right\|^2}\vec{V}$ es ortogonal a $\vec{V}$.

8. Demuestre que si $\vec{U}$ es ortogonal a $\vec{V}$ y a $\vec{W}$, entonces $\vec{U}$ es ortogonal a $c\vec{V} + d\vec{W}$ para escalares cualquiera c y d.

9. Demostrar que el área del triángulo, cuyos vértices son los extremos de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, es $\frac{1}{2}\left|\left(\vec{B} - \vec{A}\right) \times \left(\vec{C} - \vec{A}\right)\right|$

10. Demostrar que el volumen del tetraedro de aristas $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{B} + \vec{C}$ y $\vec{C} + \vec{A}$ y es el doble del volumen del tetraedro de aristas $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

11. Pruebe que las diagonales de un rombo (paralelogramo con lados iguales) son perpendiculares.

2 Geometría Analítica en R3

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Encuentre ecuaciones de Rectas y Planos.
- Grafique Rectas y Planos.
- Encuentre distancias.
- Grafique Superficies Cilíndricas, de Revolución y Cuádricas.

2.1 RECTAS EN R^3

2.1.1 DEFINICIÓN

Sea P_0 un punto de R^3 y sea $\vec{S}$ un vector de R^3. Una **Recta** l se define como el conjunto de puntos P de R^3 que contiene a P_0 y tal que los vectores $\vec{V}=\overrightarrow{P_0P}$ son paralelos a $\vec{S}$.

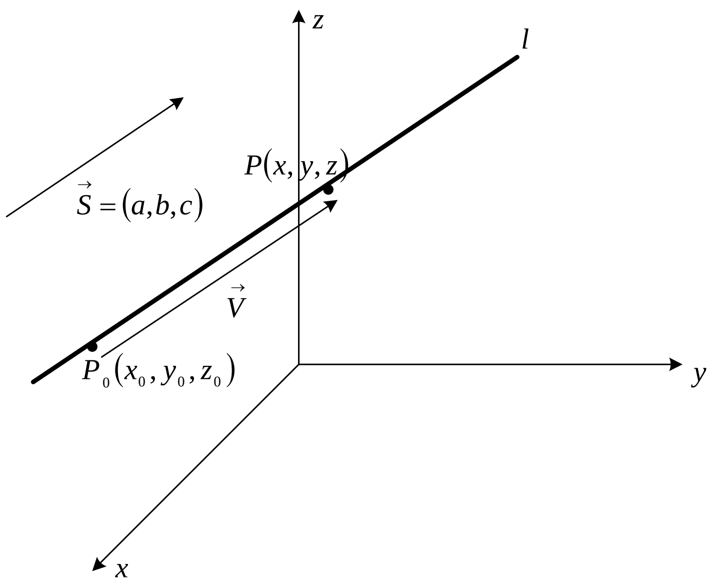
Es decir:

$$l=\left\{P(x,y,z)/P_0\in l\ y\ \vec{S}//\vec{V}\ donde\,\vec{V}=\overrightarrow{P_0P}\right\}$$

Al Vector $\vec{S}$ se lo llama **VECTOR DIRECTRIZ** de la recta.

2.1.2 ECUACIÓN

Sea $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y sea el vector $\vec{S}=(a,b,c)$.



El vector $\vec{S}$ es paralelo al vector $\vec{V}=\vec{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, entonces:

$$\vec{V}=k\vec{S}$$

Reemplazando resulta:

$$(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=k(a,b,c)$$

Por igualdad de vectores, se plantea lo siguiente:

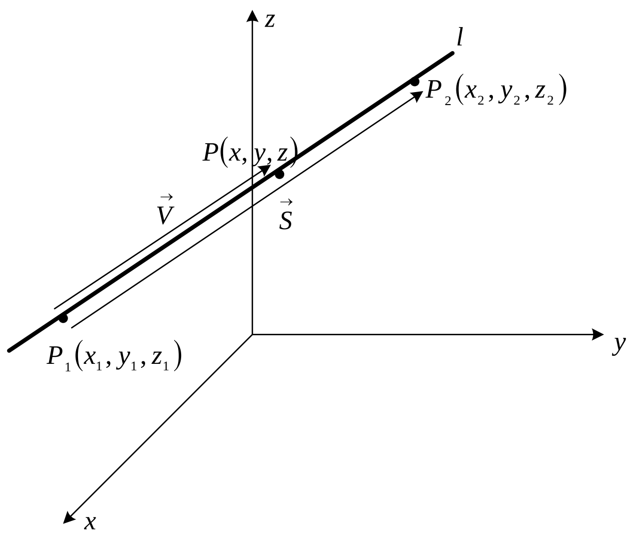
$$\begin{cases} (x-x_0)=ka \\ (y-y_0)=kb \\ (z-z_0)=kc \end{cases}$$

Entonces tenemos:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

Ecuación de la recta definida por **un punto** $P_0(x_0, y_0, z_0)$ **y un vector paralelo** $\vec{S}=(a,b,c)$

En ocasiones anteriores ya se ha mencionado que dos puntos definen una recta, observe la figura:



Ahora tenemos que, $P_0=P_1(x_1, y_1, z_1)$ y el vector directriz sería:

$$\vec{S}=\overrightarrow{P_1P_2}=\left(\underbrace{x_2-x_1}_{a}, \underbrace{y_2-y_1}_{b}, \underbrace{z_2-z_1}_{c}\right),$$

Entonces, se tiene:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Ecuación de la recta definida por **dos puntos**

También se la llama **ECUACIÓN CANÓNICA O ECUACIÓN SIMÉTRICA.**

Si consideramos:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}=t$$

Tenemos:

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$$

Ecuaciones Parámetricas

De lo anterior:

$$(x,y,z)=(x_0+at,\ y_0+bt,\ z_0+ct)$$
$$(x,y,z)=\underbrace{(x_0,y_0,z_0)}_{\overrightarrow{V}_0}+t\underbrace{(a,b,c)}_{\overrightarrow{S}}$$

Se puede expresar de la siguiente manera:

$$\vec{V}=\vec{V}_0+t\,\vec{S}$$

Ecuación Vectorial

Ejemplo

Hallar las Ecuaciones paramétricas de la recta que contiene al punto $P(1,-1-1)$ y es paralela al vector $\vec{S}=(1,0,2)$.

SOLUCIÓN:
De a cuerdo a lo definido:

$$\begin{cases} x=x_0+at=1+t \\ y=y_0+bt=-1 \\ z=z_0+ct=1+2t \end{cases}$$

Ejercicios Propuestos. 2.1

1. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 1, 3) y (1, 2, -1). Grafíquela

   Resp. $l:\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=-1-4t \end{cases}$

2. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 1, 0) y (2,1, 5). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir? ¿Cuál sería la ecuación del eje z?

3. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 0, 2) y (2,5, 2). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir? ¿Cuál sería la ecuación del eje y?

4. Escriba ecuaciones paramétricas de rectas paralelas al eje x.

5. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 3, 5) y (2,2, 0). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir?

6. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (0, 2, 2) y (2,2, 0). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir?

7. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene los puntos (2, 0, 2) y (0,2, 2). Grafíquela. ¿Qué conclusión puede emitir?

8. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que contiene el punto (-1, -6, 2) y es paralela al vector (4, 1, -3). Grafíquela

Resp. $l:\begin{cases} x=-1+4t \\ y=-6+t \\ z=2-3t \end{cases}$

9. Halle ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta cuya ecuación es: $\frac{1}{4}(x-10)=\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}z$.

Resp. $l:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=-5t \end{cases}$

2.2 PLANOS

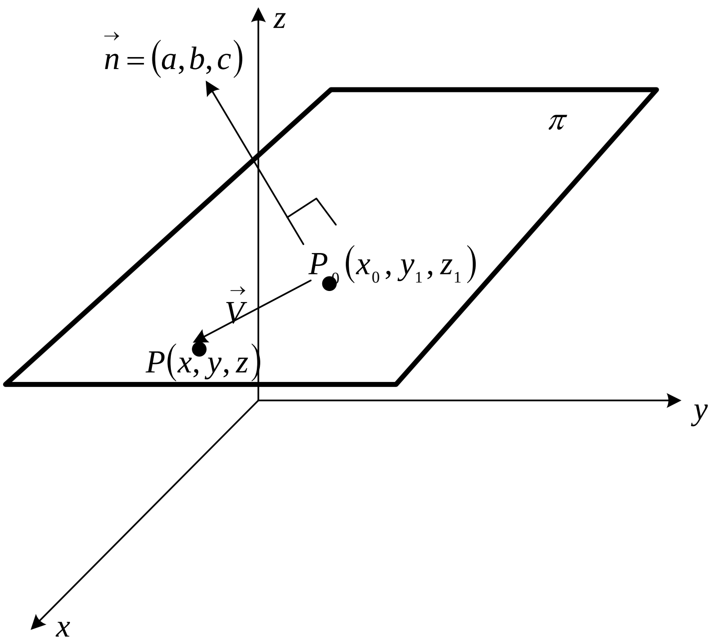
2.2.1 DEFINICIÓN

Sea P_0 un punto de R^3 y sea $\vec{n}$ un vector de R^3. Un Plano π se define como el conjunto de puntos P de R^3 tales que $\vec{n}$ es perpendicular al vector $\vec{V}$ que se define entre P_0 y P. Es decir:

$$\pi=\left\{P(x,y,z)/\vec{n}\bullet\vec{V}=0 \ donde\ \vec{V}=\overrightarrow{P_0P} \ y \ P_0\in R^3\right\}$$

2.2.2 ECUACIÓN

Sean $\vec{n}=(a,b,c)$ y $P_0(x_0,y_0,z_0)$. Observe la figura:



Entonces

$$\vec{n}\bullet\vec{V}=0$$
$$(a,b,c)\bullet(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$$

Por tanto, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Ecuación de un plano definida por **UN PUNTO Y UN VECTOR PERPENDICULAR.**

Si se simplifica, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0$$

Considerando $\boxed{d=-ax_0-by_0-cz_0}$, tenemos:

$$ax+by+cz+d=0$$

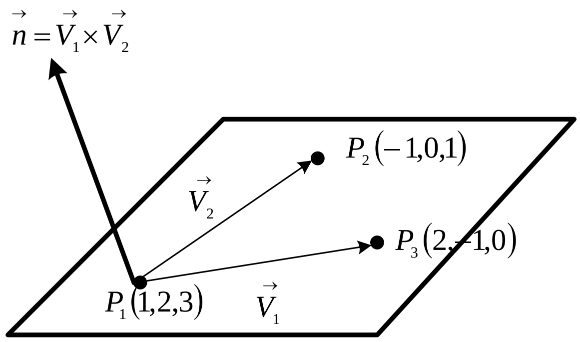
ECUACIÓN GENERAL de un plano.

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,2,3)$, $P_2(-1,0,1)$ y $P_3(2,-1,0)$

SOLUCIÓN:

Con los tres puntos dados se forman dos vectores (no importa el orden) para de ahí obtener un vector perpendicular al plano buscado.



En este caso:

$$\vec{V}_1 = \overrightarrow{P_1P_3} = (2-1,-1-2,0-3) = (1,-3,-3)$$
$$\vec{V}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} = (-1-1,0-2,1-3) = (-2,-2,-2)$$

Entonces

$$\vec{n} = \vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (6-6)i - (-2-6)j + (-2-6)k$$

$$\vec{n} = \underbrace{0}_{a}i + \underbrace{8}_{b}j \underbrace{-8}_{c}k$$

Podemos tomar $P_0(x_0, y_0, z_0) = P_1(1,2,3)$ (puede ser cualquier otro punto del plano)

Finalmente, empleando la ecuación:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

Resulta:

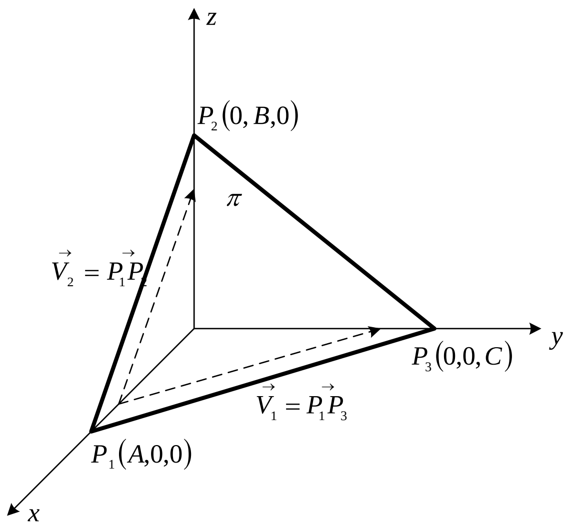
$$0(x-1) + 8(y-2) - 8(z-3) = 0$$
$$8y - 16 - 8z + 24 = 0$$
$$y - z + 1 = 0$$

Ejemplo 2

Demostrar que la ecuación del plano que tiene intersección A, B, C, respectivamente con los ejes x, y, z es $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1$.

SOLUCIÓN:

Si el plano tiene intersección A, B, C con los ejes coordenados entonces tenemos tres puntos que pertenecen al plano y se puede determinar su ecuación como en el ejemplo anterior. Observe la figura:



En este caso tomamos: $\vec{V}_1=(-A,B,0)$ y $\vec{V}_2=(-A,0,C)$

Entonces:

$$\vec{n}=\vec{V}_1\times\vec{V}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -A & B & 0 \\ -A & 0 & C\end{vmatrix}=(BC)i-(-AC)j+(AB)k$$

Si tomamos $P_0(x_0,y_0,z_0)=P_1(A,0,0)$ y reemplazando en la ecuación

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Resulta:

$$BC(x-A)+AC(y-0)+AB(z-0)=0$$
$$BCx-ABC+ACy+ABz=0$$
$$BCx+ACy+ABz=ABC$$

Dividiendo para ABC

$$\frac{BCx}{ABC}+\frac{ACy}{ABC}+\frac{ABz}{ABC}=\frac{ABC}{ABC}$$
$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$$

2.2.3 CONDICIONES ESPECIALES.

Si el plano es **PARALELO AL PLANO** xy, entonces sólo tendrá intersección con el eje z, su vector normal será de la forma $\vec{n}=(0,0,k)$. Su ecuación será de la forma $z=C$. ¿POR QUÉ?. ¿Cuál es la ecuación del plano xy?

PREGUNTA: ¿Cómo serán las ecuaciones de los planos: paralelo al plano zy, paralelo al plano zx, paralelo al eje z, paralelo al eje x, paralelo al eje y?.

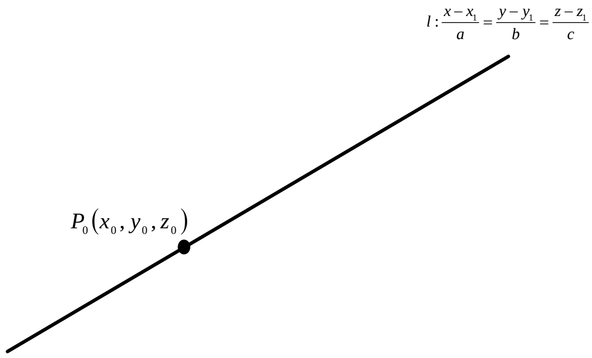
Ejercicios Propuestos.2.2

1. Dibuje los planos cuyas ecuaciones son:
   a) $4x+2y+6z=12$ d) $x+2y=4$ g) $x+y+z=0$
   b) $3x+6y+2z=6$ e) $2x+y-z=6$
   c) $y+z=5$ f) $x-3z=3$
2. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es paralelo al plano "xz"
   Resp. $y=7$
3. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es perpendicular al eje "x"
   Resp. $x=-5$
4. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es paralelo tanto al eje "x" como al de "y"
   Resp. $z=-2$
5. Encuentre la ecuación del plano que contienen al punto (-5,7,-2) y que es paralelo al plano $3x-4y+z=7$
   Resp. $3x-4y+z=-45$
6. Hallar la ecuación del plano paralelo al plano $x+3y-2z+14=0$ y tal que la suma de sus intersecciones con los ejes coordenados sea igual a 5.
   Resp. $x+3y-2z=6$
7. Hallar la ecuación del plano que es paralelo al plano $3x+8y-5z+16=0$ y que intercepta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C, de tal manera que A + B + C = 31.
   Resp. $3x+8y-5z=120$

2. 3. POSICIONES RELATIVAS

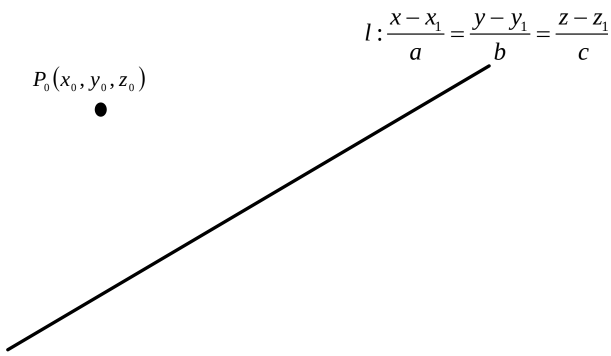
2.3.1 ENTRE UN PUNTO P_0 Y UNA RECTA l

2.3.1.1 EL PUNTO PERTENECE A LA RECTA: $P_0 \in l$



Si un punto pertenece a una recta entonces las coordenadas del punto satisfacen la ecuación de la recta, es decir $\dfrac{x_0-x_1}{a}=\dfrac{y_0-y_1}{b}=\dfrac{z_0-z_1}{c}$

2.3.1.2 EL PUNTO NO PERTENECE A LA RECTA: $P_0 \notin l$

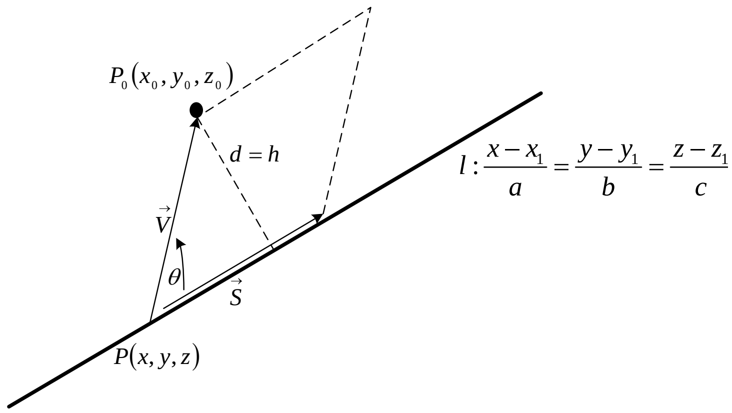


Si un punto no pertenece a una recta entonces las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación de la recta, es decir:

$$\frac{x_0 - x_1}{a} \neq \frac{y_0 - y_1}{b} \quad \text{o} \quad \frac{x_0 - x_1}{a} \neq \frac{z_0 - z_1}{c} \quad \text{o} \quad \frac{y_0 - y_1}{b} \neq \frac{z_0 - z_1}{c}$$

2.3.1.2.1 Distancia del punto a la recta

Si escogemos un punto P cualquiera de la recta y definimos un vector $\overrightarrow{V}$ entre este punto P y el punto P_0.



La distancia entre el punto P_0 y la recta l, será la altura del paralegramo sustentado por los vectores $\overrightarrow{V}$ y $\overrightarrow{S}$. Observe la figura anterior.

Entonces:

$$Area = \left\|\overrightarrow{V} \times \overrightarrow{S}\right\| = \left\|\overrightarrow{V}\right\|\left\|\overrightarrow{S}\right\| sen\theta$$

Observe que $\boxed{sen\theta = \dfrac{h}{\left\|\vec{V}\right\|}}$ entonces $h = \left\|\vec{V}\right\| sen\theta$

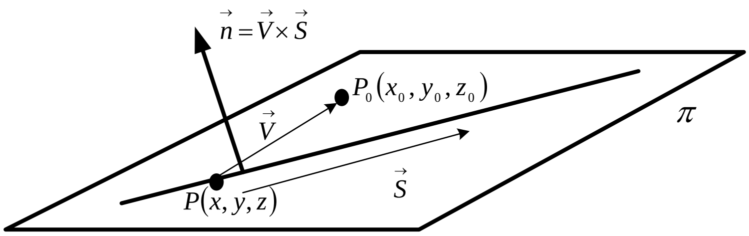
Reemplazando resulta $\left\|\vec{V} \times \vec{S}\right\| = \left\|\vec{S}\right\| h$

Finalmente:

$$h = d(P_0, l) = \frac{\left\|\vec{V} \times \vec{S}\right\|}{\left\|\vec{S}\right\|}$$

2.3.1.2.2 Ecuación del plano que contiene al punto y a la recta.

Un vector normal al plano será el resultante del producto cruz de $\vec{V}$ con $\vec{S}$



Como punto del plano tenemos para escoger entre P_0 y cualquier punto de la recta.

Ejemplo.

Sea $P_0(1,2,3)$ y sea $l: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{-2}$. Hallar la distancia de P_0 a l y la ecuación del plano que contiene a P_0 y a l.

SOLUCIÓN:
Tomamos como punto de la recta a $P(1,-2,1)$, entonces:

$$\vec{V} = \overrightarrow{PP_0} = (1-1,\ 2-(-2),\ 3-1) = (0,4,2)$$

De la ecuación de la recta, tenemos como información $\vec{S} = (2,3,-2)$, entonces:

$$\vec{V} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (-14,4,-8)$$

$$\left\|\vec{V}\times\vec{S}\right\| = \sqrt{(-14)^2+4^2+(-8)^2} = \sqrt{276}$$

$$\left\|\vec{S}\right\| = \sqrt{2^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{17}$$

Por lo tanto:

$$d\left(P_0,l\right) = \frac{\left\|\vec{V}\times\vec{S}\right\|}{\left\|\vec{S}\right\|} = \frac{\sqrt{276}}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{\frac{69}{17}}$$

Por otro lado, un vector normal al plano sería: $\vec{n} = \vec{V}\times\vec{S} = (-14,4,-8)$

Escogiendo el punto P_0, tenemos:

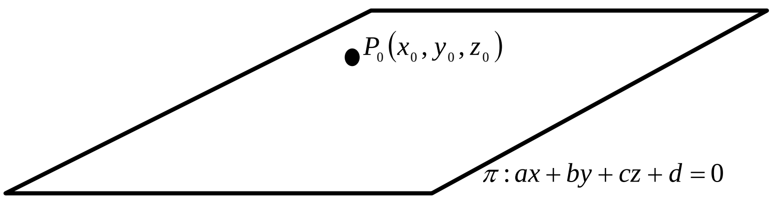
$$a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)+c\left(z-z_0\right)=0$$
$$-14\left(x-1\right)+4\left(y-2\right)-8\left(z-3\right)=0$$
$$-14x+14+4y-8-8z+24=0$$

Por tanto, la ecuación del plano sería:

$$\pi: 7x-2y+4z-15=0$$

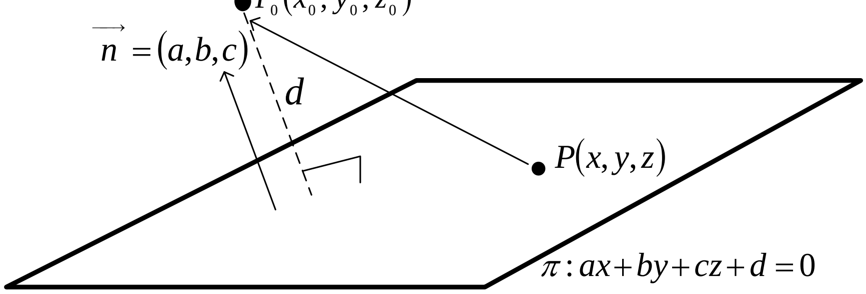
2.3.2 POSICIONES RELATIVAS ENTRE UN PUNTO P_0 Y UN PLANO π

2.3.2.1 EL PUNTO PERTENECE AL PLANO: $P_0 \in \pi$.



En este caso las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación del plano, es decir: $ax_0+by_0+cz_0+d=0$.

2.3.2.2 EL PUNTO NO PERTENECE AL PLANO: $P_0 \notin \pi$.



En este caso las coordenadas del punto NO satisfacen la ecuación del plano, es decir: $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$.

2.3.2.3 Distancia del punto al plano.

Si tomamos un punto P cualquiera del plano y formamos el vector $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{PP_0} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$. Observe la figura anterior.

La distancia del punto al plano será la proyección escalar de $\overrightarrow{V}$ sobre $\overrightarrow{n}$, es decir:

$$d(P_0,\pi) = \left| \frac{\overrightarrow{V} \bullet \overrightarrow{n}}{\left\|\overrightarrow{n}\right\|} \right| = \left| \frac{(x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z) \bullet (a,b,c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{ax_0 - ax + by_0 - by + cz_0 - cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

$$= \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - ax - by - cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

Observe que:

$$d = -ax - by - cz$$

Por lo tanto:

$$\boxed{d(P_0,\pi) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|}$$

Ejemplo

Sea $P_0(1,2,3)$ y $\pi : 2x + y - 3z + 1 = 0$. Hallar la distancia entre P_0 y π.

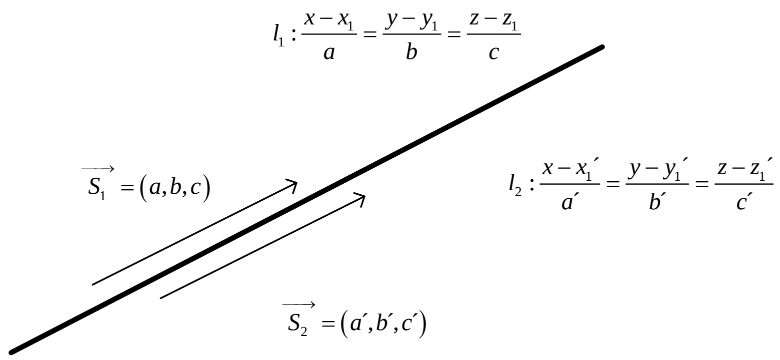
SOLUCIÓN:

Aplicando la formula anterior

$$d(P_0,\pi) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{2(1) + 1(2) - 3(3) + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} \right| = \frac{4}{\sqrt{14}}$$

2.3.3 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS RECTAS l_1 Y l_2.

2.3.3.1 RECTAS COINCIDENTES



Dos rectas son coincidentes si y sólo si:

1. Sus vectores directrices son paralelos: $\overrightarrow{S_1} // \overrightarrow{S_2}$; y,
2. Todos los puntos que pertenecen a una recta también pertenecen a la otra recta; para esto, bastará que un punto de una recta satisfaga la ecuación de la otra recta.

Ejemplo

Sean $l_1: \frac{x-10}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$ y $l_2: \frac{x+2}{6}=\frac{y+19}{9}=\frac{z-8}{-3}$.

Observe que:

1. $\vec{S_1}=(2,3,-1)$ y $\vec{S_2}=(6,9,-3)$ son paralelos, debido a que:

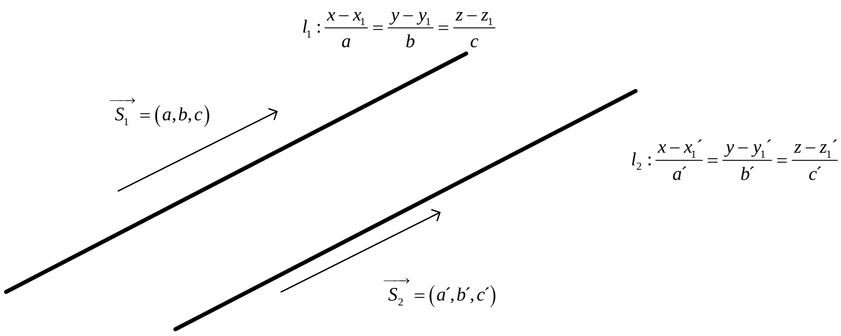
$$\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{-1}{-3}$$

2. El punto $(10,-1,2)$ de l_1 satisface la ecuación de la recta l_2, debido a que al reemplazar las coordenadas de este punto en la ecuación de l_2, tenemos:

$$\frac{10+2}{6}=\frac{-1+19}{9}=\frac{2-8}{-3}$$

Por tanto l_1 y l_2 son coincidentes.

2.3.3.2 RECTAS PARALELAS: $l_1 // l_2$



Dos rectas son paralelas si y sólo si:

1. Sus vectores directrices son paralelos: $\overrightarrow{S_1} // \overrightarrow{S_2}$; y,
2. Ningún punto de una recta pertenece a la otra recta; para esto, bastará que un punto de una recta **NO** satisfaga la ecuación de la otra recta.

Ejemplo

Sean $l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$ y $l_2: \frac{x}{6}=\frac{y-1}{9}=\frac{z+1}{-3}$.

a) Demuestre que son l_1 y l_2 son rectas paralelas.

b) Determine la distancia entre l_1 y l_2.

c) Encuentre la ecuación del plano que contiene a l_1 y l_2.

SOLUCIÓN:

a) Observe que:

1. $\vec{S_1}=(2,3,-1)$ y $\vec{S_2}=(6,9,-3)$ son paralelos, debido a que

$$\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{-1}{-3}$$

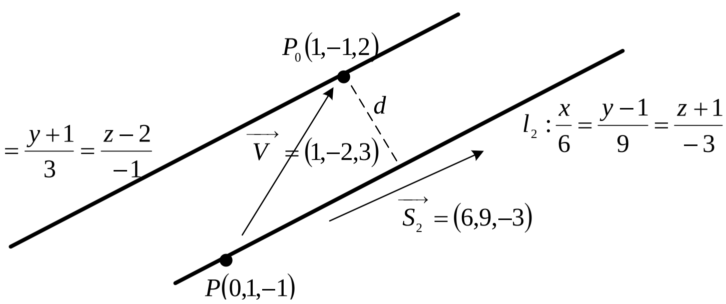
2. El punto $(1,-1,2)$ de l_1 NO satisface la ecuación de la recta l_2, debido a que al reemplazar las coordenadas de este punto en la ecuación de l_2, tenemos:

$$\frac{1}{6}\neq\frac{-1-1}{9}$$

Por tanto l_1 y l_2 son paralelas.

b) La distancia entre las dos rectas paralelas es igual a la distancia entre un punto de una recta a la otra recta.

$l_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-1}$



$$d(l_1,l_2)=d(P_0,l_2)=\frac{\left\|\vec{V}\times\vec{S_2}\right\|}{\left\|\vec{S_2}\right\|}$$

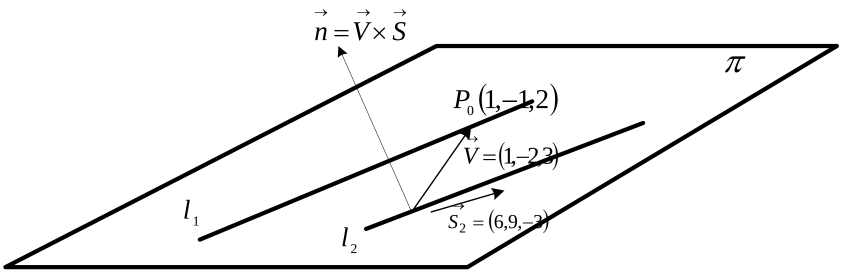
$$\vec{V}\times\vec{S_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(-7,7,7)$$

$$\left\|\vec{V}\times\vec{S_2}\right\|=\sqrt{(-7)^2+7^2+7^2}=7\sqrt{3}$$

$$\left\|\vec{S_2}\right\|=\sqrt{6^2+9^2+(-3)^2}=3\sqrt{14}$$

Por tanto: $d(l_1,l_2)=d(P_0,l_2)=\dfrac{7\sqrt{3}}{3\sqrt{14}}$

d) Las dos rectas paralelas definen un plano que contiene a ambas.



Un vector normal al plano sería:

$$\vec{n}=\vec{V}\times\vec{S_2}=(-7,7,7)$$

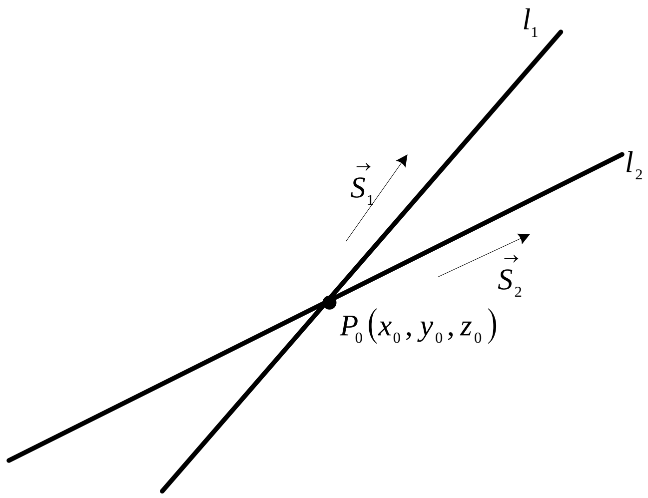
Escogiendo el punto P_0, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$-7(x-1)+7(y+1)+7(z-2)=0$$
$$-x+1+y+1+z-2=0$$

Por tanto, la ecuación del plano sería:

$$\pi:-x+y+z=0$$

2.3.3.2 RECTAS INTERSECANTES.



Dos rectas son intersecantes si y sólo si:

1. Sus vectores directrices NO son paralelos; y,
2. Sólo un punto de una recta pertenece a la otra recta; para esto, deberá existir sólo un punto cuyas coordenadas satisfaga a las ecuaciones de ambas rectas.

Ejemplo

Sean $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $l_2: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$.

a) Demuestre que son l_1 y l_2 son rectas intersecantes.
b) Determine la medida del ángulo que forman las rectas.
c) Determine, de existir, la distancia entre l_1 y l_2.
d) Encuentre, de existir, la ecuación del plano que contiene a l_1 y l_2.

SOLUCIÓN:

a) Observe que:

1. $\vec{S}_1 = (2,-1,3)$ y $\vec{S}_2 = (3,-3,1)$ NO son paralelos, debido a que

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{-3}$$

2. Deberá existir un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ que satisfaga las ecuaciones de ambas rectas, es decir:

$$\frac{x_0-1}{2} = \frac{y_0}{-1} = \frac{z_0+1}{3} \quad \text{y} \quad \frac{x_0}{3} = \frac{y_0-2}{-3} = \frac{z_0-1}{1}$$

Encontremos el punto, para lo cual:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2t \\ y_0 = -t \\ z_0 = -1+3t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 = 3k \\ y_0 = 2-3k \\ z_0 = 1+k \end{cases}$$

Igualando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2t = 3k \\ -t = 2-3k \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultáneo, tenemos:

$\boxed{t=1}$ y $\boxed{k=1}$

Entonces:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2(1)=3 \\ y_0 = -(1) = -1 \\ z_0 = -1+3(1)=2 \end{cases}$$

Note que igual resultado se obtiene en la segunda condición:

$$\begin{cases} x_0 = 3(1)=3 \\ y_0 = 2-3(1) = -1 \\ z_0 = 1+(1)=2 \end{cases}$$

Por tanto, las rectas se intersecan en sólo un punto.

b) El ángulo de corte está determinado por el ángulo que forman los vectores directrices; es decir:

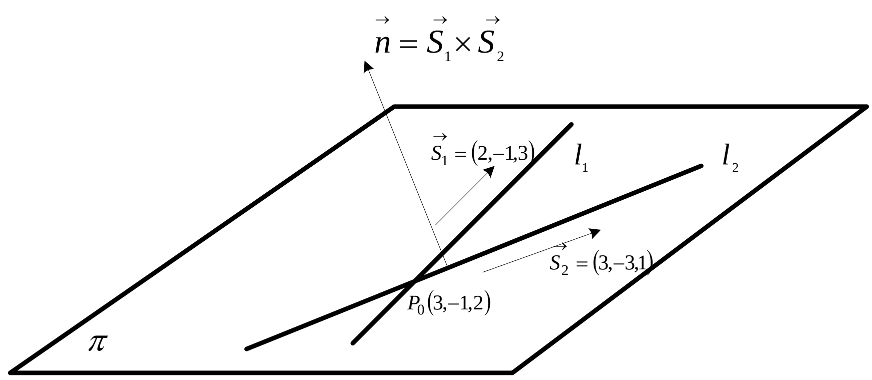
$$\theta = \arccos \frac{\vec{S_1} \bullet \vec{S_2}}{\left\|\vec{S_1}\right\| \left\|\vec{S_2}\right\|} = \arccos \frac{(2,-1,3)\bullet(3,-3,1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{3^2+(-3)^2+1^2}}$$

$$= \arccos \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{19}}$$

$$\theta = \arccos \frac{12}{\sqrt{266}}$$

c) $d(l_1, l_2) = 0$ por ser rectas intersecantes.

d) Un vector normal al plano que definen las rectas intersecantes sería el resultante del producto cruz entre los vectores directrices de las rectas.



Entonces $\vec{n} = \vec{S_1} \times \vec{S_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (8,7,9)$

Reemplazando, tenemos:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$8(x-3)+7(y+1)+9(z-2)=0$$
$$8x-24+7y+7+9z-18=0$$

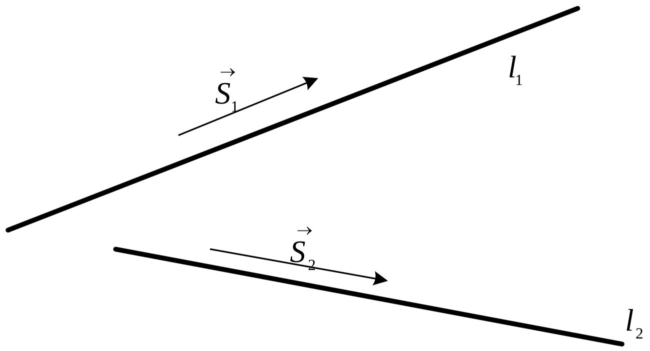
Por tanto, la ecuación del plano sería:

$$\pi : 8x+7y+9z-35=0$$

2.3.3.2 RECTAS OBLICUAS O ALABEADAS.

Dos rectas son Oblicuas o Alabeadas si y sólo si:

1. Sus vectores directrices NO son paralelos; y,
2. Ningún punto de una recta pertenece a la otra recta.



En este caso **no existirá algún plano** que contenga a ambas rectas.

Ejemplo

Sean $l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $l_2: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$.

Demuestre que son l_1 y l_2 son rectas Oblicuas.

SOLUCIÓN:

Observe que:

1. $\vec{S}_1 = (2,-1,3)$ y $\vec{S}_2 = (3,1,2)$ NO son paralelos, debido a que:

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{1}$$

2. Ahora nos queda demostrar que NO son intersersecantes. Es decir no debe existir punto de intersección. Por contradicción, supongamos que:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2t \\ y_0 = -t \\ z_0 = -1+3t \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 = 3k \\ y_0 = 2+k \\ z_0 = -1+2k \end{cases}$$

Tomando las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2t = 3k \\ -t = 2+k \end{cases}$$

Resulta:

$$\boxed{t = -\tfrac{7}{5}} \quad \text{y} \quad \boxed{k = -\tfrac{3}{5}}$$

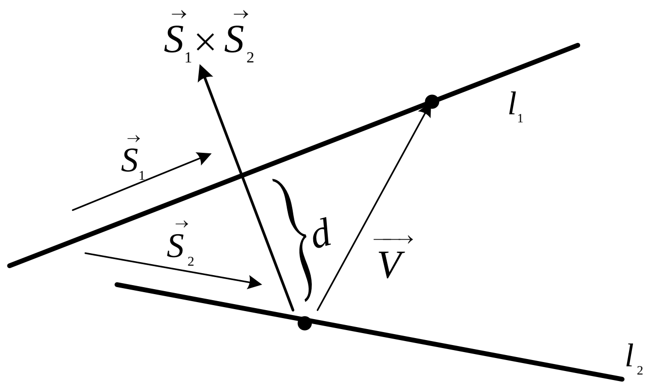
Reemplazando resulta:

$$\begin{cases} x_0 = 1+2\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{9}{5} \\ y_0 = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5} \\ z_0 = -1+3\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{26}{5} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x_0 = 3\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{9}{5} \\ y_0 = 2+\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5} \\ z_0 = -1+2\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{11}{5} \end{cases}$$

Por tanto, como los z_0 son distintos en las rectas, se concluye que son OBLICUAS.

2.3.3.2.1 Distancia entre Rectas oblicuas.

Definamos un vector $\vec{V}$, entre un punto cualquiera de una recta con otro punto cualquiera de la otra recta, Observe la figura:



La menor distancia d entre las rectas l_1 y l_2, está dada por la proyección escalar del vector $\vec{V}$ sobre la dirección perpendicular a ambas rectas, que estaría dada por el vector $\vec{S}_1 \times \vec{S}_2$; es decir:

$$d(l_1, l_2) = \left| \frac{\overrightarrow{V} \bullet \left(\overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} \right)}{\left\| \overrightarrow{S_1} \times \overrightarrow{S_2} \right\|} \right|$$

Ejemplo

Hallar la distancia entre las rectas Oblicuas $l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ y $l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$.

SOLUCIÓN:

En este caso, un punto de la recta l_1 sería $P_1 = (1,0,-1)$ y un punto de la otra recta l_2 sería $P_2\,(0,2,-1)$, entonces $\vec{V} = \overrightarrow{P_2 P_1} = (1,-2,0)$.

Los vectores directrices serían: $\overrightarrow{S_1} = (2,-1,3)$ y $\overrightarrow{S_2} = (3,1,2)$, entonces:

$$\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-5,5,5)$$

Por tanto,

$$d(l_1,l_2)=\left|\frac{\overrightarrow{V}\bullet\left(\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}\right)}{\left\|\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}\right\|}\right|=\left|\frac{(1,-2,0)\bullet(-5,5,5)}{\sqrt{(-5)^2+5^2+5^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{(1,-2,0)\bullet 5(-1,1,1)}{5\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{-1-2+0}{\sqrt{3}}\right|$$

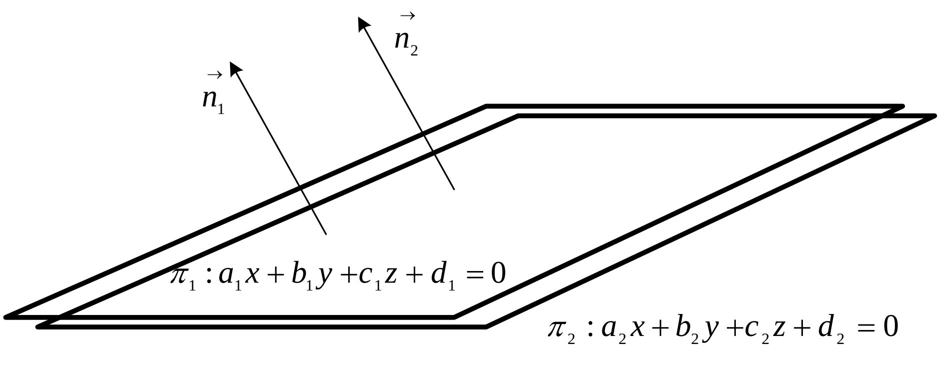
$$d(l_1,l_2)=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

2.3.4 POSICIONES RELATIVAS ENTRE DOS PLANOS.

2.3.4.1 PLANOS COINCIDENTES.

Dos planos son coincidentes si y sólo si:

1. Sus vectores normales son paralelos; y,
2. Todos los puntos que pertenecen a un plano también pertenecen al otro plano.



En este caso se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$$

Ejemplo

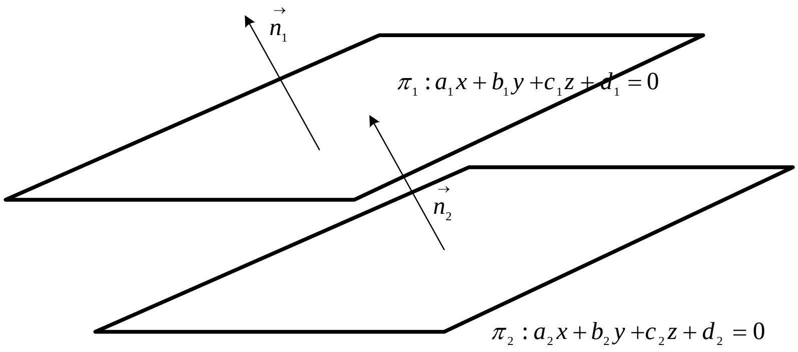
Los planos $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 2 = 0$ son coincidentes debido a que:

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

2.3.4.2 PLANOS PARALELOS: $\pi_1 // \pi_2$

Dos planos son Paralelos si y sólo si:

1. Sus vectores normales son paralelos; y,
2. Todos los puntos que pertenecen a un plano NO pertenecen al otro plano.
3.



En este caso se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo

Sean $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : 4x - 6y + 2z + 3 = 0$

a) Demuestre que π_1 y π_2 son planos paralelos.

b) Encuentre la distancia entre los planos.

SOLUCIÓN:

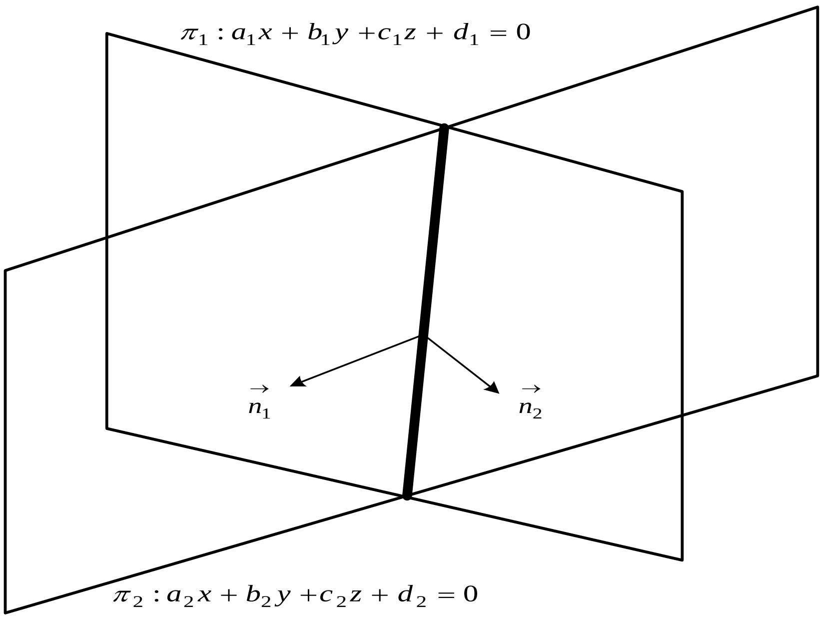
a) En este caso $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$, por tanto los planos son paralelos.

b) La distancia entre dos planos paralelos es igual a la distancia entre un punto de un plano con el otro plano.
En este caso tomemos de π_1 el punto $P_0(0,0,-1)$, entonces:

$$d(P_0, \pi_2) = \left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right| = \left| \frac{4(0) - 6(0) + 2(-1) + 3}{\sqrt{4^2 + (-6)^2 + 2^2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{14}}$$

2.3.4.3 PLANOS INTERSECANTES

Dos planos son intersecantes si y sólo si sus vectores normales NO son paralelos.



En este caso se cumple que:

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \vee \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \vee \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Ejemplo

Sean $\pi_1 : 2x - 3y + z + 1 = 0$ y $\pi_2 : x + y + z + 2 = 0$

a) Demuestre que π_1 y π_2 son planos intersecantes.
b) Encuentre la distancia entre los planos.
c) Determine la ecuación de la recta de intersección.
d) Halle la medida del ángulo formado por los planos intersecantes.

SOLUCIÓN:

a) En este caso $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{1}$, por tanto son planos intersecantes.

b) $d(\pi_1, \pi_2) = 0$ por ser planos intersecantes.

c) Primer Método: hallando el conjunto solución del sistema simultáneo:

$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ 2x - 3y + z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 + (-2)F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = -2 \\ -5y - z = 3 \end{cases}$$

$z=-3-5y \qquad \Rightarrow x+y-3-5y=-2 \qquad \Rightarrow x=1+4y$

Haciendo $\boxed{y=t}$, entonces:

$$l:\begin{cases} x=1+4t \\ y=t \\ z=-3-5t \end{cases}$$

Segundo Método: Un vector directriz de la recta buscada estaría dado por el vector resultante del producto cruz entre los vectores normales de los planos, es decir:

$$\vec{S}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=(4,1,-5)$$

Para obtener las coordenadas de un punto P_0 que pertenezca ambos planos, bastaría con considerar un valor para una variable en las ecuaciones de los planos y resolver el sistema simultáneo que resultante.

Por ejemplo, considerando $\boxed{x=0}$, tenemos:

$$\begin{cases} 0+y+z=-2 \\ 2(0)-3y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=-2 \\ -3y+z=-1 \end{cases}$$

$$4y=-1 \Rightarrow y=-\tfrac{1}{4}$$

$$-\left(-\tfrac{1}{4}\right)+z=-1 \Rightarrow z=-\tfrac{3}{4}$$

Entonces $P_0\left(0,-\frac{1}{4},-\frac{3}{4}\right)$,

Finalmente, la ecuación de la recta sería:

$$l:\begin{cases} x=4t \\ y=-\frac{1}{4}+t \\ z=-\frac{3}{4}-5t \end{cases}$$

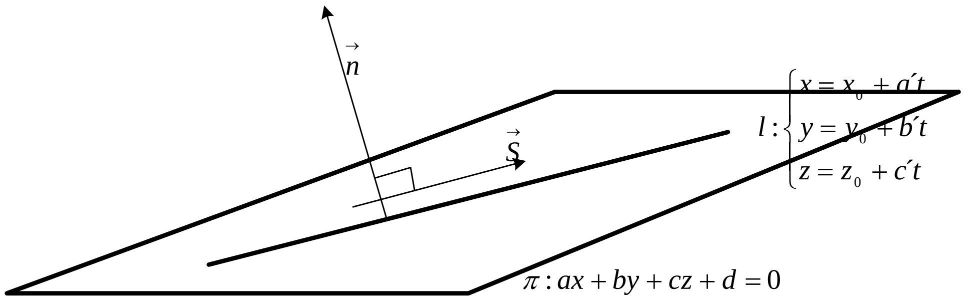
d) La medida del ángulo que forman los planos está dado por el ángulo que forman sus vectores normales, es decir:

$$\theta=\arccos\frac{\vec{n_1}\bullet\vec{n_2}}{\left\|\vec{n_1}\right\|\left\|\vec{n_2}\right\|}=\arccos\frac{(1,1,1)\bullet(2,-3,1)}{\sqrt{3}\sqrt{14}}=\arccos\frac{0}{\sqrt{3}\sqrt{14}}=\frac{\pi}{2}$$

2.3.5 POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO.

2.3.5.1 RECTA PERTENECIENTE A UN PLANO.

Una recta pertenece a un plano si y sólo si todos los puntos de la recta pertenecen también al plano.



En este caso se cumple que:

1. Los **vectores directrices** de la recta y los **vectores normales** del plano son **ORTOGONALES.**
2. Un punto cualquiera de la recta satisface la ecuación del plano.

Ejemplo

Sean $\pi : x + y + z + 1 = 0$ y $l:\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -4 - t \end{cases}$

Demuestre la recta l pertenece al plano π.

SOLUCIÓN:

1. Veamos si es que los vectores $\vec{n} = (1,1,1)$ y $\vec{S} = (-1,2,-1)$ son ortogonales.

   Realizando el producto punto se obtiene:

   $$\vec{n} \bullet \vec{S} = (1,1,1) \bullet (-1,2,-1) = 0$$

   Entonces son Si ortogonales.

2. Veamos si es que el punto de la recta $P_0(1,2,-4)$ satisface la ecuación del plano $x + y + z + 1 = 0$:

   Reemplazando se obtiene:

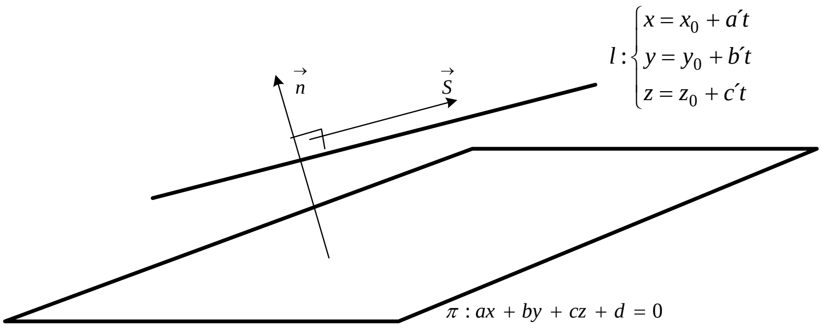
   $$1 + 2 - 4 + 1 = 0$$

   Entonces Si satisface.

Por tanto la recta pertenece al plano.

2.3.5.1 RECTA PARALELA A UN PLANO.

Una recta es paralela a un plano si y sólo si todos los puntos de la recta NO pertenecen al plano.



En este caso se cumple que:

1. Los **vectores directrices** de la recta y los **vectores normales** del plano son **ORTOGONALES**.
2. Un punto cualquiera de la recta No satisface la ecuación del plano.

Ejemplo

Sean $\pi : x + y + z + 1 = 0$ y $l:\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

a) Demuestre la recta l es paralela al plano π.
b) Halle la distancia entre la recta y el plano

SOLUCIÓN:

a) 1. Veamos si es que los vectores $\vec{n} = (1,1,1)$ y $\vec{S} = (-1,2,-1)$ son ortogonales.
Realizando el producto punto se obtiene:

$$\vec{n} \bullet \vec{S} = (1,1,1) \bullet (-1,2,-1) = 0$$

Entonces son Si ortogonales.

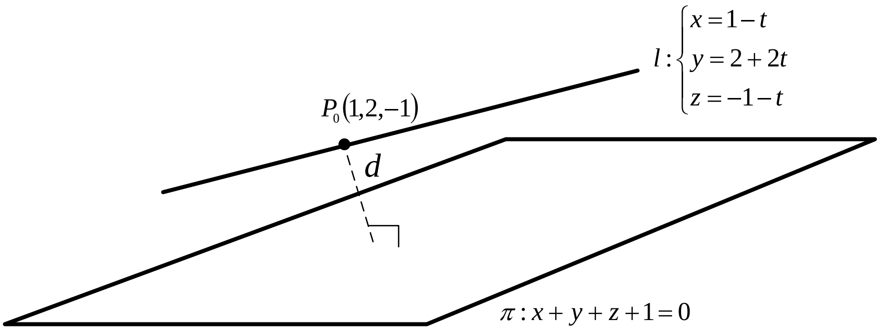
2. Veamos si es que el punto de la recta $P_0(1,2,-1)$ satisface la ecuación del plano $x + y + z + 1 = 0$:
Reemplazando se obtiene:

$$1 + 2 - 1 + 1 \neq 0$$

Entonces NO satisface.

Por tanto la recta es paralela al plano.

c) La DISTANCIA entre una recta paralela a un plano es igual a la distancia entre un punto cualquiera de las recta y el plano

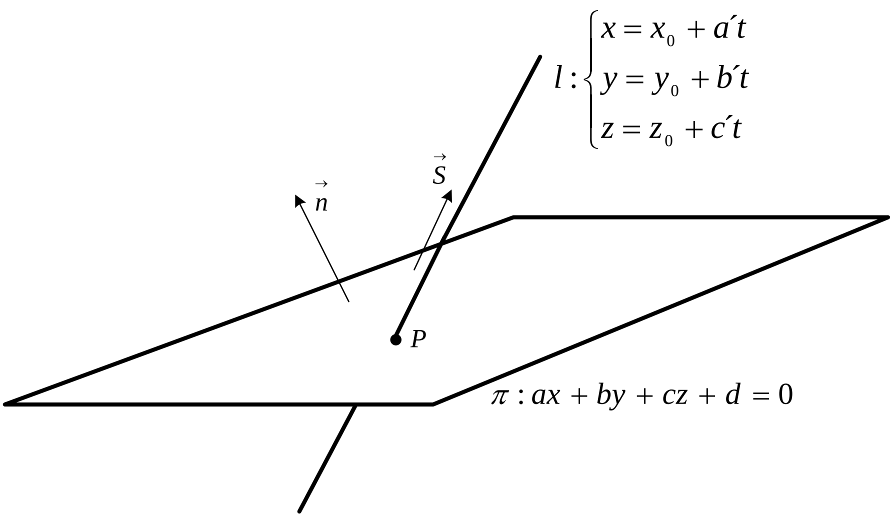


Tomando el punto $P_0(1,2,-1)$, entonces

$$d(P_0,\pi) = \left|\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right| = \left|\frac{(1) + (2) + (-1) + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

2.3.5.1 RECTA Y PLANO INTERSECANTE.

Una recta y un plano son intersecantes si y sólo si un punto de la recta pertenece al plano.



En este caso se cumple que los **vectores directrices** de la recta y los **vectores normales** del plano **NO** son **ORTOGONALES**.

Ejemplo

Sean $\pi : x+y+z+1=0$ y $l:\begin{cases} x=1-t \\ y=2+t \\ z=-4-t \end{cases}$

a) Demuestre que la recta l interseca al π en sólo un punto.
b) Encuentre las coordenadas del punto de intersección
c) Determine la distancia entre la recta y el plano
d) Determine la medida del ángulo que forman la recta y el plano.
e) Halle la ecuación de la recta que es la proyección de la recta l sobre el plano π.

SOLUCIÓN:

a) En este caso $\vec{n}=(1,1,1)$ y $\vec{S}=(-1,1,-1)$, entonces:

$$\vec{n}\bullet\vec{S}=(1,1,1)\bullet(-1,1,-1)=-1\neq 0$$

Por tanto, como no son ortogonales, la recta y el plano son intersecantes.

b) Las coordenadas del punto de intersección se obtienen hallando el conjunto solución del sistema simultáneo que se forma con las ecuaciones de la recta y del plano.
En este caso, tenemos:

$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ x=1-t \\ y=2+t \\ z=-4-t \end{cases}$$

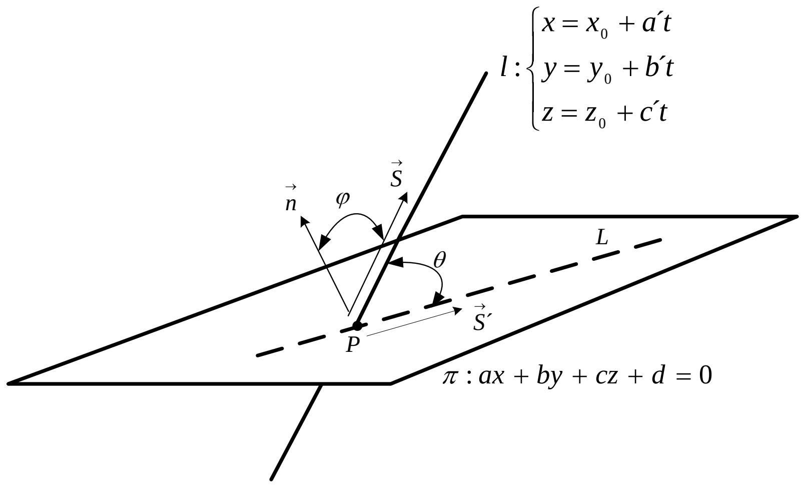
Hallamos primero el valor de t, reemplazando la segunda, tercera y cuarta ecuación en la primera ecuación:

$$1-t+2+t-4-t+1=0 \Rightarrow t=0$$

Entonces $P(1,2,-4)$

c) $d(l,\pi)=0$ Por intersecantes.

d) El ángulo θ que forma la recta y el plano intersecantes está definido por el ángulo que forma un vector directriz de la recta y un vector normal del plano. Observe la figura:



$$\boxed{\theta = \tfrac{\pi}{2} - \varphi} \quad \text{donde } \varphi = \arccos\left|\frac{\vec{n}\bullet\vec{S}}{\left\|\vec{n}\right\|\left\|\vec{S}\right\|}\right|$$

En este caso:

$$\varphi = \arccos\left|\frac{\vec{n}\bullet\vec{S}}{\left\|\vec{n}\right\|\left\|\vec{S}\right\|}\right| = \arccos\left|\frac{(1,1,1)\bullet(-1,1,-1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right| = \arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

d) Un vector directriz $\vec{S}'$ de la recta proyección L, está dado por:

$$\boxed{\vec{S}' = \left(\vec{n}\times\vec{S}\right)\times\vec{n}} \quad \text{¿Por qué?}$$

Entonces:

$$\vec{n}\times\vec{S} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,0,2)$$

$$\vec{S}' = \left(\vec{n}\times\vec{S}\right)\times\vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,4,-2)$$

Y tomando el punto de intersección $P(1,2,-4)$ la ecuación de la recta sería

$$\boxed{L:\begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+4t \\ z = -4-2t \end{cases}}$$

Ejercicios Propuestos 2.3

1. Calcule la distancia entre el punto de coordenadas (10,3,-2) y la recta de ecuación: $x = 4t-2,\ y = 3,\ z = -t+1$.

   Resp. $d = 0$

2. Determine si las rectas $l_1 : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-3}$ y $l_2 : \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+3}{2}$ se interceptan en un punto.

3. Hallar la distancia entre las rectas: $l_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ y $l_2 : \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+2}{3}$

   Resp. $d = \dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

4. Hallar la distancia entre las rectas: $l_1 : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-1}{3}$ y $l_2 : \dfrac{x-1}{10} = \dfrac{y-4}{9} = \dfrac{z-3}{8}$

   Resp. $d = 0$

5. Determine las coordenadas del punto que está en la base de la perpendicular trazada desde P(-1,-1,4) a la recta $\dfrac{x-3}{2} = y = \dfrac{z+1}{3}$

   Resp. $P\left(\dfrac{27}{7},\dfrac{3}{7},\dfrac{2}{7}\right)$

6. Calcule la distancia del plano $2x+2y-z=6$ al punto (2, 2, -4).

Resp. $d=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

7. Hallar la distancia entre las rectas: $l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-1}$ $l_2:\begin{cases}2x-3y+z=0\\x+y-z=21\end{cases}$

Resp. $d=\frac{140}{\sqrt{33}}$

8. Hallar las ecuaciones de la recta que contiene el punto (3,6,4), intercepta al eje z y es paralela al plano $x-3y+5z-6=0$

Resp. $l:\begin{cases}x=3t\\y=6t\\z=3t+1\end{cases}$

9. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $l:\begin{cases}x=-1+3t\\y=1+2t\\z=2+4t\end{cases}$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$

Resp. $2x-5y+11z=-4$

10. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $l:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+1}{1}$ y es perpendicular al plano $3x+y-z=0$

Resp. $10x+17y+z=29$

11. Encuentre el punto que la recta: $x=2-t$, $y=1+3t$, $z=4t$, intercepta al plano $2x-y+z=2$

Resp. $P(1,4,4)$

12. La recta "l" tiene parametrización: $x=3t+1$, $y=-2t+4$, $z=t-3$. Halle una ecuación del plano que contiene a l y al punto (5,0,2).

Resp. $6x+11y+4z=38$

13. Hallar la ecuación de la recta que es la proyección de la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-0}{-1}$ sobre el plano $x+3y+z=2$

Resp. $l:\begin{cases}x=3+5t\\y=4t\\z=-1-17t\end{cases}$

14. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto (1,1,1) y que interseca al plano xy en la misma recta que el plano $3x+2y-z=6$

Resp. $3x+2y+z=6$

15. Dadas las rectas: $l_1=\begin{cases}x=3+t\\y=1-t\\z=2+2t\end{cases}$ $l_2=\begin{cases}x=-t\\y=2+3t\\z=3t\end{cases}$

a) Demostrar que no se intersecan
b) Encontrar dos planos paralelos que contengan a cada una de ellas por separado.

Resp. b) $9x+5y-2z=28$ y $9x+5y-2z=10$

16. Hallar las ecuaciones de la recta que contiene al punto (3,6,4) , intercepta al eje z y es paralela al plano $x-3y+5z=0$

Resp. $l:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t+1 \end{cases}$

17. Demostrar que las rectas: $l_1\begin{cases} x-2y+2z=4 \\ x+4y+8z+8=0 \end{cases}$ y $l_2\begin{cases} x+y+5z+5=0 \\ x+8y+12z-12=0 \end{cases}$

    Son paralelas y hallar la ecuación del plano que las contiene.

18. Hallar la distancia entre los planos: $4y-3z-6=0$ y $8y-6z-27=0$

    Resp. $d=\dfrac{39}{10}$

19. Encontrar la menor distancia entre el punto (3,2,1) y el plano determinado por (1,1,0), (3,-1,1), (-1,0,2).

    Resp. $d=2$

20. Encuentre la ecuación del plano que contiene al punto (-4,1,6) y tiene la misma traza en el plano XZ, que el plano $x+4y-5z=8$.

    Resp. $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{\frac{2}{13}}-\dfrac{z}{\frac{8}{5}}=1$

21. Hallar la ecuación del plano que es perpendicular a los planos $x-y+z=0$ y $2x+y-4z-5=0$, y que pasa por el punto (4,0,-2).

    Resp. $x+2y+z=2$

22. Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas: $l_1:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{4}$

    $l_2:\begin{cases} x+2y-2z=5 \\ 5x-2y-z=0 \end{cases}$

    Resp. $2y-3x=9$

23. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $l:\begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \\ z=2+4t \end{cases}$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$.

    Resp. $-10x+17y-z=25$

24. Sea la recta $l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z}{1}$ y el plano $\pi:2x+4y-3z=2$ hallar el punto de intersección de la recta con el plano, así como la ecuación que determina la proyección de la recta sobre el plano.

    Resp. $P\left(\dfrac{3}{11},\dfrac{1}{11},-\dfrac{4}{11}\right)$

25. Encontrar la ecuación del plano que es perpendicular al plano YZ y contiene al punto (2,1,1) además que haga un ángulo de arcos(2/3) rad. Con el plano $2x-y+2z-3=0$.

    Resp. $3z-4y=-1$

26. El triángulo que tiene por vértice (1,1,1), (0,0,0), (2,1,0) se lo proyecta sobre el plano Z=-2. Calcular el área de proyección.

    Resp. $Area=\dfrac{1}{2}$

2.4 SUPERFICIES

2.4.1 SUPERFICIES CILINDRICAS.

> Sea C una curva de un plano π y sea l una recta no paralela a π. Se define Superficie Cilíndrica al conjunto de puntos que perteneces a rectas paralelas a l y que intersecan a C.

A C se la denomina **Curva Generatriz** (o Directriz) y a l se la denomina **Recta Generatriz**.

Las superficies Cilíndricas que trataremos aquí serán aquellas que tienen la Curva Generatriz perteneciente a los planos coordenados y Rectas Generatrices Paralelas a los ejes coordenados. Es decir, si tienen una de la forma siguiente:

$f(x,y)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano xy, Rectas Generatrices paralelas al eje z.

$f(x,z)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano xz, Rectas Generatrices paralelas al eje y.

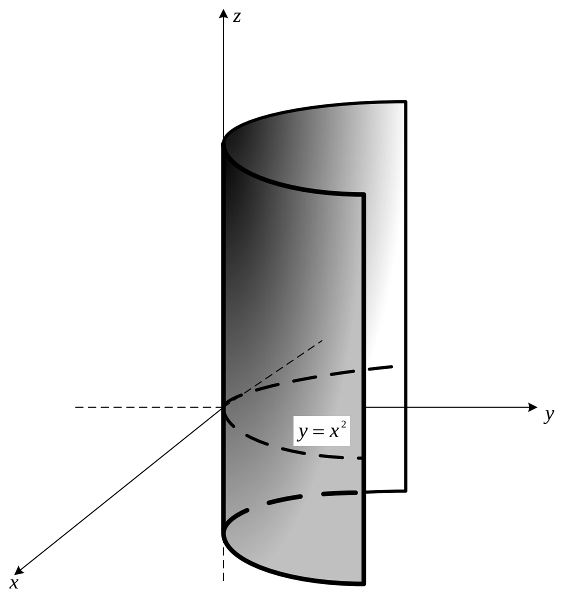
$f(y,z)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano yz, Rectas Generatrices paralelas al eje x.

Ejemplo 1

Graficar $y-x^2=0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $y=x^2$ en el plano xy y luego se trazan rectas paralelas al eje z siguiendo esta curva.

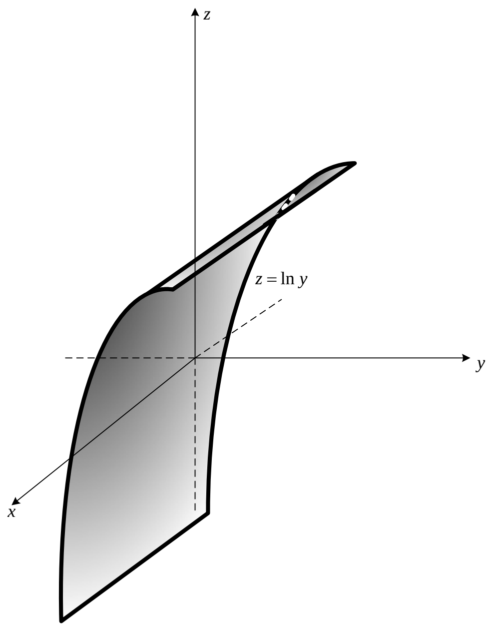


Ejemplo 2

Graficar $z - \ln y = 0$

<u>SOLUCIÓN.</u>

Se dibuja primero la curva $z = \ln y$ en el plano zy y luego se trazan rectas paralelas al eje x siguiendo esta curva.

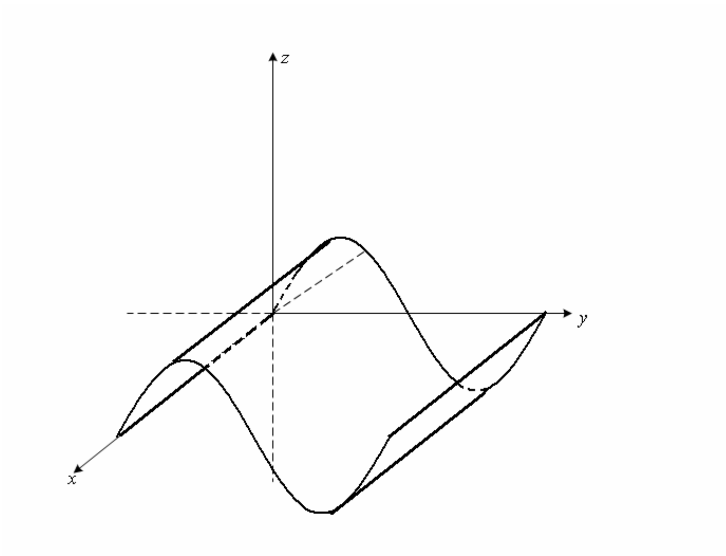


Ejemplo 3

Graficar $z - seny = 0$

<u>SOLUCIÓN.</u>

Se dibuja primero la curva $z = seny$ en el plano zy y luego se trazan rectas paralelas al eje x siguiendo esta curva.

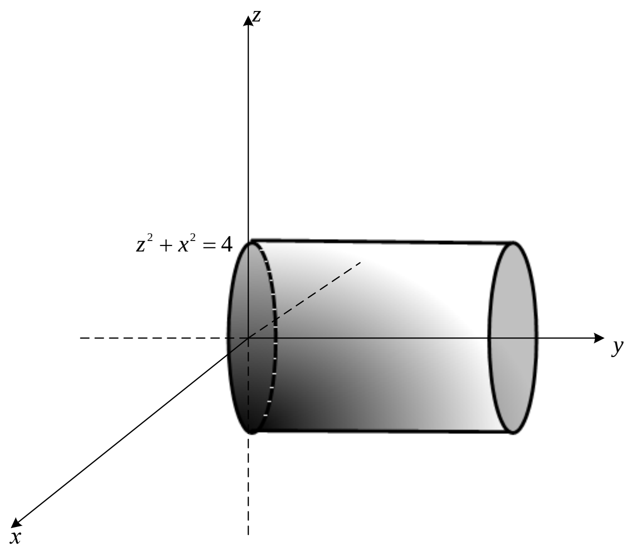


Ejemplo 4

Graficar $z^2 + x^2 = 4$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z^2 + x^2 = 4$ en el plano zx y luego se trazan rectas paralelas al eje y siguiendo esta curva.



Ejercicios Propuestos 2.4

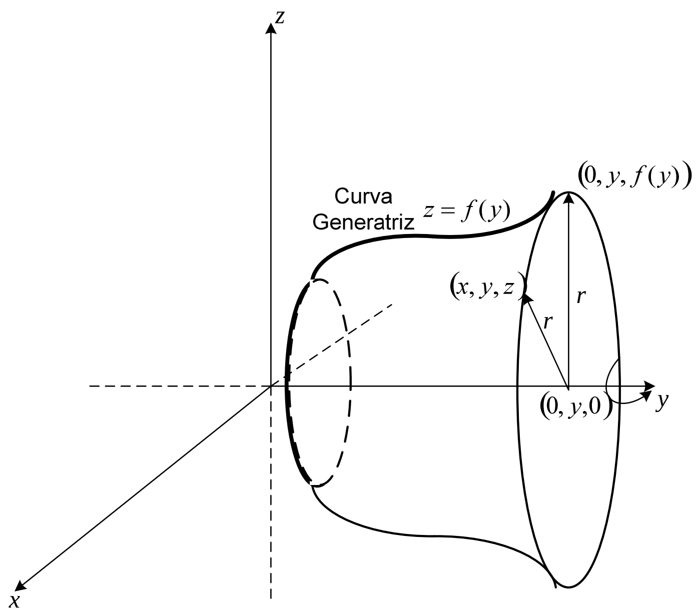
1. Bosqueje la superficie cilíndrica cuya ecuación se indica.

a) $4z^2 - y^2 = 4$	d) $x^2 = y^3$	f) $z - e^y = 0$
b) $z = \operatorname{sen} y$	e) $y = \lvert z \rvert$	g) $y^2 + z^2 = 9$
c) $y^2 + z = 4$		

2.4.2 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Las Superficies de Revolución que trataremos aquí son aquellas que se generan al girar 360º una curva perteneciente a uno de los planos coordenados alrededor de uno de los ejes coordenados.

Por ejemplo suponga que se tiene la curva $z = f(y)$ (contenida en el plano ZY) y la hacemos girar 360º alrededor del eje y, entonces se forma una superficie de revolución, observe la figura:



La ecuación de la superficie de revolución se la deduce de la siguiente manera

La sección transversal es circular, por tanto:

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + (y-y)^2 + (f(y)-0)^2} = f(y)$$

Como también se observa que:

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

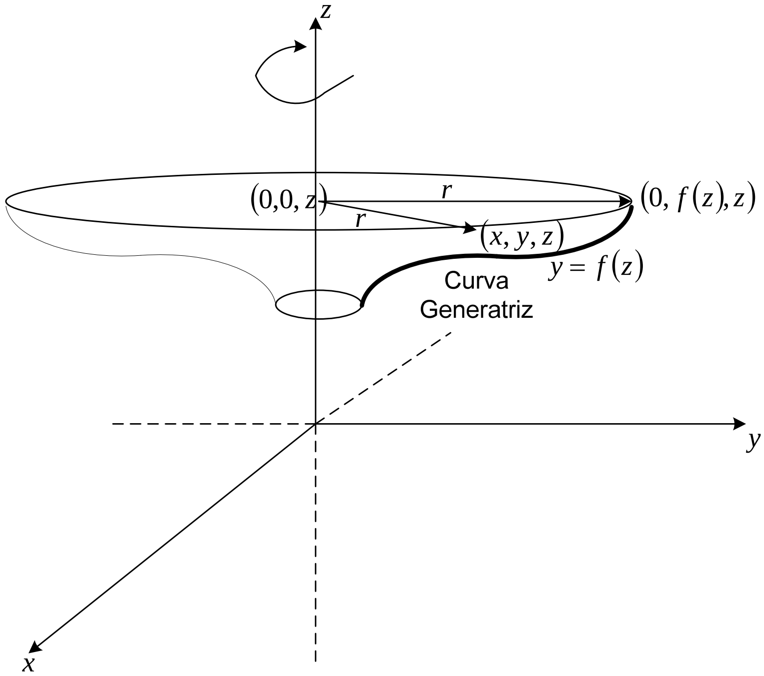
Entonces, igualando resulta:

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CON CURVA GENERATRIZ $x = f(y)$ (EN EL PLANO xy) O TAMBIÉN $z = f(y)$ (EN EL PLANO zy), GIRADA ALREDEDOR DEL EJE "y".

A, $\boxed{x^2 + z^2}$ se le llama **Binomio de Circularidad**.

En cambio, si la curva generatriz anterior la hacemos girar alrededor del eje z, obtendríamos otra superficie de revolución, observe la figura:



Aquí en cambio:

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + \left(f(z)-0\right)^2 + (z-z)^2} = f(z)$$

Y también

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces, igualando resulta:

$$x^2 + y^2 = \left[f(z)\right]^2$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CON CURVA GENERATRIZ $x = f(z)$ (EN EL PLANO xz) O TAMBIÉN $y = f(z)$ (EN EL PLANO zy), GIRADA ALREDEDOR DEL EJE "z".

El **Binomio de Circularidad** seria $\boxed{x^2 + y^2}$.

La curva anterior no puede ser girada alrededor del eje "x". ¿POR QUÉ?

La ecuación de una superficie de revolución con curva generatriz $y = f(x)$ (en el plano xy) o $z = f(x)$ (en el plano zx) girada alrededor del eje "x", sería:

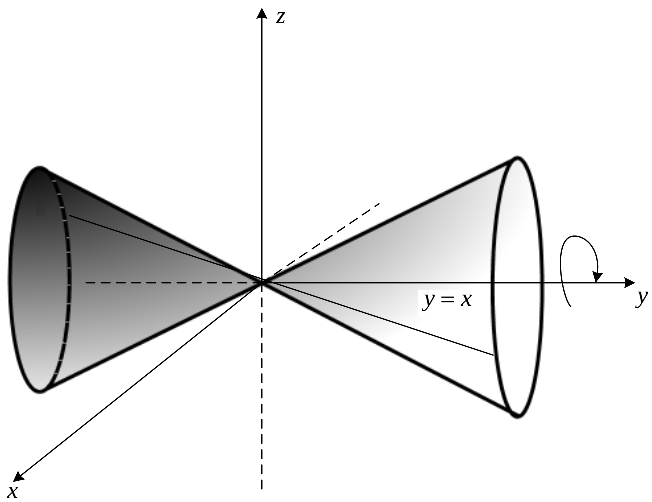
$$y^2 + z^2 = \left[f(x)\right]^2$$ ¡DEDUZCALA!

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la superficie de revolución que se generar al girar $y = x$ alrededor del eje y .

SOLUCIÓN.

Primero grafiquemos la curva generatriz en el plano xy y formemos la superficie de revolución.



Como el eje de rotación es el eje y , el binomio de circularidad será: $x^2 + z^2$.

Por tanto, la ecuación de esta superficie será de la forma: $x^2 + z^2 = [f(y)]^2$, donde $f(y)$ es la ecuación de la curva generatriz; que en este caso seria: $f(y) = y$

Por tanto, la ecuación de la superficie sería: $x^2 + z^2 = y^2$

Ejemplo 2

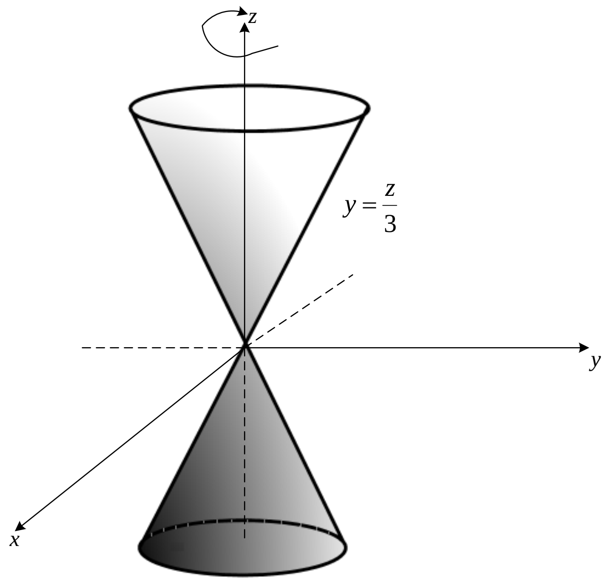
Identificar y graficar la superficie que tiene por ecuación $9x^2 - z^2 + 9y^2 = 0$.

SOLUCIÓN.

Primero identifiquemos el binomio de circularidad y la ecuación de la curva generatriz

$$9x^2 - z^2 + 9y^2 = 0$$
$$9(x^2 + y^2) = z^2$$
$$x^2 + y^2 = \left[\frac{z}{3}\right]^2$$

Por tanto de acuerdo a la forma de la última ecuación se concluye que se trata de una superficie de revolución con curva generatriz $\boxed{x = \frac{z}{3}}$ o también $\boxed{y = \frac{z}{3}}$, girada alrededor del eje z (la variable que no aparece en el binomio de circularidad).



Ejercicios Propuestos 2.5

1. Halle una ecuación de la superficie de revolución que se genera al girar la curva plana dada, alrededor del eje dado. Grafique.
   a) $x^2+4z^2=16$, alrededor del eje x.
   b) $y=\operatorname{sen} x$, alrededor del eje x.
   c) $x^2=4y$, alrededor del eje y.
   d) $xy=1$, alrededor del eje x.
   e) $z^2=6x$, alrededor del eje x.
   f) $z=e^x$, alrededor del eje x.

2. Encuentre el eje y la curva generatriz de cada una de dichas superficies de revolución. Realice el gráfico correspondiente.
   a) $x^2+z^2-2y=0$
   b) $x^2+z^2=|y|$
   c) $y^2+z^2=e^{2x}$
   d) $x^2+4y^2+4z^2=36$

2.4.3 SUPERFICIES CUADRICAS.

Las Superficies Cuádricas o simplemente Cuádricas con eje central paralelo a los ejes coordenados, tienen por ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

Si la llevamos a la forma canónica, completando cuadrado, tendremos los siguientes lugares geométricos.

2.4.3.1 ESFERA.

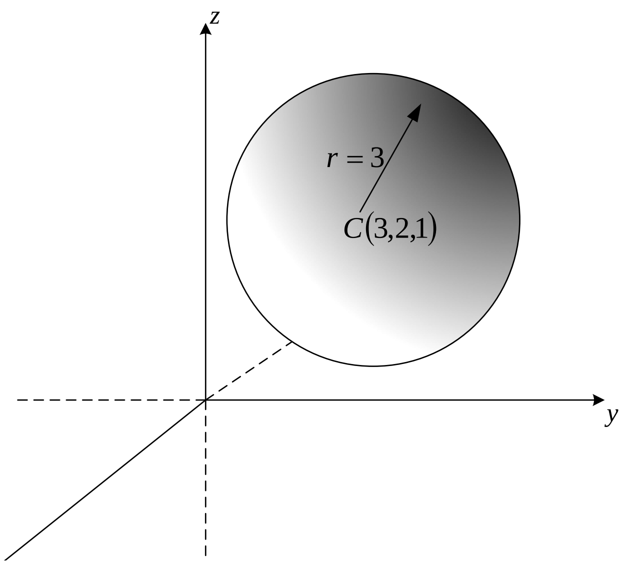
La ecuación canónica de la esfera es de la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \text{ con } r^2 > 0$$

Donde, su centro es $C(h,k,l)$ y su radio es r

Ejemplo

La ecuación $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$, tiene como lugar geométrico una esfera de centro $C(3,2,1)$ y radio $r = 3$



Analice el lugar geométrico, si $r^2 < 0$ y si $r^2 = 0$

2.4.3.2 ELIPSOIDE

La ecuación canónica de un elipsoide es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Donde, su centro es $C(h,k,l)$

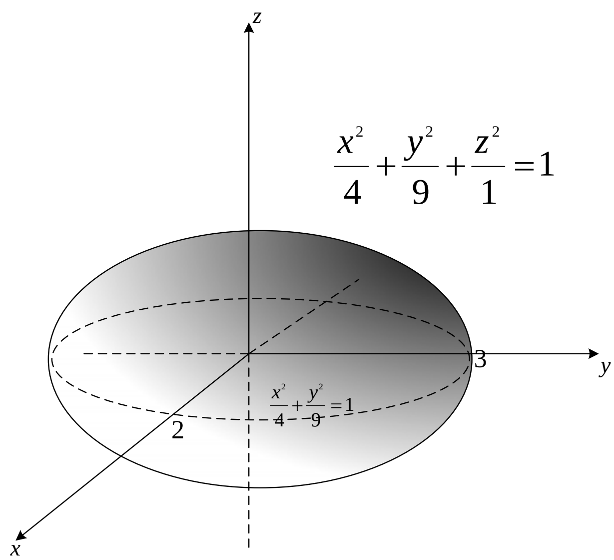
Ejemplo

La ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$ representa un elipsoide con centro el origen.

Su traza (intersección) con el plano xy, se obtiene haciendo $z=0$,

Entonces, resulta $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, la ecuación de una elipse.

Además todas las secciones transversales son elipses. ¿Por qué?



2.4.3.3 HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

Un hiperboloide de una hoja con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Elipses)

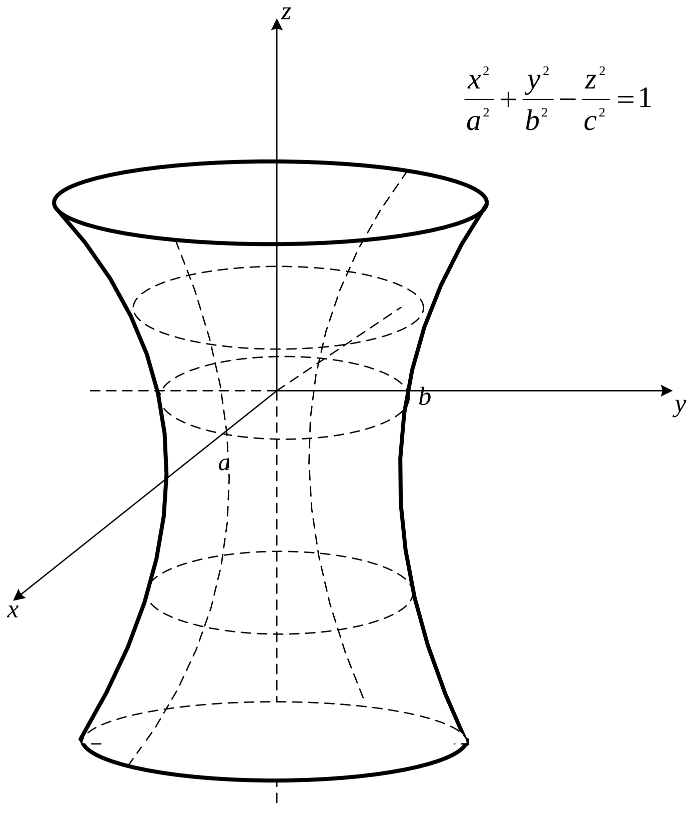
Y todas sus secciones transversales paralelas al plano xy serán elipses. ¿Por qué?

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán hipérbolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán hipérbolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

2.4.3.4 HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Un hiperboloide de dos hojas con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=-1$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (No tenemos lugar Geométrico)

Si $z=c$, tenemos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (punto)

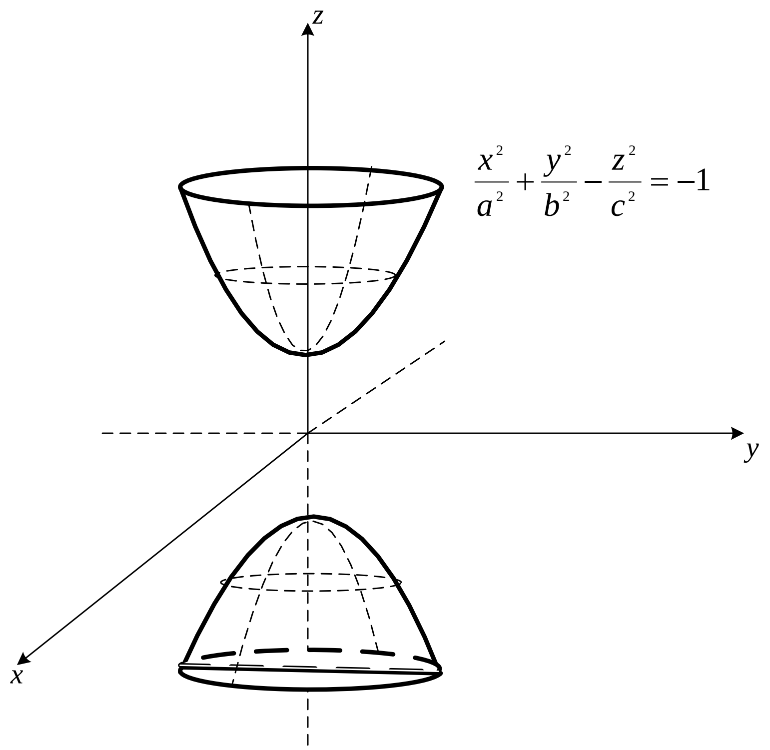
Si $z>c$ 0 $z<-c$ tenemos **elipses**. ¿Por qué?

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (**hipérbolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán hipérbolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán hipérbolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$$

2.4.3.5 DOBLE CONO

Un Doble Cono con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=0$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)

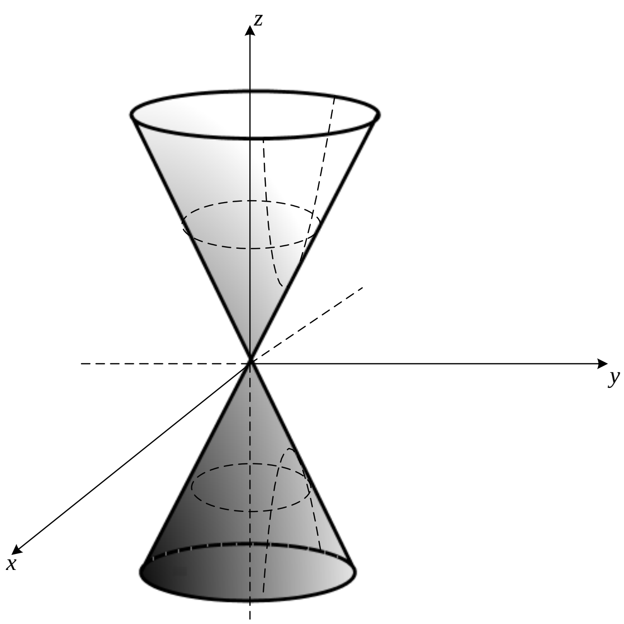
Si $z\neq 0$ tenemos **elipses**.

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (dos rectas)

Si $y\neq 0$ tenemos **hipérbolas**

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (dos rectas)

Si $x\neq 0$ tenemos **hipérbolas**



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

2.4.3.6 PARABOLOIDE ELIPTICO

Un Paraboloide Elíptico con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}\pm(z-l)=0$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, grafiquemos: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)

Si $z>0$, tenemos **elipses**. (Con $a=b$ tenemos circunferencias, en cuyo caso se lo denomina **Paraboloide Circular**).

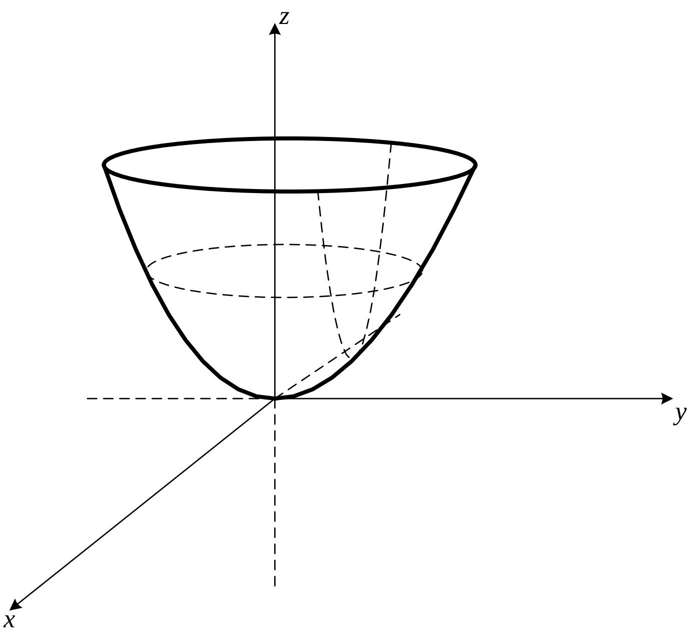
Si $z<0$, no tenemos lugar geométrico.

Si $y=0$ (Traza zx) tenemos $z=\frac{x^2}{a^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán parábolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) tenemos $z=\frac{y^2}{b^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán parábolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$-z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$z-l=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$x=\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$$

2.4.3.7 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Un Paraboloide Hiperbólico con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}\pm(z-l)=0$$

Grafiquemos $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$.

Si $z=0$ (Traza xy) tenemos $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$ (2 rectas)

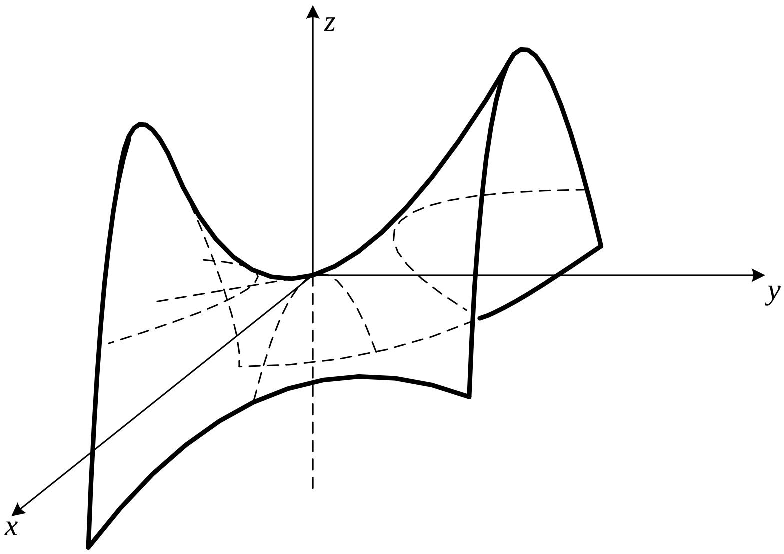
Si $z>0$ o $z<0$ tenemos **hipérbolas**.

Si $y=0$ (Traza zx) tenemos $z=-\frac{x^2}{a^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán parábolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) tenemos $z=\frac{y^2}{b^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán parábolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$z - l = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$x = \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$$

Ejemplo

Grafica el lugar geométrico cuya ecuación es: $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$

SOLUCIÓN:

Transformemos la ecuación dada a una de las formas descritas anteriormente:

Despejando las variables:

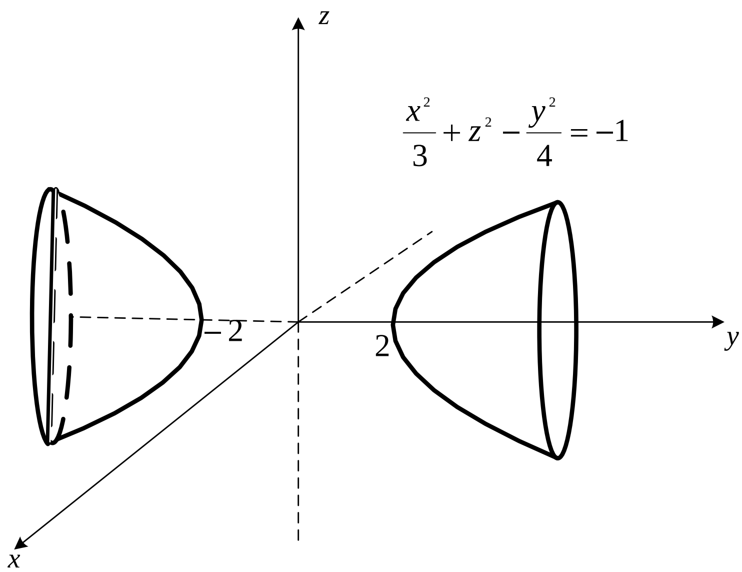
$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 = -12$$

Dividendo para 12 y simplificando:

$$\frac{4x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} + \frac{12z^2}{12} = -\frac{12}{12}$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = -1$$

De acuerdo a la forma de la última ecuación, se concluye que representa un PARABOLOIDE DE DOS HOJAS, con el eje y como eje de simetría (el término negativo lo indica)



Ejercicios Propuestos 2.6

Diga el nombre de las superficies cuádricas cuyas ecuaciones se dan a continuación. Haga la gráfica en cada caso.

a) $4x^2+36y^2+9z^2-1=0$

b) $4x^2-y^2+4z^2-4=0$

c) $144x^2+16y^2-9z^2-144=0$

d) $36x^2+4y^2+9z=0$

e) $9x^2+36y^2-4z^2+36=0$

f) $x^2-4y^2+4z^2-4=0$

g) $100x^2+225y^2-36z^2=0$

h) $16x^2-25y^2+400z=0$

i) $x^2-z^2+y=0$

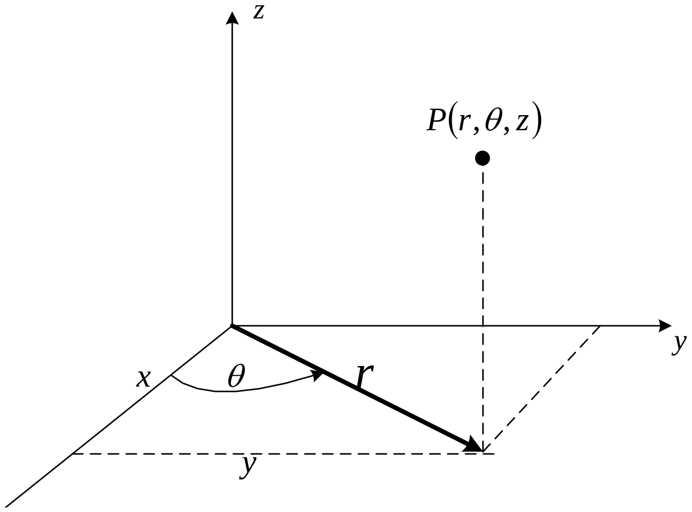
j) $400x^2+25y^2+16z^2-400=0$

k) $x^2+4z^2-8y=0$

l) $225x^2-100y^2+144z^2=0$

2.5 COORDENADAS CILÍNDRICA.

Un punto P en Coordenadas Cilíndricas está denotado como (r,θ,z) donde r y θ son las Coordenadas Polares.

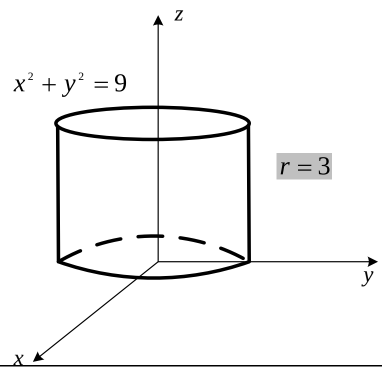


Entonces las transformaciones serían:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r sen\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

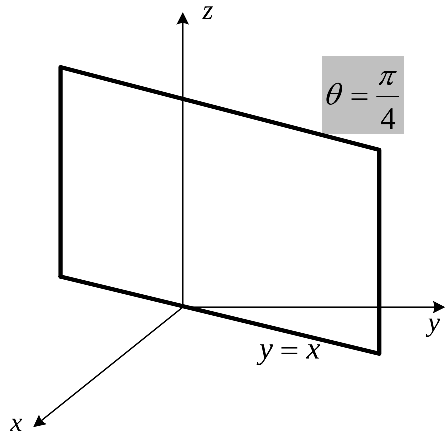
Ejemplo 1.

El cilindro que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $x^2+y^2=9$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $r=3$



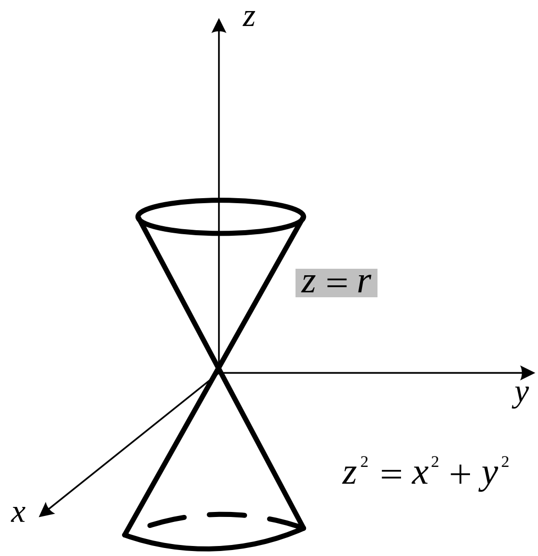
Ejemplo 2

El plano que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $y = x$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $\theta = \frac{\pi}{4}$



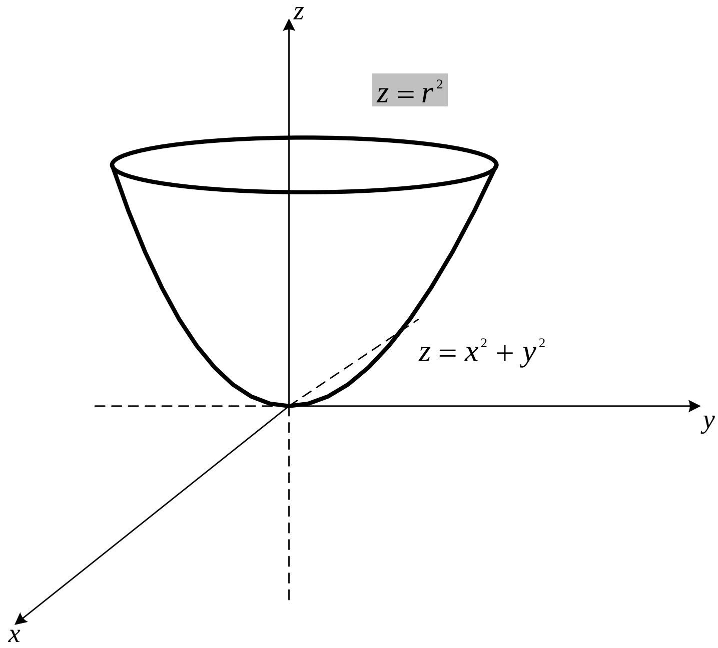
Ejemplo 3

El Doble Cono Circular que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z^2 = x^2 + y^2$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $z = r$



Ejemplo 4

El Paraboloide Circular que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z = x^2 + y^2$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $z = r^2$



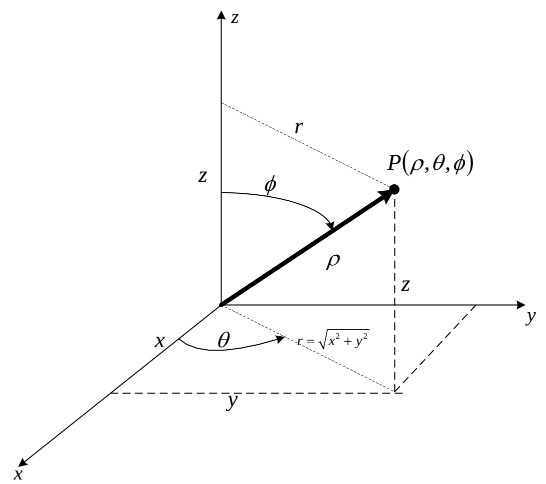
2.6 COORDENADAS ESFÉRICAS.

Un punto de R^3, puede ser denotado también como un vector que inicia en el origen con:

- Magnitud ρ,
- Angulo θ, que forma su proyección r en el plano xy con respecto a la dirección positiva del eje x,

y

- Angulo ϕ con respecto a la dirección positiva del eje z



$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \leq \rho < \infty \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi \end{array}}$$

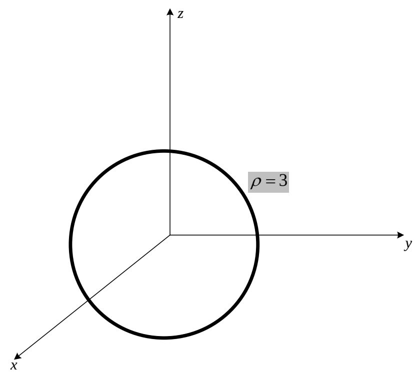
Observe que:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \\ \phi = arc\cos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\ sen\phi\cos\theta \\ y = \rho\ sen\phi\cos\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

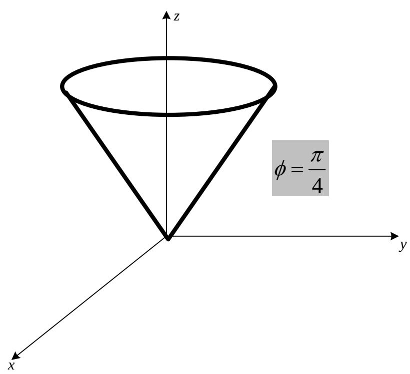
Ejemplo 1

La Esfera que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, su ecuación en coordenadas esféricas será $\rho = 3$



Ejemplo 2

El Cono que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, su ecuación en coordenadas esféricas será $\phi = \dfrac{\pi}{4}$



Ejemplo 3

Identificar y graficar la superficie que tiene por ecuación $\rho = 3\cos\phi$.

SOLUCIÓN:

Utilizando las ecuaciones de trasformación:

$$\rho = 3\cos\phi$$

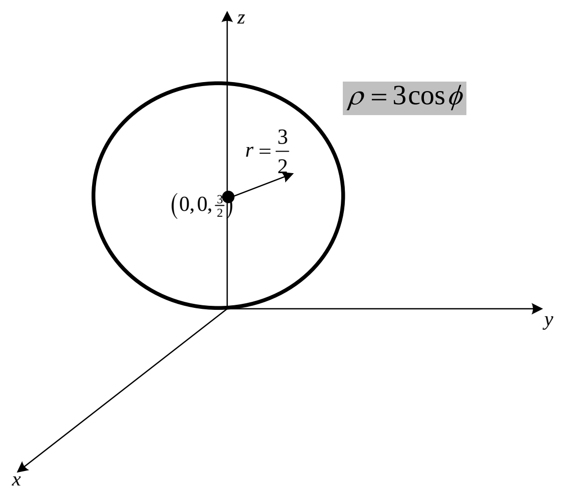
$$\rho = 3\frac{z}{\rho}$$

$$\rho^2 = 3z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3z$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4}$$

De la última ecuación se concluye que es una esfera de centro $\left(0, 0, \tfrac{3}{2}\right)$ y radio $\tfrac{3}{2}$



Ejercicios propuestos 2.7

Halle una ecuación en coordenadas rectangulares y dibuje las siguientes superficies.

a) $r = 2$

b) $r^2 = z$

c) $\theta = \pi/4$

d) $\phi = \pi/4$

e) $\rho = 5$

f) $\rho = 4\sec\phi$

g) $r^2 = 5 - x$

h) $r = 2\,sen\theta$

i) $z = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$

j) $\rho = 4\cos\phi$

k) $r = z/2$

l) $r = 2\cos\theta$

m) $\rho^2 + x = 2$

n) $r^2 + z^2 = 4$

o) $\rho = 4\csc\phi\sec\theta$

p) $r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + z^2 = 1$

q) $\rho = \csc\phi$

Misceláneos

1. Identifique Y GRAFIQUE las siguientes superficies.

a) $z^2 = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4z$

b) $9z^2 - 2x^2 - 3y - 3x + 5 = 0$

c) $5x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2z + 3y = 0$

d) $-3x^2 + 2y^2 - 3x + 2y + z^2 = 0$

e) $x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = z^2$

f) $2x^2 + 3y^2 - y - 2 = 0$

g) $-3x^2 + 2y^2 + 2y - 3x + z = 0$

h) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x - 8y + 2z + 17 = 0$

i) $9y^2 - 4z^2 + 18x^2 = 0$

j) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 146$

k) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$

l) $z^2y^2 + z^2x^2 = 4$

m) $x^2 = y^2 - z^2$

n) $5x^2 - 3y^2 + z^2 = 4$

o) $y^2 = \ln z$

p) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

q) $z^2 = \operatorname{sen} y + 5$

r) $2x = \ln\left(z^2 + y^2\right)$

s) $x^2 + y - 2z = 0$

2. Encuentre la ecuación general de la esfera que es tangente al plano $x - 8y + 4z + 4 = 0$ y que tiene el mismo centro que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - 6z + 33 = 0.$$

Resp. $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$

3. Hallar la menor distancia que hay entre el plano $x + 2y + 2z = 20$, y la esfera que tiene por ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$

Resp. $d = 2$

4. Dibújese la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.

a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2$

b) $z = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

c) $x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 2, \quad z = 0$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$

e) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad y = 2z, \quad z = 0$

f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4 - x^2 - y^2$

5. Encuentre las coordenadas de los focos de la elipse que resulta de la intersección de $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ con $z = 4$.

Resp. $\left(0, 2\sqrt{5}, 4\right)$ y $\left(0, -2\sqrt{5}, 4\right)$

6. Encuentre las coordenadas del foco de la parábola que resulta de la intersección de $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ con $x = 4$.

Resp. $\left(4, 0, \frac{25}{4}\right)$

7. Pruebe que la proyección en el plano xz de la curva que es la intersección de las superficies $y = 4 - x^2$, y $y = x^2 + z^2$ es una elipse y encuentre sus diámetros mayor y menor.

8. Dibuje el triángulo en el plano $y = x$ que está arriba del plano $z = \frac{y}{2}$, debajo del plano $z = 2y$, y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 8$. Después encuentre el área de este triángulo.

Resp. $A = 3\sqrt{2}$

9. Encontrar los valores de k para los cuales la intersección del plano $x+ky=1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2-x^2-z^2=1$ es:
   a) Una elipse
   b) Una hipérbola

Resp. a) $k\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$ b) $k\in\left(-1,1\right)$

10. Demostrar que la intersección del paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{z}{c}$ y el plano $z=bx+ay$ consiste de dos líneas rectas que se interceptan.

11. Sean P,Q los puntos de intersección del paraboloide hiperbólico $y^2-x^2=z$ con la recta $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$, hallar la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector $V=-\hat{\imath}+\hat{j}+\hat{k}$

Resp. $\mathrm{Pr}oy_{\overrightarrow{V}}\overrightarrow{PQ}=\left(-4,4,4\right)$

---

3 Superficies

Objetivos.
Se persigue que el estudiante:

- Grafique Superficies Cilíndricas, de Revolución y Cuádricas.

Este capítulo está dedicado a conocer ciertos lugares geométricos de R^3.

3.1 SUPERFICIES CILINDRICAS.

> Sea C una curva de un plano π y sea l una recta no paralela a π. Se define Superficie Cilíndrica al conjunto de puntos que perteneces a rectas paralelas a l y que intersecan a C.

A C se la denomina **Curva Generatriz** (o Directriz) y a l se la denomina **Recta Generatriz**.

Las superficies Cilíndricas que trataremos aquí serán aquellas que tienen la Curva Generatriz perteneciente a los planos coordenados y Rectas Generatrices Paralelas a los ejes coordenados. Es decir, si tienen una de la forma siguiente:

$f(x,y)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano xy, Rectas Generatrices paralelas al eje z.

$f(x,z)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano xz, Rectas Generatrices paralelas al eje y.

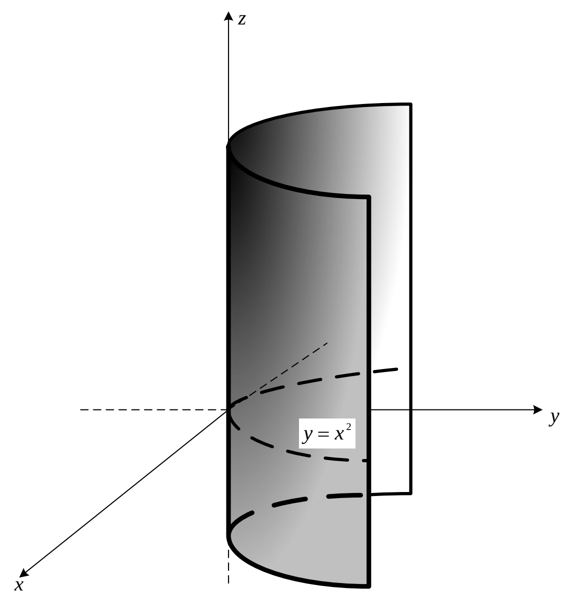
$f(y,z)=0$ Curva Generatriz perteneciente al plano yz, Rectas Generatrices paralelas al eje x.

Ejemplo 1

Graficar $y-x^2=0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $y=x^2$ en el plano xy y luego se trazan rectas paralelas al eje z siguiendo esta curva.

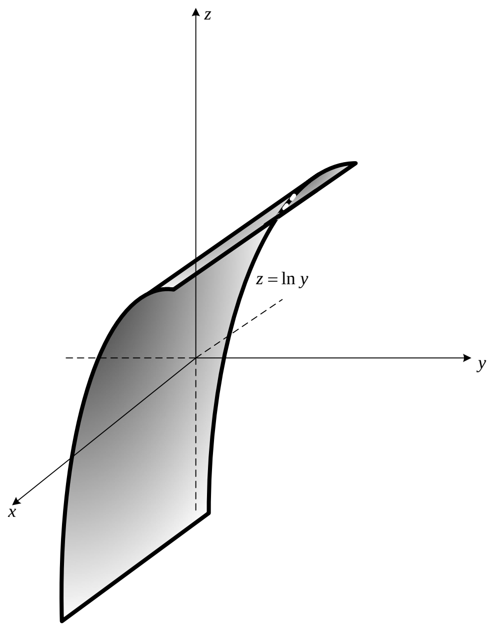


Ejemplo 2

Graficar $z - \ln y = 0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z = \ln y$ en el plano zy y luego se trazan rectas paralelas al eje x siguiendo esta curva.

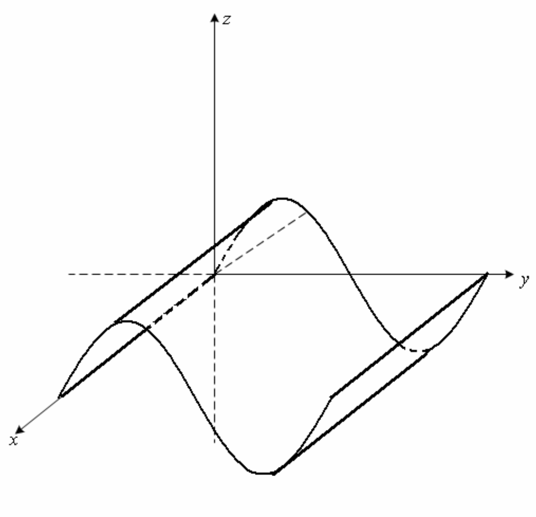


Ejemplo 3

Graficar $z - seny = 0$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z = seny$ en el plano zy y luego se trazan rectas paralelas al eje x siguiendo esta curva.

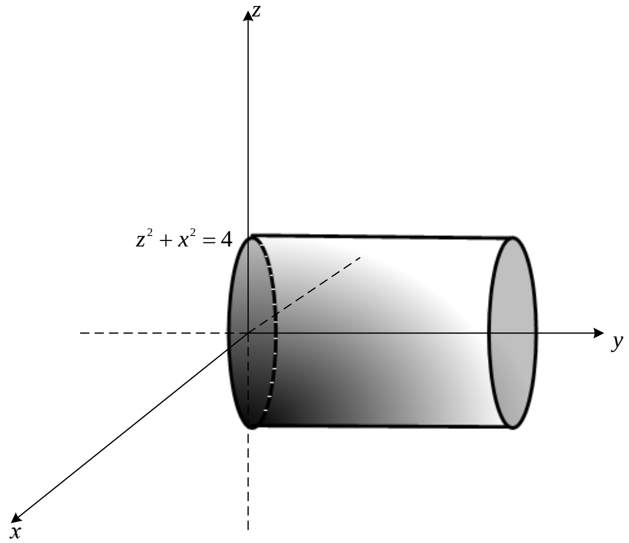


Ejemplo 4

Graficar $z^2 + x^2 = 4$

SOLUCIÓN.

Se dibuja primero la curva $z^2 + x^2 = 4$ en el plano zx y luego se trazan rectas paralelas al eje y siguiendo esta curva.



Ejercicios Propuestos 3.1

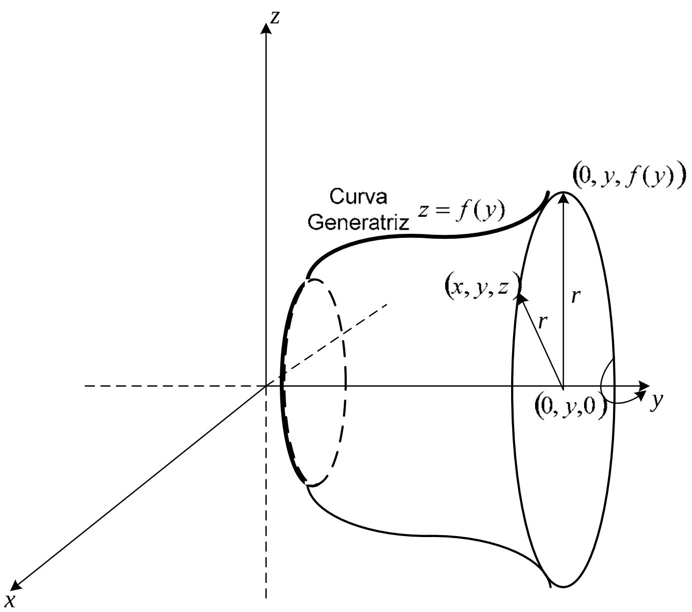
1. Bosqueje la superficie cilíndrica cuya ecuación se indica.

a) $4z^2 - y^2 = 4$	d) $x^2 = y^3$	f) $z - e^y = 0$
b) $z = \operatorname{sen} y$	e) $y = \|z\|$	g) $y^2 + z^2 = 9$
c) $y^2 + z = 4$		

3.2 SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

Las Superficies de Revolución que trataremos aquí son aquellas que se generan al girar 360º una curva perteneciente a uno de los planos coordenados alrededor de uno de los ejes coordenados.

Por ejemplo suponga que se tiene la curva $z = f(y)$ (contenida en el plano ZY) y la hacemos girar 360º alrededor del eje y, entonces se forma una superficie de revolución, observe la figura:



La ecuación de la superficie de revolución se la deduce de la siguiente manera

La sección transversal es circular, por tanto:

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + (y-y)^2 + (f(y)-0)^2} = f(y)$$

Como también se observa que:

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + z^2}$$

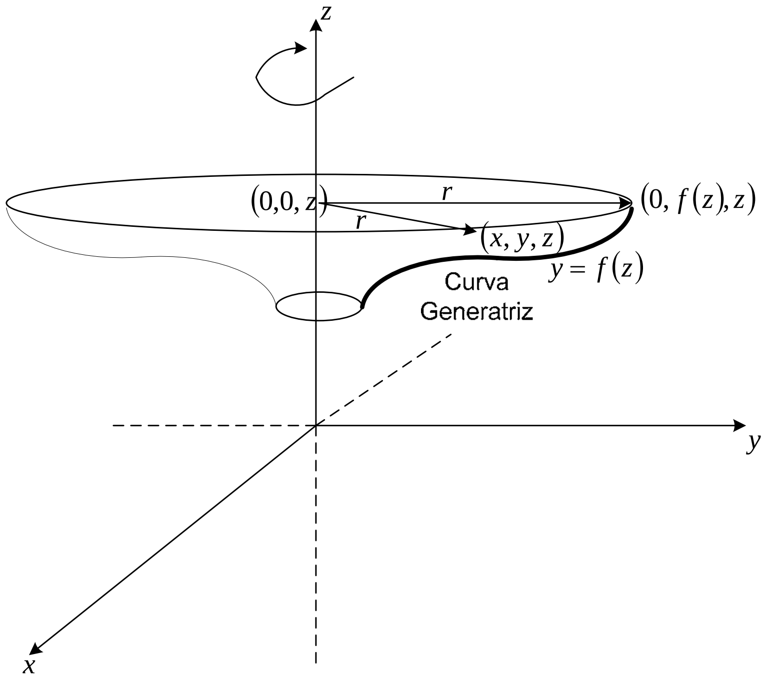
Entonces, igualando resulta:

$$x^2 + z^2 = [f(y)]^2$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CON CURVA GENERATRIZ $x = f(y)$ (EN EL PLANO xy) O TAMBIÉN $z = f(y)$ (EN EL PLANO zy), GIRADA ALREDEDOR DEL EJE "y".

A, $\boxed{x^2 + z^2}$ se le llama **Binomio de Circularidad**.

En cambio, si la curva generatriz anterior la hacemos girar alrededor del eje z, obtendríamos otra superficie de revolución, observe la figura:



Aquí en cambio:

$$r = \sqrt{(0-0)^2 + \left(f(z)-0\right)^2 + (z-z)^2} = f(z)$$

Y también

$$r = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Entonces, igualando resulta:

$$x^2 + y^2 = \left[f(z)\right]^2$$

ECUACIÓN DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCIÓN CON CURVA GENERATRIZ $x = f(z)$ (EN EL PLANO xz) O TAMBIÉN $y = f(z)$ (EN EL PLANO zy), GIRADA ALREDEDOR DEL EJE "z".

El **Binomio de Circularidad** seria $\boxed{x^2 + y^2}$.

La curva anterior no puede ser girada alrededor del eje "x". ¿POR QUÉ?

La ecuación de una superficie de revolución con curva generatriz $y = f(x)$ (en el plano xy) o $z = f(x)$ (en el plano zx) girada alrededor del eje "x", sería:

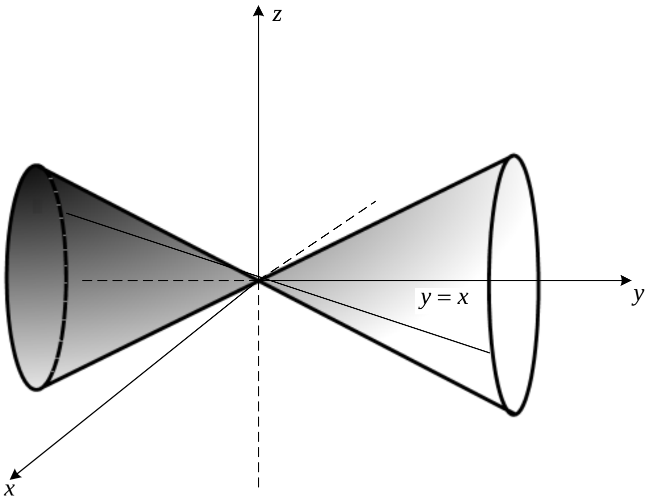
$$y^2 + z^2 = \left[f(x)\right]^2$$ ¡DEDUZCALA!

Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la superficie de revolución que se generar al girar $y = x$ alrededor del eje y .

SOLUCIÓN.

Primero grafiquemos la curva generatriz en el plano xy y formemos la superficie de revolución.



Como el eje de rotación es el eje y , el binomio de circularidad será: $x^2 + z^2$.

Por tanto, la ecuación de esta superficie será de la forma: $x^2 + z^2 = \left[f(y)\right]^2$, donde $f(y)$ es la ecuación de la curva generatriz; que en este caso seria: $f(y) = y$

Por tanto, la ecuación de la superficie sería: $x^2 + z^2 = y^2$

Ejemplo 2

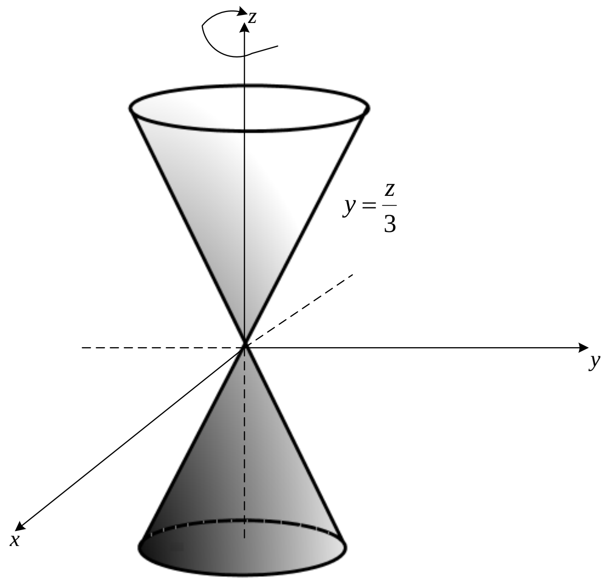
Identificar y graficar la superficie que tiene por ecuación $9x^2 - z^2 + 9y^2 = 0$.

SOLUCIÓN.

Primero identifiquemos el binomio de circularidad y la ecuación de la curva generatriz

$$9x^2 - z^2 + 9y^2 = 0$$
$$9\left(x^2 + y^2\right) = z^2$$
$$x^2 + y^2 = \left[\frac{z}{3}\right]^2$$

Por tanto de acuerdo a la forma de la última ecuación se concluye que se trata de una superficie de revolución con curva generatriz $\boxed{x = \frac{z}{3}}$ o también $\boxed{y = \frac{z}{3}}$, girada alrededor del eje z (la variable que no aparece en el binomio de circularidad).



Ejercicios Propuestos 3.2

1. Halle una ecuación de la superficie de revolución que se genera al girar la curva plana dada, alrededor del eje dado. Grafique.
   a) $x^2+4z^2=16$, alrededor del eje x.
   b) $y=sen\,x$, alrededor del eje x.
   c) $x^2=4y$, alrededor del eje y.
   d) $xy=1$, alrededor del eje x.
   e) $z^2=6x$, alrededor del eje x.
   f) $z=e^x$, alrededor del eje x.

2. Encuentre el eje y la curva generatriz de cada una de dichas superficies de revolución. Realice el gráfico correspondiente.
   a) $x^2+z^2-2y=0$
   b) $x^2+z^2=|y|$
   c) $y^2+z^2=e^{2x}$
   d) $x^2+4y^2+4z^2=36$

3.3 SUPERFICIES CUADRICAS.

Las Superficies Cuádricas o simplemente Cuádricas con eje central paralelo a los ejes coordenados, tienen por ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$$

Si la llevamos a la forma canónica, completando cuadrado, tendremos los siguientes lugares geométricos.

3.3.1 ESFERA.

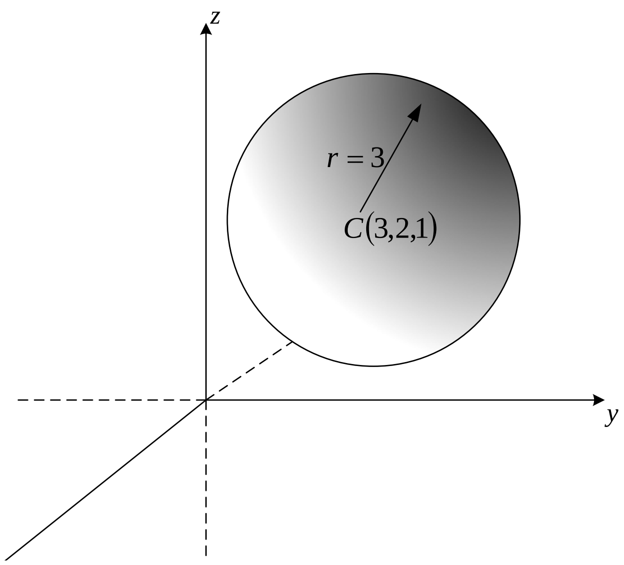
La ecuación canónica de la esfera es de la forma:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2 \text{ con } r^2 > 0$$

Donde, su centro es $C(h,k,l)$ y su radio es r

Ejemplo

La ecuación $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$, tiene como lugar geométrico una esfera de centro $C(3,2,1)$ y radio $r = 3$



Analice el lugar geométrico, si $r^2 < 0$ y si $r^2 = 0$

3.3.2 ELIPSOIDE

La ecuación canónica de un elipsoide es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Donde, su centro es $C(h,k,l)$

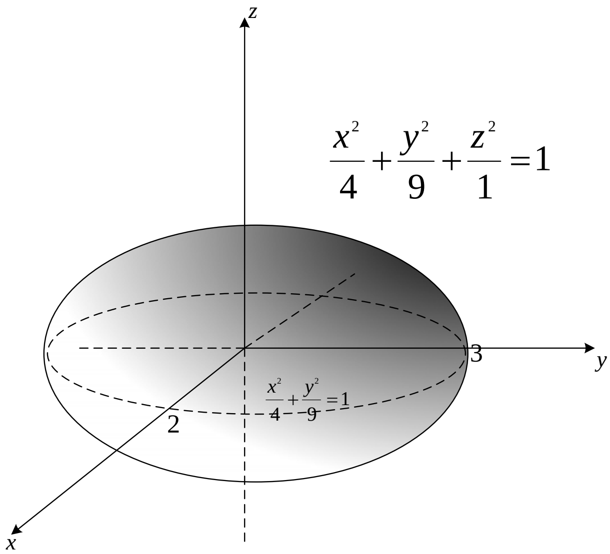
Ejemplo

La ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{1}=1$ representa un elipsoide con centro el origen.

Su traza (intersección) con el plano xy, se obtiene haciendo $z=0$,

Entonces, resulta $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, la ecuación de una elipse.

Además todas las secciones transversales son elipses. ¿Por qué?



3.3.3 HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA

Un hiperboloide de una hoja con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (Elipses)

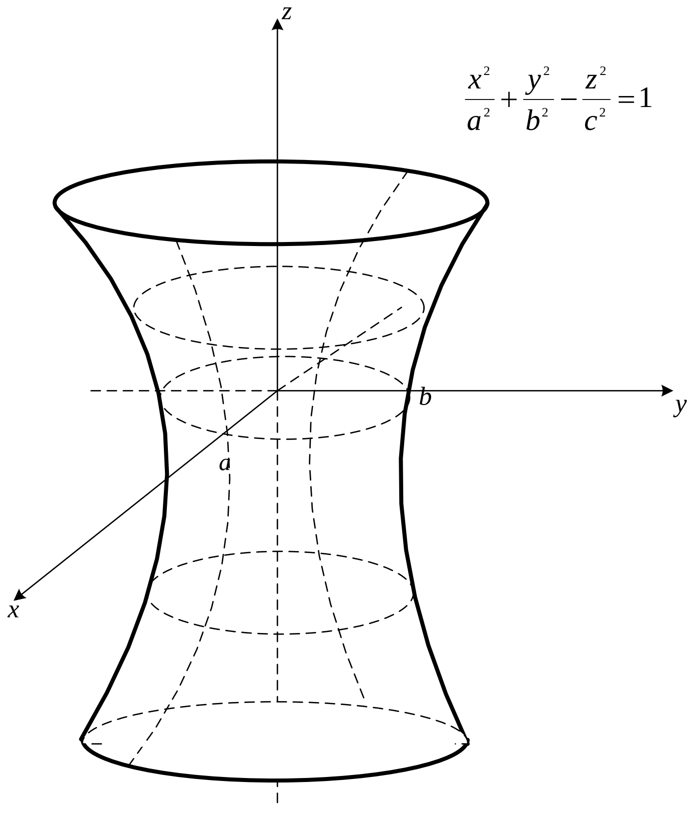
Y todas sus secciones transversales paralelas al plano xy serán elipses. ¿Por qué?

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán hipérbolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán hipérbolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

3.3.4 HIPERBOLOIDE DE DOS HOJAS

Un hiperboloide de dos hojas con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=-1$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ (No tenemos lugar Geométrico)

Si $z=c$, tenemos $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (punto)

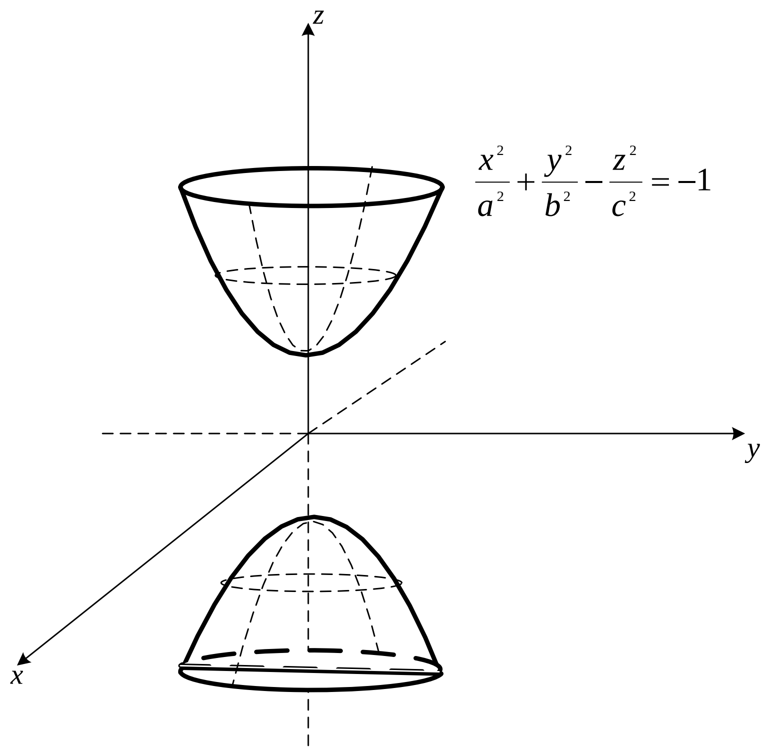
Si $z>c$ 0 $z<-c$ tenemos **elipses**. ¿Por qué?

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (**hipérbolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán hipérbolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (hipérbolas)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán hipérbolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$$

3.3.5 DOBLE CONO

Un Doble Cono con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(z-l)^2}{c^2}=0$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, se tiene $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$.

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)

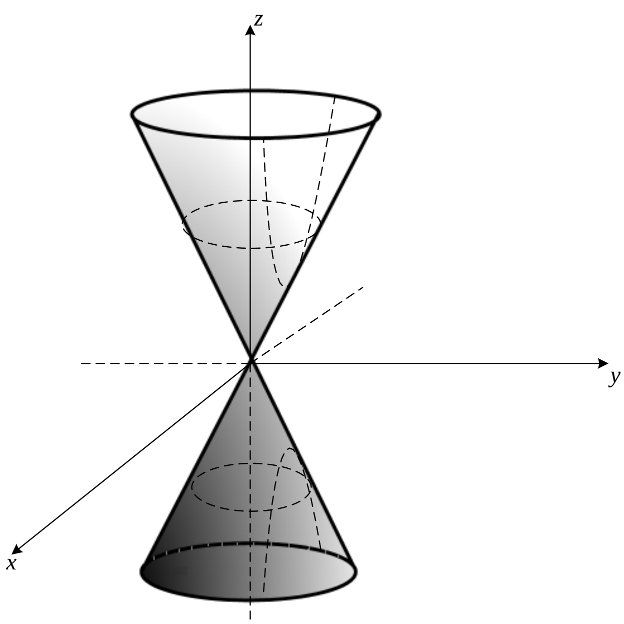
Si $z\neq 0$ tenemos **elipses**.

Si $y=0$ (Traza zx) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (dos rectas)

Si $y\neq 0$ tenemos **hipérbolas**

Si $x=0$ (Traza zy) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ (dos rectas)

Si $x\neq 0$ tenemos **hipérbolas**



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$$

3.3.6 PARABOLOIDE ELIPTICO

Un Paraboloide Elíptico con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}\pm(z-l)=0$$

Suponga que $h=0$, $k=0$, $l=0$, grafiquemos: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$

Si $z=0$ (Traza xy) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ (un punto)

Si $z>0$, tenemos **elipses**. (Con $a=b$ tenemos circunferencias, en cuyo caso se lo denomina **Paraboloide Circular**).

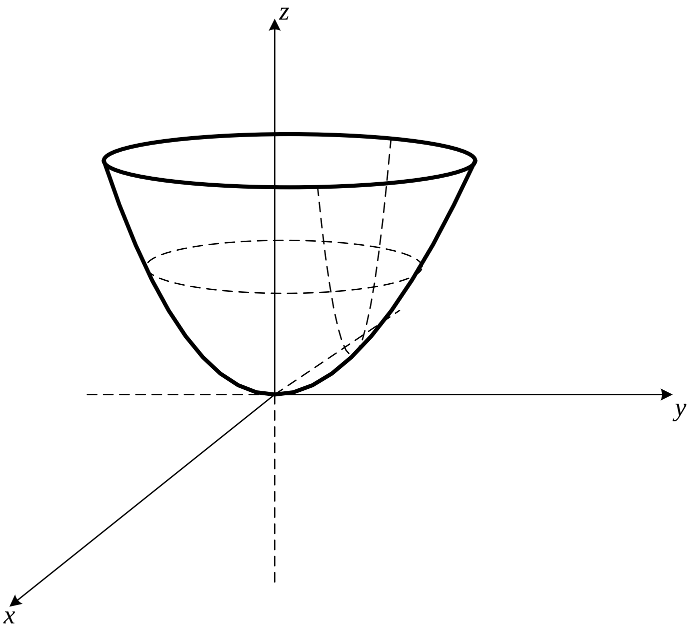
Si $z<0$, no tenemos lugar geométrico.

Si $y=0$ (Traza zx) tenemos $z=\frac{x^2}{a^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán parábolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) tenemos $z=\frac{y^2}{b^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán parábolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$-z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$z-l=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$x=\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

$$y=\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}$$

3.3.7 PARABOLOIDE HIPERBÓLICO

Un Paraboloide Hiperbólico con eje de simetría paralelo al eje z, tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}\pm(z-l)=0$$

Grafiquemos $z=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}$.

Si $z=0$ (Traza xy) tenemos $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=0$ (2 rectas)

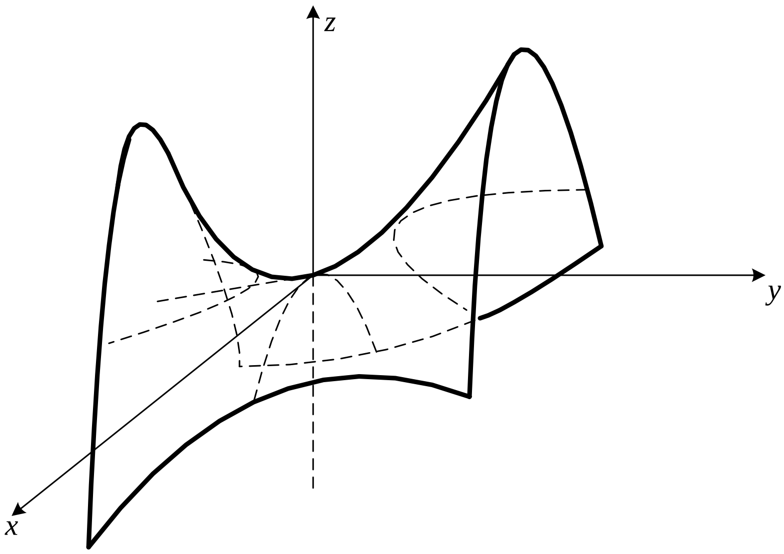
Si $z>0$ o $z<0$ tenemos **hipérbolas**.

Si $y=0$ (Traza zx) tenemos $z=-\frac{x^2}{a^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zx serán parábolas. ¿Por qué?

Si $x=0$ (Traza zy) tenemos $z=\frac{y^2}{b^2}$ (**parábolas**)

Y todas sus secciones transversales paralelas al plano zy serán parábolas. ¿Por qué?



PREGUNTA: ¿Cómo serían las gráficas de:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$z - l = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$x = \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$$

Ejemplo

Grafica el lugar geométrico cuya ecuación es: $4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$

SOLUCIÓN:

Transformemos la ecuación dada a una de las formas descritas anteriormente:

Despejando las variables:

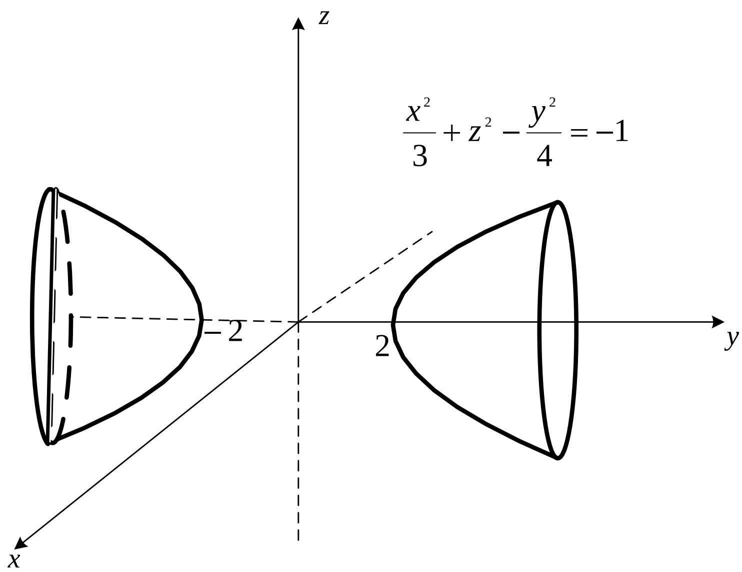
$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 = -12$$

Dividendo para 12 y simplificando:

$$\frac{4x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} + \frac{12z^2}{12} = -\frac{12}{12}$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = -1$$

De acuerdo a la forma de la última ecuación, se concluye que representa un PARABOLOIDE DE DOS HOJAS, con el eje y como eje de simetría (el término negativo lo indica)



Ejercicios Propuestos 3.3

Diga el nombre de las superficies cuádricas cuyas ecuaciones se dan a continuación. Haga la gráfica en cada caso.

a) $4x^2+36y^2+9z^2-1=0$

b) $4x^2-y^2+4z^2-4=0$

c) $144x^2+16y^2-9z^2-144=0$

d) $36x^2+4y^2+9z=0$

e) $9x^2+36y^2-4z^2+36=0$

f) $x^2-4y^2+4z^2-4=0$

g) $100x^2+225y^2-36z^2=0$

h) $16x^2-25y^2+400z=0$

i) $x^2-z^2+y=0$

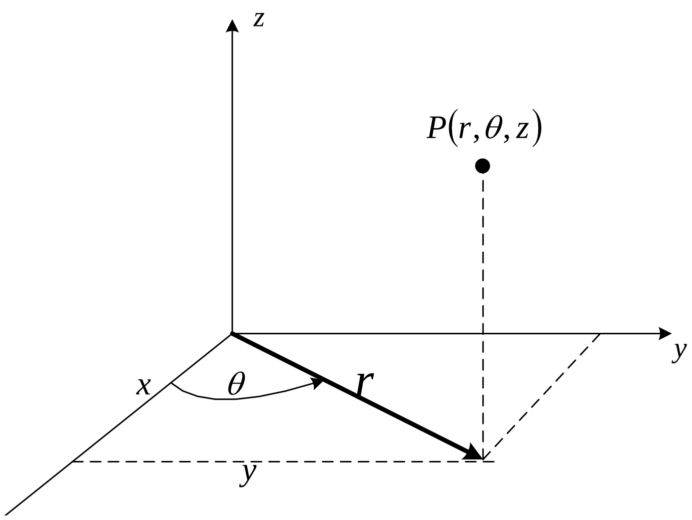
j) $400x^2+25y^2+16z^2-400=0$

k) $x^2+4z^2-8y=0$

l) $225x^2-100y^2+144z^2=0$

3.4 COORDENADAS CILÍNDRICA.

Un punto P en Coordenadas Cilíndricas está denotado como (r,θ,z) donde r y θ son las Coordenadas Polares.

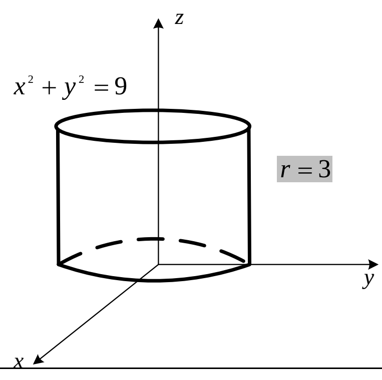


Entonces las transformaciones serían:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = rsen\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

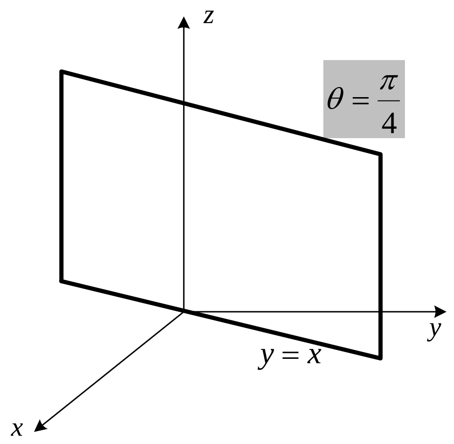
Ejemplo 1.

El cilindro que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $x^2+y^2=9$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $r=3$



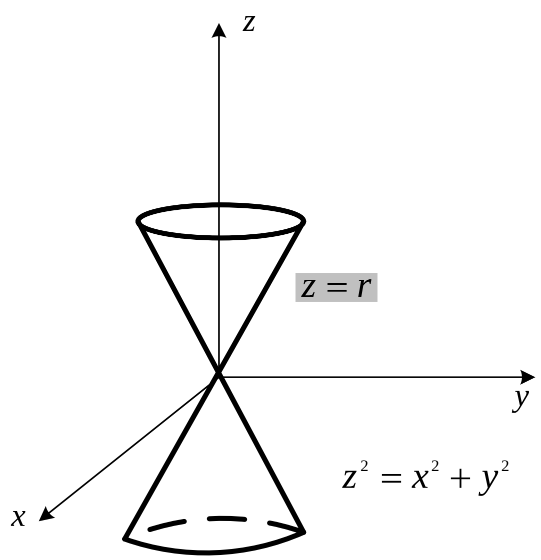
Ejemplo 2

El plano que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $y = x$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $\theta = \frac{\pi}{4}$



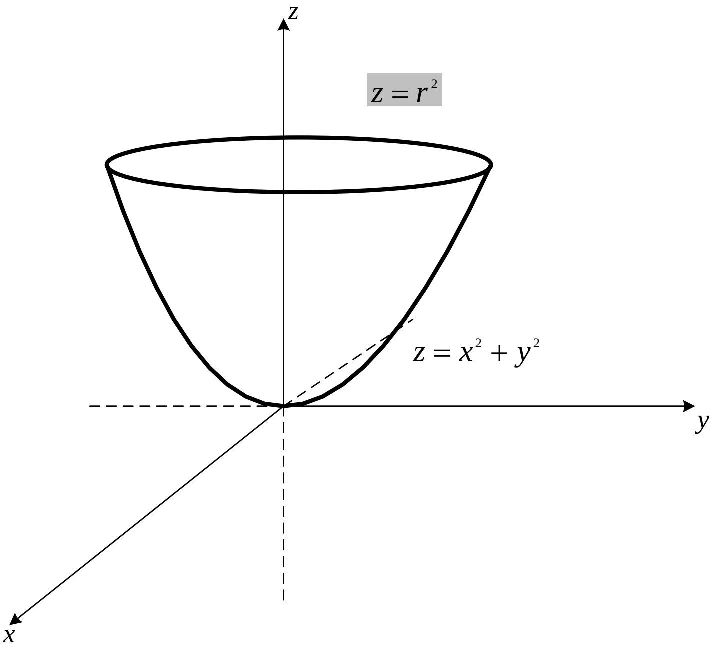
Ejemplo 3

El Doble Cono Circular que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z^2 = x^2 + y^2$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $z = r$



Ejemplo 4

El Paraboloide Circular que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z = x^2 + y^2$, su ecuación en coordenadas cilíndricas será $z = r^2$



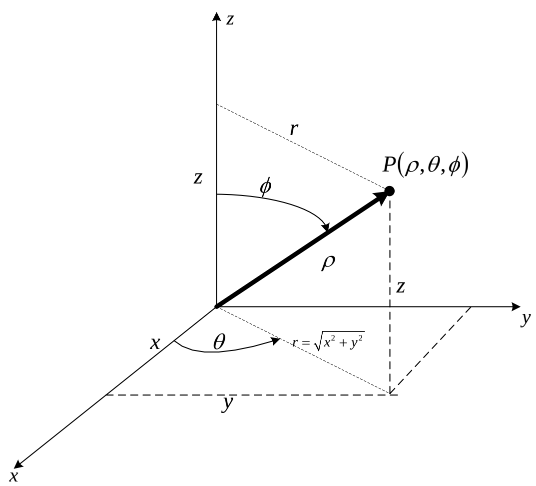
3.5 COORDENADAS ESFÉRICAS.

Un punto de R^3, puede ser denotado también como un vector que inicia en el origen con:

- Magnitud ρ,
- Angulo θ, que forma su proyección r en el plano xy con respecto a la dirección positiva del eje x,

y

- Angulo ϕ con respecto a la dirección positiva del eje z



$$0 \le \rho < \infty$$
$$0 \le \theta \le 2\pi$$
$$0 \le \phi \le \pi$$

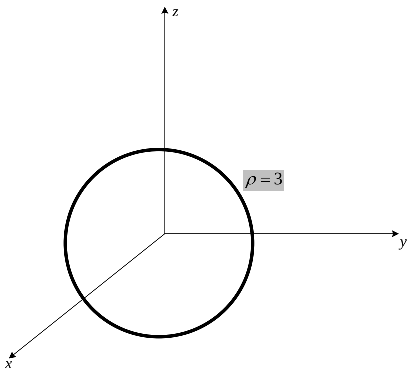
Observe que:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arctg\,\dfrac{y}{x} \\ \phi = arc\cos\left(\dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \rho\ sen\phi\cos\theta \\ y = \rho\ sen\phi\cos\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}$$

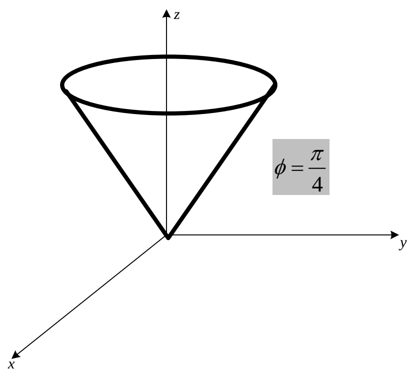
Ejemplo 1

La Esfera que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, su ecuación en coordenadas esféricas será $\rho = 3$



Ejemplo 2

El Cono que tiene por ecuación en coordenadas rectangulares $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, su ecuación en coordenadas esféricas será $\phi = \dfrac{\pi}{4}$



Ejemplo 3

Identificar y graficar la superficie que tiene por ecuación $\rho = 3\cos\phi$.

SOLUCIÓN:

Utilizando las ecuaciones de trasformación:

$$\rho = 3\cos\phi$$

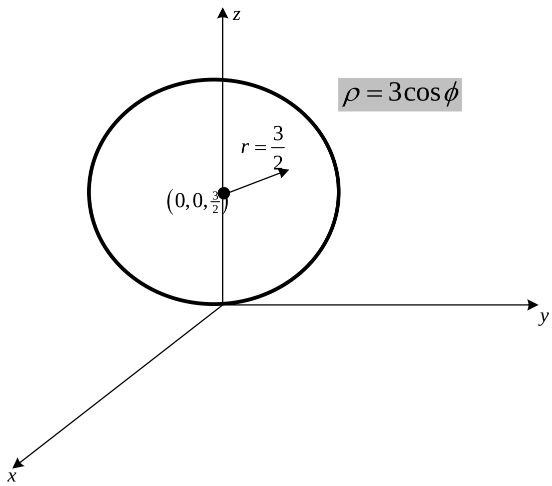
$$\rho = 3\frac{z}{\rho}$$

$$\rho^2 = 3z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3z$$

$$x^2 + y^2 + \left(z - \tfrac{3}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4}$$

De la última ecuación se concluye que es una esfera de centro $\left(0, 0, \tfrac{3}{2}\right)$ y radio $\tfrac{3}{2}$



Ejercicios propuestos 3.4

Halle una ecuación en coordenadas rectangulares y dibuje las siguientes superficies.

a) $r = 2$

b) $r^2 = z$

c) $\theta = \pi/4$

d) $\phi = \pi/4$

e) $\rho = 5$

f) $\rho = 4\sec\phi$

g) $r^2 = 5 - x$

h) $r = 2\,sen\theta$

i) $z = r^2 \operatorname{sen}^2\theta$

j) $\rho = 4\cos\phi$

k) $r = z/2$

l) $r = 2\cos\theta$

m) $\rho^2 + x = 2$

n) $r^2 + z^2 = 4$

o) $\rho = 4\csc\phi\sec\theta$

p) $r^2\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) + z^2 = 1$

q) $\rho = \csc\phi$

Misceláneos

1. Identifique Y GRAFIQUE las siguientes superficies.
   a) $z^2 = x^2 + 4y^2 - 2x + 8y + 4z$
   b) $9z^2 - 2x^2 - 3y - 3x + 5 = 0$
   c) $5x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2z + 3y = 0$
   d) $-3x^2 + 2y^2 - 3x + 2y + z^2 = 0$
   e) $x^2 + 5y^2 - 2x + 10y = z^2$
   f) $2x^2 + 3y^2 - y - 2 = 0$
   g) $-3x^2 + 2y^2 + 2y - 3x + z = 0$
   h) $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x - 8y + 2z + 17 = 0$
   i) $9y^2 - 4z^2 + 18x^2 = 0$
   j) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 146$
   k) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$
   l) $z^2y^2 + z^2x^2 = 4$
   m) $x^2 = y^2 - z^2$
   n) $5x^2 - 3y^2 + z^2 = 4$
   o) $y^2 = \ln z$
   p) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
   q) $z^2 = \operatorname{sen} y + 5$
   r) $2x = \ln\left(z^2 + y^2\right)$
   s) $x^2 + y - 2z = 0$
2. Encuentre la ecuación general de la esfera que es tangente al plano $x - 8y + 4z + 4 = 0$ y que tiene el mismo centro que
$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 4y - 6z + 33 = 0\,.$$
Resp. $(x-6)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{4}{9}$
3. Hallar la menor distancia que hay entre el plano $x + 2y + 2z = 20$, y la esfera que tiene por ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 13 = 0$
Resp. $d = 2$
4. Dibújese la región limitada por las gráficas de las ecuaciones.
   a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 2$
   b) $z = \sqrt{4 - x^2}, y = \sqrt{4 - x^2}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$
   c) $x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 2, \quad z = 0$
   d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0$
   e) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad y = 2z, \quad z = 0$
   f) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 4 - x^2 - y^2$
5. Encuentre las coordenadas de los focos de la elipse que resulta de la intersección de $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ con $z = 4$.
Resp. $\left(0, 2\sqrt{5}, 4\right)$ y $\left(0, -2\sqrt{5}, 4\right)$
6. Encuentre las coordenadas del foco de la parábola que resulta de la intersección de $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$ con $x = 4$.
Resp. $\left(4, 0, \frac{25}{4}\right)$
7. Pruebe que la proyección en el plano xz de la curva que es la intersección de las superficies $y = 4 - x^2$, y $y = x^2 + z^2$ es una elipse y encuentre sus diámetros mayor y menor.
8. Dibuje el triángulo en el plano $y = x$ que está arriba del plano $z = \dfrac{y}{2}$, debajo del plano $z = 2y$, y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 8$. Después encuentre el área de este triángulo.

Resp. $A = 3\sqrt{2}$

9. Encontrar los valores de k para los cuales la intersección del plano $x + ky = 1$ y el hiperboloide elíptico de dos hojas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ es:
   a) Una elipse
   b) Una hipérbola

Resp. a) $k \in \left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right)$ b) $k \in (-1,1)$

10. Demostrar que la intersección del paraboloide hiperbólico $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ y el plano $z = bx + ay$ consiste de dos líneas rectas que se interceptan.

11. Sean P, Q los puntos de intersección del paraboloide hiperbólico $y^2 - x^2 = z$ con la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$, hallar la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector $V = -\hat{\imath} + \hat{j} + \hat{k}$

Resp. $\operatorname{Proy}_{\vec{V}} \overrightarrow{PQ} = (-4,4,4)$

4 Funciones De Varias Variables

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Conceptualice funciones Vectoriales, Escalares y Curvas
- Describa conjunto de niveles.
- Establezca límites, continuidad y derivadas de funciones de dos variables.
- Establezca si una función de dos variables es diferenciable o no.
- Determine ecuaciones de planos tangentes a superficies.
- Obtenga derivadas de funciones compuestas
- Obtenga derivadas de funciones implícitas

1. FUNCIÓN VECTORIAL

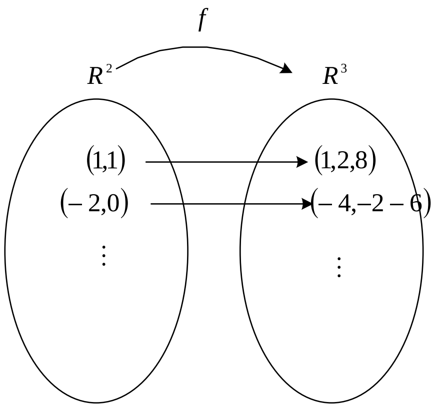
1.1 DEFINICIÓN

Una función del tipo $f: U \subseteq R^n \to R^m$ se la denomina FUNCIÓN VECTORIAL o CAMPO VECTORIAL.

Ejemplo.

Sea $f: R^2 \to R^3$ tal que $f(x,y) = (2x - y, x + y, 3x + 5y)$

Esquemáticamente tenemos:



Si $m = 1$, tenemos $f: U \subseteq R^n \to R$, se la denomina **FUNCIÓN ESCALAR**, **CAMPO ESCALAR**, **O FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES.**

Si $f: U \subseteq R^2 \to R$, tenemos una **FUNCIÓN DE DOS VARIABLES.**

Ejemplo.

Sea $f: R^2 \to R$ tal que $f(x,y) = 6 - 2x - 3y$

Si $f: U \subseteq R^3 \to R$, tenemos una **FUNCIÓN DE TRES VARIABLES.**

Ejemplo.

Sea $f: R^3 \to R$ tal que $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$

Si $n = 1$, tenemos $f: U \subseteq R \to R^m$, la cual se la denomina **TRAYECTORIA** o **CURVA.**

Ejemplo.

Sea $f: R \to R^3$ tal que $f(t) = (2-3t,\ 4+t,\ -1+2t)$

Tenemos una CURVA de R^3.

Este capítulo lo dedicaremos al estudio de **FUNCIONES ESCALARES.**

2. GRAFICA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

2.1 DEFINICIÓN

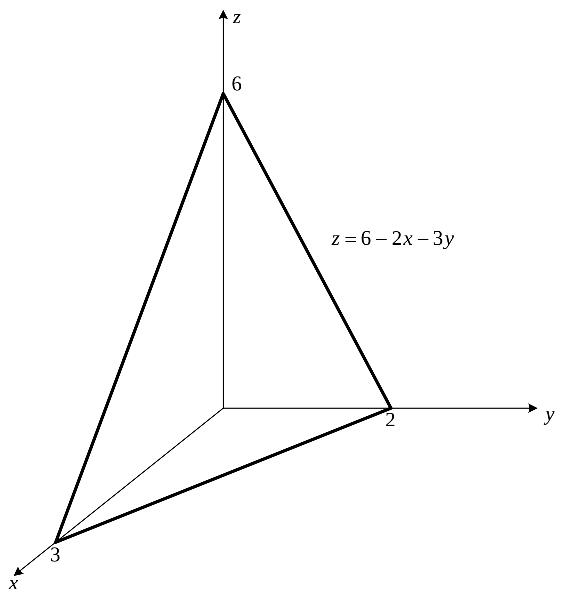
Sea $f: U \subseteq R^n \to R$. Se llama ***gráfica*** de f al conjunto de puntos $\left(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(\overline{x})\right)$ de R^{n+1}, donde $\overline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U$.

Si tenemos $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Su **gráfico** se define como el conjunto de puntos (x, y, z) de R^3, tales que $z = f(x, y)$. El lugar geométrico es llamado **Superficie**, como ya se lo ha anticipado.

Algunas superficies que corresponde a funciones, ya se han graficado en el capítulo anterior.

Ejemplo.

Para $f: R^2 \to R$ tal que $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$, su grafico es el conjunto (x, y, z) de R^3 tales que $z = 6 - 2x - 3y$ (un plano)



Elaborar gráficas de una función de dos variables no es tan sencillo, se requeriría de un computador en la mayoría de las ocasiones. Pero si podemos saber características de sus graficas analizando su regla de correspondencia.

3. DOMINIO DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Sea $f:U\subseteq R^n \to R$, entonces su **DOMINIO** es el conjunto U

Es decir, su **DOMINIO** está constituido por vectores de R^n, $\overline{x}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ para los cuales tiene sentido la regla de correspondencia; y su **RECORRIDO** por vectores de R^m, $f\left(\overline{x}\right)=\left(f_1(\overline{x}),f_2(\overline{x}),\cdots,f_m(\overline{x})\right)$.

Aquí a $x_{1,}x_2,\cdots,x_n$ se las denominan **VARIABLES INDEPENDIENTES.**

Si $f:U\subseteq R^2\to R$, su dominio será un subconjunto del plano.

Establecer el Dominio Natural, igual que para funciones de una variable, es una necesidad en muchas ocasiones.

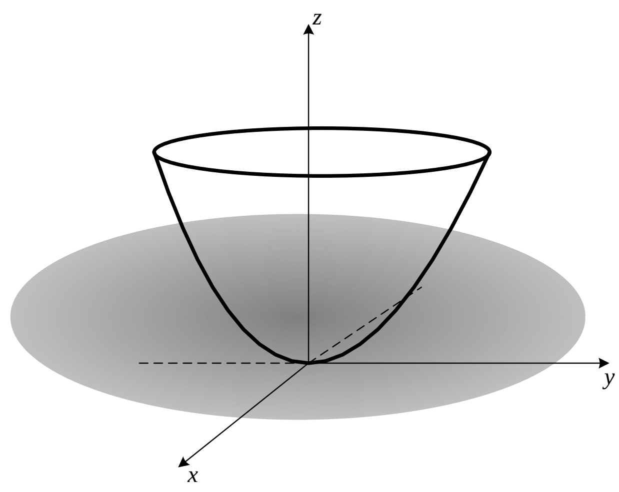
Ejemplo 1

Hallar el Dominio Natural para $f(x,y)=x^2+y^2$

SOLUCIÓN.

Observe que la regla de correspondencia no tiene restricciones, por tanto se le puede dar cualquier valor real a las variables independientes " x " y " y ", es decir $Domf=R^2$.

Además, se puede decir que el Dominio de una función de dos variables será la PROYECCIÓN QUE TENGA SU GRÁFICA EN EL PLANO xy. Recuerde que la gráfica de $z=x^2+y^2$ es un paraboloide.



Por tanto la proyección es todo el plano xy

Ejemplo 2

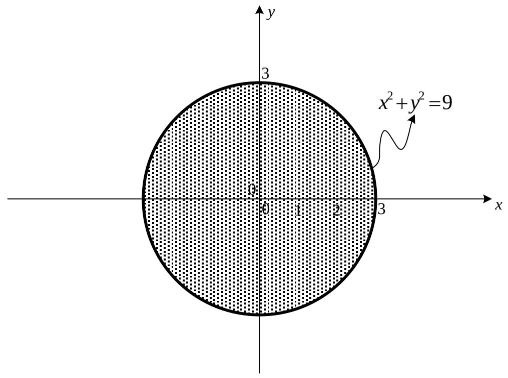
Hallar el Dominio Natural para $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

SOLUCIÓN.

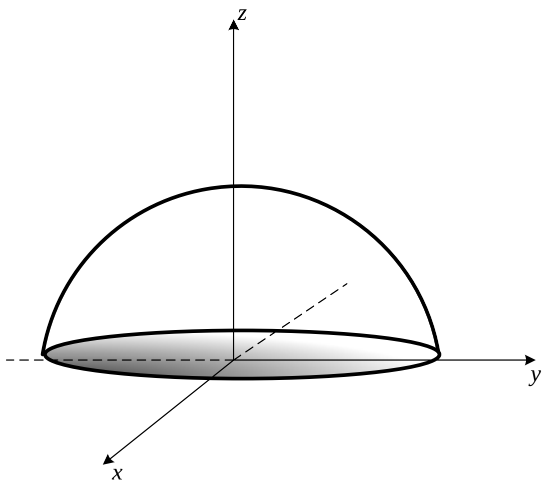
Observe que la regla de correspondencia tiene sentido cuando $9-x^2-y^2\geq 0$, para que se pueda calcular la raíz cuadrada lo interior del radical debe ser un número positivo o cero.

Despejando se tiene $x^2+y^2\leq 9$.

Es decir: $Domf=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/x^2+y^2\leq 9\right\}$, los pares de números que pertenecen a la circunferencia centrada en el origen de radio 3 y a su interior.



Además el gráfico de $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, es la semiesfera:



Ejemplo 2

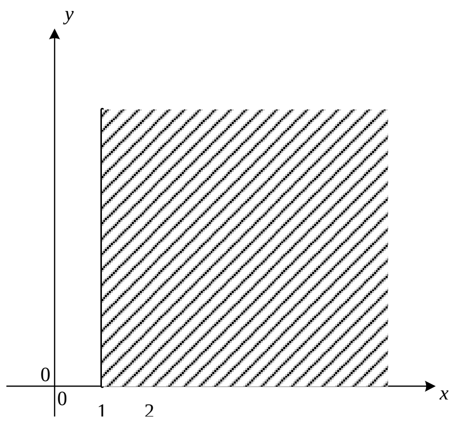
Hallar el Dominio Natural para $f(x,y)=\sqrt{x-1}+\sqrt{y}$

Solución.

Para que la regla de correspondencia tenga sentido se necesita que $x\geq 1$ y $y\geq 0$

Es decir $Domf=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}/x\geq 1\wedge y\geq 0\right\}$.

.



El gráfico, ahora es un lugar geométrico no conocido. Pero tenemos un indicio de la región en que habrá gráfico.

Ejercicios Propuestos 1

Descríbase la región R del plano xy que corresponde al Dominio Natural de la función dada .

a) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

b) $z=\ln(4-x-y)$

c) $z=x\sqrt{y}$

d) $z=\operatorname{arcsen}(x+y)$

e) $z=e^{x/y}$

f) $z=\sqrt{x^2-y}\,\ln(y-x^2)$

g) $z=\arccos\left(\frac{xz}{y}\right)$

h) $z=\frac{x+y}{xy}$

i) $w=\ln\left(\frac{9x^2-6y^2-36}{36}\right)$

j) $z=arcsen(x^2+y^2)$

k) $f(x,y)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\ln\left(\frac{2}{x+y}\right)$

l) $f(x,y)=\frac{\ln(4-x^2-y^2)^{1/2}}{\operatorname{arcsen}(x+y)}$

Obtener trazas de las secciones transversales de la superficie es suficiente, en muchas ocasiones, para su análisis.

4. CONJUNTO DE NIVEL

3.1 DEFINICIÓN

Sea $f:U\subseteq R^n\to R$. Se llama **CONJUNTO DE NIVEL** de f, al conjunto de puntos de R^n tales que $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k$, donde $k\in R$

Si tenemos $z=f(x,y)$ una función de dos variables. El Conjunto de Nivel es llamado **CURVAS DE NIVEL** y serían las trayectorias en el plano xy tales que $f(x,y)=c$. Es decir, serían las curvas que resultan de la intersección de la superficie con los planos $z=c$, proyectadas en el plano xy.

Ejemplo 1

Para $f:R^2 \to R$ tal que $f(x,y)=6-2x-3y$, su conjunto de nivel serán puntos de R^2 tales que $6-2x-3y=k$.

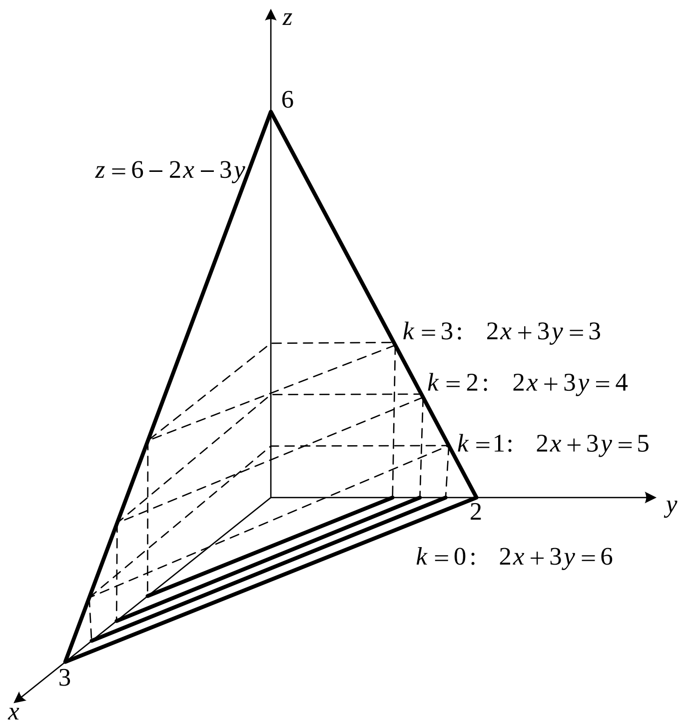
En este caso se llaman CURVAS DE NIVEL.

Si $k=0$, tenemos el **Nivel** 0, $6-2x-3y=0$

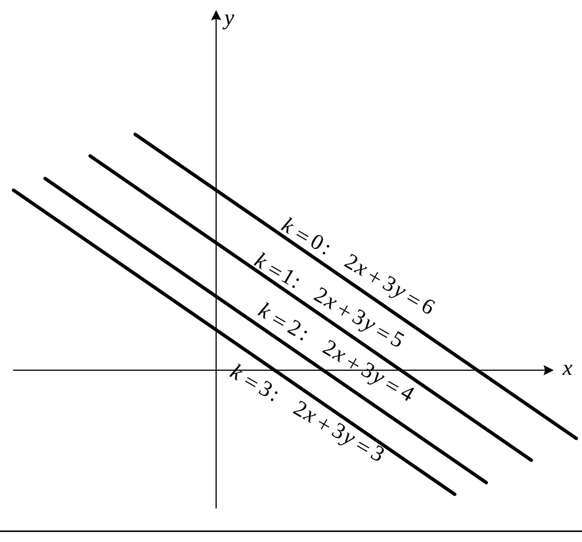
Si $k=1$, tenemos el **Nivel** 1, $6-2x-3y=1$

Si $k=2$, tenemos el **Nivel** 2, $6-2x-3y=2$

etc.



Las curvas de nivel se dibujan en el plano xy, y para este caso serían:

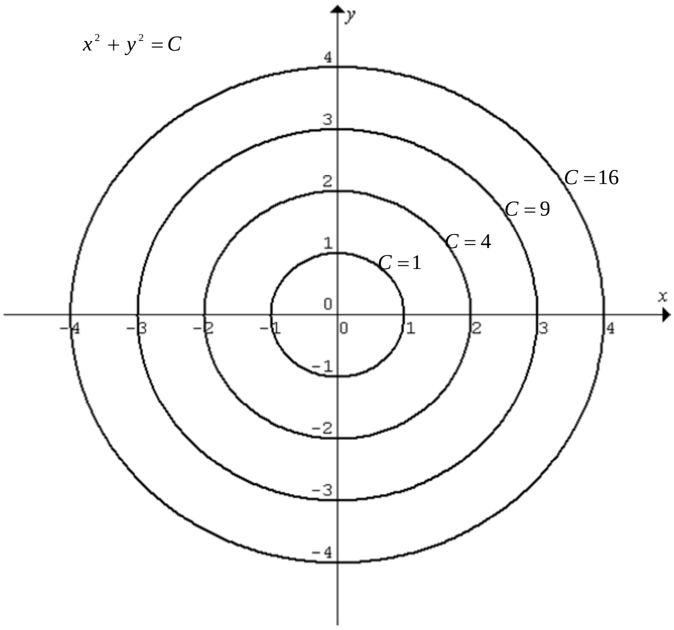


Ejemplo 2.

Grafique algunas curvas de nivel para $f(x, y) = x^2 + y^2$

SOLUCIÓN:

Las curvas de nivel, para este caso, es la familia de trayectorias tales que $x^2 + y^2 = c$. (Circunferencias centradas en el origen)



Si tenemos $w = f(x, y, z)$ una función de tres variables. El Conjunto de Nivel es llamado **SUPERFICIES DE NIVEL**

Ejercicios Propuestos 2

Descríbase las curvas de nivel y las secciones transversales de cada función en su correspondiente plano, luego dibújese la gráfica de la superficie en R^3

a) $z = 4 - x^2 - y^2$

b) $f(x, y) = y^2$

c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

d) $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$

e) $f(x, y) = xy^2$

5. LIMITES DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Haciendo analogía con funciones de una variable, para definir el límite ahora, primero empecemos generalizando la definición de entorno o vecindad y otras definiciones que nos permitirán comprender el concepto de límite.

5.1 BOLA ABIERTA.

Se llama $n-$bola abierta de centro en $\overline{x_0}$ y radio δ, denotada por $B_n\left(\overline{x_0};\delta\right)$, al conjunto:

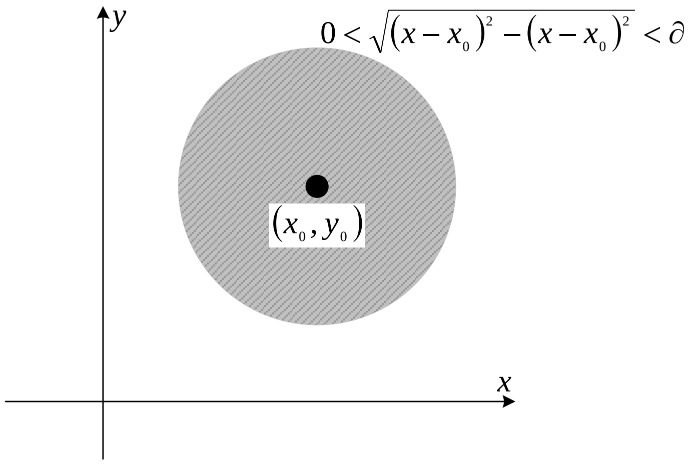
$$B_n\left(\overline{x_0};\delta\right)=\left\{\overline{x}\in R^n \,/\, \left\|\overline{x}-\overline{x_0}\right\|<\partial\right\}$$

Donde $\overline{x_0}\in R^n$, $\partial\in R$ muy pequeño.

Si $n=1$, tenemos $B_1\left(x_0;\delta\right)=\left\{x\in R \,/\, \left|x-x_0\right|<\partial\right\}$; un intervalo (como en funciones de una variable)

Si $n=2$, tenemos:

$$B_2\left(\left(x_0,y_0\right);\delta\right)=\left\{\left(x,y\right)\in R^2 \,/\, \left\|\left(x,y\right)-\left(x_0,y_0\right)\right\|<\partial\right\}$$



5.2 PUNTO INTERIOR

Sea $U\subseteq R^n$ y $\overline{x_0}\in R^n$, se dice que $\overline{x_0}$ es un punto interior de U, si y sólo si $\forall\partial>0, \exists B_n\left(\overline{x_0};\partial\right)$ contenida en U.

5.3 CONJUNTO ABIERTO

$U\subseteq R^n$ es un conjunto abierto, si todos sus puntos son interiores a U.

5.4 PUNTO EXTERIOR.

Sea $U \subseteq R^n$ y $\overline{x_0} \in R^n$, se dice que $\overline{x_0}$ es un punto Exterior de U, si y sólo si $\forall \partial > 0, \exists B_n\left(\overline{x_0};\partial\right)$ totalmente fuera de U.

5.5 PUNTO DE FRONTERA

Se dice que $\overline{x_0}$ es un punto de frontera de U, si no es ni interior ni exterior.

5.6 CONJUNTO CERRADO.

$U \subseteq R^n$ es un conjunto cerrado si su complemento es abierto

5.7 CONJUNTO SEMIABIERTO.

$U \subseteq R^n$ es un conjunto semiabierto si no es abierto y tampoco cerrado.

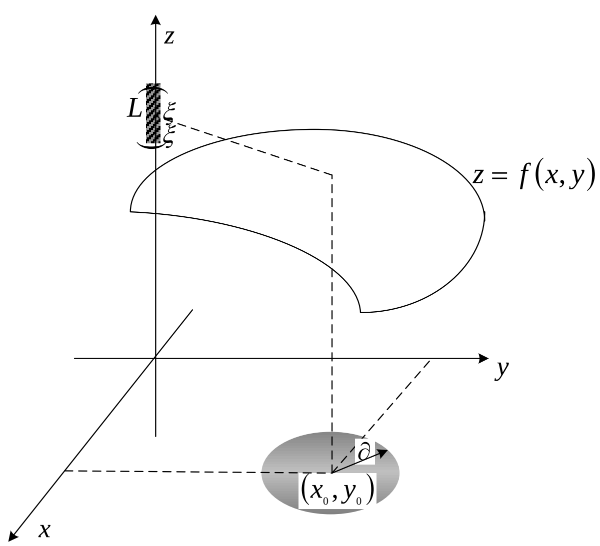
5.8 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$, donde U es un conjunto abierto, sea $\overline{x_0}$ un punto interior o de frontera de U, entonces:

$$\left(\lim_{\overline{x} \to \overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right) = L\right) \equiv \forall \xi > 0, \exists \partial > 0 / \overline{x} \in B_n\left(\overline{x_0};\partial\right) \Rightarrow \left|f\left(\overline{x}\right) - L\right| < \xi$$

Si $n = 2$ tenemos:

$$\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L\right) \equiv \forall \xi > 0, \exists \partial > 0 / 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \partial \Rightarrow \left|f(x,y) - L\right| < \xi$$



Es decir, que si tomamos a (x, y) cercano a (x_0, y_0) entonces $f(x, y)$ estará próximo a L.

Ejemplo

Demostrar empleando la definición que $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^4} = 0$

Solución:
Debemos asegurar que

$$\forall \xi > 0, \exists \partial > 0 \,/\, 0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \partial \Rightarrow \left| \frac{x^4 y}{x^4+y^4} - 0 \right| < \xi$$

Recuerde que $\boxed{|y| = \sqrt{y^2} =}$ entonces $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$

Por otro lado $|y| = \left|\dfrac{x^4 y}{x^4}\right|$ entonces $|y| \geq \left|\dfrac{x^4 y}{x^4+y^4}\right|$.

Ahora note que:

$$\left|\frac{x^4 y}{x^4+y^4}\right| \leq |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} < \partial$$

Se concluye finalmente que: $\left|\dfrac{x^4 y}{x^4+y^4}\right| < \partial$

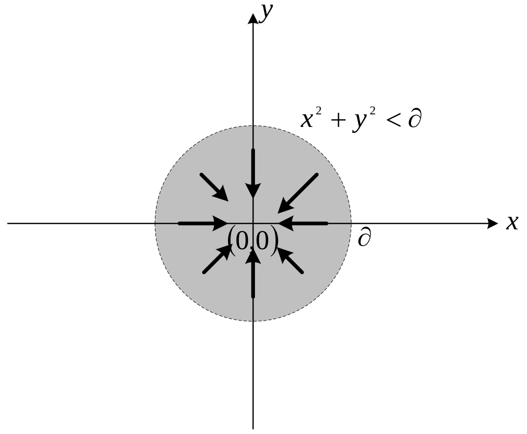
Es decir tomando $\zeta = \partial$, suficiente para concluir que: $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \dfrac{x^4 y}{x^4+y^4} = 0$

Lo anterior va a ser complicado hacerlo en la mayoría de las situaciones, por tanto no vamos a insistir en demostraciones formales. Pero si se trata de estimar si una función tiene límite y cuál podría ser este, podemos hacer uso del acercamiento por trayectorias.

Ejemplo 1

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0.0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

Solución:
Aproximarse a $(0,0)$, significa estar con (x, y) en una bola de R^2



Si el límite existe, significa que si nos acercamos en todas las direcciones f deberá tender al mismo valor.

1. Aproximémonos a través del eje x, es decir de la recta $y = o$

   Entonces, tenemos $\displaystyle \lim_{(x,0)\to(0.0)} \frac{x^2}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$.

2. Aproximémonos a través del eje y, es decir de la recta $x = o$

   Entonces, tenemos $\displaystyle \lim_{(0,y)\to(0.0)} \frac{0^2}{0^2+y^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$.

Se observa que los dos resultados anteriores son **diferentes.**

Por tanto, se concluye que: $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ **no existe.**

Ejemplo 2

Calcular $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$

Solución:

Determinando la convergencia de f, para diversas direcciones:

1. Eje x ($y = 0$): $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^4+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

2. Eje y ($x = 0$): $\displaystyle \lim_{y\to 0} \frac{0^2 y}{0^4+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

3. Rectas que pasan por el origen ($y = mx$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)}{x^4+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^2\left(x^2+m^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{\left(x^2+m^2\right)} = 0$$

4. Parábolas que tengan vértice el origen ($y = ax^2$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(ax^2\right)}{x^4+\left(ax^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4+a^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4\left(1+a^2\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+a^2} = \frac{a}{1+a^2} \neq 0$$

Por tanto, $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$ NO EXISTE.

El acercamiento por trayectoria no nos garantiza la existencia del límite, sólo nos hace pensar que si el límite existe, ese debe ser su valor. Entonces ¿cómo lo garantizamos?. Si la expresión lo permite podemos usar coordenadas polares.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$

Solución:

Determinando la convergencia de f, para diversas direcciones:

1. Eje x ($y=0$): $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

2. Eje y ($x=0$): $\displaystyle \lim_{y\to 0} \frac{0^2 y}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$

3. Rectas que pasan por el origen ($y=mx$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^2+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{(1+m^2)} = 0$$

4. Parábolas que tengan vértice el origen ($y=ax^2$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(ax^2)}{x^2+(ax^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^2+a^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^2(1+a^2x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2}{1+a^2x^2} = 0$$

Probemos con otra trayectoria

5. $x = ay^2$

$$\lim_{y\to 0} \frac{(ay^2)^2 y}{(ay^2)^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{ay^5}{a^2y^4+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{ay^5}{y^2(a^2y^2+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{ay^3}{(a^2y^2+1)} = 0$$

Parecer ser que el límite es cero, pero todavía no está garantizado. ¿Por qué?

Demostrarlo, no es una tarea sencilla. Usemos coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^2 (rsen\theta)}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3 sen\theta\cos\theta}{r^2} \\ &= \lim_{r\to 0} (rsen\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

En la parte última se observa que $sen\theta\cos\theta$ es acotado por tanto

$$\lim_{r\to 0}(rsen\theta\cos\theta) = 0$$

Lo anterior quiere decir que en situaciones especiales (¿cuáles?), podemos utilizar coordenadas polares para demostrar o hallar límites.

Ejemplo

Calcular $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Solución:

Empleando coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{sen(r^2)}{r^2} = 1$$

5.8.1 TEOREMA DE UNICIDAD.

Sea $f:U\subseteq R^n \to R$, donde U es un conjunto abierto, sea $\overline{x_0}$ un punto interior o de frontera de U, entonces:
Si $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)=L$ y $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)=M$ entonces $L=M$

5.8.2 TEOREMA PRINCIPAL.

Si $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)=L$ y $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g\left(\overline{x}\right)=M$ entonces:

1. $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}}\left[f\left(\overline{x}\right)+g(\overline{x})\right]=\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)+\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g(\overline{x})=L+M$
2. $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}}\left[f\left(\overline{x}\right)-g(\overline{x})\right]=\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)-\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g(\overline{x})=L-M$
3. $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}}\left[f\left(\overline{x}\right)g(\overline{x})\right]=\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g(\overline{x})=LM$
4. $\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}}\left[\frac{f}{g}\left(\overline{x}\right)\right]=\dfrac{\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)}{\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} g(\overline{x})}=\dfrac{L}{M};\ M\neq 0$

Por tanto en situaciones elementales, la sustitución basta

Ejemplo

$$\underset{(x,y)\to(1.2)}{lím}\left(x^2+2y-3\right)=8$$

Ejercicios Propuesto 3

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{\substack{x\to k\\ y\to 0}}\dfrac{x^2 sen\left(\frac{y}{k}\right)}{y}$

b) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{sen(x+y)}{y}$

d) $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{e^{xy}-1}{x}$

g) $\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}\left(x+3y^2\right)$

h) $\lim_{\substack{x\to \pi/4\\ y\to 2}} ysenxy$

f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2y^2}$

i) $\underset{(x,y\to(0,0))}{lím}\dfrac{2x-y^2}{2x^2+y}$

e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{sen\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

2. Calcúlese el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y)\to(a,b)$ hallando los límites: $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y $\lim\limits_{y\to b} h(y)$, donde $f(x,y)=g(x)h(y)$

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(1+senx)(1-\cos y)}{y}$

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\cos x\; seny}{y}$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{2x(y-1)}{(x+1)y}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{(x-1)e^{y}}$

3. Sea: $f(x,y)=\dfrac{x^6y^6}{x^4+ay^4}$ ¿para qué valores de "a" existe el $\underset{(x,y\to(0,0))}{lím} f(x,y)$?

---

6. CONTINUIDAD

Sean $f:U\subseteq R^n\to R$, sea $\overline{x_0}$ un punto U. Decimos que f es continua en $\overline{x_0}$ si y sólo si:

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{x_0}} f\left(\overline{x}\right)=f\left(\overline{x_0}\right)$$

Ejemplo.

Analizar la continuidad de $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

En el punto $(0,0)$.

SOLUCIÓN:

Para que la función sea continua se debe cumplir que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$

Determinemos el límite. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Acercándonos por trayectorias.

$y=0;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^2}=0$

$x=0;\ \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y^2}=0$

$y=x\,;\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2+x^2}=\dfrac{1}{2}$

Entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ no existe.

Por tanto, f NO ES CONTINUA EN $(0,0)$.

6.1 CONTINUIDAD EN UN INTERVALO

Sea $f : U \subseteq R^n \to R$. Se dice que f es continua en todo U si y sólo si es continua en cada punto de U.

6.1.1 Teorema

Si f y g son continuas en $\overline{x_0}$, entonces también son continuas: $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}\left(g\left(\overline{x}_0\right)\neq 0\right)$.

Ejercicios propuestos 4

Analice la continuidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}\, xy}{xy}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} e^{xy}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases} 1-\dfrac{\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ -8, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2-y^2}{\sqrt{\left|1-x^2-y^2\right|}}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 1, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

g) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^3x}{x^2+y^6}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

h) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y^5x^2}{2x^4+3y^{10}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

i) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

7. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR.

Para función de una variable la derivada se la definió como el cambio instantáneo que experimenta la función cuando cambia su variable independiente x. Aquí había que considerar una sola dirección, para función de varias variables debería ser el cambio instantáneo que tiene la función en todas las direcciones en la vecindad de un punto.

7.1 Derivada Direccional. Derivada de un campo escalar con respecto a un vector.

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$, donde U es un conjunto abierto, $\overline{x}_0$ un punto de U. Sea $\overrightarrow{v}$ un vector de R^n.

La derivada de f en $\overline{x}_0$ con respecto a $\overrightarrow{v}$, denotada por $f'\left(\overline{x}_0;\overrightarrow{v}\right)$ o también $D_{\overrightarrow{v}} f\left(\overline{x}_0\right)$, se define como:

$$f'\left(\overline{x}_0;\overrightarrow{v}\right)=\lim_{\left\|\overrightarrow{v}\right\|\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+\overrightarrow{v}\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{\left\|\overrightarrow{v}\right\|}$$

Cuando este límite existe

Ahora bien, si decimos que $\left\|\overrightarrow{v}\right\|=h$ entonces $\overrightarrow{v}=h\overrightarrow{u}$ donde $\overrightarrow{u}$ un ***VECTOR UNITARIO*** de R^n, entonces:

La ***derivada direccional*** de f en $\overline{x}_0$ con respecto $\overrightarrow{u}$ es:

$$f'\left(\overline{x}_0;\overrightarrow{u}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{h}$$

Ejemplo 1

Sea $f\left(\overline{x}\right)=\left\|\overline{x}\right\|^2$; $\overline{x}\in R^n$. Calcular $f\acute{}\left(\overline{x}_0,\overrightarrow{v}\right)$.

SOLUCIÓN:

$$f\acute{}\left(\overline{x}_0;\overrightarrow{v}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left\|\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right\|^2-\left\|\overline{x}_0\right\|^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)\bullet\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\right)-\left(\overline{x}_0\right)\bullet\left(\overline{x}_0\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{x}_0\bullet\overline{x}_0+2h\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0+h^2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}-\overline{x}_0\bullet\overline{x}_0}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0+h^2\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(2\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0+h\overrightarrow{u}\bullet\overrightarrow{u}\right)$$
$$=2\overrightarrow{u}\bullet\overline{x}_0$$

Si $f:U\subseteq R^2\to R$ (una función de dos variables), entonces:

$$f\acute{}\left(\left(x_0,y_0\right);\overrightarrow{u}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\left(x_0,y_0\right)+h\overrightarrow{u}\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

Ejemplo 2

Sea $f(x,y)=x^2+y^2$. Hallar $D_{\overrightarrow{u}}f\left(1,2\right)$ donde $\overrightarrow{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

SOLUCIÓN:

Empleando la definición:

$$D_{\overrightarrow{u}}f\left(1,2\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\left(1,2\right)+h\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)-f\left(1,2\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2},2+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-f\left(1,2\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(1+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(2+h\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]-\left[1^2+2^2\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[1+h\sqrt{2}+\frac{h^2}{2}+4+2h\sqrt{2}+\frac{h^2}{2}\right]-\left[5\right]}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{5+3h\sqrt{2}+h^2-5}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h\sqrt{2}+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(3\sqrt{2}+h\right)$$
$$=3\sqrt{2}$$

Ejemplo 3

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Hallar $D_{\vec{u}}f(0,0)$ donde $\vec{u}=(\cos\theta, sen\theta)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left((0,)+h(\cos\theta, sen\theta)\right)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta, hsen\theta)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{(h\cos\theta)(hsen\theta)}{h^2}\right]-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\theta sen\theta}{h}$$

En la última expresión:

1. Si $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{\pi}{2}$ entonces $D_{\vec{u}}f(0,0)=0$
2. Si $\theta\neq 0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{\pi}{2}$ entonces $D_{\vec{u}}f(0,0)$ no existe.

Ejemplo 4

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$.

Hallar $D_{\vec{u}}f(0,0)$ donde $\vec{u}=(\cos\theta, sen\theta)$

Solución:

Aplicando la definición:

$$D_{\vec{u}}f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h\cos\theta, hsen\theta)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[\dfrac{(h\cos\theta)^2(hsen\theta)}{(h\cos\theta)^4+(hsen\theta)^2}\right]-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3\cos^2\theta sen\theta}{h^2\left(h^2\cos^4\theta+sen^2\theta\right)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos^2\theta sen\theta}{h^2\cos^4\theta+sen^2\theta}$$

En la última expresión:

1. Si $\theta=0,\pi$ ($sen\theta=0$) entonces $D_{\vec{u}}f(0,0)=0$
2. Si $\theta\neq 0,\pi$ entonces $D_{\vec{u}}f(0,0)=\dfrac{\cos^2\theta}{sen\theta}$ (existe).

Más adelante daremos una técnica para hallar derivadas direccionales sin emplear la definición.

Un caso especial de las derivadas direccionales es cuando consideramos dirección con respecto a eje x y con respecto al eje y.

Ejercicios Propuestos 5

Determine la derivada direccional de f en el origen en la dirección del vector unitario (a,b).

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

7.2 Derivada Parcial.

Sea $f:U\subseteq R^n\to R$, donde U es un conjunto abierto, $\overline{x}_0$ un punto de U, $h\in R$. Sea $\overrightarrow{e}_i=(0,0,\cdots,1,\cdots,0)$ un ***vector canónico unitario*** de R^n.
La ***derivada parcial*** de f en $\overline{x}_0$ con respecto a $\overrightarrow{e}_i$ (o con respecto a su $i-ésima$ variable), denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{x}_0\right)$, se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overline{x}_0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\overline{x}_0+h\overrightarrow{e}_i\right)-f\left(\overline{x}_0\right)}{h}$$

Cuando este límite existe

Si $f:U\subseteq R^2\to R$ (una función de dos variables), entonces los vectores canónicos unitarios serían: $e_1=\hat{i}=(1,0)$ y $e_2=\hat{j}=(0,1)$. Las derivadas parciales serían:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f\left((x_0,y_0)+h(1,0)\right)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Denotada simplemente como: $\frac{\partial f}{\partial x}$ o también f_x, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

Y la otra derivada parcial sería:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}\left(x_0,y_0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\left(x_0,y_0\right)+h\left(0,1\right)\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

Denotada simplemente como: $\frac{\partial f}{\partial y}$ o también f_y, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+h\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h}$$

Ejemplo 1

Sea $f(x,y)=x^2y^3$, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h,y\right)-f\left(x,y\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x+h\right)^2y^3-x^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x^2+2xh+h^2\right)y^3-x^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2y^3+2xhy^3+h^2y^3-x^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2xhy^3+h^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(2xy^3+hy^3\right)\\\frac{\partial f}{\partial x}&=2xy^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x,y+h\right)-f\left(x,y\right)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2\left(y+h\right)^3-x^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2\left(y^3+3y^2h+3yh^2+h^3\right)-x^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{x^2y^3+3x^2y^2h+3x^2yh^2+x^2h^3-x^2y^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2y^2h+3x^2yh^2+x^2h^3}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\left(3x^2y^2+3x^2yh+x^2h^2\right)\\\frac{\partial f}{\partial y}&=3x^2y^2\end{aligned}$$

Note que $\frac{\partial f}{\partial x}$ se obtiene como una derivada para función de una variable, en este caso x, y considerando a la otra variable y como constante.

Análogamente, si se desea obtener $\frac{\partial f}{\partial y}$, deberíamos derivar considerando sólo a y como variable.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y) = sen\sqrt{x^2+y^3}$, obtener $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

SOLUCIÓN:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\sqrt{x^2+y^3}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^3\right)^{-1/2}(2x)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\sqrt{x^2+y^3}\left[\frac{1}{2}\left(x^2+y^3\right)^{-1/2}\left(3y^2\right)\right]$$

En otros tipos de funciones habrá que aplicar la definición.

Ejemplo 3

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición:

a) $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{h(0)}{h^2+0^2}\right]-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

b) $$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[\frac{0(h)}{0^2+h^2}\right]-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0$$

Ejercicios propuestos 6

1. Encontrar $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ si :

a) $f(x,y) = xy$

b) $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\log_e\left(x^2+y^2\right)$

c) $f(x,y) = \cos\left(ye^{xy}\right)\operatorname{sen} x$

d) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

e) $f(x,y) = x\cos x\cos y$

f) $f(x,y) = \int_{y^2}^{sen(xy)} g(t)\,dt$

2. Hallar $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$, para:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & si\,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

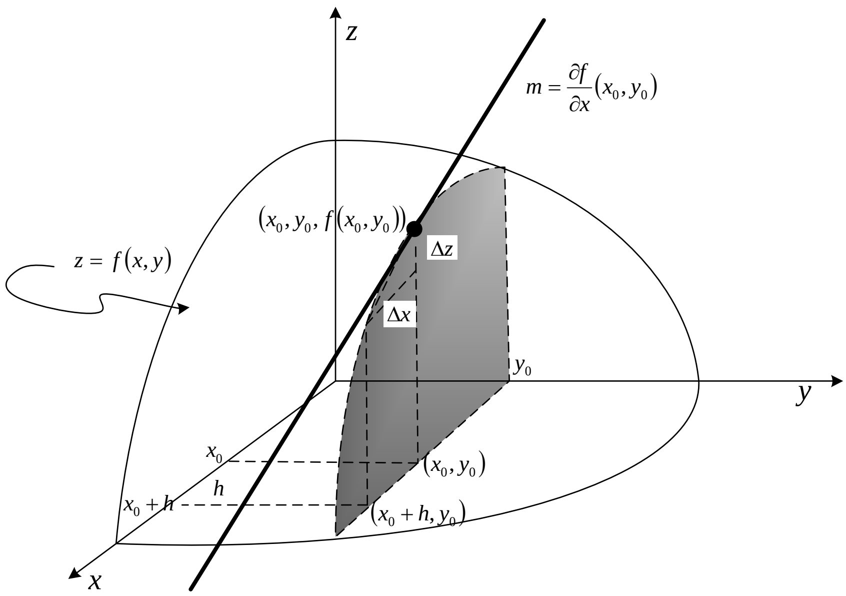
b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y^2 sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

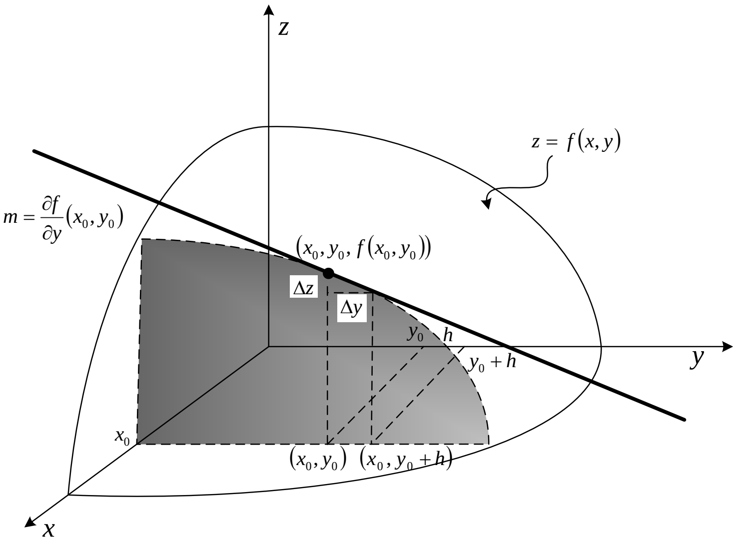
d) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2-y^2\right)}{x+y} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$

7.3.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS DERIVADAS PARCIALES

Se ha definido la derivada tratando de que se entienda como la variación de la función con respecto a una dirección. Entonces la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, será la pendiente de la recta tangente paralela al plano zx, observe la figura:



En cambio, la derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, será la pendiente de la recta tangente paralela al plano zy, observe la figura:

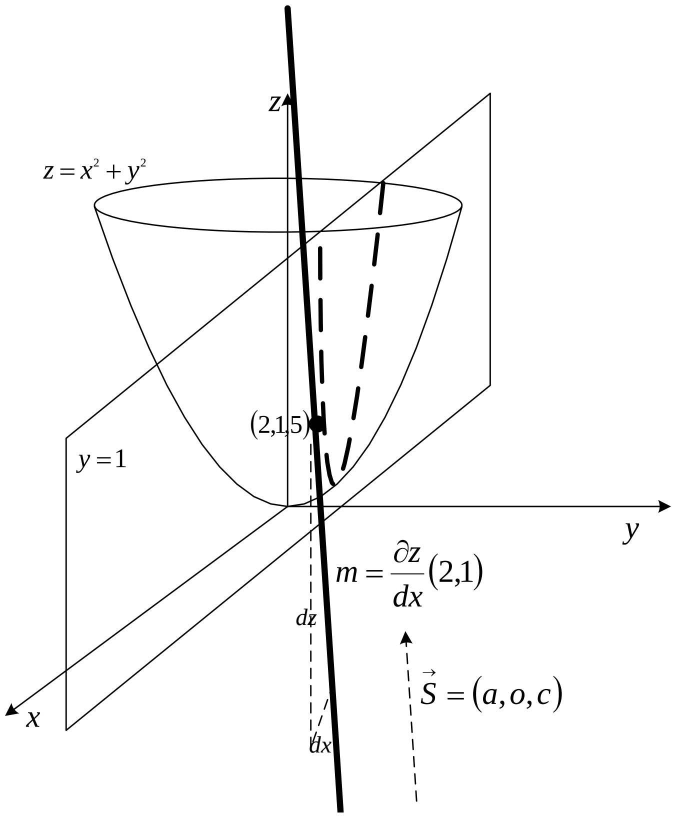


Ejemplo 1

Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie que tiene por ecuación $z = x^2 + y^2$ con el plano $y = 1$ en el punto $(2,1,5)$.

SOLUCIÓN:

Realizando un gráfico, tenemos:



La ecuación de toda recta es de la forma $l:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$.

El punto está dado: $(x_0, y_0, z_0) = (2,1,5)$.

Los vectores directrices son paralelos al plano zx y por tanto son de la forma: $\overrightarrow{S} = (a,o,c)$. ¿Por qué?

La pendiente de la recta será $m = \frac{\partial z}{dx}(2,1)$; que definirá la dirección de los vectores directores.

Ahora bien, si $\boxed{z = x^2 + y^2}$ entonces $\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 2x}$.

Evaluando tenemos: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 2(2) = 4$

Entonces: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c}{a} = \frac{4}{1}$

Por tanto $\overrightarrow{S} = (a,o,c) = (1,0,4)$

Finalmente la ecuación de la recta buscada será:

$$l:\begin{cases} x = x_0 + at = 2 + t \\ y = y_0 + bt = 1 + 0t \\ z = z_0 + ct = 5 + 4t \end{cases}$$

7.3.2 DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Sean $f: U \subseteq R^2 \rightarrow R$ tal que $z = f(x,y)$. Suponga que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existan. Entonces las ***Derivadas parciales de Segundo Orden*** se definen como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0 + h) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{h} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{h} = f_{yy}$$

Cuando estos límites existan.

A f_{xy} y a f_{yx} se las denominan Derivadas Mixtas o Derivadas Cruzadas.

Ejemplo 1

Sea $f(x,y) = x^2 e^{x^2+y^2}$, obtener todas las derivadas parciales de segundo orden.

Solución:

Las Derivadas parciales de primer orden son:

$$f_x = 2xe^{x^2+y^2} + x^2 e^{x^2+y^2}(2x) = 2xe^{x^2+y^2} + 2x^3 e^{x^2+y^2}$$
$$f_y = x^2 e^{x^2+y^2}(2y) = 2x^2 ye^{x^2+y^2}$$

Por tanto las derivadas parciales de segundo orden serían:

$$f_{xx} = 2e^{x^2+y^2} + 2xe^{x^2+y^2}(2x) + 6x^2 e^{x^2+y^2} + 2x^3 e^{x^2+y^2}(2x)$$
$$= 2e^{x^2+y^2} + 4x^2 e^{x^2+y^2} + 6x^2 e^{x^2+y^2} + 4x^4 e^{x^2+y^2}$$
$$f_{xy} = 2xe^{x^2+y^2}(2y) + 2x^3 e^{x^2+y^2}(2y)$$
$$= 4xye^{x^2+y^2} + 4x^3 ye^{x^2+y^2}$$
$$f_{yx} = 4xye^{x^2+y^2} + 2x^2 ye^{x^2+y^2}(2x)$$
$$= 4xye^{x^2+y^2} + 4x^3 ye^{x^2+y^2}$$
$$f_{yy} = 2x^2 e^{x^2+y^2} + 2x^2 ye^{x^2+y^2}(2y)$$
$$= 2x^2 e^{x^2+y^2} + 4x^2 y^2 e^{x^2+y^2}$$

Note que las derivadas cruzadas son iguales.

7.3.3 TEOREMA DE SCHWARZ

Sea $f: U \subseteq R^2 \to R$, una función definida en el abierto U de R^2. Si las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen y son funciones continuas en U, entonces: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Analicemos el siguiente ejemplo, donde se hace necesario emplear las definiciones de las derivadas parciales.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

Hallar a) $f_{xy}(0,0)$ y b) $f_{yx}(0,0)$

SOLUCIÓN:

a) $f_{xy}(0,0)=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}$

Necesitamos la derivada parcial de primer orden.

Para la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en cualquier punto diferente de $(0,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)&=\frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Evaluando

$$f_x(0,h)=\frac{0^4h+4(0^2)h^3-h^5}{(0^2+h^2)^2}=\frac{-h^5}{h^4}=-h$$

Para la derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$ tenemos:

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3 0-h(0^3)}{h^2+0^2}-0}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}\\&=0\end{aligned}$$

Por tanto:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h}=-1$$

b) $f_{yx}(0,0)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$

Para la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ en cualquier punto diferente de $(0,0)$ tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-\left(x^3y-xy^3\right)(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^5+x^3y^2-3x^3y^2-3xy^4-2x^3y^2+2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Evaluando:

$$f_y(h,0)=\frac{h^5-4h^30^2-h0^4}{\left(h^2+0^2\right)^2}=\frac{h^5}{h^4}=h$$

Para la derivada $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$ tenemos:

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,\,0+h)-f(0,0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{0^3h-0\left(h^3\right)}{0^2+h^2}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}$$

$$=0$$

Por tanto:

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f_y(h,\,0)-f_y(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1$$

Note que las derivadas mixtas no son iguales. ¿Por qué? ¡Demuéstrelo!

Ejercicios propuestos 7

1. Calcular, si existen , la derivada mixta $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}$ para:

a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & si\; x^2+y^2\neq0\\ 0 & si\; x^2+y^2=0\end{cases}$

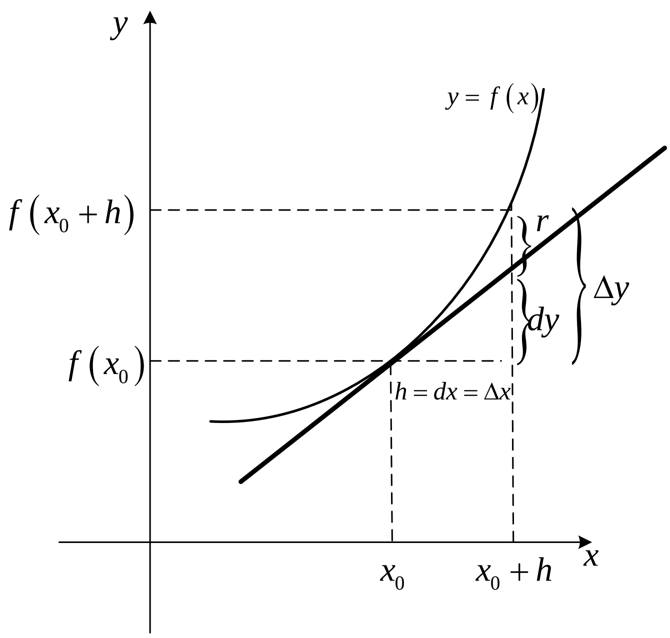
b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^2-x^2y^4}{x^3+y^3} & si\; x^2+y^2\neq0\\ 0 & si\; x^2+y^2=0\end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si(x,y)=(0,0)\end{cases}$

8. DIFERENCIABILIDAD.

Existen funciones que poseen todas sus derivadas direccionales, sin embargo no pueden ser consideradas diferenciables debido a que no son continuas (ejemplo 4 de derivada direccional), entonces deberá existir un criterio más fuerte para la diferenciabilidad.

Recordemos la definición de diferencial para función de una variable, observe la gráfica:



Note que $\boxed{\Delta y = dy + r}$, donde a r le vamos a llamar residuo.
Reemplazando tenemos:

$$\Delta y \quad = \quad dy \quad + r$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + r$$

Dividiendo para h y tomando limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \lim_{h\to 0}\frac{r}{h}$$

Podemos decir que para que f sea diferenciable se debe dar que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{r}{h} = 0$$

Haciendo analogía para funciones de dos variables. El punto debe ser (x_0, y_0) y h debe ser un vector, digamos (h_1, h_2), entonces la expresión para la diferenciabilidad debe ser de la forma:

$$f\left(\left(x_0,y_0\right)+\left(h_1,h_2\right)\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A_1h_1+A_2h_2+r$$

Y deberá ocurrir que $\lim\limits_{\|\mathbf{h}\|\to 0}\dfrac{r}{\|\mathbf{h}\|}=0$

Encontremos A_1.

Suponga que $\mathbf{h}=\left(h_1,0\right)$, entonces:

$$f\left(\left(x_0,y_0\right)+\left(h_1,0\right)\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A_1h_1+A_2 0+r$$

Dividiendo para h_1 y tomando límite:

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f\left(x_0+h_1,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h_1}=A_1+\lim_{h_1\to 0}\frac{r}{h_1}$$

Tenemos que $A_1=f_x\left(x_0,y_0\right)$

Análogamente obtengamos A_2

Suponga que $\mathbf{h}=\left(0,h_2\right)$, entonces:

$$f\left(\left(x_0,y_0\right)+\left(0,h_2\right)\right)-f\left(x_0,y_0\right)=A_1+A_2h_2+r$$

Dividiendo para h_2 y tomando límite:

$$\lim_{h_2\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+h_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{h_2}=A_2+\lim_{h_2\to 0}\frac{r}{h_2}$$

Tenemos que $A_2=f_y\left(x_0,y_0\right)$

Ahora sí podemos proponer la siguiente definición para la diferenciabilidad.

Sea $f:U\subseteq R^2\to R$, una función definida en el abierto U. f es ***DIFERENCIABLE*** en $\left(x_0,y_0\right)\in U$, si sus derivadas parciales en $\left(x_0,y_0\right)$ existen y si

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left[f\left(x_0+h_1,y_0+h_2\right)-f\left(x_0,y_0\right)\right]-\left[f_x\left(x_0,y_0\right)\right]h_1-\left[f_y\left(x_0,y_0\right)\right]h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

Ejemplo 1

Demuestre que $f\left(x,y\right)=x^2+y^2$ es diferenciable en todo $\left(x_0,y_0\right)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición, para que la función sea diferenciable el límite

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f\left(x_0+h_1, y_0+h_2\right)-f\left(x_0, y_0\right)\right]-\left[f_x\left(x_0, y_0\right)\right]h_1-\left[f_y\left(x_0, y_0\right)\right]h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

debe ser cero.

Obtengamos primero las derivadas parciales:

$$f_x\left(x_0, y_0\right)=2x\big|_{(x_0,y_0)}=2x_0$$

$$f_y\left(x_0, y_0\right)=2y\big|_{(x_0,y_0)}=2y_0$$

Reemplazando y simplificando:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f\left(x_0+h_1, y_0+h_2\right)-f\left(x_0, y_0\right)\right]-\left[f_x\left(x_0, y_0\right)\right]h_1-\left[f_y\left(x_0, y_0\right)\right]h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[\left(x_0+h_1\right)^2+\left(y_0+h_2\right)^2\right]-\left[x_0^{\,2}+y_0^{\,2}\right]-\left[2x_0\right]h_1-\left[2y_0\right]h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[x_0^{\,2}+2x_0+h_1^{\,2}+y_0^{\,2}+2y_0+h_2^{\,2}\right]-x_0^{\,2}-y_0^{\,2}-2x_0h_1-2y_0h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}$$

Se observa que

$\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}=0$ Por tanto f ES DIFERENCIABLE EN TODO PUNTO.

Ejemplo 2

Sea $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0) \end{cases}$.

Determine si f es diferenciable en $(0,0)$

SOLUCIÓN:

Aplicando la definición:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f\left(0+h_1, 0+h_2\right)-f\left(0,0\right)\right]-\left[f_x\left(0,0\right)\right]h_1-\left[f_y\left(0,0\right)\right]h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

Las derivadas parciales ya fueron obtenidas anteriormente : $f_x(0,0)=0$ y $f_y(0,0)=0$

Reemplazando:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[f\left(h_1, h_2\right)-f\left(0,0\right)\right]-\left[f_x\left(0,0\right)\right]h_1-\left[f_y\left(0,0\right)\right]h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left[\dfrac{h_1h_2}{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}-0\right]-[0]h_1-[0]h_2}{\sqrt{h_1^{\,2}+h_2^{\,2}}}$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\left(h_1^{\,2}+h_2^{\,2}\right)^{3/2}}$$

El último límite lo calculamos por coordenadas polares

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\left(h_1^2+h_2^2\right)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta rsen\theta}{\left(r^2\right)^{3/2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta sen\theta}{r}$$

Este límite no existe, por tanto f NO ES DIFERENCIABLE en $(0,0)$.

Los siguientes teoremas permiten sacar conclusiones rápidas.

8.1 TEOREMA

Si $f:U\subseteq R^2 \to R$, es diferenciable en $(x_0,y_0)\in U$, entonces es continua en (x_0,y_0).

8.2 TEOREMA

Sea $f:U\subseteq R^2\to R$. Si las funciones derivadas parciales son continuas en (x_0,y_0) entonces f es diferenciable en (x_0,y_0).

Ejercicios propuestos 8

1. Demostrar que si $f(x,y)$ es diferenciable en (a,b) entonces es continua en (a,b)
2. Analizar la diferenciabilidad en el origen para:

a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}} & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si(x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y)=\begin{cases} \left(x^2-y^2\right)sen\dfrac{1}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si(x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3y^2-xy^3}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y^2sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2-y^2\right)}{x+y} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

f) $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2} & si(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si(x,y)=(0,0) \end{cases}$

9. GRADIENTE.

Sea $f: U \subseteq R^n \to R$ una función diferenciable. Se define el vector gradiente de f en $\overline{x}_0$, denotado por $\nabla f\left(\overline{x}_0\right)$ o $grad\ f\left(\overline{x}_0\right)$, como el vector de R^n:

$$\nabla f\left(\overline{x}_0\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\left(\overline{x}_0\right)}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$. Hallar el gradiente de f en $(0,0)$.

SOLUCIÓN:

$$\nabla f(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}=\left(2(x-1),2(y-1)\right)_{(0,0)}=(-2,-2)$$

9.1 GRADIENTE Y DERIVADA DIRECCIONAL

En la expresión para el residuo.

$$f\left((x_0,y_0)+(h_1,h_2)\right)-f(x_0,y_0)=\left[f_x(x_0,y_0)\right]h_1+\left[f_x(x_0,y_0)\right]h_2+r$$

Observe que $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2)$ lo podemos expresar como $\boldsymbol{h}=\|\boldsymbol{h}\|\vec{u}$, donde $\vec{u}$ es un vector unitario.

Suponga que $\|\boldsymbol{h}\|=h$ y que $\vec{u}=(u_1,u_2)$ entonces $\boldsymbol{h}=h(u_1,u_2)$

Ahora, dividiendo para h y tomando límite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left((x_0,y_0)+h\vec{u}\right)-f(x_0,y_0)}{h}=\left[f_x(x_0,y_0)\right]\frac{h_1}{h}+\left[f_x(x_0,y_0)\right]\frac{h_2}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{r}{h}$$

Si f es diferenciable entonces $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r}{h}$.

Con lo cual resulta:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left((x_0,y_0)+h\vec{u}\right)-f(x_0,y_0)}{h}=\left[f_x(x_0,y_0)\right]u_1+\left[f_x(x_0,y_0)\right]u_2$$

Finalmente

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0)=\left[\nabla f(x_0,y_0)\right]\bullet\vec{u}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y)=x^2+y^2$. Hallar $D_{\vec{u}}f(1,2)$ donde $\vec{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

SOLUCIÓN:
Empleando lo anterior

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=\left[\nabla f(1,2)\right]\bullet\vec{u}$$

Ahora, el gradiente sería:

$$\nabla f(1,2)=\left(f_x,f_y\right)_{(1,2)}=\left(2x,2y\right)_{(1,2)}=(2,4)$$

Reemplazando y resolviendo

$$D_{\vec{u}}f(1,2)=\left[\nabla f(1,2)\right]\bullet\vec{u}=(2,4)\bullet\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}$$

Ejemplo

Sea $f(x,y)=sen\left(x^2+y^2\right)$. Hallar la derivada de f en el punto $P(1,1)$ en la dirección que va desde este punto al punto $Q(3,2)$

SOLUCIÓN:

Primero obtengamos $\vec{u}$ y sus derivadas parciales en $P(1,1)$

$$\vec{u}=\frac{\overrightarrow{PQ}}{\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|}=\frac{(3-1,2-1)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$f_x(1,1)=\left[\cos\left(x^2+y^2\right)\right]2x\Big|_{(1,1)}=2\cos 2$$

$$f_y(1,1)=\left[\cos\left(x^2+y^2\right)\right]2y\Big|_{(1,1)}=2\cos 2$$

Empleando la última definición

$$D_{\vec{u}}f(1,1)=\left[\nabla f(1,1)\right]\bullet\vec{u}=\left(2\cos 2,2\cos 2\right)\bullet\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{6}{\sqrt{5}}\cos 2$$

Ejercicios propuestos 9

1. Halle la derivada direccional de la función en el punto P en la dirección de Q.
   a) $f(x,y)=x^2+4y^2$, $P(3,1)$, $Q(1,-1)$
   b) $f(x,y)=\cos(x+y)$, $P(0,\pi)$, $Q(\frac{\pi}{2},0)$
   c) $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$, $P(1,0,0)$, $Q(4,3,1)$
   d) $g(x,y,z)=xye^z$, $P(2,4,0)$, $Q(0,0,0)$
2. Dado el campo escalar $f:R^n\to R$ tal que $f(X)=\|X\|^4$, calcular:
   a) $f'(X,v)$ (Derivada direccional de f en la dirección de v)
   b) Si n=2, hallar todos los puntos (x,y) en R^2 para los cuales: $f'(2i+3j;xi+yj)=6$
   c) Si n=3 , hallar todos los puntos (x,y) en R^3 para los cuales $f'(i+2j+3k;xi+yj+zk)=6$

3. Calcule la derivada de la función $f(x,y)=x\,\mathrm{sen}\,y$ en el punto (3,0), en la dirección del vector tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto (1,1)

9.2 PROPIEDADES DEL GRADIENTE

1. El Gradiente es un **vector ortogonal** a los conjuntos de nivel.

2. De la igualdad $D_{\vec{u}} f\left(\bar{x}_0\right)=\left[\nabla f\left(\bar{x}_0\right)\right]\bullet\vec{u}$ tenemos

$$D_{\vec{u}} f\left(\bar{x}_0\right)=\left\|\nabla f\left(\bar{x}_0\right)\right\|\left\|\vec{u}\right\|\cos\theta$$

Si el gradiente y el vector unitario tienen la misma dirección ($\theta=0$) entonces la derivada direccional tendría el **máximo valor** y sería:

$$D_{\vec{u}} f\left(\bar{x}_0\right)_{máx}=\left\|\nabla f\left(\bar{x}_0\right)\right\|$$

Si el gradiente y el vector unitario tienen dirección contraria ($\theta=\pi$) entonces la derivada direccional tendría el **mínimo valor** y sería:

$$D_{\vec{u}} f\left(\bar{x}_0\right)_{mín}=-\left\|\nabla f\left(\bar{x}_0\right)\right\|$$

Ejemplo

Suponga que la distribución de temperatura dentro de una habitación está dada por : $T(x,y,z)=5+2e^{x+4y+z^2}$, donde x, y, z se miden a partir del rincón $(0,0,0)$.

a) ¿En qué dirección aumenta la temperatura con mayor rapidez?
b) ¿Cuál es el valor máximo?

SOLUCIÓN:

a) La temperatura aumentará con mayor rapidez en dirección de su gradiente, es decir:

$$\begin{aligned}\nabla T&=\left(\frac{\partial T}{\partial x},\frac{\partial T}{\partial y},\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{(0,0,0)}\\&=\left(e^{x+4y+z^2}(1),\,e^{x+4y+z^2}(4),\,e^{x+4y+z^2}(2z)\right)_{(0,0,0)}\\&=(1,4,0)\end{aligned}$$

b) El valor máximo sería

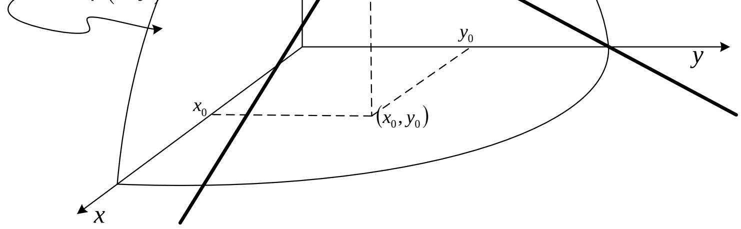
$$D_{\vec{u}}T(0,0,0)_{máx}=\left\|\nabla T(0,0,0)\right\|=\sqrt{1+4^2+0^2}=\sqrt{17}$$

Ejercicios propuestos 10

1. La temperatura en el punto (x, y) de una placa viene dada por: $T(x) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Hállese la dirección de mayor crecimiento del calor desde el punto (3, 4).
2. Se describe la superficie de una montaña mediante la ecuación $h(x, y) = 4000 - 0.001x^2 - 0.004y^2$. Supóngase que un alpinista está en el punto (500, 300, 3390). ¿En qué dirección debe moverse el alpinista en orden a ascender lo más rápido posible?
3. Suponer que la temperatura en el punto P(x,y,z) en el espacio está dada por $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sea una partícula que viaja por la helice circular $\sigma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ y sea T(t) su temperatura en el punto t.
4. ¿Cuál es el valor de T(t=0)?.
5. ¿Qué dirección debe tomar la partícula para avanzar hasta la región de más baja temperatura?.
6. El Capitán América tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x,y,z) estará dada por $T(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2 - 3z^2}$ donde x, y, z se miden en metros. Si la nave del Capitán América se encuentra en el punto (1,1,1).
7. ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?
8. Desafortunadamente el casco de la nave se cuarteará si se enfría a una tasa mayor de $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de direcciones posible en las que puede avanzar para bajar la temperatura.

9.3 VECTORES NORMALES Y PLANOS TANGENTE

Cuando se interpretó geométricamente las derivadas parciales, se definió que un vector directriz de la recta tangente paralela al plano zx ,en un punto de la superficie $z = f(x, y)$, está dado por $\overrightarrow{S_1} = \left(1, 0, f_x\left(\overline{x_0}\right)\right)$; y un vector directriz de la recta tangente paralela al plano zy está dado por $\overrightarrow{S_2} = \left(0, 1, f_y\left(\overline{x_0}\right)\right)$.



Si multiplicáramos en cruz estos vectores obtendríamos un vector normal a la superficie en ese punto

$$\vec{S}_1 \times \vec{S}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \left(-f_x\left(\overline{x}_0\right), -f_y\left(\overline{x}_0\right), 1\right)$$

Por tanto el plano tangente en ese punto tendría por ecuación

$$-f_x\left(\overline{x}_0\right)\left[x-x_0\right]-f_y\left(\overline{x}_0\right)\left[y-y_0\right]+1\left[z-z_0\right]=0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano tangente y la ecuación de la recta normal a la superficie que tiene por ecuación $z=f(x,y)=\dfrac{10}{xy}$ en el punto $(1,2,5)$.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación del **plano tangente** estaría dada por:

$$-f_x(1,2)\left[x-1\right]-f_y(1,2)\left[y-2\right]+1\left[z-5\right]=0$$

Las derivadas parciales serían:

$$f_x(1,2)=-\left.\frac{10}{x^2y}\right|_{(1,2)}=-5$$

$$f_x(1,2)=-\left.\frac{10}{xy^2}\right|_{(1,2)}=-\frac{5}{2}$$

Reemplazando

$$-(-5)\left[x-1\right]-\left(-\frac{5}{2}\right)\left[y-2\right]+1\left[z-5\right]=0$$

$$10(x-1)+5(y-2)+2(z-5)=0$$

$$10x-10+5y-10+2z-10=0$$

$$10x+5y+2z-30=0$$

b) La ecuación de la **recta normal** estaría dada por:

$$\begin{cases} x=x_0-\left[f_x(x_0,y_0)\right]t \\ y=y_0-\left[f_y(x_0,y_0)\right]t \\ z=z_0+t \end{cases}$$

Reemplazando:

$$\begin{cases} x=1-\left[-5\right]t=1+5t \\ y=2-\left[-\frac{5}{2}\right]t=2+\frac{5}{2}t \\ z=5+t \end{cases}$$

10. LA DIFERENCIAL

10.1 DEFINICIÓN

Sea $f : U \subseteq R^n \to R$ una función diferenciable en U. Entonces para cada $\overline{x} \in U$ se tiene:

$$f\left(\overline{x}+\overline{h}\right)=f\left(\overline{x}\right)+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+r$$

A la parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Se le ***denomina diferencial*** de, y se la denota como df.

10.2 APROXIMACIONES

Si se dice que $\Delta f \approx df$, entonces tenemos:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0,y_0\right)\approx\left[f_x\left(x_0,y_0\right)\right]dx+\left[f_y\left(x_0,y_0\right)\right]dy$$

Como $dx=\Delta x$ y $dy=\Delta y$

Tenemos la formula de aproximación:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right)\approx f\left(x_0,y_0\right)+\left[f_x\left(x_0,y_0\right)\right]\Delta x+\left[f_y\left(x_0,y_0\right)\right]\Delta y$$

Ejemplo

Aproximar el valor de $(1,08)^{3.98}$

SOLUCIÓN:

Utilicemos la función $\boxed{f(x,y)=x^y}$ (¿por qué?

tomemos: $x_0=1$ entonces $\Delta x=0.08$

$y_0=4$ entonces $\Delta y=-0.02$

Las derivadas parciales serían:

$$f_x(1,4)=\left(yx^{y-1}\right)\Big|_{(1,4)}=4$$

$$f_y(1,4)=\left(x^y\ln x\right)\Big|_{(1,4)}=0$$

Empleando la formula de aproximación:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0)+\left[f_x(x_0,y_0)\right]\Delta x+\left[f_y(x_0,y_0)\right]\Delta y$$
$$f(1.08;3.98) \approx f(1,4)+\left[f_x(1,4)\right]0.08+\left[f_y(1,4)\right](-0.02)$$
$$(1.08)^{3.98} \approx 1^4+[4]0.08+[0](-0.02)$$
$$(1.08)^{3.98} \approx 1+0.32$$
$$(1.08)^{3.98} \approx 1.32$$

10.3 CALCULO DE ERRORES

El error en una función se lo puede considerar como la variación de la función, entonces tenemos que:

$$\Delta f \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

Ejemplo

El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se miden con un posible error del 4% y 2% respectivamente. Aproxime el error porcentual al calcular el volumen.

SOLUCIÓN:

El volumen de un cilindro circular recto está dado por: $V=\pi r^2 h$

Se sabe que los errores porcentuales en las mediciones de r y h son del 4% y 2% , por tanto $\boxed{\pm\Delta r=\frac{4}{100}r}$ y $\boxed{\pm\Delta h=\frac{2}{100}h}$.

Por otro lado $\Delta V \approx \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial V}{\partial h}\Delta h$

Reemplazando:

$$\Delta V \approx (2\pi rh)\left(\tfrac{4}{100}r\right)+\left(\pi r^2\right)\left(\tfrac{2}{100}h\right)$$
$$\Delta V \approx \left(\underbrace{\pi r^2 h}_{V}\right)\left(\tfrac{10}{100}\right)$$

Por tanto el error porcentual del volumen sería :

$$\frac{\Delta V}{V}100 \approx 10\%$$

Ejercicios propuestos 11

1. Calcular aproximadamente
   a) $1.02^{3.01}$
   b) $[4.05^2+8.98^2-0.99^2]^{3/2}$
   c) $(1.03)^2\left[(0.98^2)(1.05^3)^{1/4}\right]^{-1/3}$

2. Calcule la longitud del segmento de recta $x = 1.2, \quad y = 0.95$ que se encuentra entre la superficie $z = x^2 + 5y^2$ y su plano tangente en el punto (1,1,6).
3. Calcule el valor aproximado de la función $f(x, y) = x^y$ en el punto $(3.1, 1.9)$
4. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 mts. Y el ángulo que forman es de 60º. Sabiendo que los errores probables en la medición es de 0.2 mts. en la medida de los lados y de 1º en la del ángulo. Determine el máximo error probable que se puede cometer al evaluar su área. Determine también el error en porcentaje.
5. La altura de un cono es $h = 30cm$, el radio de su base $R = 10cm$. ¿Cómo variará el volumen de dicho cono si H se aumenta 3mm y R se disminuye 1 mm?

10.4 DEFINICIÓN GENERAL DE DIFERENCIAL

Sea $f : U \subseteq R^n \to R^m$. Se dice que $f = \left(f_1, f_2, \cdots, f_m \right)$ es diferenciable en $\overline{x}_0 \in U$ si y sólo si $z = f\left(\overline{x}_0\right) + \left[Df\left(\overline{x}_0\right) \right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0 \right] + r$ es una buena aproximación de f en una vecindad de $\overline{x}_0$; es decir:

$$f\left(\overline{x}_0 + \overline{h}\right) = f\left(\overline{x}_0\right) + \left[Df\left(\overline{x}_0\right) \right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0 \right] + r$$

Y se cumple que $\lim\limits_{\left\|\overline{\boldsymbol{h}}\right\| \to 0} \dfrac{r}{\left\|\overline{\boldsymbol{h}}\right\|} = 0$.

A $Df\left(\overline{x}_0\right)$ se le llama ***MATRIZ DIFERENCIAL O JACOBINA*** y se define como:

$$Df\left(\overline{x}_0\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\overline{x}_0}$$

Ejemplo 1

Sea $f : R^2 \to R$, tal que $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, entonces:

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 6y \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

Ejemplo 2

Sea $f: R^3 \to R^4$, tal que $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2,\ xyz,\ xz+yz,\ x^3y^2z\right)$, entonces:

$$Df(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} & \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial z} \\ \frac{\partial(xyz)}{\partial x} & \frac{\partial(xyz)}{\partial y} & \frac{\partial(xyz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(xz+yz)}{\partial x} & \frac{\partial(xz+yz)}{\partial y} & \frac{\partial(xz+yz)}{\partial z} \\ \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial x} & \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial y} & \frac{\partial(x^3y^2z)}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ yz & xz & xy \\ z & z & x+y \\ 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

11. REGLA DE LA CADENA.

Sea $f: U \subseteq R^n \to R^m$ y sea $g: V \subseteq R^p \to R^n$. Si g es diferenciable en $\bar{x}_0$ y f es diferenciable en $g\left(\bar{x}_0\right)$, entonces:

$$D\left[f\left(g\left(\bar{x}_0\right)\right)\right] = \left[Df\right]_{g\left(\bar{x}_0\right)}\left[Dg\right]_{\bar{x}_0}$$

Ejemplo 1

Sea $f: R^2 \to R$, tal que $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ y sea $g: R \to R^2$, tal que $g(t) = \left(e^t, \cos t\right)$; entonces:

$$\begin{aligned} D\left[f\left(g(t)\right)\right] = \left[Df\right]_{g(t)}\left[Dg\right]_t &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{\left(e^t, \cos t\right)} \begin{bmatrix} \frac{dg_1}{dt} \\ \frac{dg_2}{dt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x & 6y \end{bmatrix}_{\left(e^t, \cos t\right)} \begin{bmatrix} \frac{d\left(e^t\right)}{dt} \\ \frac{d\left(\cos t\right)}{dt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^t & 6\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ -sent \end{bmatrix} \\ &= 2e^{2t} - 6\cos t sent \end{aligned}$$

En términos sencillos, si tenemos $z = f(x,y)$ donde $x = x(t)$ y $y = x(t)$, entonces:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Bigg|_{\left(x(t), y(t)\right)}$$

Ejemplo 2

Sea $f(x,y)=x^2+y^2$ donde $x=t^2$ y $y=2t$, hallar $\dfrac{dz}{dt}$

<u>SOLUCIÓN</u>:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\&=(2x)(2t)+(2y)(2)\end{aligned}$$

Poniendo todo en función de" t "

$$\frac{dz}{dt}=(2x)(2t)+(2y)(2)$$

$$\frac{dz}{dt}=\left(2t^2\right)(2t)+\left(2(2t)\right)(2)=4t^3+8t$$

Ejemplo 3

Sea $f:R^2\to R$, tal que $f(x,y)=x^2y$ y sea $g:R^2\to R^2$, tal que $g(u,v)=\left(uv,u^2-v^3\right)$; entonces:

$$D\left[f\left(g\,(u,v)\right)\right]=[Df]_{g(u,v)}[Dg]=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}_{\left(uv,\,u^2-v^3\right)}\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v}\\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2xy^3 & 3x^2y^2\end{bmatrix}_{\left(\underbrace{uv}_{x},\,\underbrace{u^2-v^3}_{y}\right)}\begin{bmatrix}\frac{\partial(uv)}{\partial u} & \frac{\partial(uv)}{\partial v}\\ \frac{\partial\left(u^2-v^3\right)}{\partial u} & \frac{\partial\left(u^2-v^3\right)}{\partial v}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2uv\left(u^2-v^3\right)^3 & 3(uv)^2\left(u^2-v^3\right)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v & u\\ 2u & -3v^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\underbrace{2uv^2\left(u^2-v^3\right)^3+6u^3v^2\left(u^2-v^3\right)^2}_{\frac{\partial z}{\partial u}} & \underbrace{2u^2v\left(u^2-v^3\right)^3-9u^2v^4\left(u^2-v^3\right)^2}_{\frac{\partial z}{\partial v}}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, si tenemos $z=f(x,y)$ donde $x=x(u,v)$ y $y=x(u,v)$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\bigg|_{\left(x(u,v),\,y(u,v)\right)}$$

Y

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\bigg|_{\left(x(u,v),\,y(u,v)\right)}$$

Ejemplo 4

Sea $f(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2$ donde $x=4uv^2$, $y=5u^2+10v^2$, $z=u^3$

Hallar: $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

a)

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\bigg|_{\left(4uv^2,\,5u^2+10v^2,u^3\right)}$$

$$=(6x)\left(4v^2\right)+(2y)(10u)+(2z)\left(3u^2\right)\bigg|_{\left(\underbrace{4uv^2}_{x},\,\underbrace{5u^2+10v^2}_{y},\underbrace{u^3}_{z}\right)}$$

$$=6\left(4uv^2\right)\left(4v^2\right)+2\left(5u^2+10v^2\right)(10u)+2\left(u^3\right)\left(3u^2\right)$$

$$=96uv^4+10u^3+200uv^2+6u^5$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\bigg|_{\left(4uv^2,\,5u^2+10v^2,u^3\right)}$$

$$=(6x)(8uv)+(2y)(20v)+(2z)(0)\bigg|_{\left(\underbrace{4uv^2}_{x},\,\underbrace{5u^2+10v^2}_{y},\underbrace{u^3}_{z}\right)}$$

$$=6\left(4uv^2\right)(8uv)+2\left(5u^2+10v^2\right)(20v)+0$$

$$=192u^2v^3+200u^2v+400v^3$$

Ejemplo 5

Sea $f:R^3\to R^4$, tal que $f(x,y,z)=\left(x^2yz,\,y^2-z^2,\,z^3,\,xyz\right)$ y sea $g:R^3\to R^3$, tal que $g(u,v,w)=\left(u^2v,\,uv^2w,\,e^{-uw}\right)$, hallar $D[f\circ g]_{(1,1,0)}$

Solución:

$$D[f\circ g]_{(1,1,0)}=[Df]_{g(1,1,0)}[Dg]_{(1,1,0)}$$

Ahora bien $g(1,1,0)=\left(1^2(1),\,1\left(1^2\right)(0),\,e^{-1(0)}\right)=(1,0,1)$

Reemplazando:

$$D[f\circ g]_{(1,1,0)}=[Df]_{g(1,1,0)}[Dg]_{(1,1,0)}$$

$$=\begin{bmatrix}2xyz & x^2z & x^2y\\ 0 & 2y & -2z\\ 0 & 0 & 3z^2\\ yz & xz & xy\end{bmatrix}_{\left(\underbrace{1}_{x},\underbrace{0}_{y},\underbrace{1}_{z}\right)}\begin{bmatrix}2uv & u^2 & 0\\ v^2w & 2uvw & uv^2\\ -we^{-uw} & 0 & -ue^{-uw}\end{bmatrix}_{\left(\underbrace{1}_{u},\underbrace{1}_{v},\underbrace{0}_{w}\right)}$$

$$=\begin{bmatrix}2(1)(0)(1) & 1^2(1) & 1^2(0)\\ 0 & 2(0) & -2(1)\\ 0 & 0 & 3\left(1^2\right)\\ 0(1) & 1(1) & 1(0)\end{bmatrix}_{\left(\underbrace{1}_{x},\underbrace{0}_{y},\underbrace{1}_{z}\right)}\begin{bmatrix}2(1)(1) & (1)^2 & 0\\ (1)^2\,0 & 2(1)(1)0 & 1\left(1^2\right)\\ -0e^{-1(0)} & 0 & -1e^{-1(0)}\end{bmatrix}_{\left(\underbrace{1}_{u},\underbrace{1}_{v},\underbrace{0}_{w}\right)}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ejemplo 6

Demostrar que $z = f\left(x-2y,\, 2x+y\right)$ satisface la ecuación $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

<u>Solución:</u>

$z = f\left(u,v\right)$ donde $u = x-2y$, $v = 2x+y$

Las derivadas parciales de primer orden serían:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(1)+\frac{\partial z}{\partial v}(2)\end{aligned}} \quad \text{y} \quad \boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}(-2)+\frac{\partial z}{\partial v}(1)\end{aligned}}$$

Hallemos $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}+2\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right]\\&=\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(1)+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(2)\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(1)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(2)\right]\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Ahora, hallemos $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-2\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&=-2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\\&=-2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right]\\&=-2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(1)\right]+2\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}(1)\right]\\&=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\end{aligned}$$

Reemplazando

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)+\left(4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=0$$

$$5\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+5\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0$$

En la última expresión, dividiendo para 5 y cambiando de variable $\boxed{u=x}$ y $\boxed{v=y}$, se comprueba lo que pretendíamos.

Ejercicios propuestos 12

1. Hallar $\frac{\partial z}{\partial t}$, si $z=\frac{x}{y}$, donde $x=e^{t}, y=\ln t$.

2. Sea $f(x,y)=4x^{2}y-2\ln(xy)$ donde $\begin{cases} x=2sent \\ y=3(t-1)^{3} \end{cases}$ encuentre $\frac{df}{dt}$

3. La demanda de cierto producto es $Q(x,y)=200-10x^{2}+20xy$ unidades por mes, donde x es el precio del producto e y el precio de un producto competidor. Se estima que dentro de t meses el precio del producto será $x=10+0{,}5t$ dólares por unidad mientras que el precio del producto competidor será $y=12{,}8+0{,}2t^{2}$ dólares por unidad.
   a) ¿A qué razón cambiará la demanda del producto con respecto al tiempo dentro de 4 meses?
   b) ¿A qué razón porcentual cambiará la demanda del producto con respecto al tiempo dentro de 4 meses?

4. Suponga que cuando las manzanas se venden a x CENTAVOS POR LIBRA los panaderos ganan y DÓLARES POR HORA, el precio de los pasteles de manzana en el supermercado local es $p(x,y)=\frac{1}{2}x^{1/3}y^{1/2}$ DÓLARES POR PASTEL. Suponga además que dentro de t MESES, el precio de las manzanas será $x=23+8t$ CENTAVOS POR LIBRA y que los sueldos de los panaderos serán $y=3{,}96+0{,}02t$ DÓLARES POR HORA. Si el supermercado puede vender $Q(p)=\frac{3600}{p}$ PASTELES POR SEMANA cuando el precio es p DÓLARES POR PASTEL, ¿a qué razón CAMBIARÁ la demanda semanal Q con respecto al tiempo dentro de dos meses?

5. Hallar $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(u,v)$, donde $\begin{cases} u=x^{2}-y^{2} \\ v=e^{xy} \end{cases}$.

6. Hallar $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$, si $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, donde $\begin{cases} x=u\operatorname{sen}v \\ y=u\cos v \end{cases}$.

7. Sea $f:R^{3}\to R$, una función diferenciable y sea $g(X)=\operatorname{sen}\left(f(X)f(X)\right)$; calcular la matriz jacobiana para $g(X)$, donde $f(X)=\|x\|$

8. Demostrar que si $u=\phi\left(x^{2}+y^{2}+z^{2}\right)$, donde $\left.\begin{array}{l} x=R\cos\varphi\cos\psi \\ y=R\cos\varphi\operatorname{sen}\psi \\ z=R\operatorname{sen}\varphi \end{array}\right\}$, entonces $\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial u}{\partial\psi}=0$.

9. Sabiendo que $z(x,y)=z,$ encuentre Z_{x},Z_{y} y dz:
   a) $x=u+v^{2}$ $\quad y=u^{2}-v^{3}$ $\quad z=2uv$
   b) $x=e^{u+v}$ $\quad y=e^{u-v}$ $\quad z=uv$
   c) $x=u\cos v$ $\quad y=u\operatorname{sen}v$ $\quad z=cv,\ c\in IR$

10. Sea la función: $\frac{1}{R}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R_{k}}$. Hallar $\frac{\partial R}{\partial R_{1}}$

11. Demuestre que $u(x,y)=\frac{e^{xy}}{\left(e^{x}+e^{y}\right)}$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_{x}+u_{y}=(x+y-1)u$.

12. Sea $F(x,y)=f(x+3y,2x-y)$, donde $f:R^2\to R$ es diferenciable. Suponga que $\nabla f(0,0)=(4,-3)$. Determine la derivada de la función *F* en el origen en la dirección del vector $v=(1,1)$
13. Sea $z=f(x,y)$ con derivadas parciales de segundo orden continuas:
    a) Si $x=r^2+s^2,\quad y=2rs$ determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2},\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial s\partial r}$
    b) Si $x=s+t,\quad y=s-t$ demuestre que: $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\dfrac{\partial z}{\partial s}\dfrac{\partial z}{\partial t}$
14. Transforme la ecuación $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+2x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{a^2}{x^2}y=0$, poniendo $x=\dfrac{1}{t}$.
15. Transformar la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$, pasando a las coordenadas polares: $x=r\cos\varphi,\quad y=r\operatorname{sen}\varphi$.
16. Tomando *u, v*, como nuevas variables independientes transformar la siguiente ecuación: $(x+y)\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, si
    $u=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\quad;\quad v=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$
17. Transformar la ecuación $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2$, tomando como nuevas variables independientes $u=x, v=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$, y como nueva función $w=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{x}$.
18. Transformar la ecuación $\nabla^2\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ pasándola en coordenadas esféricas $\begin{cases}x=\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta\\ y=\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta\\ z=\rho\cos\phi\end{cases}$, ¿$\nabla^2\varphi=?$ en coordenadas esféricas.

12. DERIVACIÓN IMPLICITA

Suponga que se tiene $F(x,y)=0$, una ecuación implícita para un lugar geométrico de R^2. Obteniendo diferencial a ambos miembros de la ecuación

$$D\big(F(x,y)\big)=D[0]$$

$$F_x dx+F_y dy=0$$

Despejando, se obtiene:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$$

Ejemplo.

Sea $x^2 + y^2 = 4$, hallar $\frac{dy}{dx}$ empleando derivadas parciales.

Solución:

En este caso tenemos $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4$

Empleando la formula:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Suponga que se tiene $F(x,y,z) = 0$, una ecuación implícita para un lugar geométrico de R^3. Obteniendo diferencial a ambos miembros de la ecuación

$$D\left(F(x,y,z)\right) = D[0]$$

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$$

Si queremos $\frac{\partial y}{\partial x}$, debemos considerar a z constante, por tanto $dz = 0$. Reemplazando y despejando se obtiene:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Si queremos $\frac{\partial z}{\partial x}$, debemos considerar a y constante, por tanto $dy = 0$. Reemplazando y despejando se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$

Si queremos $\frac{\partial z}{\partial y}$, debemos considerar a x constante, por tanto $dx = 0$. Reemplazando y despejando se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

Ejemplo

Sea $x^3 e^{y+z} - ysen(x-z) = 0$, hallar $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Solución:

En este caso tenemos $F(x,y) = x^3 e^{y+z} - ysen(x-z)$

Empleando las formulas:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{3x^2e^{y+z}-y\cos(x-z)}{x^3e^{y+z}+y\cos(x-z)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{x^3e^{y+z}-sen(x-z)}{x^3e^{y+z}+y\cos(x-z)}$$

Por otro lado, suponga que se tiene una superficie cuya ecuación está dada en forma implícita $F(x,y,z)=0$, el vector normal que estaba dado de esta forma $\vec{n}=\left(-\frac{\partial z}{\partial x},-\frac{\partial z}{\partial y},1\right)$, ahora puede ser dado de otra forma.

Reemplazando:

$$\vec{n}=\left(-\left(-\frac{F_x}{F_z}\right),-\left(-\frac{F_y}{F_z}\right),1\right)$$

Multiplicando por F_z:

$$\boxed{\vec{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)}$$

Ejercicios Propuestos 13

1. Hallar y', empleando derivadas parciales, para:
   a) $2x^2+6xy+y^2=18$
   b) $y^2+5x=xe^{x(y-2)}$
2. Hallar $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ en $x^2y-3z+8yz^3=0$
3. Determine la derivada direccional de la función $u=f(x,y,z)$ definida implícitamente por $u+ye^u+x+3z=0$ en el origen de coordenadas en la dirección del vector $v=(1,-1,-1)$
4. En el tiempo t=0 se lanza una partícula desde el punto (1,1,1) sobre la superficie $x^2+y^2+3z^2=6$ en una dirección normal a la superficie, con una rapidez de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante y en qué punto cruza a la esfera $x^2+y^2+z^2=103$
5. Demuestre que el plano tangente al cono $z^2=a^2x^2+b^2y^2$ pasa por el origen.
6. Demuestre que cualquier recta normal a una esfera pasa por su centro.
7. Demuestre que el plano tangente al elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ en el punto (x_0,y_0,z_0) puede escribirse en la forma $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$.
8. Demostrar que los planos tangentes a la superficie: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ interceptan a los ejes coordenados en segmentos cuya suma es constante.

9. Encuentre un punto de la superficie $x^2+2y^2+3z^2=12$, donde el plano tangente es perpendicular a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son: $x=1+2t;\quad y=3+8t;\quad z=2-6t$
10. Demostrar que el elipsoide $x^2+3y^2+2z^2=9$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24=0$ son tangentes en el punto (1,1,1).
11. Hallar la ecuación de la recta tangente a las superficies $x^2+y^2+2z^2=4$ y $z=e^{xy}$ en el punto (1,1,1).
12. En qué puntos el gradiente de la superficie $u=x^3+y^3+z^3-3xyz$ es :
    a) perpendicular al eje z.
    b) Es paralelo al eje z.
13. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva intersección de las superficies $\phi=\frac{\pi}{3}$ y $\rho=2\csc\phi\sec\theta$ en $P\left(2,2,-\sqrt{8}\right)$.

5 Extremos de Funciones De Varias Variables

Objetivos.
Se persigue que el estudiante:
- Encuentre Polinomios de Taylor para funciones de dos variables.
- Optimice funciones de dos y tres variables sin restricciones y con una y dos restricciones de igualdad

5.1 POLINOMIOS DE TAYLOR

En el capitulo anterior se mencionó que si f es una función diferenciable entonces $z = f\left(\overline{x}_0\right) + \left[Df\left(\overline{x}_0\right)\right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right]$ debe ser una buena aproximación de la función en la vecindad de $\overline{x}_0$, es decir:

$$f\left(\overline{x}\right) \approx f\left(\overline{x}_0\right) + \left[Df\left(\overline{x}_0\right)\right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right]$$

Para funciones de dos variables tenemos:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

Un polinomio de primer orden:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\left[x - x_0\right] + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\left[y - y_0\right] + r_1$$

Ejemplo.

Sea $f(x,y) = sen(x+2y)$. Hallar el polinomio de Taylor de Primer orden en la vecindad de $(0,0)$.

SOLUCIÓN:

En este caso tenemos:

$$f(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\left[x - 0\right] + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\left[y - 0\right] + r_1$$

Las derivadas parciales, serian:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \cos(x+2y)_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 2\cos(x+2y)_{(0,0)} = 2$$

$$sen(x+2y) = 0 + 1[x] + 2[y] + r_1$$

5.1.1 Polinomio de Taylor de segundo orden.

Para función de una variable el polinomio de Taylor de segundo orden es:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)[x - x_0] + \frac{1}{2} f''(x_0)[x - x_0]^2 + r_2$$

Haciendo analogía para funciones de varias variables

$$f(\overline{x}) = f(\overline{x}_0) + \left[Df(\overline{x}_0)\right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right] + \frac{1}{2}\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right]\left[D\left(Df(\overline{x}_0)\right)\right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right]^T + r_2$$

donde $D\left(Df(\overline{x}_0)\right)$ seria la matriz diferencial de la matriz diferencial, es decir la matriz de segunda derivadas, la cual se la denomina ***matriz Hessiana***, se la denota por $H(f)$ y se la define de la siguiente manera:

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} & \cdots & f_{x_3x_n} \\ f_{x_4x_1} & f_{x_4x_2} & f_{x_4x_3} & \cdots & f_{x_4x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

Si f es una función de dos variables, la matriz Hessiana sería:

$$H\left(f(x,y)\right) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Si f es una función de tres variables, la matriz Hessiana sería:

$$H\left(f(x,y,z)\right) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}$$

Bien, el polinomio de Taylor de segundo orden para funciones de dos variables seria:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} + r_2$$

Ejemplo.

Sea $f(x,y)=e^{3x+2y}$. Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden en la vecindad de $(0,0)$

SOLUCIÓN:
En este caso tenemos

$$f(x,y)=f(0,0)+\begin{bmatrix} f_x & f_y \end{bmatrix}_{(0,0)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+r_2$$

Las derivadas parciales de primer orden serian:

$$f_x(0,0)=3e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=3$$

$$f_y(0,0)=2e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=2$$

Las derivadas parciales de segundo orden serian

$$f_{xx}(0,0)=9e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=9$$

$$f_{xy}(0,0)=6e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=6=f_{yx}(0,0)$$

$$f_{yy}(0,0)=4e^{3x+2y}\Big|_{(0,0)}=4$$

Reemplazando y resolviendo:

$$f(x,y)=1+\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=1+3x+2y+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9x+6y & 6x+4y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=1+3x+2y+\frac{1}{2}\left(9x^2+6xy+6xy+4y^2\right)+r_2$$

$$f(x,y)=1+3x+2y+\frac{9}{2}x^2+6xy+2y^2+r_2$$

La formula de Taylor de segundo orden puede ser usada en forma directa:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-x_0 & y-y_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x[x-x_0]+f_y[y-y_0]+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} f_{xx}[x-x_0]+f_{yx}[y-y_0] & f_{xy}[x-x_0]+f_{yy}[y-y_0] \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}+r_2$$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x[x-x_0]+f_y[y-y_0]+\frac{1}{2}\left[f_{xx}[x-x_0]^2+2f_{xy}[x-x_0][y-y_0]+f_{yy}[y-y_0]^2\right]+r_2$$

Ejercicios propuestos 5.1

1. Determinar el polinomio de Taylor de segundo orden para la función alrededor del punto indicado:
   a) $f(x,y)=(x+y)^2, \quad x_0=0,\ y_0=0$
   b) $f(x,y)=e^{x+y}, \quad x_0=2,\ y_0=3$
   c) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\cos(xy), \quad x_0=0,\ y_0=0$
   d) $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)+\cos(xy), \quad x_0=2,\ y_0=1$
   e) $f(x,y)=e^{(x-1)^2}, \quad x_0=1,\ y_0=0$

2. Obtenga un desarrollo de Taylor de segundo orden para:
$$f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2+1)}, \quad x_0=0,\ y_0=0$$
Luego utilice el resultado para hallar el valor aproximado de $f(0.3,-0.2)$

3. Aproxime $3^{0.1}\ln(0.85)$ con la formula de Taylor de segundo orden

4. Sea $f(-1,1)=5$, $\nabla f\big|_{(-1,1)}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $H\big|_{(-1,1)}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Obtenga el valor aproximado para $f(-0.99,0.98)$

5. 2 EXTREMOS DE FUNCIONES ESCALARES

5.2.1 DEFINICIÓN

Sean $f(\overline{x}):U\subseteq R^n\to R$, $\overline{x}_0\in U$, $B_n(\overline{x}_0,\partial)$.

1. $f(\overline{x}_0)$ es un valor ***MÁXIMO LOCAL*** f en B_n, si $f(\overline{x})\leq f(\overline{x}_0), \quad \forall\overline{x}\in B_n$.
2. $f(\overline{x}_0)$ es un valor ***MÍNIMO LOCAL*** de f en B_n, si $f(\overline{x})\geq f(\overline{x}_0), \quad \forall\overline{x}\in B_n$.
3. Si $f(\overline{x}_0)$ es tal que en su vecindad, en ciertas direcciones hay un máximo y en otras un mínimo, entonces se llama ***PUNTO DE SILLA***.

Bien, ya están definidos los extremos, ahora debemos definir cómo encontrarlos. Igual que para función de una variable deberán existir puntos candidatos a ser extremos.

La mayoría de las funciones son diferenciables por tanto nos regiremos al estudio de este tipo de funciones.

5.2.2 TEOREMA (Condición necesaria para la existencia de extremos locales)

Sean $f\left(\overline{x}\right): U \subseteq R^n \to R$, una función diferenciable, sea $\overline{x}_0 \in U$. Si en $\overline{x}_0$, $f\left(\overline{x}\right)$ tiene un extremo local entonces $\nabla f\left(\overline{x}_0\right) = 0$.

A $\overline{x}_0$ tal que $\nabla f\left(\overline{x}_0\right) = 0$ se lo llama ***PUNTO CRÍTICO ESTACIONARIO***.

Lo anterior quiere decir que los extremos se producen necesariamente en los puntos críticos, igual que para función de una variable. Entonces los primeros que debemos hacer es obtener los puntos críticos y luego clasificarlos en máximos, mínimos o ninguno.

Para función de una variable, empleando el criterio de la segunda derivada, teníamos que si esta es positiva en un punto crítico estacionario entonces estamos ante un mínimo; y, si la segunda derivada es negativa entonces tenemos un máximo. Esto es debido a que según Taylor de segundo orden la función se aproxima mediante una parábola cuya concavidad depende justamente del signo de la segunda derivada:

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{0}[x - x_0] + \frac{1}{2} f''(x_0)[x - x_0]^2$$

Para funciones de varias variables, podemos también hacer uso de la formula de Taylor de segundo orden. Suponga que tenemos una función diferenciable y que su gradiente se anula en un punto $\overline{x}_0$

$$f\left(\overline{x}\right) \approx f\left(\overline{x}_0\right) + \underbrace{\left[\nabla f\left(\overline{x}_0\right)\right]}_{0}\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right] + \frac{1}{2}\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right]\left[H\left(f\left(\overline{x}_0\right)\right)\right]\left[\overline{x} - \overline{x}_0\right]^T$$

Análogamente, ahora debemos analizar la matriz Hessiana para clasificar los extremos.

5.2.3 TEOREMA (Condición suficientes para la existencia de extremos)

Sea $f\left(\bar{x}\right): U \subseteq R^n \to R$, suponga que $\bar{x}_0$ es un punto tal que $\nabla f\left(\bar{x}_0\right) = 0$, suponga que f tiene derivadas parciales se segundo orden continuas, entonces:

1. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\bar{x}_0\right)\right)$es definida ***POSITIVA*** (todos sus valores propios son positivos) entonces $f\left(\bar{x}_0\right)$ es un valor ***MÍNIMO*** de f.
2. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\bar{x}_0\right)\right)$es definida ***NEGATIVA*** (todos sus valores propios son negativos) entonces $f\left(\bar{x}_0\right)$ es un valor ***MÁXIMO*** de f.
3. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\bar{x}_0\right)\right)$es ***SEMI-DEFINIDA POSITIVA*** (valores propios no negativos) entonces $f\left(\bar{x}_0\right)$ ***PUEDE*** ser un valor ***MÍNIMO*** de f.
4. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\bar{x}_0\right)\right)$es ***SEMI-DEFINIDA NEGATIVA*** (valores propios no positivos) entonces $f\left(\bar{x}_0\right)$ ***PUEDE*** ser un valor ***MÁXIMO*** de f.
5. Si la matriz Hessiana $H\left(f\left(\bar{x}_0\right)\right)$es ***NO DEFINIDA*** (valores propios no positivos y no negativos) entonces $f\left(\bar{x}_0\right)$ es un ***PUNTO DE SILLA*** de f.

Obtener los valores propios de la matriz Hessiana puede resultar una tarea dificultosa por tanto, podemos utilizar otro mecanismo que lo vamos a ir indicando primero para dos variables, luego para tres hasta llegar a generalizarlo.

5.2. 4 TEOREMA

Sea $f(x,y)$ una función dos veces diferenciable en $U \subseteq R^2$, sea $(x_0, y_0) \in U$ un punto crítico estacionario de f.
Defínanse las matrices:

$$H_1 = \left[f_{xx} \right]_{(x_0,y_0)}, \quad H_2 = H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

Entonces:

1. Si $|H_1| > 0 \quad \wedge \quad |H_2| > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un ***MÍNIMO*** de f en U.
2. Si $|H_1| < 0 \quad \wedge \quad |H_2| > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un ***MÁXIMO*** de f en U.
3. Si $|H_2| < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es un ***PUNTO DE SILLA*** de f en U.
4. Si $|H_2| = 0$, no se puede concluir.

Ejemplo 1

Hallar los extremos para $f(x,y) = x^2 + y^2$

<u>SOLUCIÓN:</u>

PRIMERO se encuentran los puntos críticos, candidatos a ser extremos.

Las derivadas parciales para $f(x,y) = x^2 + y^2$ son: $\boxed{\begin{array}{l} \frac{\delta f}{\delta x} = 2x \\ \frac{\delta f}{\delta y} = 2y \end{array}}$

El sistema $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ da como resultado $\boxed{x_0 = 0}$ y $\boxed{y_0 = 0}$

Por tanto tenemos en este caso un sólo punto crítico $\boxed{(x_0, y_0) = (0,0)}$

SEGUNDO Clasifiquemos el punto crítico:

Las segundas derivadas parciales son: $\boxed{\begin{array}{l} f_{xx} = 2 \\ f_{yy} = 2 \\ f_{xy} = f_{yx} = 0 \end{array}}$

La matriz Hessiana en este caso es: $H = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Ahora, como $|H_1| = |2| > 0$ y $|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$ concluimos que en $(0,0)$ hay un valor **mínimo** para la función, que sería: $f_{Mín}(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$

Ejemplo 2

Hallar los extremos para $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$

SOLUCIÓN:

PRIMERO: Para hallar los puntos críticos, tenemos:

Las derivadas parciales son: $\boxed{\begin{array}{l} f_x = 3x^2 + 6y \\ f_y = -3y^2 + 6x \end{array}}$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ -3y^2 + 6x = 0 \end{cases}$ tenemos:

En la segunda ecuación se obtiene $\boxed{x = \frac{y^2}{2}}$ y al reemplazarlo en la primera ecuación encontramos los valores de y_0, es decir :

$$3\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 + 6y = 0$$

$$3\frac{y^4}{4} + 6y = 0$$

$$3y\left(\frac{y^3}{4} + 2\right) = 0$$

$$y = 0 \quad \vee \quad y = -2$$

Luego; si $y_0 = 0$ entonces $x_0 = \frac{0^2}{2} = 0$; y ,

si $y_0 = -2$ entonces $x_0 = \frac{(-2)^2}{2} = 2$

Es decir, aquí tenemos dos puntos críticos $(0,0)$ y $(2,-2)$.

SEGUNDO: Clasificando los puntos críticos

Las segundas derivadas parciales son: $\boxed{\begin{array}{l} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = -6y \\ f_{xy} = f_{yx} = 6 \end{array}}$

La matriz Hessiana en este caso es: $H = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} & \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} \\ \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x} & \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix}$

1. La matriz Hessiana para el punto $(0,0)$ es: $H = \begin{bmatrix} 6(0) & 6 \\ 6 & 6(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

Como $|H_2| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$ concluimos que $(0,0)$ hay un **punto de silla**.

2. La matriz Hessiana para el punto $(2,-2)$ es: $H = \begin{bmatrix} 6(2) & 6 \\ 6 & -6(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

Como $|H_1| = |12| > 0$ y $|H_2| = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 144 - 36 = 12 > 0$ entonces en $(2,-2)$ hay un valor **Mínimo** para la función, y es: $\boxed{f_{MIN}(2,-2) = 2^3 - 2^3 + 6(2)(-2) = -8}$

Ejemplo 3

Un supermercado vende 2 tipos de cerveza. Una marca local que se obtiene a un costo de $¢30$ cada lata y una marca nacional que se obtiene a un costo de $¢40$ por lata. El tendero calcula que si la de marca local se vende a "x" centavos por lata y la de marca nacional a "y" centavos por lata, se venderán cada día aproximadamente $70 - 5x + 4y$ latas de la marca local y $80 + 6x - 7y$ latas de la marca nacional. ¿Qué precio debería fijar el tendero a cada marca para maximizar las utilidades?

SOLUCIÓN:

Con la información proporcionada determinamos la función utilidad

$$U = I - C$$
$$U = [x(70 - 5x + 4y) + y(80 + 6x - 7y)] - [30(70 - 5x + 4y) + 40(80 + 6x - 7y)]$$
$$U = (x - 30)(70 - 5x + 4y) + (y - 40)(80 + 6x - 7y)$$
$$U = -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5300$$

Las derivadas parciales para la función Utilidad son:

$$\begin{cases} U_x = -10x + 10y - 20 \\ U_y = 10x - 14y + 240 \end{cases}$$

Para los puntos críticos hacemos $\begin{cases} U_x = 0 \\ U_y = 0 \end{cases}$ es decir $\begin{cases} -10x + 10y - 20 = 0 \\ 10x - 14y + 240 = 0 \end{cases}$

Despejamos x en la primera ecuación: $\boxed{\begin{aligned} &-10x + 10y - 20 = 0 \\ &-10x = 20 - 10y \\ &x = \frac{10y - 20}{10} \\ &x = y - 2 \end{aligned}}$

Reemplazamos x en la segunda ecuación: $\boxed{\begin{aligned} &10(y - 2) - 14y + 240 = 0 \\ &20y - 20 - 14y + 240 = 0 \\ &-4y = -220 \\ &y = \frac{220}{4} \\ &y = 55 \end{aligned}}$

Luego $x = y - 2 = 55 - 2 = 53$

Por tanto, tenemos un sólo punto crítico $P(53,55)$

La matriz Hessiana es $H = \begin{bmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{yx} & U_{yy} \end{bmatrix}_{(53,55)} = \begin{bmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -14 \end{bmatrix}$

Como $|H_1| = |-10| = -10 < 0$ y $|H_2| = \begin{vmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -14 \end{vmatrix} = 140 - 100 = 40 > 0$

entonces **utilidades máximas** se producirán cuando $x = 53$ y $y = 55$

Para el caso de tres variables tenemos:

5.2. 5 TEOREMA

Sea f una función dos veces diferenciable en $U \subseteq R^3$, sea $(x_0, y_0, z_0) \in U$ un punto crítico estacionario de f.
Defínanse las matrices:

$$H_1 = [f_{xx}]_{(x_0,y_0,z_0)},\quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)},\quad H_3 = H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

Entonces:

1. Si $|H_1| > 0 \;\wedge\; |H_2| > 0 \;\wedge\; |H_3| > 0$, entonces $f(x_0, y_0, z_0)$ es un ***MÍNIMO*** de f en U.
2. Si $|H_1| < 0 \;\wedge\; |H_2| > 0 \;\wedge\; |H_3| < 0$, entonces $f(x_0, y_0, z_0)$ es un ***MÁXIMO*** de f en U.

Ejemplo

Hallar los extremos para $f(x,y,z) = 2x^2 + xy + 4y^2 + xz + z^2 + 2$

SOLUCIÓN:

PRIMERO determinamos los puntos críticos estacionarios.

Las derivadas parciales son: $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x + y + z \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x + 8y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x + 2z \end{cases}$

Resolviendo el sistema simultáneo $\begin{cases} 4x + y + z = 0 \\ x + 8y = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ tenemos:

Despejando " y " en la segunda ecuación resulta $y = -\dfrac{x}{8}$.

Despejando " z " en la tercera ecuación resulta $z = -\dfrac{x}{2}$.

Luego reemplazando " y " y " z " en la primera ecuación, encontramos " x ", es decir:

$$4x-\frac{x}{8}-\frac{x}{2}=0$$
$$\left(4-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)x=0$$
$$x=0$$
Por lo tanto $y=-\frac{x}{8}=-\frac{0}{8}=0$ y $z=-\frac{x}{2}=-\frac{0}{2}=0$

Hay un solo punto crítico $P(0,0,0)$

SEGUNDO: Clasificando el punto crítico.

La matriz Hessiana sería: $H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{bmatrix}_{(0,0,0)}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

De aquí tenemos: $H_1=[4]$ $H_2=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8\end{bmatrix}$ $H_3=H=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Calculando los determinantes tenemos:

$|H_1|=|4|=4>0$ $|H_2|=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 8\end{vmatrix}=31>0$ $|H_3|=|H|=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=54>0$

Por lo tanto, se concluye que en el punto $P(0,0,0)$ se produce un **mínimo**, cuyo valor es:

$$f(0,0,0)=20^2+00+40^2+0+0^2+2$$
$$f_{min}=2$$

Para el caso de n variables, tenemos:

5.2. 6 TEOREMA

Sea la Función Objetivo $w=f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$, dos veces diferenciable. Suponga que se obtiene el punto crítico estacionario $(x_{0_1},x_{0_2},x_{0_3},\ldots,x_{0_n})$

Defínanse las matrices:

$$H_1=\left[f_{x_1x_1}\right],\ H_2=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2}\end{bmatrix},\ H_3=\begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3}\end{bmatrix}\cdots,H_n=H$$

Entonces:

1.- Si $|H_1|>0\wedge|H_2|>0\wedge|H_3|>0\wedge\ldots\wedge|H_n|>0$, entonces en $(x_{01},x_{02},x_{03},\ldots,x_{0n})$ la función tiene un ***MÍNIMO***.

2.- Si $\left|H_1\right|<0 \wedge \left|H_2\right|>0 \wedge \left|H_3\right|<0 \wedge \ldots \wedge (-1)^n\left|H_n\right|>0$, entonces en $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$ la función tiene un ***MÁXIMO***.

Ejercicios propuestos 5.2

1. Determine y clasifique los puntos críticos de :
   a) $f(x,y)=x^2y-x-xy^2+y$
   b) $f(x,y)=x^3+y^2-6xy+9x+5y+2$
   c) $f(x,y)=x^2+2y^2$
   d) $f(x,y)=(x-4)\ln(xy)$
   e) $f(x,y)=\frac{1}{3}\left(x^3+8y^3\right)-2\left(x^2+y^2\right)+1$
   f) $f(x,y)=2x^2+y^2-\ln(xy^2)$
   g) $f(x,y,z)=x^2+xz-y+y^2+yz+3z^2$
   h) $f(x,y,z)=-x^2-y^2-z^2+2y+xz$

2. Determine el máximo y mínimo absolutos de la función $z=\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}(x+y)$ en la región $0\le x\le \pi/2$, $\quad 0\le y\le \pi/2$.

   Resp. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$ Máximo local

3. Determine los puntos críticos de $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)+\int_0^x \frac{2t}{1+t^4}dt$

4. Una compañía de teléfonos planea introducir dos nuevos tipos de sistemas de comunicaciones. Se calcula que si el primer tipo de sistema se valora en x cientos de dólares por sistema y el segundo tipo en y cientos de dólares por sistema, aproximadamente $40-8x+5y$ consumidores comprarán el primer tipo y $50+9x-7y$ comprarán el segundo tipo. Si el costo de fabricación del primer tipo es de \$1000 por sistema y el costo del segundo tipo es \$3000 por sistema. ¿Qué precio debería fijar la compañía de teléfonos a los sistemas para generar la máxima utilidad posible?.

5. Suponga que una empresa monopolista tiene las siguientes funciones de precio $\begin{cases} P_1=63-4Q_1 \\ P_2=105-5Q_2 \\ P_3=75-6Q_3 \end{cases}$, y la función de costo total $C=20+15Q+Q^2$ donde $Q=Q_1+Q_2+Q_3$. Determine los niveles de demanda que haga máximo el beneficio.

6. Para los productos A, B y C de un monopolista la función costo está dada por $C(p_A,p_B,p_C)=p_A{}^2+2p_B{}^2+p_C{}^3-p_Ap_B-2p_C-2p_A+12$ donde p_A, p_B, p_C son los precios de los productos. Encuentre los precios que minimicen el costo.

5.3 EXTREMOS CONDICIONADOS (Multiplixadores de Lagrange)

En muchas ocasiones nos enfrentaremos a situaciones de optimización cunado las variables independientes deben ser tomadas de un subconjunto de su dominio. Es decir presentan restricciones

5.3.1 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de dos variables

Suponga que se desea optimizar la función de dos variables f, dos veces diferenciable, sujeta a la restricción o ligadura $g(x,y)=k$, donde k es una constante.

Defínase la Función Langragiana

$$L(\lambda,x,y)=f(x,y)-\lambda\left[g(x,y)-k\right]$$

donde λ es llamado Multiplicador de Lagrange.

Suponga que se obtiene el Punto crítico $\left(x_0,y_0,\lambda\right)$ de la Función Langragiana.

Defínase el Hessiano Orlado, como la matriz:

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} L_{\lambda\lambda} & L_{\lambda x} & L_{\lambda y} \\ L_{x\lambda} & L_{xx} & L_{xy} \\ L_{y\lambda} & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}_{\left(x_0,y_0,\lambda\right)}$$

Entonces:

1. Si $\left|\overline{H}\right|>0$ entonces en (x_0,y_0) la función f tiene un ***MÁXIMO***.
2. Si $\left|\overline{H}\right|<0$ entonces en (x_0,y_0) la función f tiene un ***MÍNIMO***.

Ejemplo

Hallar los valores máximos y mínimos de $f(x,y)=xy$, sujeto a que $x^2+y^2=8$

SOLUCIÓN:

En este caso $g(x,y)=x^2+y^2$. Por tanto la función Langragiana sería:

$$L(\lambda,x,y)=f(x,y)-\lambda\left[g(x,y)-k\right]=xy-\lambda\left[x^2+y^2-8\right]$$

$$\begin{cases} L_x=0\to f_x=\lambda g_x \to y=\lambda 2x \\ L_y=0\to f_y=\lambda g_y \to x=\lambda 2y \\ L_\lambda=0\to g(x,y)=k\to x^2+y^2=8\end{cases}$$

Despejando λ en las dos primeras ecuaciones, e igualando se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\lambda=\frac{y}{2x}\\ \lambda=\frac{x}{2y}\end{aligned}\right\}\to \frac{y}{2x}=\frac{x}{2y}\to y^2=x^2\to y=\pm x$$

Reemplazando en la tercera ecuación, resulta: $\boxed{\begin{aligned}&x^2+y^2=8\\ &2x^2=8\\ &x^2=4\to\begin{cases}x=2\\x=-2\end{cases}\end{aligned}}$

Por tanto: $\boxed{\begin{aligned}&x=2\to\begin{cases}y=2\\y=-2\end{cases}\\ &x=-2\to\begin{cases}y=2\\y=-2\end{cases}\end{aligned}}$

Es decir, existen cuatros puntos críticos: $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-2,2)$ y $(-2,-2)$.

Hallemos el Hessiano Orlado

$$\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & g_x & g_y\\ g_x & L_{xx} & L_{xy}\\ g_y & L_{yx} & L_{yy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2x & 2y\\ 2x & -2\lambda & 1\\ 2y & 1 & -2\lambda\end{bmatrix}$$

Y como $\lambda=\dfrac{x}{2y}$, se tiene $\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & 2x & 2y\\ 2x & -2\left(\frac{x}{2y}\right) & 1\\ 2y & 1 & -2\left(\frac{x}{2y}\right)\end{bmatrix}$

Ahora clasifiquemos los puntos críticos:

1.- Para $(2,2)$ tenemos: $\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 4\\ 4 & -1 & 1\\ 4 & 1 & -1\end{bmatrix}$

Entonces, como $\left|\overline{H}\right|=-4(-8)+4(8)=64>0$ se dice que $f(2,2)=(2)(2)=4$ es un MÁXIMO.

2.- Para $(2,-2)$ tenemos: $\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & 4 & -4\\ 4 & 1 & 1\\ -4 & 1 & 1\end{bmatrix}$

Ahora, como $\left|\overline{H}\right|=-4(8)-4(8)=-64<0$ se dice que $f(2,-2)=(2)(-2)=-4$ es un MÍNIMO.

3.- Para $(-2,2)$ se tiene: $\overline{H}=\begin{bmatrix}0 & -4 & 4\\ -4 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$

Ahora, como $\left|\overline{H}\right| = 4(-8)+4(-8) = -64 < 0$ se dice que $f(-2,2) = (-2)(2) = -4$ es un MÍNIMO.

4.- Para $(-2,-2)$ se tiene: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -4 \\ -4 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Entonces, como $\left|\overline{H}\right| = 4(8)-4(-8) = 64 > 0$ se dice que $f(-2,-2) = (-2)(-2) = 4$ es un MÁXIMO.

Ejemplo 2

A un editor se le han asignado $\$60,000$ para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan "x" miles de dólares en desarrollo y "y" miles en promoción se venderán aproximadamente $f(x,y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a desarrollar y cuánto a promoción para maximizar las ventas?

SOLUCIÓN:

En este caso la Función objetivo sería $\boxed{f(x,y) = 20x^{3/2}y}$ sujeta a la restricción $\boxed{x+y=60}$

La función Langragiana sería: $L(\lambda,x,y) = 20x^{3/2}y - \lambda(x+y-60)$

Para obtener los puntos críticos, hacemos:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad x+y=60 \\ L_x = 0 \quad \rightarrow \quad -\lambda(1)+20\left(\dfrac{3}{2}\right)x^{1/2}y = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 30x^{1/2}y \\ L_y = 0 \quad \rightarrow \quad -\lambda(1)+20x^{3/2} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 20x^{3/2} \end{cases}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones, resulta: $30x^{1/2}y = 20x^{3/2} \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

Lo último lo reemplazamos en la primera ecuación y se obtiene: $\boxed{\begin{aligned} &x+\tfrac{2}{3}x = 60 \\ &3x+2x=120 \\ &5x=120 \\ &x=36 \end{aligned}}$

Por tanto: $\boxed{\begin{aligned} &y=\tfrac{2}{3}(36) \\ &y=24 \end{aligned}}$. Es decir, existe sólo un punto crítico: $(36,24)$

El Hessiano Orlado sería: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 15x^{-1/2}y & 30x^{1/2} \\ 1 & 30x^{1/2} & 0 \end{bmatrix}$

Y para el punto $(36,24)$ es: $\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 60 & 180 \\ 1 & 180 & 0 \end{bmatrix}$

Como el determinante es: $\left|\overline{H}\right| = (-1)(-180) + 1(120) = 300 > 0$, concluimos que el editor debe invertir \$36000 en desarrollo y \$24000 en promoción para obtener las máximas ventas.

Ejemplo 3

Un consumidor tiene $\$600$ para gastar en 2 artículos, el primero de los cuales tiene un valor de $\$20/$ unidad y el segundo $\$30/$ unidad. Si la utilidad obtenida por el consumidor de "x" unidades del primer artículo y "y" unidades del segundo está dada por $f(x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4}$.

a) ¿Cuántas unidades de cada artículo debería comprar el consumidor para maximizar su utilidad?

SOLUCIÓN:

En este caso la función Objetivo es $\boxed{f(x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4}}$ sujeta a que $\boxed{20x + 30y = 600}$.

La función Langragiana es $\boxed{\begin{array}{l} L(\lambda, x, y) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - k) \\ L(\lambda, x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4} - \lambda(20x + 30y - 600) \end{array}}$

Obteniendo los puntos críticos tenemos:

$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} L_\lambda = 20x + 30y = 600 \rightarrow 2x + 3y = 60 \\ L_x = 6x^{-0.4}y^{0.4} - 20\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{6x^{-0.4}y^{0.4}}{20} \\ L_y = 4x^{0.6}y^{-0.6} - 30\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{4x^{0.6}y^{-0.6}}{30} \end{cases} \\ \dfrac{4x^{0.6}y^{-0.6}}{30} = \dfrac{6x^{-0.4}y^{0.4}}{20} \\ (10)2x^{0.6}y^{-0.6} = 15(3x^{-0.4}y^{0.4}) \\ 20x = 45y \\ y = \dfrac{4}{9}x \end{array}}$$

Reemplazando en la primera ecuación (la Restricción), tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 3\left(\frac{4}{9}x\right) &= 60 \\ 2x + \frac{12}{9}x &= 60 \\ 18x + 12x &= 540 \\ 30x &= 540 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Y como $\boxed{y = \frac{4}{9}x}$ entonces $\boxed{y = 8}$.

Por lo tanto resulta el punto crítico $(18,8)$.

Para clasificar el punto crítico, calculamos el Hessiano Orlado:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & -2.4x^{-1.4}y^{0.4} & 2.4x^{-0.4}y^{-0.6} \\ 30 & 2.4x^{-0.4}y^{-0.6} & -2.4x^{0.6}y^{-1.6} \end{bmatrix}_{(18,8)} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & -2.4(18)^{-1.4}(8)^{0.4} & 2.4(18)^{-0.4}(8)^{-0.6} \\ 30 & 2.4(18)^{-0.4}(8)^{-0.6} & -2.4(18)^{0.6}(8)^{-1.6} \end{bmatrix}$$

Como $\left|\overline{H}\right| > 0$ entonces el consumidor, para obtener las máximas utilidades, debe comprar 18 unidades del primer artículo y 8 unidades del segundo artículo.

Ejemplo 4

Un fabricante planea vender un nuevo producto a \$350 la unidad y estima que si se invierten "x" miles de dólares en desarrollo y "y" miles en promoción, los consumidores comprarán $\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}$ unidades del producto, aproximadamente. Los costos de fabricación de este producto son \$150 por unidad.

a) ¿Cuánto debería invertir el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible, si dispone de fondos ilimitados?

En este caso habrá que formar la Función Objetivo, que es la Utilidad:

$$U = Ingresos - \left[Costos + Inversión\right]$$

$$U = 350\left(\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right) - \left[150\left(\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right)+1000x+1000y\right]$$

$$U(x,y) = 200\left[\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right]-1000x-1000y$$

El punto crítico, sin restricciones, será:

$$\begin{aligned}
&U_x = 200\left[\frac{100x-500-100x}{(x+5)^2}\right]-1000=0\\
&U_x = 200\left[\frac{500}{(x+5)^2}\right]=1000\\
&\frac{500}{(x+5)^2}=5\\
&500=5(x+5)^2\\
&\sqrt{100}=\sqrt{(x+5)^2}\\
&x+5=\pm 10\\
&x=5
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&U_y = 50000\left[\frac{1(y+2)-y}{(y+2)^2}\right]-1000=0\\
&U_y = 200\left[\frac{250y+500-250y}{(y+2)^2}\right]-1000=0\\
&\frac{500}{(y+2)^2}=5\\
&500=5(y+2)^2\\
&\sqrt{100}=\sqrt{(y+2)^2}\\
&y+2=10\\
&y=8
\end{aligned}$$

Compruebe que en el punto crítico $(5,8)$ se produce un máximo (Hessiano).

Es decir que el fabricante debería invertir \$5000 en desarrollo y \$8000 en promoción del nuevo libro para obtener las máximas utilidades.

b) Si el fabricante sólo tiene \$11,000 para invertir en el desarrollo y la promoción del nuevo producto. ¿Cómo debería distribuirse este dinero para generar la máxima utilidad posible?

Para este caso tenemos la misma Función Objetivo

$$U(x,y) = 200\left[\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right]-1000x-1000y$$

pero ahora sujeta a la restricción de que $x+y=11$.

Trabajamos ahora con la función Langragiana

$$L(\lambda,x,y) = 200\left[\frac{250y}{y+2}+\frac{100x}{x+5}\right]-1000x-1000y-\lambda(x+y-11)$$

Encontrando los puntos críticos, tenemos:

$$\begin{cases}
L_\lambda = 0 \rightarrow x+y=11\\
L_x = 0 \rightarrow \dfrac{100000}{(x+5)^2}-1000=\lambda\\
L_y = 0 \rightarrow \dfrac{100000}{(y+2)^2}-1000=\lambda
\end{cases}$$

Igualando las dos últimas ecuaciones, resulta:

$$\begin{aligned}
&\frac{100000}{(x+5)^2}-1000=\frac{100000}{(y+2)^2}-10000\\
&\sqrt{(y+2)^2}=\sqrt{(x+5)^2}\\
&y+2=x+5\\
&y=x+3
\end{aligned}$$

Reemplazando y en la restricción, tenemos: $\boxed{\begin{array}{l} x+y=11 \\ x+(x+3)=11 \\ 2x+3=11 \\ 2x=8 \\ x=4 \end{array}}$

Entonces: $\boxed{\begin{array}{l} x+y=11 \\ y=11-x \\ y=7 \end{array}}$

Compruebe que en el punto crítico $(4,7)$ se produce un máximo. (Hessiano Orlado).

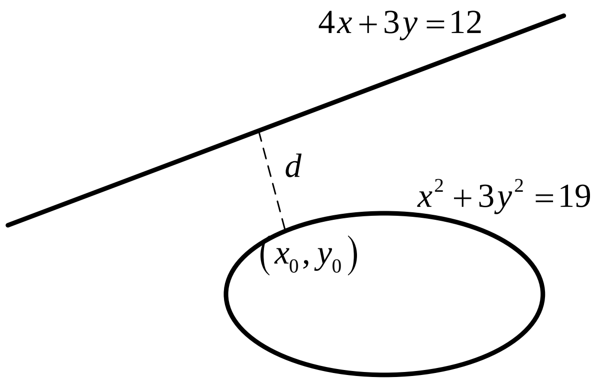
Por tanto, cuando sólo hay $11000 para inversión, habrá que distribuirlos de la siguiente manera para obtener las máximas utilidades: $4000 en desarrollo y $7000 en la promoción del nuevo libro.

Ejemplo 5

Hallar la menor distancia entre la elipse de ecuación $x^2+3y^2=19$ y la recta de ecuación $4x+3y=12$.

SOLUCIÓN:

El problema lo resolveremos definiendo la distancia entre un punto de la elipse y la recta.



Entonces, la función objetivo sería $d=\left|\dfrac{4x_0+3y_0-12}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|$ sujeta a que $g: {x_0}^2+3{y_0}^2=19$

Ahora $\nabla d=\lambda(\nabla g)$, es dcir: $\begin{cases} \dfrac{\partial d}{x_0}=\lambda\left(\dfrac{\partial g}{x_0}\right) \\ \dfrac{\partial d}{y_0}=\lambda\left(\dfrac{\partial g}{y_0}\right) \end{cases}$ lo cual da $\begin{cases} \dfrac{4}{5}=\lambda(2x_0) \\ \dfrac{3}{5}=\lambda(2y_0) \end{cases}$

Igualando y simplificando resulta: $x_0=4y_0$

Reemplazando en la restricción:

$$\begin{array}{c} {x_0}^2+3{y_0}^2=19 \\ (4y_0)^2+3{y_0}^2=19 \\ y_0=\pm 1 \end{array}$$

De acuerdo a la posición, observe el dibujo, tomamos el positivo. (En otro caso habría que probarlo)

Entonces $x_0=4y_0=4(1)=4$

Hemos hallado las coordenadas del punto de la elipse que da la mínima distancia, por tanto esta distancia mínima será: $d_{\min.}=\left|\dfrac{4(4)+3(1)-12}{5}\right|=\dfrac{7}{5}$

Ejercicios Propuestos 5.3

1. Encuentre los extremos de la función $f(x,y)=xy$ sujeta a que $x+y=6$

2. Maximizar $f(x,y)=xy$ sujeta a que $x+y=10$

   Resp. $(5,5)$; $f_{máx}=25$

3. Encuentre los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ sujeta a que $x+4y=2$

4. Empleando multiplicadores de Lagrange, halle la distancia mínima de la recta con ecuación $2x+3y=-1$ al origen.

   Resp. $d_{\min}=\sqrt{\frac{1}{13}}$

5. Empleando multiplicadores de Lagrange, halle la distancia mínima de la circunferencia con ecuación $x^2+y^2=1$ al origen.

   Resp. $d_{\min}=\frac{7}{5}$

6. Empleando multiplicadores de Lagrange, halle la distancia mínima de $(x-4)^2+y^2=4$ al punto de coordenadas $(0,10)$

   Resp. $d_{\min}=116\left(\frac{30}{29}-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$

7. Los cursos de dos ríos (dentro de los límites de una región determinada) representan aproximadamente una parábola $y=x^2$,y una recta $x-y-2=0$. Hay que unir estos ríos por medio de un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Porqué puntos habrá que trazarlos?.

   Resp. Parábola $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, recta $\left(\frac{11}{8},-\frac{5}{8}\right)$

8. Hallar la distancia mínima entre $9x^2+16y^2=144$ y $5x+8y=40$.

   Resp. elipse $\left(\frac{20}{\sqrt{61}},\frac{18}{\sqrt{61}}\right)$; $d_{\min}==\frac{\left|\frac{100}{\sqrt{61}}+\frac{144}{\sqrt{61}}-40\right|}{\sqrt{89}}$

9. En una esfera de radio a inscribir un cilindro cuya superficie sea máxima.

   Resp. $r=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}$, $h=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}\left(\sqrt{5}-1\right)$

10. Calcular la superficie total del cilindro de máximo volumen inscrito en una esfera de radio a .

    Resp. $A=\frac{4\pi\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}a^2$

11. Dadas las ecuaciones de utilidad presupuestal de un consumidor $\begin{matrix} U=q_1^{3/2}q_2 \\ 100=3q_1+4q_2 \end{matrix}$. Determine los valores de q_1 y q_2 que maximizan la utilidad del consumidor.

12. La relación entre las ventas "S" y las cantidades "x" y "y" gastadas en dos medios de publicidad está dada por $S=\frac{200x}{5+x}+\frac{100y}{10+y}$. La Utilidad neta es $\frac{1}{5}$ de las ventas menos el gasto en publicidad. El presupuesto para publicidad es de $25. Determine cómo debe asignarse este presupuesto entre los dos medios para maximizar la utilidad neta.

13. Una empresa de computadoras tiene un presupuesto mensual publicitario de $60,000. Su departamento de ventas estima que si se gastan " x " dólares cada mes en publicidad en periódicos y " y " dólares cada mes en publicidad por televisión, las ventas mensuales estarán dadas por $S=90x^{1/4}y^{3/4}$ dólares. Si la utilidad es el 10% de las ventas menos el costo de la publicidad, determine cómo asignar el presupuesto publicitario para maximizar la utilidad mensual. Compruébelo utilizando el Hessiano Orlado.

14. Usando L unidades de mano de obra y K unidades de capital, una empresa puede elaborar P unidades de su producto, en donde $P(L,K)=60\sqrt{5(L^2+K^2)}$. Los costos de la mano de obra y de capital son de \$200 y \$100 por unidad. Suponga que la empresa decide elaborar 4500 unidades. Halle el número de insumos de mano de obra y de capital que deben emplearse con objeto de minimizar el costo total.

15. En un taller de mecánica se reparan 2 tipos de autos A y B. La función de trabajo conjunto está dado por: $f(x,y)=x^2+2y^2-xy$, donde x e y representa el números de autos por día del tipo A y B reparados, respectivamente. Para minimizar el trabajo, ¿cuántos autos de cada tipo deben repararse, si diariamente se puede reparar 8 autos?

16. Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos A y B. Obtiene una utilidad de \$4 por unidad de A y de \$6 por unidad de B. Los números de unidades de los dos tipos que pueden producir mediante la planta están restringidos por la ecuación del transformación del producto: $x^2+y^2+2x+4y-4=0$ Con x y y los números de unidades (en miles de dólares) de A y B respectivamente, producidos por semana. Halle las cantidades de cada tipo que deben producirse a fin de maximizar la utilidad.

17. Si una empresa gasta "x" miles de dólares en publicidad en la ciudad A, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad están dadas por $\frac{300x}{x+10}$. Si gasta "x" miles de dólares en la ciudad B, sus ventas potenciales (en miles de dólares) en tal ciudad son $\frac{500x}{x+13.5}$. Si la utilidad es del 25% de las ventas y la empresa dispone de una restricción del presupuesto de 16500 destinados a publicidad en las dos ciudades. ¿Cuánto deberá gastar en cada ciudad con objeto de maximizar la utilidad neta de la empresa? Utilice el Hessiano Orlado para verificar los resultados.

5.3.2 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de tres variables

Suponga que se desea optimizar la función de tres variable f, dos veces diferenciable, sujeta a la restricción $g(x,y,z)=k$.

Defínase la Función Langragiana

$$L(\lambda,x,y,z)=f(x,y,z)-\lambda\left[g(x,y,z)-k\right]$$

Suponga que se obtiene el Punto Crítico $\left(x_0,y_0,z_0,\lambda\right)$ en la Función Langragiana.

Defínase el Hessiano Orlado, como la matriz:

$$\overline{H}=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y & g_z \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ g_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0,\lambda)}$$

Sean $\overline{H}_3=\begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$ y $\overline{H}_4=\overline{H}$

Entonces

1. Si $\left|\overline{H}_3\right| > 0 \wedge \left|\overline{H}_4\right| < 0$ entonces en (x_0, y_0, z_0) la función f tiene un ***MÁXIMO***.
2. Si $\left|\overline{H}_3\right| < 0 \wedge \left|\overline{H}_4\right| < 0$ entonces en (x_0, y_0, z_0) la función f tiene un ***MÍNIMO***.

Ejemplo 1

Encuentre los extremos de $f(x,y,z) = 3x + 5y + 9z$ sujeta a que $xyz = 25$.

SOLUCIÓN:

La función Langragiana es: $L(\lambda, x, y, z) = 3x + 5y + z - \lambda(xyz - 25)$

Para el punto crítico obtenemos:

$$\begin{aligned}
L_\lambda &= 0 \;\rightarrow\; xyz = 25\\
L_x &= 0 \;\rightarrow\; 3 - \lambda(yz) = 0 \quad (x)\\
L_y &= 0 \;\rightarrow\; 5 - \lambda(xz) = 0 \quad (y)\\
L_z &= 0 \;\rightarrow\; 9 - \lambda(xy) = 0 \quad (z)
\end{aligned}$$

Multiplicando por x, y y z respectivamente las tres últimas ecuaciones, y despejando, resulta:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} 3x &= \lambda xyz\\ 9z &= \lambda xyz\\ 5y &= \lambda xyz \end{aligned}\right\} 3x = 5y = 9z} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} y &= \frac{3x}{5}\\ z &= \frac{3x}{9} \rightarrow z = \frac{x}{3} \end{aligned}}$$

Reemplazando en la restricción:

$$\boxed{\begin{aligned} x\left(\frac{3x}{5}\right)\left(\frac{x}{3}\right) &= 25\\ x^3 &= 5^3\\ x &= 5 \end{aligned}}$$

De donde : $\boxed{\begin{aligned} y &= 3\\ z &= \frac{5}{3}\end{aligned}}$ Por lo tanto hay un solo punto crítico: $\left(5, 3, \frac{5}{3}\right)$

Para este caso $\lambda = \frac{3}{y^2} \rightarrow \lambda = \frac{3}{5}$ y el Hessiano Orlado sería:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & yz & xz & xy\\ yz & 0 & -\lambda z & -\lambda y\\ xz & -\lambda z & 0 & -\lambda x\\ xy & -\lambda y & -\lambda x & 0 \end{bmatrix}_{\substack{x=5\\ y=3\\ z=\frac{5}{3}\\ \lambda=\frac{3}{5}}} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 25/3 & 15\\ 5 & 0 & -1 & -9/5\\ 25/3 & -1 & 0 & -3\\ 15 & -9/5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí tenemos: $\overline{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 25/3\\ 5 & 0 & -1\\ 25/3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Los determinantes sería: $\left|\overline{H}_3\right| = -\frac{250}{3} < 0$ y $\left|\overline{H}_4\right| = \left|\overline{H}\right| = -675 < 0 \rightarrow$

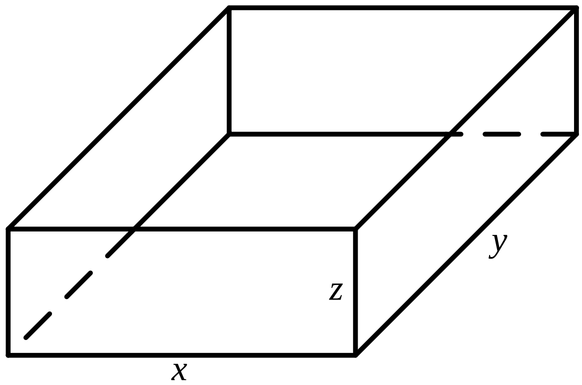
Por tanto en $\left(5,3,\frac{5}{3}\right)$ la función tiene un mínimo.

Ejemplo 2

Se quiere construir una caja rectangular abierta cuyo volumen sea de $100 \quad cm^3$, ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para utilizar la menor cantidad de material posible?

SOLUCIÓN:

Haciendo un esquema



En este caso la función objetivo es el área total : $A_T = xy + 2xz + 2zy$

Y la restricción será el volumen: $V = xyz = 100cm^3$

Yendo un tanto más rápido podemos plantear que $\nabla A_T = \lambda\left(\nabla V\right)$ ¿Porqué?

O lo que es lo mismo $\begin{cases} \dfrac{\partial A_T}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial A_T}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial A_T}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$

Entonces, tenemos:

$$\begin{cases} y + 2z = \lambda yz \\ x + 2z = \lambda xz \\ 2x + 2y = \lambda xy \end{cases}$$

Multiplicando por x, y, z respectivamente:

$$\begin{cases} yx + 2zx = \lambda yzx \\ xy + 2zy = \lambda xzy \\ 2xz + 2yz = \lambda xyz \end{cases}$$

Igualando:

$$yx + 2zx = xy + 2zy = 2xz + 2yz$$

Aquí tenemos dos ecuaciones, que pueden ser: $\begin{cases} yx + 2zx = xy + 2zy \\ xy + 2zy = 2xz + 2yz \end{cases}$

Tomando la primera:

$$yx + 2zx = xy + 2zy$$
$$2zx = 2zy$$
$$x = y$$

Tomando la segunda:

$$xy + 2zy = 2xz + 2yz$$
$$xy = 2xz$$
$$y = 2z$$

Reemplazando en la restricción:

$$xyz = 100$$
$$(2z)(2z)z = 100$$
$$z^3 = 25$$
$$z = \sqrt[3]{25}$$

Por tanto $x = 2\sqrt[3]{25}$ y $y = 2\sqrt[3]{25}$

Ejemplo 3

Hallar el volumen máximo de un sólido rectangular que tiene la propiedad de que la suma de las áreas de las seis caras es $6a^2$.

SOLUCIÓN:

Semejante al anterior , pero en este caso la función objetivo es el volumen: $V = xyz$

sujeto a que $A_T = 2xy + 2yz + 2xz = 6a^2$

Igualmente, podemos plantear rápidamente $\nabla V = \lambda \nabla A_T$, es decir:

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+z) \\ xz = \lambda(x+z) \\ xy = \lambda(y+x) \end{cases}$$

Multiplicando por x, y, z respectivamente:

$$\begin{cases} xyz = \lambda(yx+zx) \\ xyz = \lambda(xy+zy) \\ xzy = \lambda(yz+xz) \end{cases}$$

Igualando:

$$yx + zx = xy + zy = yz + xz$$

Aquí tenemos dos ecuaciones que pueden ser: $\begin{cases} yx + zx = xy + zy \\ xy + zy = yz + xz \end{cases}$

Tomando la primera:

$$yx + zx = xy + zy$$
$$zx = zy$$
$$x = y$$

Tomando la segunda ecuación:

$$xy + zy = yz + xz$$
$$xy = xz$$
$$y = z$$

Reemplazando en la restricción

$$xy + yz + xz = 3a^2$$
$$xx + xx + xx = 3a^2$$
$$3x^2 = 3a^2$$
$$x = a = y = z$$

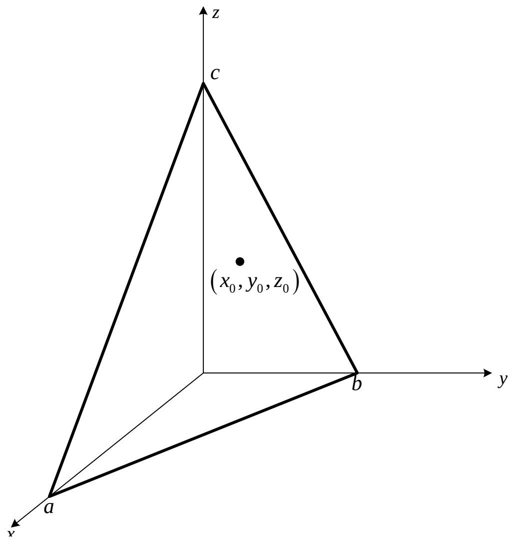
Lo que quiere decir que las dimensiones de la caja deben ser iguales a " a ", para obtener un volumen máximo, cuyo valor es $V_{máx.} = a^3$

Ejemplo 4

Hallar la ecuación del plano que contiene al punto (x_0, y_0, z_0) en el primer octante y que forme con los planos coordenados un tetraedro que tenga el menor volumen posible.

SOLUCIÓN:

Esquemáticamente tenemos:



En este caso la función objetivo es el volumen del tetraedro: $V = \frac{1}{6}abc$

Sujeto a que el punto (x_0, y_0, z_0) pertenezca al plano, es decir debe satisfacer su ecuación:

$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} + \frac{z_0}{c} = 1$, esta debe ser su restricción $g(a, b, c)$

Planteando rápidamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial a} = \lambda \frac{\partial g}{\partial a} \\ \frac{\partial V}{\partial b} = \lambda \frac{\partial g}{\partial b} \\ \frac{\partial V}{\partial c} = \lambda \frac{\partial g}{\partial c} \end{cases}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} \frac{1}{6}bc = \lambda\left(-\frac{x_0}{a^2}\right) \\ \frac{1}{6}ac = \lambda\left(-\frac{y_0}{b^2}\right) \\ \frac{1}{6}ab = \lambda\left(-\frac{z_0}{c^2}\right) \end{cases}$$

Multiplicando por a, b, c respectivamente: $\begin{cases} \frac{1}{6}abc = \lambda\left(-\frac{x_0}{a}\right) \\ \frac{1}{6}abc = \lambda\left(-\frac{y_0}{b}\right) \\ \frac{1}{6}abc = \lambda\left(-\frac{z_0}{c}\right) \end{cases}$

Igualando: $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b} = \frac{z_0}{c}$

$$\frac{x_0}{a} + \frac{x_0}{a} + \frac{x_0}{a} = 1$$

Reemplazando en la restricción: $3\frac{x_0}{a} = 1$

$$a = 3x_0$$

Calculando b y c resulta: $b = 3y_0$ y $c = 3z_0$

Por tanto la ecuación buscada es:

$$\frac{x}{3x_0} + \frac{y}{3x_0} + \frac{z}{3x_0} = 1$$

Ejercicios propuestos 5.4

1. Determine el valor máximo o mínimo de la función $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ si $2x - 3y - 4z = 49$ ..
2. Determine el valor máximo o mínimo de la función $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ si $x + y + z = 35$ ..
3. Determine el valor máximo de $f(x, y, z) = xyz$ si $x + y + z = 6$.
4. Encuentre el mínimo para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ siempre que $x + y + z = 1$
5. Minimizar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeta a que $x + y + z - 6 = 0$

   Resp. $(2,2,2)$; $f_{\min} = 12$
6. La suma de tres números es 50. Determinar el valor de cada uno de ellos para que el producto sea máximo. Resp. $\left(\frac{50}{3}, \frac{50}{3}, \frac{50}{3}\right)$
7. Demuestre que el producto de tres números positivos cuya suma es S es máximo si los tres números son iguales.
8. Un paquete en forma rectangular se puede enviar por correo, si la suma de su longitud y el perímetro de una sección transversal perpendicular a la longitud es igual a 34 cm. Encuentre las dimensiones del paquete de máximo volumen que puede ser enviado por correo.

   Resp. $x = \frac{34}{3}$, $y = \frac{17}{3}$, $z = \frac{17}{3}$
9. Demostrar que un triángulo es equilátero si el producto de los senos de sus ángulos es máximo.
10. Demostrar que entre todos los triángulos inscritos en un mismo circulo, el de mayor perímetro es el triángulo equilátero.
11. Muestre que el triángulo de mayor área que puede ser inscrito en una circunferencia, es un triángulo equilátero.

12. Una caja rectangular está colocada en el primer octante, con una de sus esquinas en el origen y tres de sus lados sobre los tres planos coordenados. El vértice opuesto al rigen se encuentra en el plano $x+2y+3z=6$.¿Cuáles son sus dimensiones?¿cuál es el volumen máximo de dicha caja?.

    Resp. $x=2$, $y=1$, $z=\frac{2}{3}$; $V_{máx}=\frac{4}{3}u^3$

13. Encontrar las dimensiones del paralelepípedo rectangular de volumen máximo con caras paralelas a los planos coordenados, que se puede inscribir en el elipsoide $16x^2+4y^2+9z^2=144$.

    Resp. $x=\sqrt{3}$, $y=2\sqrt{3}$, $z=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

14. Determinar el volumen del paralelepípedo rectangular más grande que puede inscribirse en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

    Resp. $V_{máx}=\frac{abc}{3\sqrt{3}}$

15. Encuentre los puntos más cercanos al origen de la superficie $xy^3z^2=16$.

    Resp. $x=\sqrt[6]{\frac{8}{3\sqrt{3}}}$, $y=\sqrt[6]{24\sqrt{3}}$, $z=\sqrt[6]{\frac{64}{3\sqrt{3}}}$

16. Determínese el punto más próximo al origen de la superficie $z=xy+1$

    Resp. $(0,0,1)$

17. Determine los puntos en la superficie $y^2-xz=4$ que estén más cercanos del origen y calcule la distancia mínima.

    Resp. $(0,\pm 2,0)$; $D_{mín}=2$

18. Hállense las dimensiones de un paquete rectangular de volumen máximo, talque la suma de su longitud y el perímetro transversal no excedan de 108 pulgadas.

    Resp. $x=36$; $y=18$; $z=18$

19. El material para construir la base de una caja abierta cuesta 1.5 veces lo que el material para construir los lados. Para una cantidad fija de dinero C, hállense las dimensiones de la caja de volumen máximo que puede hacerse.

    Resp. $x=y=\sqrt{\frac{2C}{9a}}$, $z=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2C}{9a}}$

20. Hállese la distancia mínima de la superficie con ecuación $z^2=x^2+y^2$ al punto $(4,0,0)$

    Resp c) $d_{\min}=2\sqrt{5}$

5.3.3 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con una restricción en funciones de n variables

Sea la Función Objetivo $w = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ sujeta a la restricción $g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = k$

Defínase la Función Langragiana

$$L(\lambda, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - \lambda\left[g(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - k\right]$$

Suponga que se obtiene el Punto Crítico $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n}, \lambda)$ resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \rightarrow & g(x_1, x_2, x_3, \cdots, \lambda) = k \\ L_{x_1} = 0 & \rightarrow & f_{x_1} = \lambda g_{x_1} \\ L_{x_2} = 0 & \rightarrow & f_{x_2} = \lambda g_{x_2} \\ L_{x_3} = 0 & \rightarrow & f_{x_3} = \lambda g_{x_3} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{x_n} = 0 & \rightarrow & f_{x_n} = \lambda g_{x_n} \end{cases}$$

Defínase el Hessiano Orlado, como la matriz:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{1n} \\ g_{x_2} & L_{21} & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_n} & L_{n1} & L_{n2} & L_{n3} & \cdots & L_{nn} \end{bmatrix}_{(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n}, \lambda)}$$

Sea $\overline{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{11} & L_{12} \\ g_{x_2} & L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$, $\overline{H}_4 = \begin{bmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} \\ g_{x_1} & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ g_{x_2} & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ g_{x_3} & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}, \ldots, \overline{H}_n = \overline{H}$

Entonces:

1. Si $\left|\overline{H}_3\right| > 0 \wedge \left|\overline{H}_4\right| < 0 \wedge \left|\overline{H}_5\right| > 0 \wedge \ldots \wedge (-1)^n \left|\overline{H}_n\right| > 0$ entonces en $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$ la función tiene un ***MÁXIMO***.
2. Si $\left|\overline{H}_3\right| < 0 \wedge \left|\overline{H}_4\right| < 0 \wedge \left|\overline{H}_5\right| < 0 \wedge \ldots \wedge \left|\overline{H}_n\right| < 0$ (todos negativos) entonces en $(x_{01}, x_{02}, x_{03}, \ldots, x_{0n})$ la función tiene un ***MÍNIMO***.

5.3.4 TEOREMA. Criterio para establecer extremos con dos restricción en funciones de tres variables

Suponga que se desea optimizar la Función Objetivo $w = f(x,y,z)$ sujeta a que

$$\begin{cases} g(x,y,z) = k_1 \\ h(x,y,z) = k_2 \end{cases}$$

Defínase la función Langragiana:

$$L(\lambda,\mu,x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda\left[g(x,y,z) - k_1\right] - \mu\left[h(x,y,z) - k_2\right]$$

Entonces el ***MÁXIMO*** o el ***MÍNIMO*** de la función se producen en el Punto Crítico $(x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu)$ que se obtiene al resolver el sistema:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \to & g(x,y,z) = k_1 \\ L_\mu = 0 & \to & h(x,y,z) - k_2 \\ L_x = 0 & \to & f_x = \lambda g_x + \mu h_x \\ L_y = 0 & \to & f_y = \lambda g_y + \mu h_y \\ L_z = 0 & \to & f_z = \lambda g_z + \mu h_z \end{cases}$$

Ejemplo 1

Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z) = xy + yz$ sujeta a que $x^2 + y^2 = 8$ y $yz = 8$

SOLUCIÓN:

En este caso la función Langragiana es:

$$L(\lambda,u,x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda\left[g(x,y,z) - k_1\right] - \mu\left[h(x,y,z) - k_2\right]$$

$$L(\lambda,u,x,y,z) = xy + yz - \lambda(x^2 + y^2 - 8) - \mu(yz - 8)$$

Para los puntos críticos tenemos:

$$\begin{cases} L_\lambda = 0 & \to & g(x,y,z) = k_1 \\ L_\mu = 0 & \to & h(x,y,z) - k_2 \\ L_x = 0 & \to & f_x = \lambda g_x + \mu h_x \\ L_y = 0 & \to & f_y = \lambda g_y + \mu h_y \\ L_z = 0 & \to & f_z = \lambda g_z + \mu h_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ yz = 8 \\ y = \lambda(2x) + \mu(0) \\ x + z = \lambda(2y) + \mu(z) \\ y = \lambda(0) + \mu(y) \end{cases}$$

De la última ecuación $\mu = 1$.

De la penúltima ecuación $\boxed{\begin{array}{l} x+z=\lambda(2y)+1(z) \\ x=2\lambda y\to\lambda=\dfrac{x}{2y}\end{array}}$

De la antepenúltima ecuación: $y=2\lambda x\to\lambda=\dfrac{y}{2x}$

Igualando se obtiene $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{x}{2y}=\dfrac{y}{2x} \\ x^2=y^2\end{array}}$

Reemplazando en la primera ecuación: $\boxed{\begin{array}{l} x^2+y^2=8 \\ x^2+x^2=8 \\ 2x^2=8 \\ x=\pm2\end{array}}$

Por tanto $\boxed{\begin{array}{l} x=2\to y=\pm2 \\ x=-2\to y=\pm2\end{array}}$ y como $\boxed{z=\dfrac{8}{y}}$ resultan los siguientes puntos críticos: $(2,2,4)$, $(2,-2,-4)$, $(-2,2,4)$ y $(-2,-2,-4)$

Ejemplo 2

Obtenga los puntos del primer octante sobre la curva de intersección del elipsoide $x^2+4y^2+4z^2=4$ y el plano $x-4y-z=0$ que estén más cerca del origen, calcular la distancia mínima.

SOLUCIÓN:

En este caso la **función objetivo** será la distancia: $\boxed{D^2=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2}$, y las restricciones serían $\begin{cases} g: x^2+4y^2+4z^2=4 \\ h: x-4y-z=0\end{cases}$

Podemos hacer $\nabla f=\lambda(\nabla g)+\mu(\nabla h)$

$$(2x,2y,2z)=\lambda(2x,8y,8z)+\mu(1,-4,-1)$$

$$\begin{cases} 2x=2x\lambda+\mu \\ 2y=8y\lambda-4\mu \\ 2z=8z\lambda-\mu\end{cases}$$

La segunda ecuación por $(-z)$ y la tercera por (y), luego se las suman algebraicamente.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} -2yz=-8yz\lambda+4\mu z \\ \ \ 2yz=\ \ 8yz\lambda-\mu y\end{cases} \\ \hline \quad 0=4\mu z-\mu y\end{array}$$

Resulta $\boxed{y=4z}$

Reemplazando en la segunda restricción:

$$\begin{array}{l} x-4(4z)-z=0 \\ x=17z\end{array}$$

Reemplazando en la primera restricción:

$$\begin{array}{l} (17z)^2+4(4z)^2+4z^2=4 \\ 357z^2=4 \\ z=\pm\frac{2}{\sqrt{357}}\end{array}$$

Tomando en el primer octante, el punto sería:

$$\left(\frac{34}{\sqrt{357}},\frac{8}{\sqrt{357}},\frac{2}{\sqrt{357}}\right)$$

Ejercicios Propuestos 5.5

1. Maximizar $f(x,y,z)=xyz$ sujeta a que: $\begin{cases} x+y+z=32 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

   Resp. $(8,16,8)$; $f_{\max}=1024$

2. Minimizar $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que: $\begin{cases} x+2z=4 \\ x+y=8 \end{cases}$

   Resp. $(4,4,0)$; $f_{\min}=32$

3. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ sujeta a que $2x-y=0$ y a que $y+z=0$.
4. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que $x+y+z=1$ y a que $x-y+z=1$.
5. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=xyz$ sujeta a que $x+y+z=12$ y a que $x+y-z=0$.
6. Encuentre los puntos críticos de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ sujeta a que $x+2z=4$ y a que $x+y=8$.
7. Hallar el punto de la recta de intersección de los planos $x-y=2$ y $x-2z=4$, más próximo al origen.

   Resp. $\left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)$

8. Encontrar los puntos para los valores máximo y mínimo de la distancia del origen a la porción del primer octante de la curva según la cual el plano $x+y+z=12$ corta a la superficie $xyz=54$.

   Resp. $(3,6,3)$; $\left(\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{5}, 9+3\sqrt{5}, \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)\right)$; $\left(\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}, 9-3\sqrt{5}, \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\right)$

9. ¿Cuál es la distancia mínima entre $C\begin{cases} x^2+y^2-xy-z^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ y el origen.

   Resp. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $D_{\min}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

10. El plano $x+y+z=12$ intersecta al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una elipse. Determine los puntos más altos y más bajos de esta elipse.

    Resp. más alto $(-3,-3,18)$; más bajo $(2,2,8)$

11. Determine la distancia más cercana del origen a la curva $C\begin{cases} 2z=16-x^2-y^2 \\ x+y=4 \end{cases}$.

    Resp. $(2,2,4)$; $d_{\min}=2\sqrt{5}$

12. Sea $T(x,y,z)=100+x^2+y^2$ la temperatura en cada punto de la esfera $x^2+y^2+z^2=50$. Hállese la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x-z=0$.

    Resp. $\left(0,\sqrt{50},0\right)$; $T_{\max}=150$

6 INTEGRALES DOBLES

OBJETIVOS

Se pretende que el estudiante:

- Calcule integrales dobles.
- Invierta orden de integración
- Calcule Volúmenes.
- Evalué integrales dobles empleando transformaciones.
- Calcule áreas de una superficie

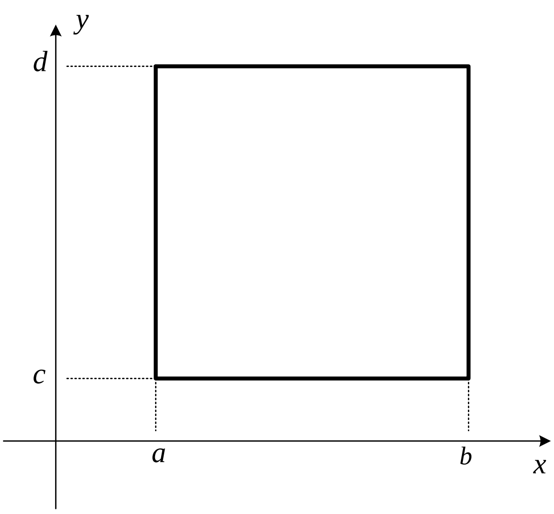
6.1 DEFINICIÓN.

La integral definida para funciones de una variable se la definió de la siguiente manera:

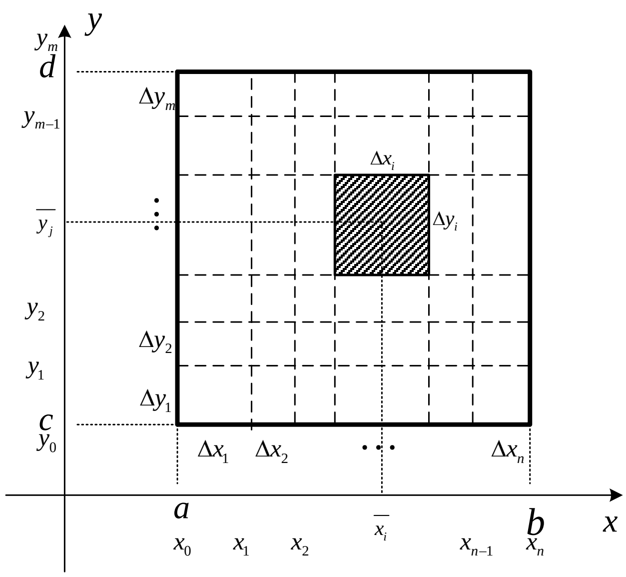
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta x_i\right]$$

La cual se llama Integral (Suma) de Riemann, que significaba el área bajo la curva $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$.

Si quisiéramos obtener una Integral definida para una función de dos variables; primero deberíamos suponer que ahora la región de integración sería de la forma $[a,b]\times[c,d]$, es decir un rectángulo de R^2.



Haciendo particiones de la región, de dimensiones no necesariamente iguales:



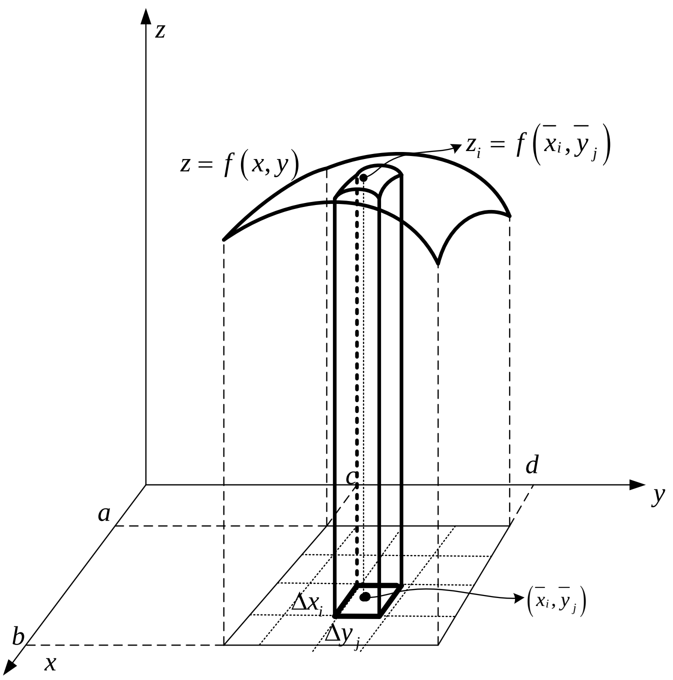
La $ij-ésima$ partición tendrá forma rectangular. Ahora cabe referirse al área de esta partición, que estaría dada por:

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

Podemos definir una función de dos variables $z = f(x,y)$ en la región R, que para la $ij-ésima$ partición sería:

$$f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j$$

Bien, veamos ahora su significado geométrico. Observe la gráfica siguiente:



El punto $\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)$, representa cualquier punto del $ij-ésimo$ rectángulo. El volumen del $ij-ésimo$ paralelepípedo, denotémoslo como ΔV_{ij}, estaría dado por:

$$\Delta V_{ij} = f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j .$$

Por tanto, si deseamos el volumen bajo la superficie, tendríamos que hacer una suma de volúmenes de una cantidad infinita de paralelepídedos, es decir:

$$V=\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j$$

De aquí surge la definición de Integral doble

> Sea f una función de dos variable definida en la región plana $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/\,a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$
>
> Al $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_j\right)\Delta x_i \Delta y_j$ se le denomina la *Integral Doble* de f en R y se la denota de la siguiente manera:
>
> $$\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dxdy$$
>
> Además, si existe este límite decimos que f es integrable en R.

Por el momento no vamos a seguir con la interpretación geométrica de la Integral doble, empecemos estudiando sus propiedades y la manera de cómo evaluarla.

En la definición se dice que si el límite existe la función es integrable, pero surge la interrogante ¿cuándo será que el límite exista?. Esto lo veremos en el siguiente teorema.

6.2 TEOREMA DE INTEGRABILIDAD

> Sea f una función de dos variable definida en la región plana $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/\,a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$
>
> Si f está acotada en R y si f es continua en R a excepción de un número finito de curvas suaves, entonces f es integrable en R.

Este teorema nos hace suponer que igual para funciones de una variable, si la función es continua será integrable.

Bien, ahora nos compete indicar la forma de como evaluar una integral doble.

6.3 TEOREMA FUBINI

Sea f una función de dos variable definida en la región plana $R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)/a\le x\le b\wedge c\le y\le d\}$. Si f es continua en R, entonces:

$$\iint_R f(x,y)dA=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$
$$=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$$

Este teorema nos presenta la integral doble para que sean evaluadas como integrales simples, dichas integrales se denominan ***Integrales Iteradas***.

Ejemplo

Calcular $\int_0^1\int_{-1}^2 xy^2\,dydx$

SOLUCIÓN:

Por el teorema de Fubini, integrando desde adentro hacia afuera, es decir:

$$\int_0^1\left[\int_{-1}^2 xy^2dy\right]dx=\int_0^1\left[x\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{3}\right]dx=\int_0^1\left[x\frac{2^3}{3}-x\frac{(-1)^3}{3}\right]dx$$
$$=\int_0^1\left[\frac{8}{3}x+\frac{1}{3}x\right]dx=\int_0^1 3xdx=3\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{3}{2}$$

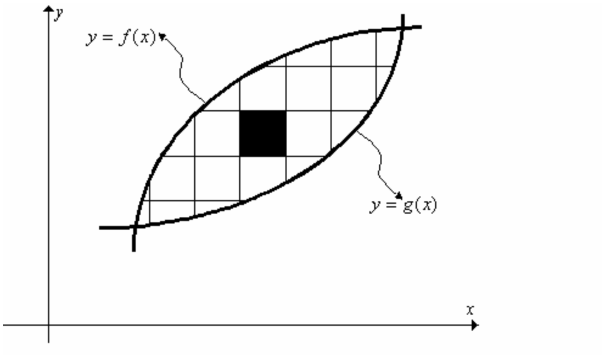
Aquí pudimos haber integrado con respecto a x, y luego con respecto a y, sin mayor trabajo. No deje de hacerlo.

Hasta el momento hemos trabajado con regiones de integración rectangulares, pero en las mayorías de las ocasiones se presentarán otros tipos de regiones.

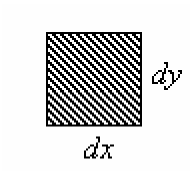
6.4 INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES

El teorema de Fubini puede ser extendido para regiones generales.

En adelante vamos a hacer planteamientos directos. Una región plana, como la que se muestra en la figura, puede ser particionada de la siguiente manera:



Lo cual da a lugar un elemento diferencial de la forma:



Cuya área, denotada como dA, está dada por:

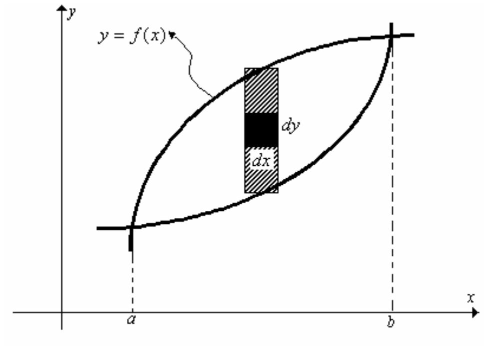
$$dA = dxdy = dydx$$

Entonces, igual como lo habíamos mencionado anteriormente, una integral doble sobre la región plana R tiene la forma:

$$\iint_R f(x, y)dA$$

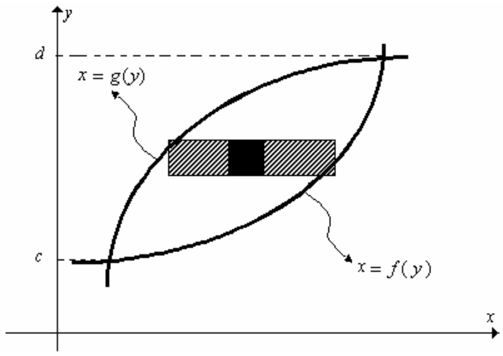
Esta integral doble puede ser calculada de dos maneras:

PRIMERO haciendo un barrido vertical



$$\int_{x=a}^{x=b} \left[\int_{y=g(x)}^{y=f(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

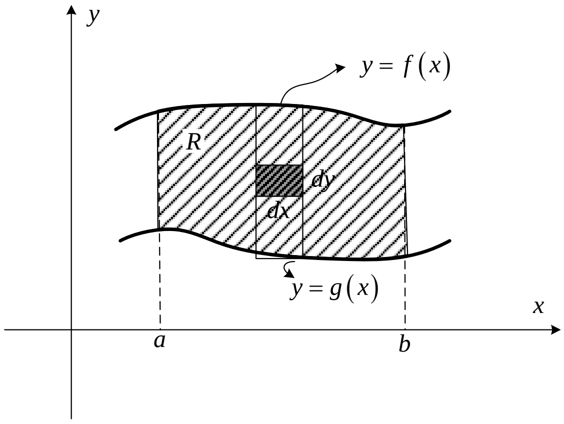
SEGUNDO: Haciendo primero un barrido horizontal



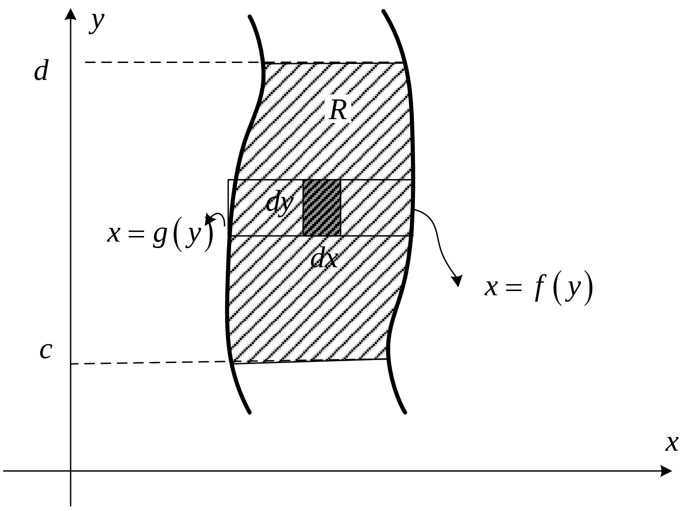
$$\int_{y=c}^{y=d} \left[\int_{x=g(y)}^{x=f(y)} f(x,y)dx \right] dy$$

Si $f(x,y)=1$, la integral doble representa el **área de la región** R, es decir: $A = \iint_R dA$

La región anterior es llamada una ***región simple-*** xy, sin embargo pueden existir ***regiones simple-*** x, sólo se puede empezar haciendo primero un barrido vertical.



Como también pueden existir ***regiones simple-*** y, sólo se puede empezar haciendo primero un barrido horizontal.



Ejemplo 1

Calcular $\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3\,dy\,dx$

<u>SOLUCIÓN</u>:
Integrando desde adentro hacia afuera, tenemos:

$$\int_{0}^{1}\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 160xy^3 dy\right]dx = \int_{0}^{1}\left[160x\left.\frac{y^4}{4}\right|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right]dx = \int_{0}^{1}\left[40x\left(\sqrt{x}\right)^4 - 40x\left(x^2\right)^4\right]dx$$

$$= \int_{0}^{1}\left[40x^3 - 40x^9\right]dx = \left.\left(40\frac{x^4}{4} - 40\frac{x^{10}}{10}\right)\right|_{0}^{1} = 10 - 4 = 6$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy} dxdy$

SOLUCIÓN:
Integrando desde adentro hacia afuera, tenemos:

$$\int_0^1 \left[\int_0^y y^2 e^{xy} dx \right] dy = \int_0^1 \left[y^2 \left. \frac{e^{xy}}{y} \right|_0^y \right] dy = \int_0^1 \left[ye^{yy} - ye^{(0)y} \right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[ye^{y^2} - y \right] dy = \int_0^1 ye^{y^2} dy - \int_0^1 ydy$$

$$= \left. \left(\frac{e^{y^2}}{2} - \frac{y^2}{2} \right) \right|_0^1 = \left(\frac{e^{1^2}}{2} - \frac{1^2}{2} \right) - \left(\frac{e^{0^2}}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{e}{2} - 1$$

Ejemplo 3

Calcular $\int_0^1 \int_{1-y}^1 e^y dxdy$

SOLUCIÓN:
Integrando desde adentro hacia afuera, tenemos:

$$\int_0^1 \left[\int_{1-y}^1 e^y dx \right] dy = \int_0^1 e^y \left[\int_{1-y}^1 dx \right] dy = \int_0^1 \left[e^y x \right]_{1-y}^1 dy$$

$$= \int_0^1 e^y \left(1 - (1-y) \right) dy = \int_0^1 ye^y dy$$

La última integral, se la realiza POR PARTES:

$$\int_0^1 \underbrace{y}_{u} \underbrace{e^y dy}_{dv} = \overbrace{y}^{u} \overbrace{e^y}^{v} - \int \overbrace{e^y}^{v} \overbrace{dy}^{du} = \left. \left(ye^y - e^y \right) \right|_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$$

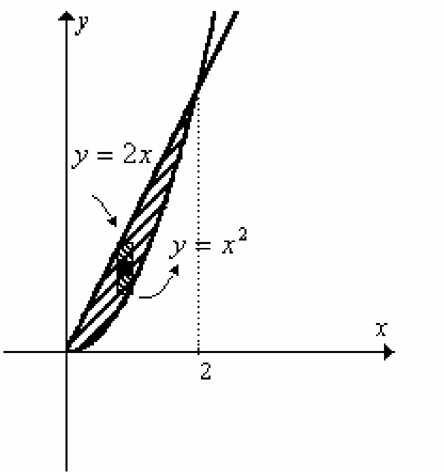
En los dos ejemplos anteriores ya estaban dados los límites de integración, por tanto no había más que aplicar el teorema de Fubini para evaluar las integrales dobles, pero en otras ocasiones es necesario identificar la región de integración porque los límites no están definidos.

Ejemplo 1

Calcular $\iint_R x\,dA$ donde R es la región limitada por $y = 2x$ y $y = x^2$

<u>SOLUCIÓN</u>:

Primero identificamos la región R :



Note que es una región simple-, la calcularemos de las dos formas.

PRIMER MÉTODO: Haciendo primero un barrido vertical.

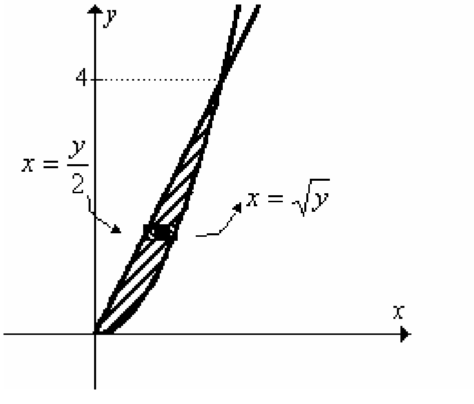
La integral doble con límites será: $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x\,dy\,dx$

Calculando la integral, resulta:

$$\int_0^2 \left[\int_{x^2}^{2x} x\,dy \right] dx = \int_0^2 \left[xy \right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 \left[x(2x) - x(x^2) \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(2x^2 - x^3 \right) dx = \left(2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$$

SEGUNDO METODO: Haciendo primero un barrido horizontal.



La integral doble con límites será: $\displaystyle\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x\,dx\,dy$

Calculando la integral doble, resulta:

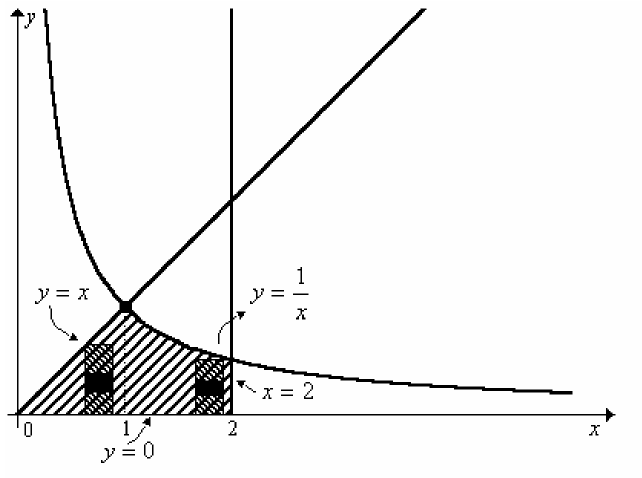
$$\int_0^4 \left[\int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} x\,dx\right] dy = \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}}\right] dy = \int_0^4 \left(\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{y}{2}\right)^2}{2}\right) dy = \int_0^4 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^2}{8}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{24}\right)\Bigg|_0^4 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2

Calcular $\displaystyle\iint_R dA$ donde $R: \begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{1}{x} \\ x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ SOLUCIÓN:

La región R es:



Aquí es mejor hacer un barrido vertical primero: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{1/x} dy\,dx$

Calculando las integrales dobles, tenemos:

$$\int_0^1\left[\int_0^x dy\right]dx+\int_1^2\left[\int_0^{1/x} dy\right]dx=\int_0^1 y\Big|_0^x dx+\int_1^2 y\Big|_0^{1/x} dx$$

$$=\int_0^1 x\,dx+\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\ln x\Big|_1^2$$

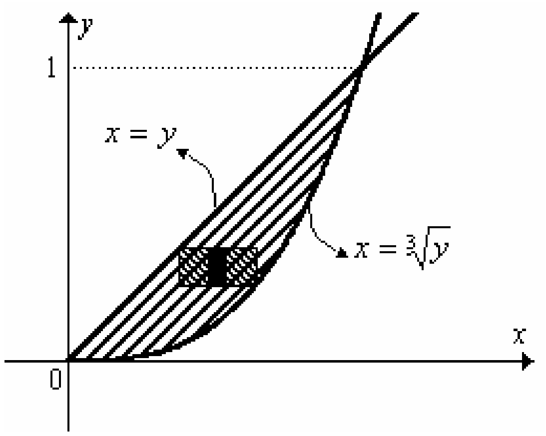
$$=\frac{1}{2}+\ln 2$$

Ejemplo 3

Calcular $\iint\limits_R 12x^2e^{y^2}dA$ donde $R:\begin{cases}y=x^3\\ y=x\end{cases}$ en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN:

La región R es:



Aquí es mejor primero un barrido horizontal ¿Por qué? ¿Observe qué ocurre si hacemos primero un barrido vertical?

Planteando la integral doble con límites y calculándola, tenemos:

$$\int_0^1\int_y^{\sqrt[3]{y}} 12x^2e^{y^2}dxdy=\int_0^1 12e^{y^2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_y^{\sqrt[3]{y}}dy$$

$$=\int_0^1 4e^{y^2}\left(\left(\sqrt[3]{y}\right)^3-y^3\right)dy$$

$$=\int_0^1 4ye^{y^2}dy-\int_0^1 4y^3e^{y^2}dy$$

Haciendo cambio de variable $t = y^2$. De aquí tenemos: $dt = 2ydy$
Reemplazando y resolviendo:

$$\int_0^1 4ye^{y^2}dy - \int_0^1 4y^3e^{y^2}dy = \int_0^1 4ye^t\left(\frac{dt}{2y}\right) - \int_0^1 4y^3e^t\left(\frac{dt}{2y}\right)$$
$$= 2\int_0^1 e^t dt - 2\int_0^1 te^t dt$$
$$= 2e^t\Big|_0^1 - 2\left[te^t - e^t\right]_0^1$$
$$= 2e - 2 - 2\left[0 - (-1)\right]$$
$$= 2e - 4$$

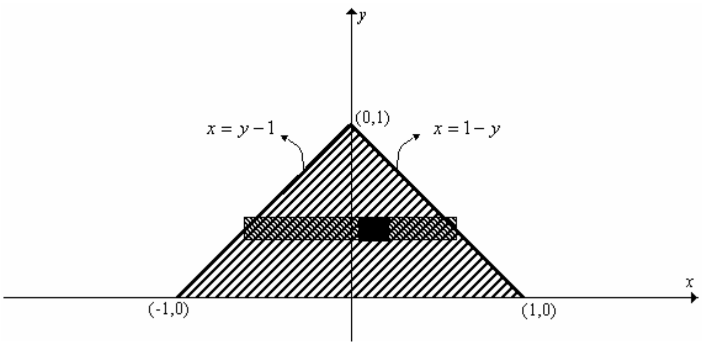
Ejemplo 4

Calcular $\iint_R (2x+1)dA$

donde R es el triángulo que tiene por vértices los puntos $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$

SOLUCIÓN:

La región R es:



No olvide que dos puntos definen una recta, por tanto la determinación de las ecuaciones de las rectas se las puede obtener empleando la formula $\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$.

Aquí también es mejor primero un barrido horizontal:

$$\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x+1)dxdy = \int_0^1 \left(x^2 + x\right)\Big|_{y-1}^{1-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left[(1-y)^2 + (1-y)\right] - \left[(y-1)^2 + (y-1)\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[(y-1)^2 + 1 - y - (y-1)^2 - y + 1\right] dy$$

$$= \int_0^1 [2-2y] dy$$

$$= \left(2y - y^2\right)\Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x+1)dxdy = 1$$

6.5 PROPIEDADES

Sean f y g funciones de dos variables continuas en una región R, entonces:

1. $\iint_R kdA = k\iint_R dA \quad ;\forall k \in \Re$
2. $\iint_R (f \pm g)dA = \iint_R fdA \pm \iint_R gdA$
3. $\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA$ donde $R = R_1 \cup R_2$

6.6 CÁLCULO DE INTEGRALES DOBLES INVIRTIENDO LOS LÍMITES DE INTEGRACIÓN

Algunas Integral Iterada pueden ser calculada de las dos formas, pero tenga mucho cuidado cuando invierte el orden de las integrales.

Ejemplo 1

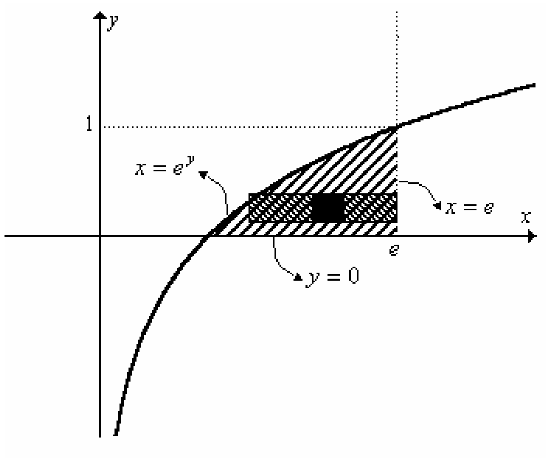
Calcular $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} xydydx$

SOLUCIÓN:

Primero se debe identificar la región de integración. En este caso, la integral doble está dada primero con barrido vertical porque el diferencial es de la forma $dydx$, entonces tenemos que interpretar la integral doble de la siguiente manera:

$$\int_{x=1}^{x=e}\int_{y=0}^{y=\ln x} xydydx$$

Por tanto, la región es $R:\begin{cases} y=\ln x \\ y=0 \\ x=e \end{cases}$, es decir:



Invirtiendo los límites de integración hay que hacer ahora un barrido horizontal primero, es decir:

$$\int_0^1 \int_{e^y}^{e} xydxdy = \int_0^1 y\frac{x^2}{2}\Big|_{e^y}^{e} dy = \int_0^1 y\left(\frac{e^2}{2} - \frac{\left(e^y\right)^2}{2}\right)dy = \frac{e^2}{2}\int_0^1 ydy - \frac{1}{2}\int_0^1 ye^{2y}dy$$

$$= \frac{e^2}{2}\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\left[y\frac{e^{2y}}{2} - \frac{1}{2}\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{e^2}{4} - \frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{e^2}{8} - \frac{1}{8}$$

Ejemplo 2

Invierta el orden de integración para $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)dydx$

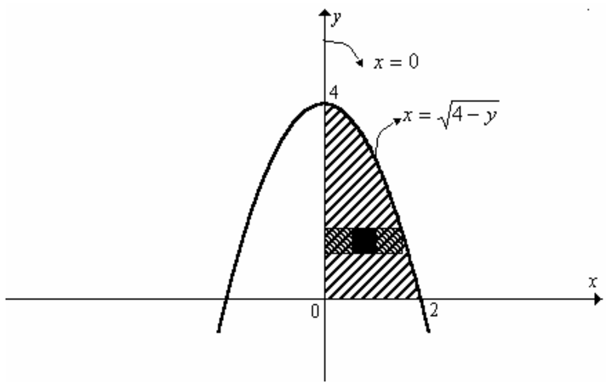
SOLUCIÓN:

Interpretando los límites de integración dados, tenemos: $\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=0}^{y=4-x^2} f(x,y)dydx$. Se ha hecho primero un barrido vertical

Entonces la región de integración es $R:\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Ahora hay que hacer un barrido horizontal primero, es decir:

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dxdy$$



Ejemplo 3

Invierta el orden de integración para $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dxdy$

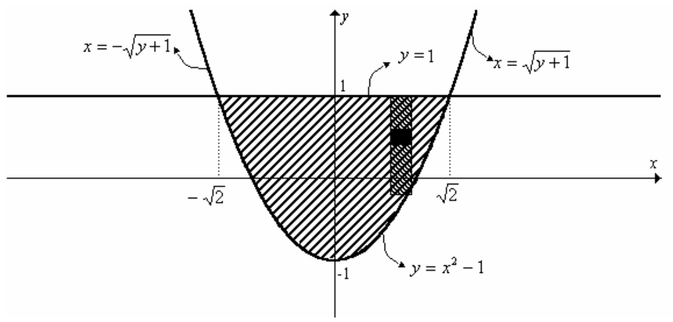
SOLUCIÓN:

Interpretando los límites de integración dados, tenemos: $\int_{y=-1}^{y=1}\int_{x=-\sqrt{y+1}}^{x=\sqrt{y+1}} f(x,y)\,dxdy$. Se ha hecho primero un barrido vertical

Entonces la región de integración es $R:\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Ahora hay que hacer un barrido horizontal primero, es decir:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{x^2-1}^{1} f(x,y)\,dydx$$



Ejemplo 4

Invierta el orden de integración para $\int_{2}^{4}\int_{x}^{16/x} f(x,y)\,dydx$

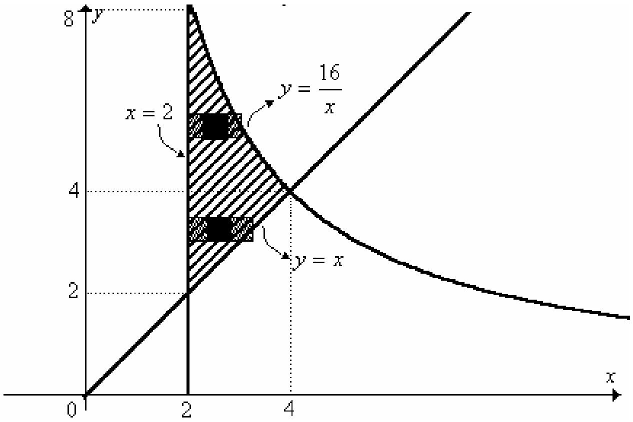
SOLUCIÓN:

Interpretando los límites de integración dados, tenemos: $\int_{x=2}^{x=4}\int_{y=x}^{y=16/x} f(x,y)\,dydx$ Se ha hecho un barrido vertical primero

Entonces la región de integración es $R:\begin{cases} y = x \\ y = \dfrac{16}{x} \\ x = 2 \end{cases}$

Ahora hay que hacer un barrido horizontal primero, es decir:

$$\int_{2}^{4}\int_{2}^{y} f(x,y)\,dxdy + \int_{4}^{8}\int_{2}^{16/y} f(x,y)\,dxdy$$



Ejercicios propuestos 6.1

1. Calcular $\int_{0}^{1}\int_{0}^{y} e^{x+y}\,dxdy$

2. Emplee una integral doble para hallar el área de la región limitada por $\begin{cases} x-y^2+9=0 \\ x+y^2-9=0 \end{cases}$

3. Emplee una integral doble para hallar el área de la región limitada por: $\begin{cases} y^2=2x-2 \\ y=x-5 \end{cases}$

4. Calcular: $\iint_R \frac{y^2}{x^2}\,dA$ donde R es la región limitada por $\begin{cases} y=x \\ y=2 \\ xy=1 \end{cases}$

5. Calcular $\iint_R 12x\,dA$ donde R es la región limitada por $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases}$

6. Calcular $\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{4} \sqrt{y}\cos y\,dydx$

7. Calcular $\int_{0}^{1}\int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dxdy$

8. Invierta el orden de integración: $\int_{-1}^{2}\int_{-\sqrt{3+x}}^{x-1} f(x,y)\,dydx + \int_{2}^{3}\int_{-\sqrt{3+x}}^{\sqrt{3+x}} f(x,y)\,dydx$

9. INVERTIR el orden de integración y EVALUAR. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{x} y\,dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} y\,dydx$

10. Calcular: $\iint_R 12x^2 e^{y^2}\, dA$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por $y = x^3$ y $y = x$

11. Representar la región de integración para: $\int_1^2 \int_x^{x^3} f(x,y)\, dy\, dx + \int_2^8 \int_x^8 f(x,y)\, dy\, dx$ e invertir el orden de integración.

6.7 VALOR MEDIO PARA UNA FUNCIÓN DE DOS VARIABLES

Sea f una función continua en las variables x y y. El valor Medio de f en una región plana R está dado por:

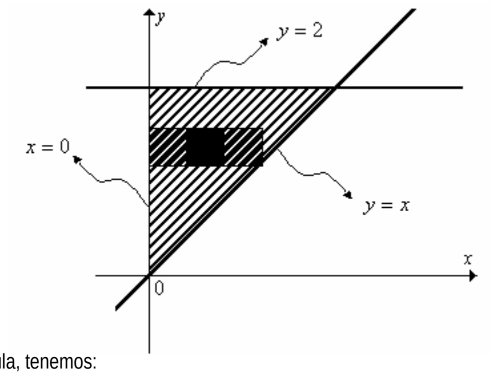
$$Valor\ Medio = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA}{\iint_R dA}$$

Ejemplo

Encuentre el valor medio de la función $f(x,y) = x\sqrt{1+y^3}$ sobre la región limitada por $\begin{cases} y = 2 \\ y = x \\ x = 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

La región de integración es:



Empleando la fórmula, tenemos:

$$Valor\ Medio=\frac{\iint_R f(x,y)dA}{\iint_R dA}=\frac{\int_0^2\int_0^y x\sqrt{1+y^3}dxdy}{\int_0^2\int_0^y dxdy}$$

$$=\frac{\int_0^2 \sqrt{1+y^3}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^y dy}{\int_0^2 \left.(x)\right|_0^y dy}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}dy}{\int_0^2 ydy}$$

$$=\frac{\left.\frac{1}{2}\frac{\left(1+y^3\right)^{3/2}}{2\left(\frac{3}{2}\right)}\right|_0^2}{\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^2}=\frac{\frac{1}{6}\left(27-1\right)}{2}$$

$$=\frac{13}{6}$$

Ejercicios Propuestos 6.2

1. Calcule el valor medio de la función $f(x,y)=e^x y^{-1/2}$ en la región del primer cuadrante limitada por $\begin{cases} y=x^2 \\ x=0 \\ y=1 \end{cases}$

2. Para una compañía concreta, la función de producción de Cobb-Douglas es $f(x,y)=100x^{0,6}y^{0,4}$. Estimar el nivel medio de producción, si el número de unidades de trabajo varía entre 200 y 250 y el de unidades de capital entre 300 y 325.

3. Hallar el valor medio de $f(x,y)=x+2y+4$ sobre la región limitada por las rectas $y=2x,\quad y=3-x,\quad y=0$

4. Encuentre el valor medio de la función $f(x,y)=e^{-x^2}$ sobre la región $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ y=x \\ y=2 \end{cases}$

5. Encuentre el valor medio de la función $f(x,y)=\dfrac{y^2}{(xy+1)^2}$, sobre la región $R=\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ 0<x\le y \end{cases}$

6. Hallar el valor medio de $f(x,y)=2xy$ en la región limitada por $y=x^2$ y $y=x$

6.8 VOLÚMENES CON INTEGRALES DOBLES

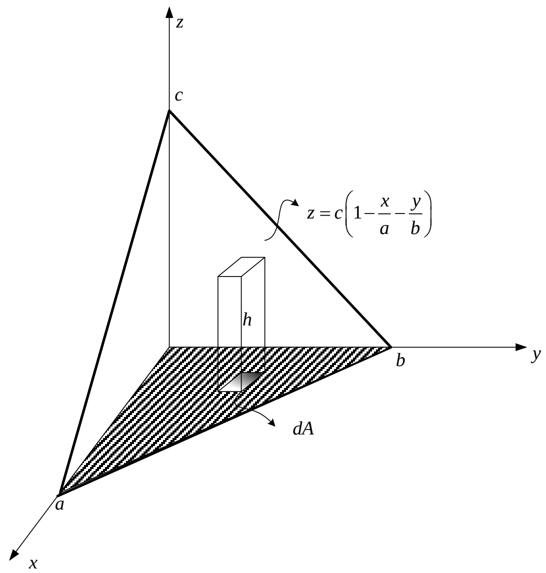
Ya definimos el volumen bajo una superficie.

Ejemplo

Hallar el volumen del sólido limitado por el plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ y el plano xy en el primer octante.

SOLUCIÓN:

Haciendo un dibujo



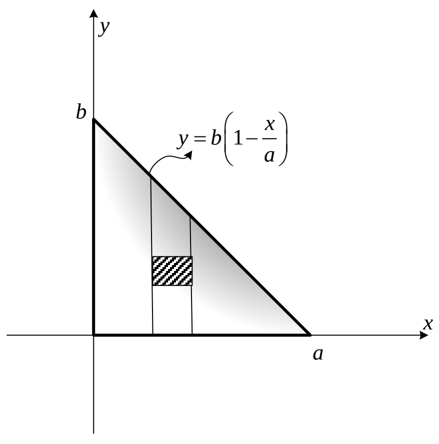
El volumen del elemento diferencial sería

$dV = hdA = zdA$

Por tanto el volumen total está dado por :

$$V = \iint_R c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dA$$

Donde la región R sería:



Escogemos un barrido vertical primero, es decir que la integral iterada quedaría:

$$V=\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dydx$$

Evaluando:

$$V=\int_0^a\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dydx=c\int_0^a\left[\left(1-\frac{x}{a}\right)\Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}-\frac{y^2}{2b}\Big|_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)}\right]dx$$

$$=c\int_0^a\left[b\left(1-\frac{x}{a}\right)^2-\frac{b^2}{2b}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right]dx$$

$$=c\int_0^a \frac{b}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

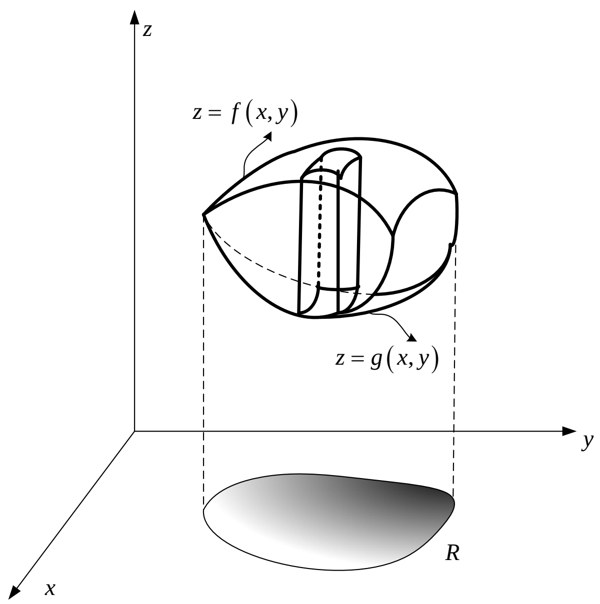
$$=\frac{bc}{2}\frac{\left(1-\frac{x}{a}\right)^3}{3\left(-\frac{1}{a}\right)}\Bigg|_0^a$$

$$=\frac{abc}{6}\left[-\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a$$

$$=\frac{abc}{6}[1-0]$$

$$V=\frac{abc}{6}$$

Ahora consideremos un sólido limitado por superficies. Por ejemplo:



En el gráfico, el volumen del sólido limitado por las superficies está dado por:

$$V = \iint_R \left[f(x,y) - g(x,y) \right] dA$$

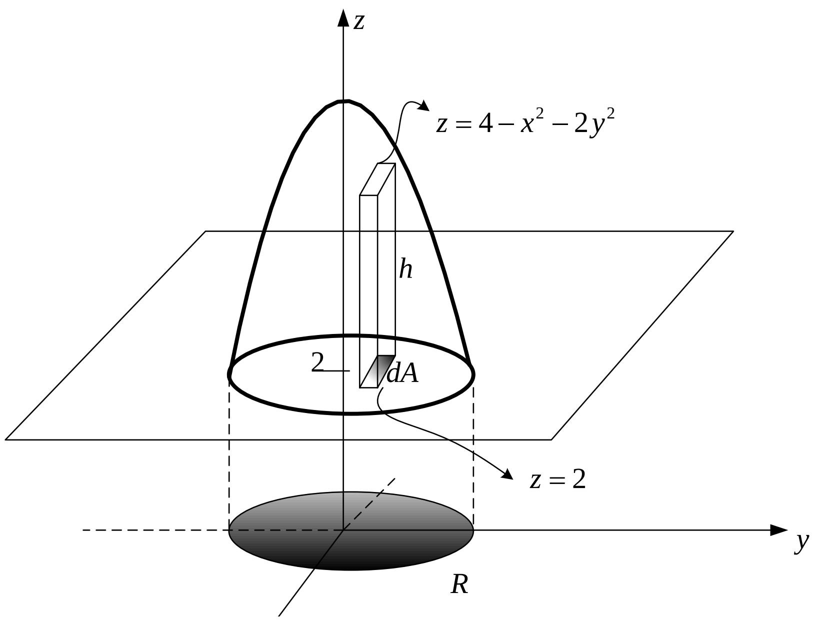
R, es la región plana que tiene por proyección la superficie en el plano xy.

Ejemplo

Hallar el volumen del sólido limitado por $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano $z = 2$

SOLUCIÓN:

Haciendo un dibujo



En este caso

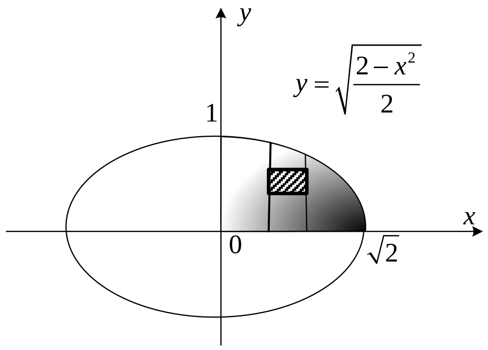
$$V = \iint_R h dA = \iint_R \left[\left(4 - x^2 - 2y^2\right) - (2) \right] dA$$

Para ponerle los límites de integración identificamos la región R, en este caso sería la curva de intersección de $\begin{cases} z = 4 - x^2 - 2y^2 \\ z = 2 \end{cases}$ proyectada en el plano xy.

Igualando y simplificando:

$$4 - x^2 - 2y^2 = 2$$
$$x^2 + 2y^2 = 2$$
$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 2$$

Entonces la región sería:



Entonces

$$V=4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{\frac{2-x^2}{2}}}\left(2-x^2-2y^2\right)dydx=4\int_0^{\sqrt{2}}\left[\left(2-x^2\right)y-2\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}}dy$$

$$=4\int_0^{\sqrt{2}}\left[\left(2-x^2\right)\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2}}\right)^3\right]dx$$

$$=4\int_0^{\sqrt{2}}\left[\frac{\left(2-x^2\right)^{3/2}}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\frac{\left(2-x^2\right)^{3/2}}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\right]dx$$

$$=4\int_0^{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\left(2-x^2\right)^{3/2}dx$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)^{3/2}dx$$

La última integral se la realiza por sustitución trigonométrica.

Haciendo $\boxed{x=\sqrt{2}sent}$ entonces $\boxed{dx=\sqrt{2}\cos t\ dt}$ y los nuevos límites serían

$$\boxed{\begin{cases}x=0\rightarrow t=0\\ x=\sqrt{2}\rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$$

$$V=\frac{8}{3\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}}\left(2-x^2\right)^{3/2}dx=\frac{8}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left(2-2sen^2t\right)^{3/2}\sqrt{2}\cos t\,dt$$

$$=\frac{8}{3\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}2^{3/2}\left(\cos^2\right)^{3/2}\sqrt{2}\cos t\,dt$$

$$=\frac{8}{3}\left(\sqrt{2}\right)^3\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\,dt$$

$$=\frac{8}{3}\left(2\sqrt{2}\right)\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2dt$$

$$=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)}{4}dt$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{2sen2t}{2}\Big|_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{\pi}{2}+0+\frac{1}{2}t\Big|_0^{\pi/2}+\frac{sen4t}{8}\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}\left[\frac{3\pi}{4}\right]$$

$$V=\sqrt{2}\,\pi$$

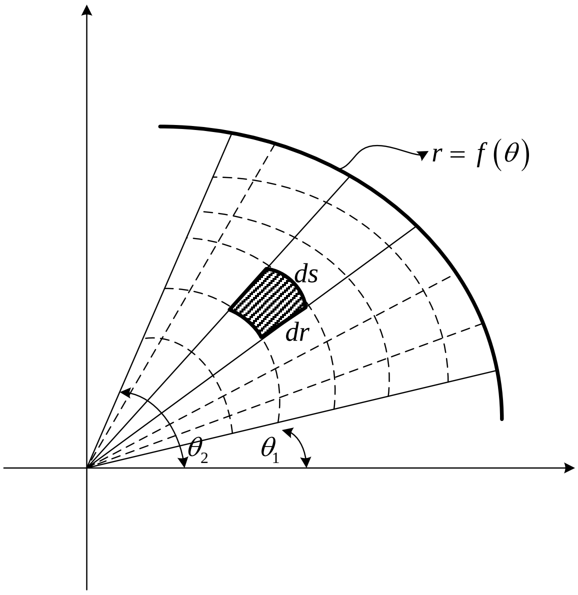
La evaluación de la integral doble puede resultar un asunto tedioso, sin embargo si la región de integración es simple-θ, podemos hacer uso de coordenadas cilíndricas.

6.9 INTEGRALES DOBLES EN COORDENADAS CILÍNDRICAS.

Suponga que la región de integración es simple-θ, la integral doble $\iint_R f(x,y)dA$ puede ser expresada de la forma:

$$\iint_{R'} f(r\cos\theta, rsen\theta)dA$$

Definamos el dA en coordenadas cilíndricas. Observe la figura:



En este caso $dA = dsdr$ pero $ds = rd\theta$ entonces $dA = rdrd\theta$

Finalmente la integral doble en coordenadas polares quedará de la forma:

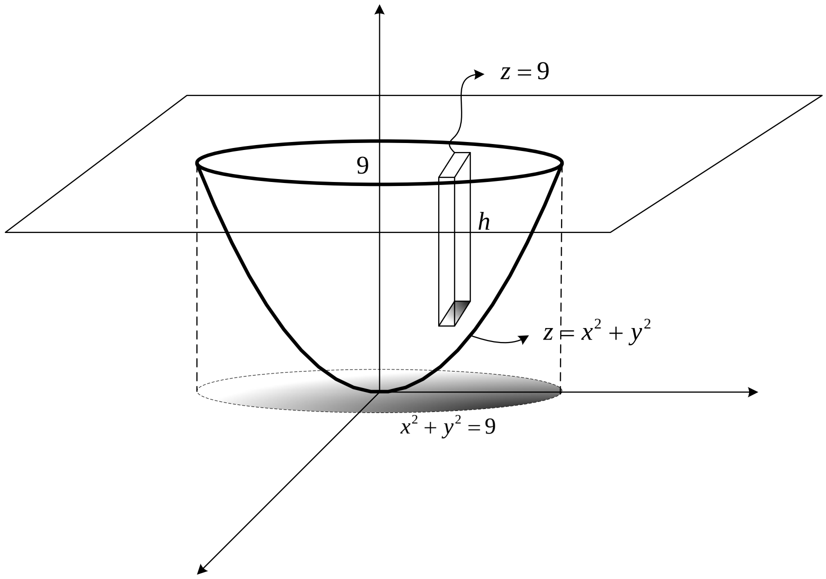
$$\iint_{R'} f(r,\theta)rdrd\theta$$

Ejemplo 1

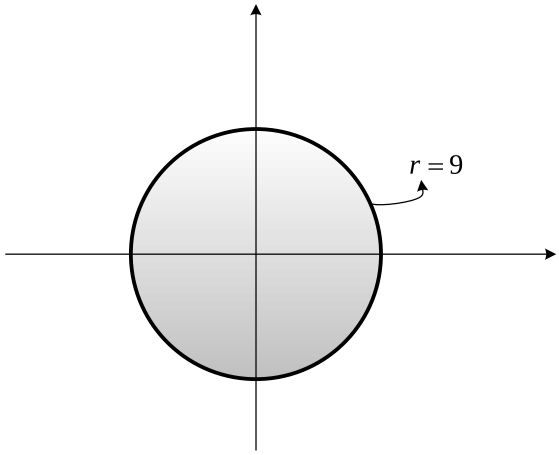
Hallar el volumen del sólido limitado por $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 9$.

SOLUCIÓN:

Haciendo un dibujo de las superficies, e identificando el sólido



La región de integración sería:



Por tanto el volumen estará dado por $V = \iint\limits_R \left[9 - \left(x^2 + y^2\right)\right] dA$

Cambiando a cilíndricas

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{3} \left(9 - r^2\right) r dr d\theta$$

Evaluando

$$V=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\left(9-r^2\right)rdrd\theta=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\left(9r-r^3\right)drd\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(9\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)_0^3 d\theta$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right)d\theta$$

$$=\frac{81}{2}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

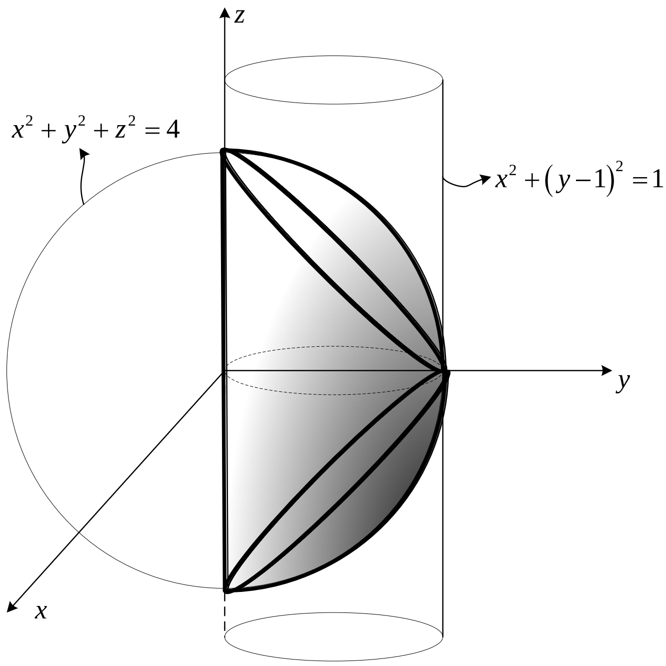
$$V=81\,u^3$$

Ejemplo 2

Encuentre el volumen de la región limitada por las superficies $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+\left(y-1\right)^2=1$.

SOLUCIÓN:

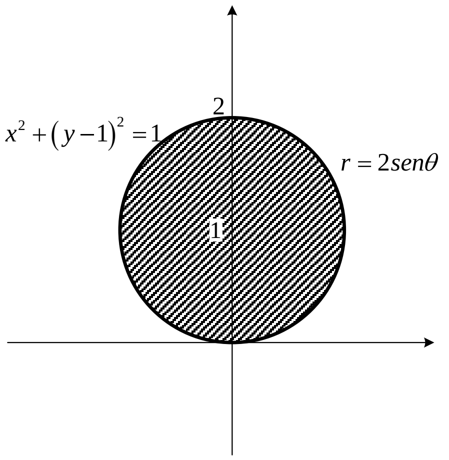
Haciendo un dibujo de las superficies, e identificando el sólido



Calcularemos el volumen de la porción superior, ya que el sólido es simétrico y lo multiplicaremos por dos.

$$V=2\iint_R \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA$$

La región de integración es:



Cambiando a coordenadas cilíndricas.

$$V=2\iint_R \sqrt{4-x^2-y^2}\,dA=2\int_0^{\pi}\int_0^{2sen\theta}\sqrt{4-r^2}\,rdrd\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\left.\frac{2}{3}\frac{\left(4-r^2\right)^{3/2}}{-2}\right|_0^{2sen\theta}d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(8-\left(4-4sen^2\theta\right)^{3/2}\right)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(8-8\cos^3\theta\right)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\left[\int_0^{\pi}8d\theta-\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cos\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[8\theta\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(1-sen^2\theta\right)\cos\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[8\pi-\int_0^{\pi}\cos\theta d\theta+\int_0^{\pi}sen^2\theta\cos\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{2}{3}\left[8\pi-sen\theta\Big|_0^{\pi}+\left.\frac{sen^3\theta}{3}\right|_0^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[8\pi-0+0\right]$$

$$V=\frac{16}{3}\pi$$

Ejercicios Propuestos 6.3

1. Usando integrales dobles determine el volumen del sólido limitado por :
   a) $z = 5x^2$; $z = 3 - x^2$; $y + z = 4$; y el plano xz.
   b) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = x^2 + y^2$
   c) $x^2 + y^2 = 2z$; $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; y, $z = 0$
   d) $z = x^2 + y^2 + 1$; $z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$
2. Encontrar el volumen de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situada entre los planos $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Calcular el volumen del sólido que está en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$; y arriba del paraboloide $x^2 + y^2 = z$
4. Hallar el volumen del sólido que está en el interior a $y^2 + z^2 = 2$; y exterior a $x^2 - y^2 - z^2 = 2$
5. Calcule el volumen del sólido intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$

Parece ser que la evaluación de las integrales dobles pueden resultar difíciles de realizar, el hecho utilizar coordenadas cilíndricas nos permite pensar que en ocasiones será posible emplear diversas transformaciones que hará nuestro trabajo más plausible.

6.10 CAMBIO DE VARIABLES PARA INTEGRALES DOBLES (TRANSFORMACIONES)

Supongamos que se tiene la siguiente transformación

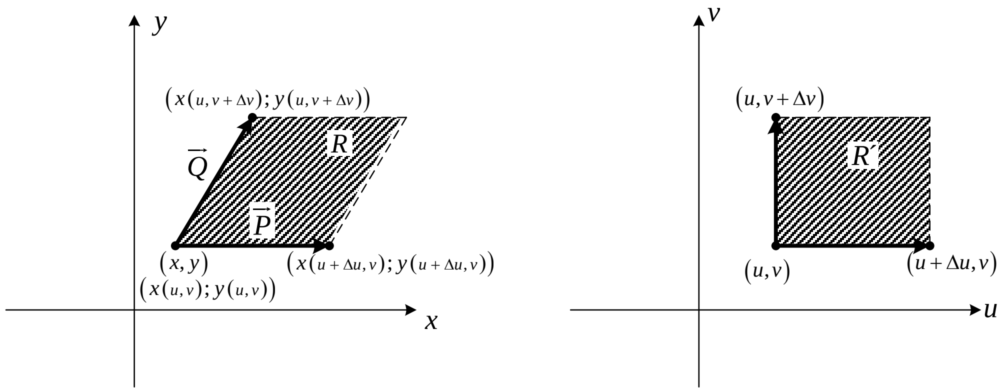
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

Aplicándola a la integral doble $\iint\limits_R f(x,y)dA$, quedaría de la forma

$$\iint\limits_{R'} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)dA$$

Donde R' será una nueva región de integración en el plano uv por tanto el dA será el correspondiente.

Determinemos en nuevo dA. Observe la figura:



Haciendo un análisis vectorial:

$$\vec{P}=\left(x(u+\Delta u,v)-x(u,v);y(u+\Delta u,v)-y(u,v)\right)$$
$$\vec{Q}=\left(x(u,v+\Delta v)-x(u,v);y(u,v+\Delta v)-y(u,v)\right)$$

Dividiendo y multiplicando al vector $\vec{P}$ para Δu y tomando límite:

$$\vec{P}=\left(\lim_{\Delta u\to 0}\frac{x(u+\Delta u,v)-x(u,v)}{\Delta u};\lim_{\Delta u\to 0}\frac{y(u+\Delta u,v)-y(u,v)}{\Delta u}\right)\Delta u=\left(\frac{\partial x}{\partial u};\frac{\partial y}{\partial u}\right)du$$

Dividiendo y multiplicando al vector $\vec{Q}$ para Δv y tomando límite:

$$\vec{Q}=\left(\lim_{\Delta v\to 0}\frac{x(u,v+\Delta v)-x(u,v)}{\Delta v};\lim_{\Delta v\to 0}\frac{y(u,v+\Delta v)-y(u,v)}{\Delta v}\right)\Delta v=\left(\frac{\partial x}{\partial v};\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv$$

El área de la región R está dada por:

$$dA=\left\|\vec{P}\times\vec{Q}\right\|$$

El producto cruz será:

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial x}{\partial u}du & \frac{\partial y}{\partial u}du & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v}dv & \frac{\partial y}{\partial v}dv & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}dudv\,\hat{k}$$

Al determinante menor resultante se lo denomina **JACOBIANO** y se lo denota por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Por tanto:

$$\vec{P}\times\vec{Q}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv\,\hat{k}$$

Finalmente

$$dA=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

6.10.1 TEOREMA.

Sean R y R' regiones de los planos xy y uv. Suponga que se tiene una transformación biyectiva tal que $x=x(u,v)$ y $y=y(u,v)$ mediante la cual la región R es imagen de R'. Si f es continua en R y x e y tienen derivadas parciales continuas en R' y $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ en no nula en R', entonces:

$$\iint_{R} f(x,y)dA=\iint_{R'} f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

El cambio a coordenadas cilíndricas es un ejemplo de una transformación, aquí tenemos que:

$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=rsen\theta\end{cases}$$

Entonces:

$$\iint_{R} f(x,y)dA=\iint_{R'} f\left(r\cos\theta,rsen\theta\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta$$

Calculemos el Jacobiano

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & sen\theta\\ -rsen\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+rsen^2\theta=r$$

Por tanto se demuestra lo que antes habíamos presentado como un resultado geométrico:

$$\iint_R f(x,y)dA=\iint_{R'} f(r\cos\theta, rsen\theta)rdrd\theta$$

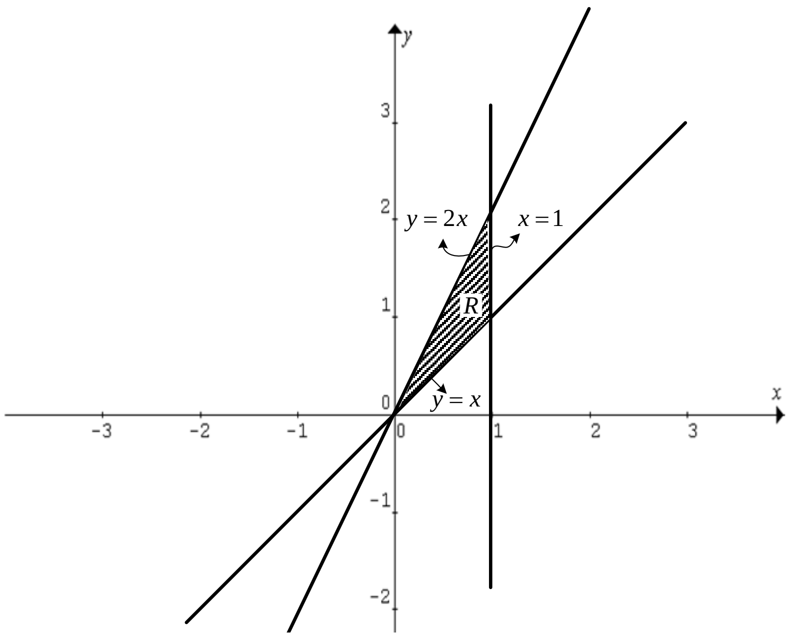
Ejemplo 1

Calcular $\int_0^1\int_x^{2x} dydx$ empleando el siguiente cambio de variable $\begin{cases}x=u(1-v)\\ y=uv\end{cases}$

SOLUCIÓN:

Primero identificamos la región R.

En la integral dada, se tiene: $\int_{x=0}^{x=1}\left[\int_{y=x}^{y=2x} dy\right]dx$, por tanto



Cambiando de variable, la integral tomaría la forma:

$$\iint_R dydx=\iint_{R'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

Donde para el Jacobiano tenemos:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-v & v\\ -u & u\end{vmatrix}=u-uv+uv=u$$

Y para la región R' , tenemos:

1. En $y = x$, reemplazando se tiene:

$$y = x$$
$$uv = u(1-v)$$
$$uv = u - uv$$
$$u - 2uv = 0$$
$$\boxed{u(1-2v)=0} \Rightarrow \boxed{u=0} \vee \boxed{v=\frac{1}{2}}$$

2. En $y = 2x$, reemplazando se tiene:

$$y = 2x$$
$$uv = 2u(1-v)$$
$$uv = 2u - 2uv$$
$$2u - 3uv = 0$$
$$\boxed{u(2-3v)=0} \Rightarrow \boxed{u=0} \vee \boxed{v=\frac{2}{3}}$$

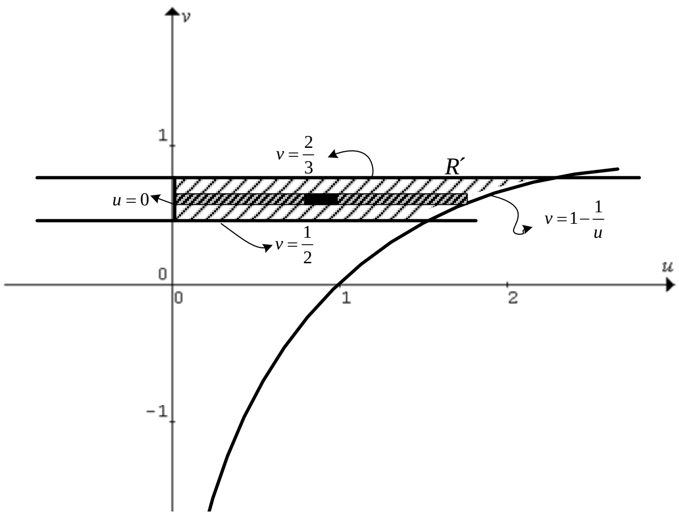
3. En $x = 1$, reemplazando se tiene:

$$x = 1$$
$$u(1-v) = 1$$
$$u - uv = 1$$
$$uv = u - 1 \Rightarrow \boxed{v = 1 - \frac{1}{u}}$$

4. En $x = 0$, reemplazando se tiene:

$$x = 0$$
$$u(1-v) = 0$$
$$u - uv = 0$$
$$u(1-v) = 0 \Rightarrow \boxed{u=0} \vee \boxed{v=1}$$

La lo tanto R' , sería:



Obteniendo la nueva integral y evaluandola:

$$\iint_R dydx = \iint_{R'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv = \int_{1/2}^{2/3} \int_0^{\frac{1}{1-v}} u\,du\,dv$$

$$= \int_{1/2}^{2/3} \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^{\frac{1}{1-v}} dv$$

$$= \frac{1}{2} \int_{1/2}^{2/3} \frac{1}{(1-v)^2} dv$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{(1-v)^{-2+1}}{(-2+1)(-1)} \right|_{1/2}^{2/3}$$

$$= \frac{1}{2} \left. \frac{1}{(1-v)} \right|_{1/2}^{2/3}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{2}[3-2]$$

$$= \frac{1}{2}$$

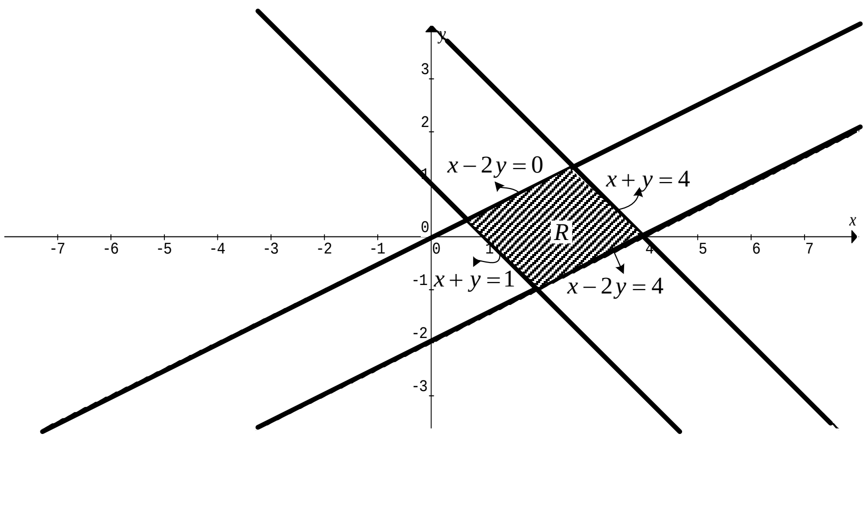
Ejemplo 2

Empleando transformaciones adecuadas, hallar el área de la región limitada por:

$$\begin{cases} x-2y=4 \\ x-2y=0 \\ x+y=4 \\ x+y=1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

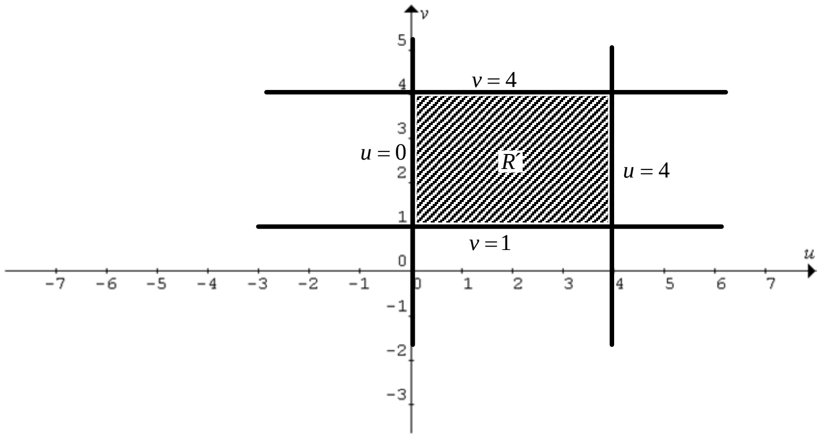
La región de integración sería:



Podemos utilizar la siguiente transformación: $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \end{cases}$

Las trayectorias se transforman a: $\begin{cases} u = 4 \\ u = 0 \\ v = 4 \\ v = 1 \end{cases}$

La nueva región de integración sería:



Entonces:

$$A = \iint\limits_{R} dA = \iint\limits_{R'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Hallemos el jacobiano

Note que como $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$

Podemos decir que: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$

Entonces: $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \dfrac{1}{3}$

Finalmente:

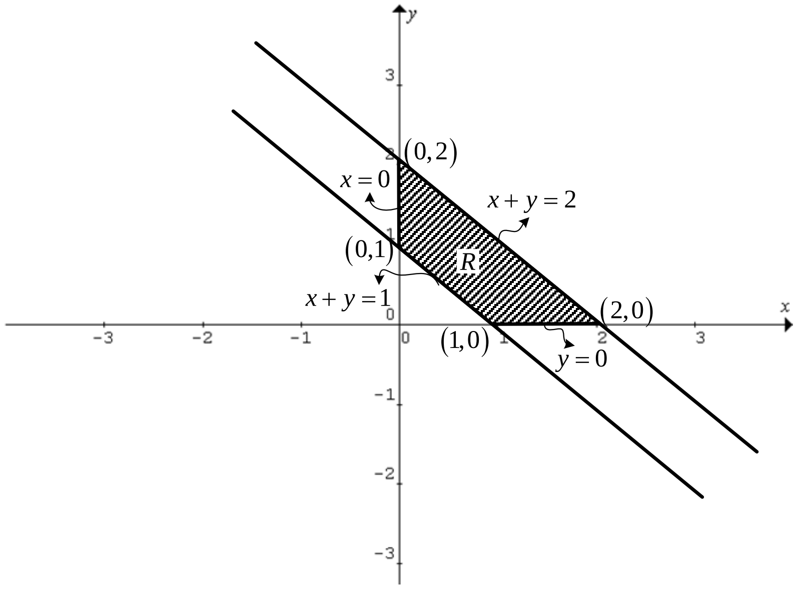
$$A = \iint\limits_{R'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv = \int_1^4 \int_0^4 \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3} v\Big|_1^4 u\Big|_0^4 = \frac{1}{3}(4-1)4 = 4$$

Ejemplo 3

Calcular $\iint\limits_{R} e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$ donde R es el paralelogramo con vértices $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,0)$ y $(2,0)$.

SOLUCIÓN:

Primero identificamos la región R, ubicando los puntos en el plano y encontrando las ecuaciones de las rectas que definen al paralelogramo



Escogemos la transformación: $\begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases}$ ¿por qué?

Para obtener la región R', aplicamos la transformación a cada recta que limita la región R,
Vamos a necesitar la transformación inversa:
Sumando la primera ecuación a la segunda:

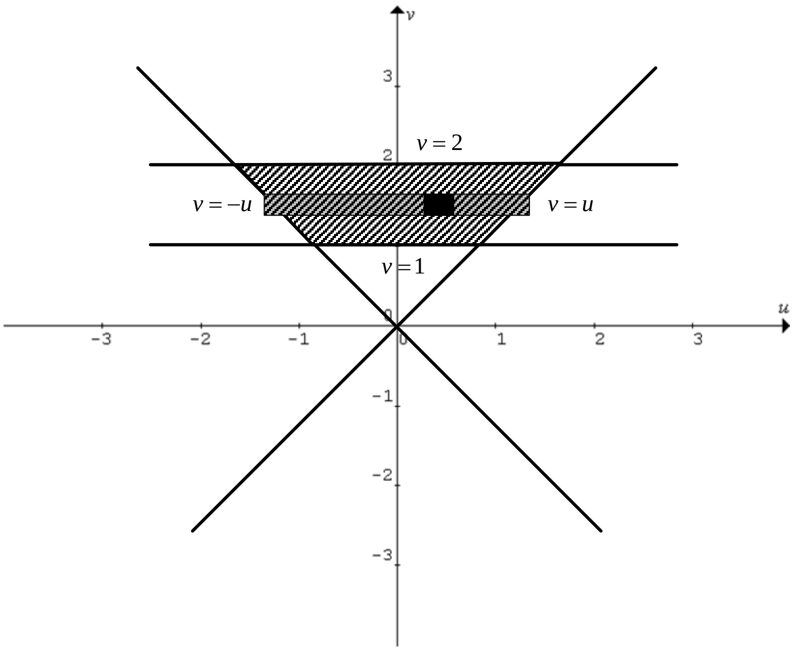
$$\begin{array}{l} \begin{cases} u = y - x \\ v = y + x \end{cases} \\ \hline u + v = 2y \end{array} \Rightarrow \boxed{y = \tfrac{1}{2}(u+v)}$$

Multiplicando por (-1) a la primera ecuación y luego sumando:

$$\begin{cases} u = y - x \,(-1) \\ v = y + x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} -u = -y + x \\ \ \ v = \ \ y + x \end{cases} \\ \hline v - u = \quad 2x \end{array} \Rightarrow \boxed{x = \tfrac{1}{2}(v-u)}$$

- La ecuación $\boxed{x + y = 1}$, es obvio que se transforma en $\boxed{v = 1}$.¿porqué?
- La ecuación $\boxed{x + y = 2}$, se transforma en $\boxed{v = 2}$
- Para la ecuación $\boxed{y = 0}$, tenemos: $\boxed{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(u+v) = 0 \\ \qquad \boxed{v = -u} \end{array}}$
- Para la ecuación $\boxed{x = 0}$, tenemos: $\boxed{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(v-u) = 0 \\ \qquad \boxed{v = u} \end{array}}$

Por tanto la región R', estaría limitada por $\begin{cases} v = 1 \\ v = 2 \\ v = -u \\ v = u \end{cases}$



Escogemos primero un barrido horizontal, por tanto:

$$\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}dA = \iint_{R'} e^{u/v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

El Jacobiano sería:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$$

Reemplazando, poniendo límites y calculando:

$$\begin{aligned}
\iint_{R'} e^{u/v}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv &= \int_1^2\int_{-v}^{v} e^{u/v}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \left.\frac{e^{u/v}}{\frac{1}{v}}\right|_{-v}^{v} dv \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 v\left(e-e^{-1}\right)dv \\
&= \frac{\left(e-e^{-1}\right)}{2}\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^2 \\
&= \frac{\left(e-e^{-1}\right)}{4}(4-1) \\
&= \frac{3\left(e-e^{-1}\right)}{4}
\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos 6.4

1. Calcular $\iint\limits_R \sqrt{(x-y)(x+4y)}dA$; siendo R el paralelogramo con vértices; (0,0); (1,1); (5,0); (4,-1).

2. Calcular $\iint\limits_R \sqrt{(x^2+y^2)}\,dA$; siendo R el triángulo con vértices; (0,0); (4,0); (4,4), usando la siguiente transformación: $\begin{cases} x=u \\ y=uv \end{cases}$.

3. Calcular $\iint\limits_R \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dA$; siendo R la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ usando la siguiente transformación: $\begin{cases} \frac{x}{a}=r\cos\theta \\ \frac{y}{b}=r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$.

4. Calcular $\iint\limits_R (x^2+y^2)dA$ donde R es la región limitada por las curvas: $x^2-y^2=1$; $x^2-y^2=9$; $xy=2$; $xy=4$. Utilizando la transformación: $\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$

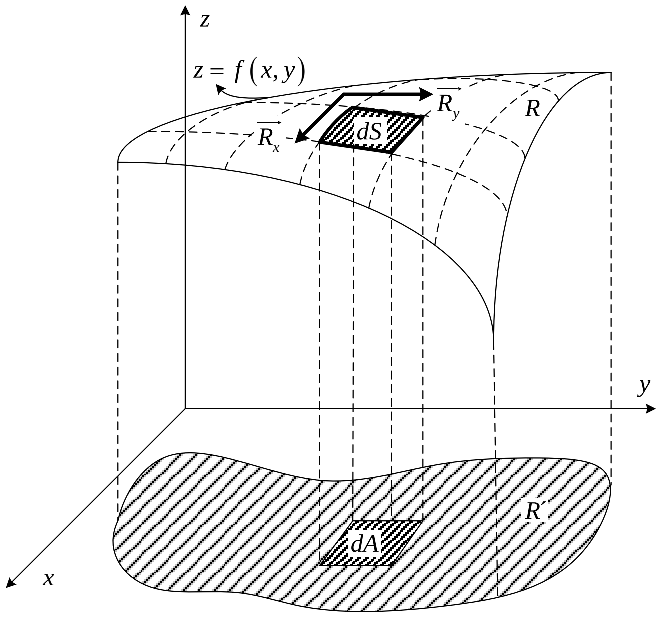
5. Calcular $\iint\limits_R x^2dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la hiperbola: $xy=16$;y las rectas: $y=x$; $y=0$; $x=8$.

6. Evaluar $\iint\limits_R (x-y)^2\cos^2(x+y)dA$; R es la región acotada por el cuadrado con vértices (0,1); (1,2); (2,1); (1,0). Utilizando la transformación $\begin{cases} u=x-y \\ v=x+y \end{cases}$

6.11 ÁREA DE UNA SUPERFICIE.

Si tuviésemos una superficie con ecuación $z = f(x, y)$, y quisiéramos hallar el valor del área de una porción R de la superficie, podemos actuar con la misma metodología con la que hemos resuelto nuestros problemas hasta el momento; es decir, particionar la región R y luego sumar dando lugar a una integral.

Observe la gráfica:



Llamemos S, al valor del área de la porción R de la superficie, entonces:

$$S = \iint_R dS$$

El asunto sería ahora proyectar la superficie al plano xy obteniendo la región $R´$. Podemos pensar en una transformación de R^3 a R^2.

Denotando como $\overrightarrow{R}$ la función vectorial para la superficie, tenemos:

$$\overrightarrow{R} = \left(x, y, f(x, y)\right)$$

Los vectores de derivadas parciales con respecto a x ($\overrightarrow{R_x}$) y con respecto a y ($\overrightarrow{R_y}$), serían:

$$\overrightarrow{R_x} = (1, 0, f_x) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{R_y} = (0, 1, f_y)$$

Entonces:

$$dS = \left\| \overrightarrow{R_x} \times \overrightarrow{R_y} \right\| dA$$

Calculando el vector producto cruz y luego su magnitud:

$$\overrightarrow{R_x} \times \overrightarrow{R_y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = (-f_x, -f_y, 1)$$

$$\left\| \overrightarrow{R_x} \times \overrightarrow{R_y} \right\| = \sqrt{1 + f_x{}^2 + f_y{}^2}$$

Finalmente:

$$\boxed{S = \iint_R dS = \iint_{R'} \sqrt{1 + f_x{}^2 + f_y{}^2}\, dA}$$

Si la ecuación de la superficie está dada en ***FORMA IMPLÍCITA***, es decir $F(x, y, z) = 0$. La formula anterior se transforma a:

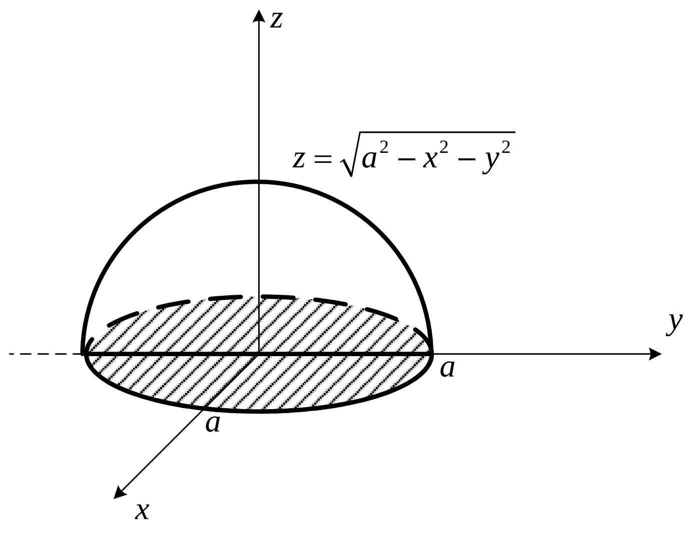
$$\boxed{S = \iint_{R'} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|} dA}$$ ¡Demuéstrela!

Ejemplo 1

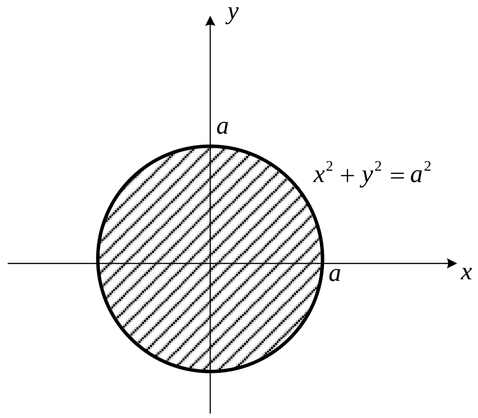
Demuestre que el área de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ es $4\pi a^2$.

SOLUCIÓN:

Trabajaremos con la porción superior de la esfera y el resultado del área multiplicado por 2 por ser simétrica.



La región R' en este caso sería:



El área estaría dada por $S = 2\iint\limits_{R'} \dfrac{\sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}}{|F_z|} dA$

Reemplazando:

$$S = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}}{|F_z|} dA = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} dA$$

$$= 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{|2z|} dA$$

$$= 2\iint\limits_{R'} \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2|z|} dA$$

$$= 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dA$$

Reemplazando por la ecuación de la superficie $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

$$S = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dA = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA$$

$$= 2a\iint\limits_{R'} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA$$

Cambiando a polares:

$$S = 2a \iint_{R'} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dA = 2a \int_0^{2\pi} \int_0^{a} \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} 2 \left. \frac{\left(a^2 - r^2\right)^{1/2}}{-2} \right|_0^a d\theta$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \left(a - 0\right) d\theta$$

$$= 2a^2 \left. \theta \right|_0^{2\pi}$$

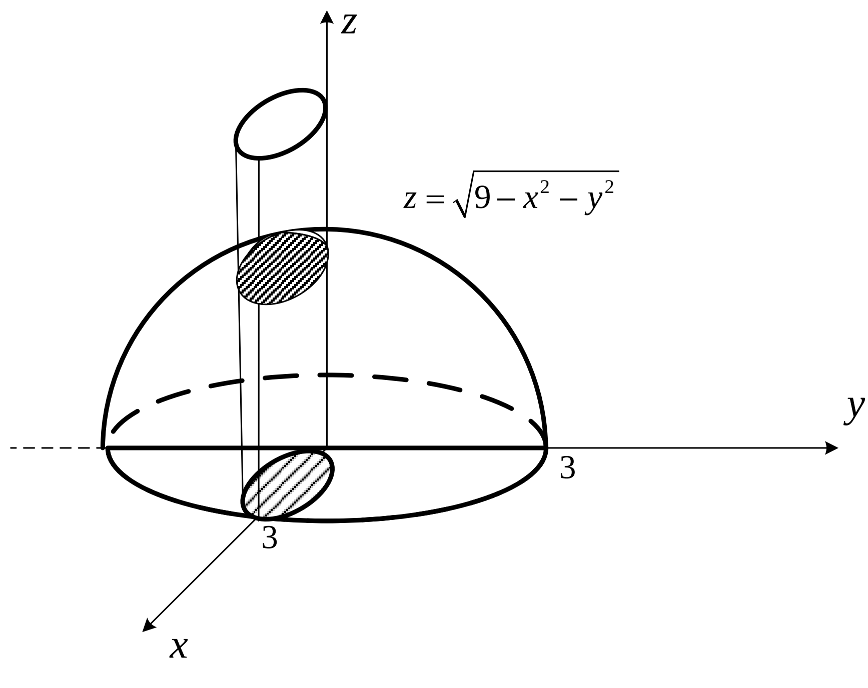
$$= 4\pi a^2$$

Ejemplo 2

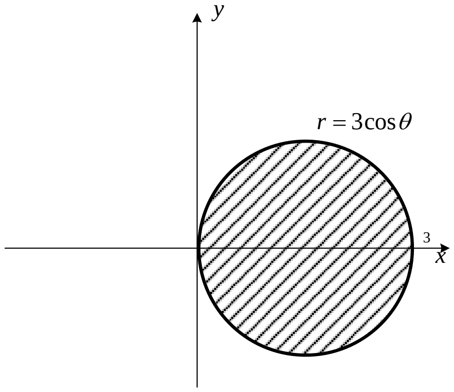
Encuentre el área de la región superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ limitada por el cilindro $x^2 + y^2 - 3x = 0$.

Soluci.on:

Haciendo un dibujo



La región R' en este caso sería:



El área estaría dada por $S = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|} dA$

Reemplazando:

$$S = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|} dA = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|} dA$$

$$= 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{|2z|} dA$$

$$= 2\iint\limits_{R'} \frac{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{2|z|} dA$$

$$= 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dA$$

Reemplazando por la ecuación de la superficie $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$$S = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{|z|} dA = 2\iint\limits_{R'} \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dA$$

$$= 6\iint\limits_{R'} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dA$$

Cambiando a polares:

$$S = 6\iint\limits_{R'} \frac{1}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}} dA = 6\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{4\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{9 - r^2}} rdrd\theta$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi} 2\left.\frac{(9 - r^2)^{1/2}}{-2}\right|_0^{3\cos\theta} d\theta$$

$$= 6\int\limits_0^{\pi} (3 - 3sen\theta)\, d\theta$$

$$= 6(3\theta + 3\cos\theta)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 6(3\pi + 3(-1-1))$$

$$S = 6(3\pi - 6)\, u^2$$

Ejercicios propuestos 6.5

1. Calcular el área de la superficie de la parte del paraboloide $x^2+y^2=z$ que queda dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=4z$
2. Encontrar el área de la parte de la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=1$ situada entre los planos $z=\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. Calcular el área de la porción de la superficie $z=xy$ limitada por el cilindro $x^2+y^2=4$
4. Calcular el área de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ interior al cilindro $x^2+y^2=ay$; siendo a>o
5. Calcular el área de la superficie dada por: $\begin{cases} x=r\cos\phi \\ y=2r\cos\phi \\ z=\phi \end{cases}$ $\quad 0\le r\le 1,$ $\quad 0\le\phi\le 2\pi$

Misceláneos

1. Empleando integrales dobles, calcular el área de la región limitada por:
   a) $y^2=10x+25$; $y^2=-6x+9$
   b) $x^2+y^2=2x$; $x^2+y^2=4x$; $y=x$; $y=0$
2. Calcule la integrales doble sobre la región R $\iint\limits_R \frac{y}{1+x^2},$ $\quad R=\begin{cases} y=0 \\ y=\sqrt{x} \\ x=4 \end{cases}$
3. Calcular $\int_0^2\int_{y^2}^4 \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\,x\,dx\,dy$
4. Calcular $\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dydx$
5. Evaluar $\iint\limits_R e^{\frac{y}{x}}\,dA$ donde R es la región limitada por $y=x^2$, $y=x$, $x=1$, $x=2$.
6. Suponga que el triángulo R con vértices $(0,0)$, $(0,10)$ y $(10,0)$ representa la región situada dentro del límite de cierta región de la provincia de Manabí. Después de una tormenta de invierno, la profundidad del agua en el punto (x,y) de R era $f(x,y)=\frac{1}{500}e^{-x/100}e^{-y/50}$ cm. Suponiendo que x e y se miden en centímetros HALLE una expresión para establecer la profundidad media del agua en la región.
7. Para las siguientes integrales:
   a)Calcular el valor de la integral.
   b) Dibujar la región de integración.
   c) Cambiar el orden de integración
   d) Calcular el valor de la nueva integral.

   * $\int_0^1\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 \left(x^2y+y\right)dxdy$ $\qquad$ * $\int_0^a\int_z^a \frac{adxdz}{\sqrt{a^2-x^2}}$

* $\int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos x} y^2 \operatorname{sen} x\,dy\,dx$ * $\int_0^{1}\int_x^{\sqrt{x}} \left(y+y^3\right)dy\,dx$

* $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$

8. Evaluar $\iint_R x\,dA$; si R es un triángulo con vértices los puntos (2,3) ; (7,2) ; (4,5).

9. Calcular $\iint_D xy\,dA$ donde D es la región comprendida entre la elipse $x^2+2y^2=1$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$ en el primer cuadrante.

10. Calcular $\iint_D xy\,dA$ donde D es el cuadrado con vértices (0,0); (1,1); (2,0); (1,-1).

11. Evaluar $\iint_R \left(|y|\cos\frac{\pi x}{4}\right)dA$; donde R es el rectángulo [0,2]x[-1,0].

12. Calcular $\iint_R \left(x^2+2y^2\right)dA$; R es la región acotada por las gráficas $xy=1$; $xy=2$; $y=x$; $y=2x$. Utilizando la transformación: $x=\frac{u}{v}$, $y=v$

13. Encuentre el área de la superficie del paraboloide hiperbólico $z=y^2-x^2$ comprendida entre los cilindros $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

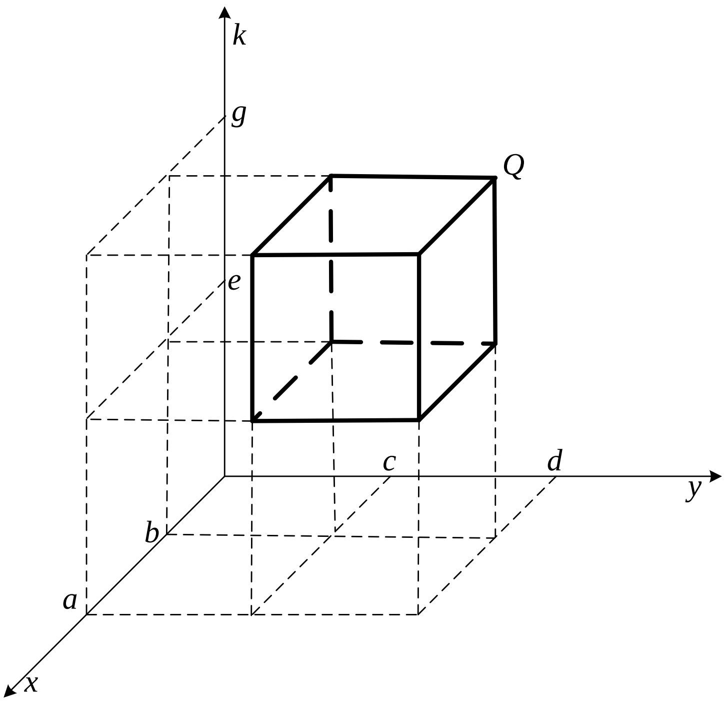
7 INTEGRALES TRIPLES

7.1 DEFINICIÓN.
7.2 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

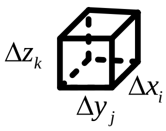
OBJETIVO:
Se pretende que el estudiante:
- Calcule Volúmenes con integrales triples

7.1 DEFINICIÓN.

Para definir una integral para una función de tres variables, análogamente a integrales dobles, deberíamos pensar que nuestra región de integración se extendería a la forma $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$; es decir, ahora se tendría un paralelepípedo, una región de R^3, la cual se la denota como Q:



Si hacemos particiones de Q, la ijk-ésima partición tendría la forma:



Y su volumen sería: $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$.

Una función de tres variables $w = f(x,y,z)$ definida en Q, para esta partición sería de la forma

$$f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k\right)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Donde $\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k\right)$ representa un punto cualquiera de la ijk-ésima partición.

Para todo Q, habría que considerar una cantidad infinita de particiones, es decir:

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ l\to\infty}} \sum_{k=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

De aquí surge la definición de integrales triples

Sea f una función de tres variables definida en una región de R^3,

$$Q = [a,b]\times[c,d]\times[e,g] = \left\{(x,y,z) / a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d \wedge e \leq z \leq g\right\}$$

Al $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty\\ l\to\infty}} \sum\limits_{k=1}^{l} \sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i, \overline{y}_j, \overline{z}_k\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ se le denomina la ***Integral Triple*** de f en Q y se la denota de la siguiente manera:

$$\int_e^g \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$$

Además, si existe este límite decimos que f es integrable en Q.

Si $f(x,y,z) = 1$, sería el volumen de la región Q.

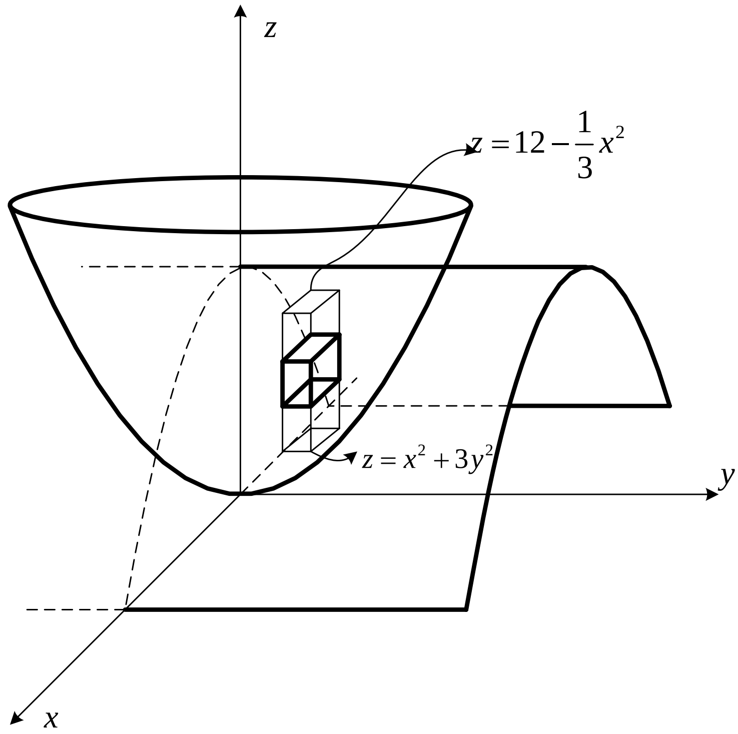
El teorema de Fubini es aplicable para estas integrales también, porque al igual que integrales dobles, estas pueden ser observadas como integrales iteradas. Y es más, si tuviésemos regiones generales también el teorema de Fubini es aplicable.

Ejemplo 1

Encontrar el volumen de la región acotada por $z = x^2 + 3y^2$ y $z = 12 - \frac{1}{3}x^2$.

Solución

Haciendo un dibujo



La integral triple para el volumen sería:

$$V = \iint_R \left[\int_{x^2+3y^2}^{12-\frac{1}{3}x^2} dz \right] dA = \iint_R \left[z\Big|_{x^2+3y^2}^{12-\frac{1}{3}x^2} \right] dA$$

$$= \iint_R \left[\left(12 - \tfrac{1}{3}x^2\right) - \left(x^2 + 3y^2\right) \right] dA$$

$$= \iint_R \left(12 - \tfrac{4}{3}x^2 - 3y^2\right) dA$$

Para definir la región R, determinemos la curva de intersección entre las superficies:

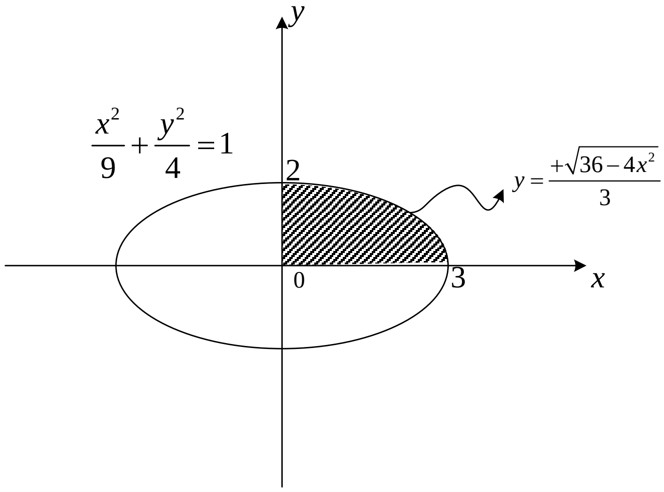
$$\begin{cases} z = x^2 + 3y^2 \\ z = 12 - \dfrac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

Igualando, tenemos:

$$x^2 + 3y^2 = 12 - \frac{1}{3}x^2$$

$$\frac{4}{3}x^2 + 3y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$



Poniendo límites, tenemos:

$$V=\iint_R \left(12-\tfrac{4}{3}x^2-3y^2\right)dA=4\int_0^3\int_0^{\frac{+\sqrt{36-4x^2}}{3}}\left(12-\tfrac{4}{3}x^2-3y^2\right)dydx$$

$$=4\int_0^3\left[\frac{\left(36-4x^2\right)}{3}y-3\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{36-4x^2}}{3}}\right]dx$$

$$=4\int_0^3\left[\frac{\left(36-4x^2\right)^{3/2}}{9}-\frac{\left(36-4x^2\right)^{3/2}}{27}\right]dx$$

$$=4\int_0^3\frac{2}{27}\left(36-4x^2\right)^{3/2}dx$$

Empleando sustitución trigonométrica:

$x=3sent$ entonces $dx=3\cos t\,dt$ y $\begin{cases}x\to 0\Rightarrow t\to 0\\ x\to 3\Rightarrow t\to\frac{\pi}{2}\end{cases}$

reeemplazando

$$V = 4\int_0^3 \frac{2}{27}\left(36-4x^2\right)^{3/2}dx = \frac{8}{27}\int_0^{\pi/2}\left(36-4\left(3sent\right)^2\right)^{3/2}\left(3\cos t dt\right)$$

$$= \frac{8}{27}\int_0^{\pi/2}\left(6\cos^3 t\right)\left(3\cos t dt\right)$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^4 t\right)dt$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$= \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)}{4}dt$$

$$= \frac{4}{3}\left[\int_0^{\pi/2}dt + \int_0^{\pi/2}2\cos 2t dt + \int_0^{\pi/2}\frac{\left(1+\cos 4t\right)}{2}dt\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left[t + 2\frac{sen2t}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{sen4t}{8}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}\frac{\pi}{2}\right]$$

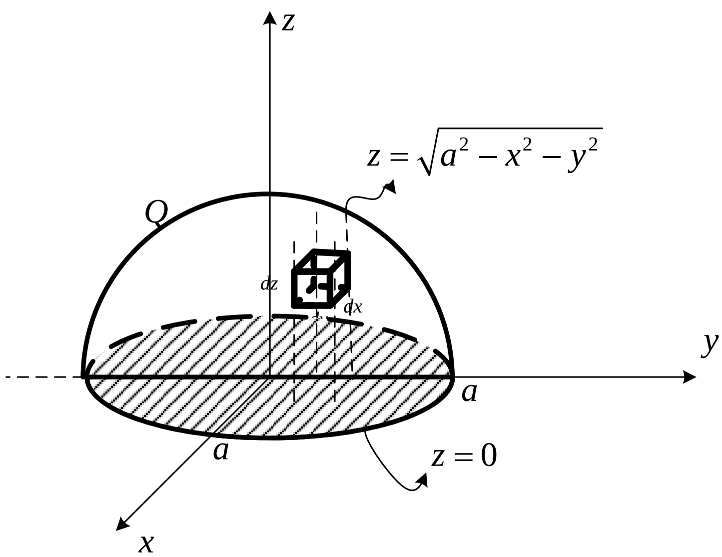
$$V = \pi\ u^3$$

Ejemplo 2

Empleando integrales triples para calcular el volumen de la esfera que tiene por ecuación $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Solución:

Haciendo un gráfico



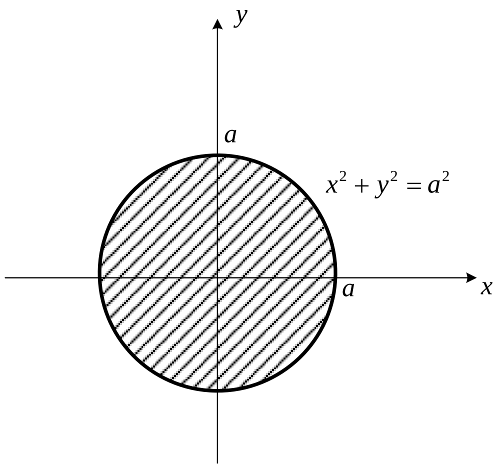
El volumen del paralelepípedo diferencial sería: $dV = dzdA$ (altura por área de la base), será mejor plantearlo de esta forma para que el dA sea planteado igual que en integrales dobles.
El volumen total sería:

$$V = \iiint_Q dzdA$$

Trabajando con la porción superior de la esfera, haciendo un barrido vertical, el límite inferior para z sería la ecuación del plano $z = 0$ y el límite superior sería la ecuación de la esfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces:

$$V = 2\iint_R \left[\int_0^{\sqrt{\ldots}} dz \right] dA = 2\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dA$$

los demás límites se los obtiene observando la proyección de la superficie en el plano xy



Pasando a polares y evaluando la integral:

$$\begin{aligned} V = 2\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dA &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r dr d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\frac{\left(a^2 - r^2\right)^{3/2}}{2}\Bigg|_0^a \\ &= \frac{2}{3}\left[\left(a^2\right)^{3/2} - 0\right]\theta\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

Las integrales triples igual que las integrales dobles, pueden presentarse laboriosa en su evaluación; por tanto, aquí también es posible utilizar trasformaciones.

7.2 INTEGRALES TRIPLES EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Recordemos que las transformaciones en coordenadas esféricas son:

$$\begin{cases} x = \rho\, sen\phi \cos\theta \\ y = \rho\, sen\phi \cos\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$$

Análogamente a integrales dobles, ahora una integral triple en condiciones especiales puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\iiint\limits_{Q} f\left(x,y,z\right)dV = \iiint\limits_{Q'} f\left(\rho,\theta,\phi\right)\left|\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(\rho,\theta,\phi\right)}\right| d\rho d\theta d\phi$$

Hallemos el Jacobiano:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} &= \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\phi & y_\phi & z_\phi \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} sen\phi\cos\theta & sen\phi sen\theta & \cos\phi \\ -\rho sen\phi sen\theta & \rho sen\phi\cos\theta & 0 \\ \rho\cos\phi\cos\theta & \rho\cos\phi sen\theta & -\rho sen\phi \end{vmatrix} \\
&= \cos\phi\left[-\rho^2 sen\phi\cos\phi sen^2\theta - \rho^2 sen\phi\cos\phi\cos^2\theta\right] - \rho sen\phi\left[\rho sen^2\phi\cos^2\theta + \rho sen^2\phi sen^2\theta\right] \\
&= -\rho^2 sen\phi\cos^2\phi\left[sen^2\theta + \cos^2\theta\right] - \rho^2 sen^3\phi\left[sen^2\theta + \cos^2\theta\right] \\
&= -\rho^2 sen\phi\cos^2\phi - \rho^2 sen^3\phi \\
&= -\rho^2 sen\phi\left[\cos^2\phi + sen^2\phi\right] \\
&= -\rho^2 sen\phi
\end{aligned}$$

Por tanto:

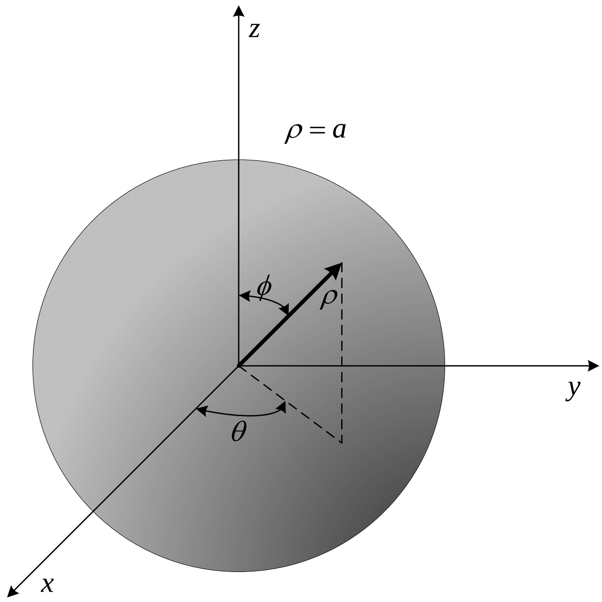
$$\boxed{\left|\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(\rho,\theta,\phi\right)}\right| = \rho^2 sen\phi}$$

Ejemplo 1

Calcular el volumen de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ empleando coordenadas esféricas.

Solución:

La ecuación de la esfera en coordenadas esféricas es $\rho = a$



El volumen estaría dado por:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2 sen\phi\; d\rho d\theta d\phi$$

Evaluando

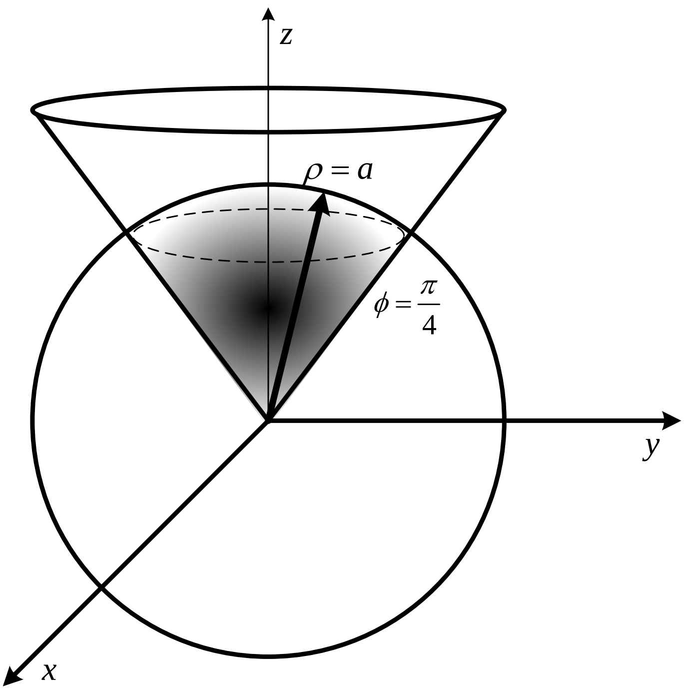
$$\begin{aligned}
V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2 sen\phi\; d\rho d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^a sen\phi\; d\theta d\phi\\
&=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\phi\right)\Big|_0^{\pi}\,d\theta\\
&=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(1+1\right)d\theta\\
&=\frac{2a^3}{3}\theta\Big|_0^{2\pi}\\
&=\frac{4\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Hallar el volumen de la porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$, limitada superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Solución:

Haciendo un dibujo:



La integral para el volumen sería:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a} \rho^2 sen\phi \, d\rho d\theta d\phi$$

Evaluando

$$\begin{aligned}
V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{a} \rho^2 sen\phi \, d\rho d\theta d\phi &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^a sen\phi \, d\theta d\phi \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \left.\left(-\cos\phi\right)\right|_0^{\pi/4} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left.\theta\right|_0^{2\pi} \\
&= \frac{2\pi a^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ejercicios Propuestos 7.1

1. Hallar el volumen total del espacio comprendido entre el cilindro $x^2+y^2=a^2$ y el hiperboloide $x^2+y^2-z^2=-a^2$
2. Calcular el volumen del sólido limitado por los tres planos coordenados, la superficie $z=x^2+y^2$;y el plano $x+y=1$
3. Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cono $z^2=x^2+y^2 \quad ; \quad z\geq 0$
4. Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=4z$ e inferiormente por el cono $x^2+y^2=z^2$.
5. Calcular el volumen del sólido limitado por las superficies:
   $x^2+y^2=2z \quad ; \quad x^2+y^2-z^2=1$;y $z=0$
6. Utilizando una transformación adecuada, hallar el volumen del cuerpo limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=2$ y el cono $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=0$
7. Sea un campo escalar $f(x,y,z)$ definido sobre una región $Q\subseteq R^3$, se define el valor medio de f por: $f_{med}=\frac{1}{V(Q)}\iiint\limits_Q f(x,y,z)dV$, donde V(Q) es el volumen de Q.
   Encontrar el valor medio de $f(x,y,z)=xyz$ sobre el cubo de lado "L" que se encuentra en el primer octante con vértice en el origen y aristas paralelas a los ejes coordenados

8 CURVAS

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Describas curvas de R^3.
- Calcule velocidad, rapidez, aceleración, ecuación de recta tangente, ecuación de plano tangente (Rectificante), ecuación de plano Normal, ecuación del plano Osculador, Curvatura, aceleración normal, aceleración tangencial.

8.1 FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL.

Definición.

Una ***FUNCIÓN VECTORIAL DE UNA VARIABLE REAL***, es una función del tipo $\overrightarrow{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$\overrightarrow{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right) \in \mathbb{R}^n$$

Donde $x_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ i = 1, 2, \cdots, n$; son funciones reales de variable real t, llamadas **Funciones Coordenadas** de $\overrightarrow{F}$.

Ejemplo 1

Sea $\overrightarrow{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{F}(t) = \left(1-2t, 3+t, -1+t\right)$.

Ejemplo 2

Sea $\overrightarrow{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\overrightarrow{F}(t) = \left(a\cos t, bsent, t\right)$.

Ejemplo 3

Sea $\overrightarrow{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ tal que $\overrightarrow{F}(t) = \left(t, t^2, t^3, 2t+1\right)$

Ejemplo 4

Sea $\overrightarrow{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{F}(t) = \left(t, t^2, 3\sqrt{1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}}\right)$

8.2 DOMINIO

Sea $\overrightarrow{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, el dominio de $\overrightarrow{F}$ es el subconjunto de números reales I.

En decir, el conjunto de valores para t, que da sentido a la regla de correspondencia.

Ejemplo 1

Para $\overrightarrow{F}(t) = \left(1-2t, 3+t, -1+t\right)$, $Dom\,\overrightarrow{F} = \mathbb{R}$

Ejemplo 2

Para $\overrightarrow{F}(t) = \left(a\cos t, bsent, t\right)$, $Dom\,\overrightarrow{F} = \mathbb{R}$

Ejemplo 3

Para $\vec{F}(t)=\left(t,\,t^2,\,t^3\right)$, $Dom\,\vec{F}=\mathbb{R}$

Ejemplo 4

Para $\vec{F}(t)=\left(t,\,t^2,\,3\sqrt{1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}}\right)$, $Dom\,\vec{F}=\left\{t\in\mathbb{R}\,/\,1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}\geq 0\right\}$

8.3 LIMITE

8.3.1 Definición.

Sea $\vec{F}:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ una función definida en el intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ y sea t_0 un punto de I o un punto de frontera de I. Entonces $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{L}$, si y sólo si:

$$\forall\xi>0,\exists\partial>0\,/\,0<\left|t-t_0\right|<\partial\Rightarrow\left\|\vec{F}-\vec{L}\right\|<\xi$$

8.3.2 Teorema

Sea $\vec{F}:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, tal que $\vec{F}(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\right)$.

Entonces $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{F}(t)=\vec{L}=\left(l_1,l_2,\cdots,l_n\right)$ si y solo si

$$\lim_{t\to t_0}x_i=l_i;\quad i=1,2,\cdots,n$$

Ejemplo.

Sea $\vec{F}(t)=\left(t^2+1,\,2t,\,sent\right)$ Hallar $\lim\limits_{t\to 0}\vec{F}(t)$.

SOLUCIÓN:

$$\lim_{t\to 0}\vec{F}(t)=\left(\lim_{t\to 0}\left(t^2+1\right),\,\lim_{t\to 0}2t,\,\lim_{t\to 0}sent\right)$$
$$=\left(1,0,1\right)$$

Ejercicios Propuesto 8.1

Calcular:

a) $\lim\limits_{t\to 2}\left(t,\frac{t^2-4}{t^2-2t},\frac{1}{t}\right)$ b) $\lim\limits_{t\to 0}\left(e^t,\frac{\operatorname{sen}t}{t},e^{-t}\right)$ c) $\lim\limits_{t\to 1}\left(\sqrt{t},\frac{\ln t}{t^2-1},2t^2\right)$

Resp. a) $\left(2,\,2,\,\frac{1}{2}\right)$ b) $\left(1,1,1\right)$ c) $\left(1,\,\frac{1}{2},\,2\right)$

8.4 CONTINUIDAD.

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{F}$ es continua en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$

8.4.1 Teorema

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\vec{F}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$. Sea $t_0 \in I$. Entonces $\vec{F}$ es continua en t_0 si y sólo si sus funciones coordenadas x_i lo son.

Ejemplo 1

$\vec{F}(t) = (t^3 + 1, t^2 - 2t, sent)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2

$$\vec{F}(t) = \begin{cases} \left(t, t^2, \dfrac{sent}{t}\right) & ; t \neq 0 \\ (0,0,0) & ; t = 0 \end{cases}$$

No es continua en $t = 0$ debido a que $\lim\limits_{t \to 0} \left(t, t^2, \dfrac{sent}{t}\right) = (0,0,1)$ que es diferente de $\vec{F}(0) = (0,0,0)$

Ejemplo 3

$\vec{F}(t) = \left(\dfrac{1}{(t+1)^2}, t^3\right)$ no es continua en $t = -1$.

Ejercicios Propuesto 8.2

Analice la continuidad de:

a) $r(t) = \langle \sqrt{t}, \sqrt{t-1} \rangle$

b) $r(t) = \langle t, \operatorname{arcsen} t, t-1 \rangle$

c) $r(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} \rangle$

Resp. a) $Dom\ r(t) = [1, +\infty]$ b) $Dom\ r(t) = [-1, 1]$ c) $Dom\ r(t) = [0, +\infty]$

8.5 TRAYECTORIA (CAMINO)

Una función $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua se la llama trayectoria o camino en $\mathbb{R}^n$ si $\vec{F}$ está definida en un intervalo cerrado.

Suponga que el intervalo sea $I = [a,b]$ entonces $\vec{F}(a)$ es el punto inicial de la trayectoria y $\vec{F}(b)$ es el punto final.

Si $\vec{F}(a) = \vec{F}(b)$ tenemos una **TRAYECTORIA CERRADA**.

Si $\vec{F}$ es inyectiva es una **TRAYECTORIA SIMPLE**.

Si $\vec{F}(a) = \vec{F}(b)$ y $\vec{F}$ es inyectiva tenemos una **TRAYECTORIA CERRADA SIMPLE**.

8.6 GRAFICA. DEFINICIÓN

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Se denomina gráfica de $\vec{F}$ al conjunto de puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma $\left(t, \vec{F}(t)\right)$ tales que $t \in I$.

Se ha dado esta definición siguiendo la línea de la definición de gráfica que se enunció en el capítulo anterior.

La definición siguiente permite darle una interpretación geométrica a una función vectorial de variable real.

8.7 TRAZA

Se llama ***TRAZA*** de la trayectoria $\vec{F}$ al conjunto de imágenes de $\vec{F}$, es decir:

$$Traza\ \vec{F} = \left\{ \vec{F}(t) \in \mathbb{R}^n \ / \ t \in I \right\}$$

8.8 CURVA

Se denomina ***CURVA*** a la traza de una trayectoria $\vec{F}$.

Conozcamos algunas curvas de $\mathbb{R}^3$.

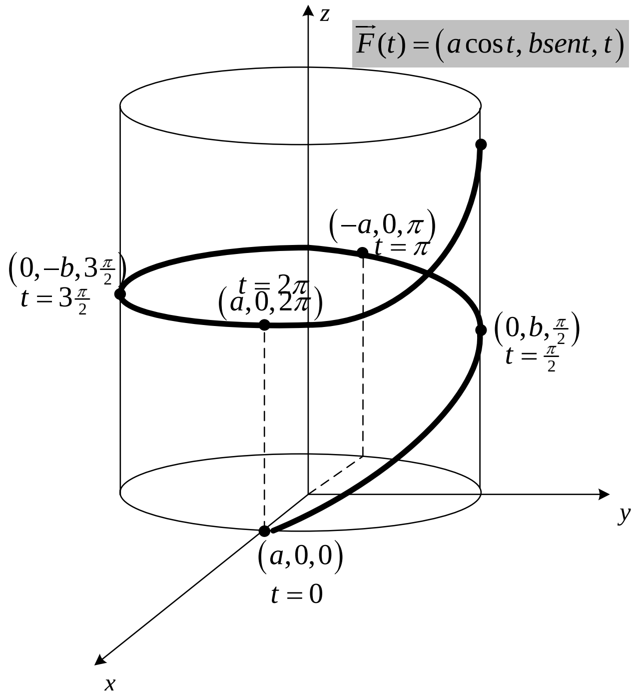
Ejemplo 1

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t) = (a\cos t, bsent, t)$.

Esta curva es llamada HELICE.

Note que $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \\ z = t \end{cases}$

Se la pude observar como la traza que hace la superficie $x = a\cos z$ al cilindro $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

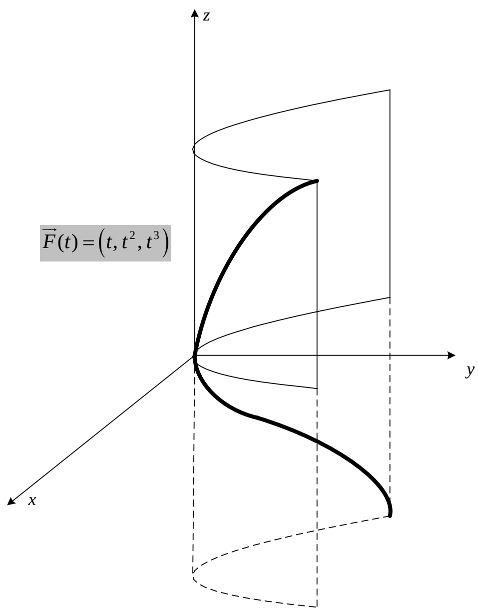


Ejemplo 2

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t) = (t, t^2, t^3)$

Aquí tenemos $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$

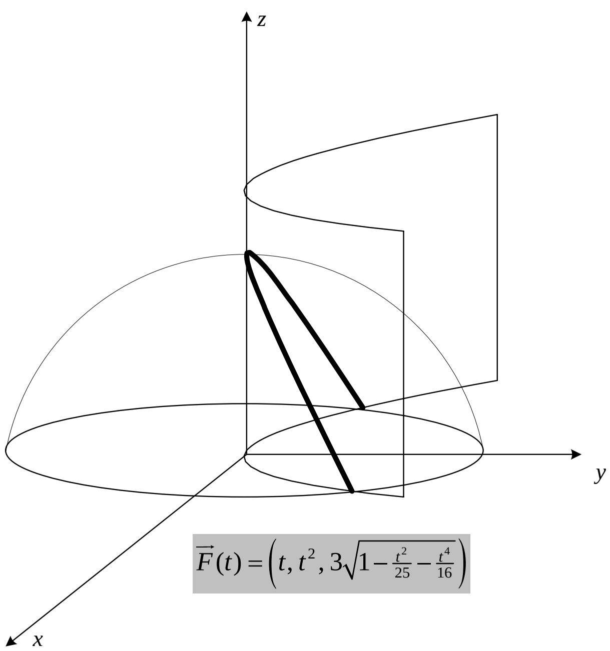
Esta curva la podemos observar como la intersección entre las superficies $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$



Ejemplo 3

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\vec{F}(t)=\left(t,\, t^2,\, 3\sqrt{1-\frac{t^2}{25}-\frac{t^4}{16}}\right)$

En este caso la curva será la intersección entre el elipsoide $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$ con el cilindro $y=x^2$



Ejercicios Propuesto 8.3

1. Dibujar las siguientes curvas representadas por las funciones vectoriales propuestas.
   a) $r(t) = 3t\hat{i} + (t-1)\hat{j} + k$
   b) $r(t) = 2\cos t\hat{i} + 4\operatorname{sen} t\hat{j} + t\hat{k}$
   c) $r(t) = 3\cos t\hat{i} + 4\operatorname{sen} t\hat{j}$
2. Hallar trayectorias $r(t)$ que representen las siguientes curvas.
   a) $\{(x,y)/\ y = e^x\}$
   b) $\{(x,y)/\ 4x^2 + y^2 = 1\}$
   c) Una recta en IR^3 que contiene al origen y al punto (a,b,c).
   d) $\{(x,y)/\ 9x^2 + 16y^2 = 4\}$
   e) $\{(\rho,\theta,\phi)/(\rho = 6\csc\phi) \wedge (\theta = \pi/4)\}$
   f) $\{(\rho,\theta,\phi)/(\rho = 4\csc\phi) \wedge (\theta = \pi/4)\}$
3. Dibujar las curvas en el espacio representada por la intersección de las superficies propuestas, y represéntese la curva mediante la función vectorial usando el parámetro dado.

	Superficies	Parámetro
a)	$z = x^2 + y^2, x + y = 0$	$x = 2t$
b)	$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16, x = y^2$	$y = t$
c)	$x^2 + y^2 + z^2 = 10, x + y = 4$	$x = 2 + \operatorname{sen} t$
d)	$x^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$	$x = 3t$

4. Muestre que la intersección de la superficie $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$ y el plano $x + z = 9$ es una elipse.
5. Escriba una ecuación vectorial para la curva de intersección de las superficies: $e^{2x^2-5x} = z^2 + 2, \quad y^2 + y = xz^3$
6. La curva cuya ecuación vectorial es
   $$r(t) = \left\langle 2\sqrt{t}\cos t, 3\sqrt{t}\operatorname{sen} t, \sqrt{1-t}\right\rangle, \quad 0 \le t \le 1$$
   se define sobre una superficie cuádrica. Hallar la ecuación de dicha superficie.
   Resp. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$
7. Hallar la función vectorial para la curva de intersección de las superficies $z = 1 + x - y$, y $y = x^2 + x$.
   Resp. $r(t) = \left(t - \frac{1}{2}, t^2 - \frac{1}{4}, -t^2 + t + \frac{1}{4}\right)$

8.9 DERIVADA.

Una función $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Sea $t_0 \in I$. Entonces la derivada de $\vec{F}$ en t_0, denotada como $\vec{F}'(t_0)$, se define como:

$$\vec{F}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{F}(t_0 + h) - \vec{F}(t_0)}{h}$$

si este límite existe.

En tal caso se dice que $\overrightarrow{F}$ es ***DIFERENCIABLE*** en t_0.

Si $\overrightarrow{F}(t_0)=\left(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)\right)$ entonces

$$\overrightarrow{F}(t_0+h)=\left(x_1(t_0+h),x_2(t_0+h),\cdots,x_n(t_0+h)\right).$$

Aplicando la definición de derivada

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F}'(t_0)&=\lim_{h\to 0}\frac{\overrightarrow{F}(t_0+h)-\overrightarrow{F}(t_0)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\left(x_1(t_0+h),x_2(t_0+h),\cdots,x_n(t_0+h)\right)-\left(x_1(t_0),x_2(t_0),\cdots,x_n(t_0)\right)}{h}\\&=\left(\lim_{h\to 0}\frac{x_1(t_0+h)-x_1(t_0)}{h},\lim_{h\to 0}\frac{x_2(t_0+h)-x_2(t_0)}{h},\cdots,\lim_{h\to 0}\frac{x_n(t_0+h)-x_n(t_0)}{h}\right)\end{aligned}$$

Es decir:

$$\overrightarrow{F}'(t_0)=\left(x_1'(t_0),x_2'(t_0),\cdots,x_n'(t_0)\right)$$

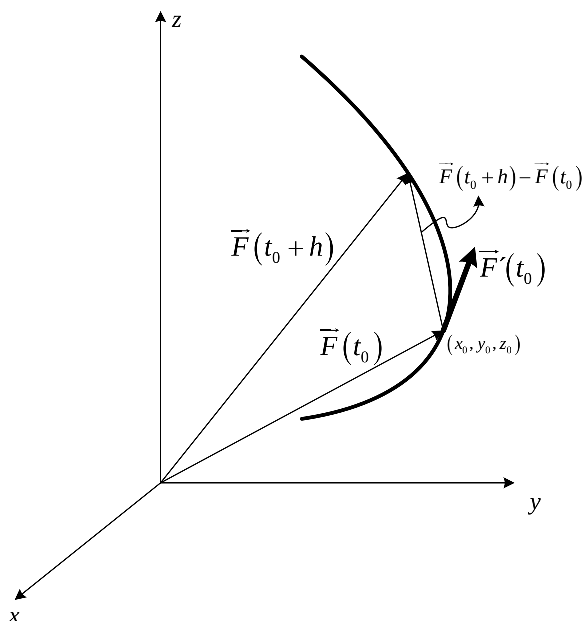
Ejemplo

Sea $\overrightarrow{F}(t)=\left(t^2,t,sent\right)$ entonces $\overrightarrow{F}'(t)=\left(2t,1,\cos t\right)$

8.9.1 Teorema

Sea $\overrightarrow{F}$ una trayectoria diferenciable. El vector $\overrightarrow{F}'(t_0)$ es tangente a la trayectoria en el punto t_0.

Observe la gráfica



Ejemplo

Sea $\vec{F}(t)=(\cos t, sent, t)$. Hallar la ecuación de la recta tangente y la del plano normal en $t=\frac{\pi}{4}$.

SOLUCIÓN:

Un vector directriz de la recta tangente seria $\vec{F}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, que también sería un vector perpendicular al plano normal.

Como $\vec{F}(t)=(\cos t, sent, t)$ entonces $\vec{F}'(t)=(-sent, \cos t, 1)$

Tenemos un punto: $\vec{F}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\cos\frac{\pi}{4}, sen\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

Y un vector paralelo a la recta o perpendicular al plano normal:

$$\vec{F}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-sen\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4}, 1\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente sería:

$$l:\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ z=\frac{\pi}{4}+t \end{cases}$$

Y la ecuación del plano normal sería:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

8.9.2 Trayectoria Regular

Sea $\vec{F}: I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. Entonces $\vec{F}$ es una trayectoria regular en I, si $\vec{F}'(t_0)\neq\vec{0}$ para todo $t\in I$.

8.9.2 Propiedades

Sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ dos trayectorias diferenciables. Sea f una función escalar diferenciable. Entonces:

1. $D_t\left(\vec{F}(t)\pm\vec{G}(t)\right)=\vec{F}'(t)\pm\vec{G}'(t)$
2. $D_t\left(f\ \vec{F}(t)\right)=f'\ \vec{F}(t)+f\ \vec{F}'(t)$
3. $D_t\left(\vec{F}(t)\bullet\vec{G}(t)\right)=\vec{F}'(t)\bullet\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\bullet\vec{G}'(t)$
4. $D_t\left(\vec{F}(t)\times\vec{G}(t)\right)=\vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

8.10 CONCEPTOS ASOCIADOS A LA DERIVADA.

Sea $\vec{F}: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Tal que $\vec{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$

Se define:

Vector Posición: $\vec{r}(t) = \vec{F}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$

Vector Velocidad: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t), \cdots, x_n'(t)\right)$

Vector Tangente Unitario: $\mathrm{T} = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}$

Longitud de un camino:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[x_1'(t)\right]^2 + \left[x_2'(t)\right]^2 + \cdots + \left[x_n'(t)\right]^2}\, dt$$

Rapidez: $\dfrac{ds}{dt} = \left\|\vec{v}(t)\right\| = \left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$

Aceleración: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \left(x_1''(t), x_2''(t), \cdots, x_n''(t)\right)$

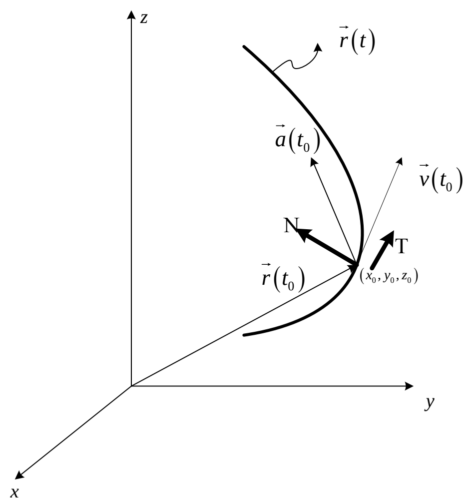
Vector Normal Unitario: $\mathrm{N} = \dfrac{\vec{\mathrm{T}}'(t)}{\left\|\vec{\mathrm{T}}'(t)\right\|}$

Vector Binormal: $\mathrm{B} = \mathrm{T} \times \mathrm{N}$

Plano Osculador: Definido por T y N y ortogonal a B

Plano Rectificante: Definido por T y B y ortogonal a N

Plano Normal: Definido por N y B y ortogonal a T



El vector tangente es unitario, entonces: $\mathrm{T}\bullet\mathrm{T}=1$, derivando miembro a miembro

$$\frac{d}{dt}\left(\mathrm{T}\bullet\mathrm{T}\right)=\frac{d}{dt}(1)$$

$$\mathrm{T}'\bullet\mathrm{T}+\mathrm{T}\bullet\mathrm{T}'=0$$

$$2\mathrm{T}'\bullet\mathrm{T}=0$$

$$\mathrm{T}'\bullet\mathrm{T}=0$$

Por tanto se concluye que el vector T y T' son ortogonales, lo cual demuestra la definición del Vector Normal Unitario.

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano osculador para $\vec{r}(t)=(\cos t, sent, t)$ en $t=\pi$.

SOLUCIÓN:

Para hallar la ecuación de un plano necesitamos un punto y un vector normal.

El punto sería: $\vec{r}(\pi)=(\cos\pi, sen\pi, \pi)=(-1,0,\pi)$

Y el vector normal es el vector Binormal: $\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}$

Hallemos T:

$$\mathrm{T}=\frac{\vec{r}\,'(\pi)}{\left\|\vec{r}\,'(\pi)\right\|}=\left.\frac{(-sent,\cos t,1)}{\sqrt{\underbrace{sen^2t+\cos^2 t}_{1}+1}}\right|_{t=\pi}=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}$$

Hallemos N:

$$\mathrm{N}=\frac{\vec{\mathrm{T}}'(\pi)}{\left\|\vec{\mathrm{T}}'(\pi)\right\|}=\left.\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos t,-sent,0)}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\cos^2 t+sen^2t}}\right|_{t=\pi}=(1,0,0)$$

Entonces

$$\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\left(0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)$$

Finalmente la ecuación del plano osculador sería:

$$0(x+1)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(y-0)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}(z-\pi)=0$$

8.10.1Teorema. Formulas de Frenet- Serbet

Sea $\vec{r}$ una trayectoria diferenciable, entonces:

$$\mathrm{B}=\mathrm{T}\times\mathrm{N}=-\mathrm{N}\times\mathrm{T}$$
$$\mathrm{N}=\mathrm{B}\times\mathrm{T}=-\mathrm{T}\times\mathrm{B}$$
$$\mathrm{T}=\mathrm{N}\times\mathrm{B}=-\mathrm{B}\times\mathrm{N}$$

8.10.2 Curvatura y radio de curvatura.

Sea $\overrightarrow{r}$ una trayectoria diferenciable. La ***CURVATURA***, denotada por κ, está definida en la expresión: $\dfrac{d\mathrm{T}}{ds} = \kappa\mathrm{N}$.

Es decir: $\kappa = \left\| \dfrac{d\mathrm{T}}{ds} \right\|$

El radio de curvatura, denotado por ρ, es:

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

Observe que

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathrm{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathrm{T}}{dt}\frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathrm{T}/dt}{ds/dt} \right\|$$

Es decir, $\kappa = \dfrac{\left\|\mathrm{T}'(t)\right\|}{\left\|r'(t)\right\|}$

Ejemplo

Hallar κ para $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, sent, t)$ en $t = \pi$.

SOLUCIÓN:

La curvatura en este punto sería: $\kappa = \dfrac{\left\|\mathrm{T}'(\pi)\right\|}{\left\|r'(\pi)\right\|}$

En el ejemplo anterior se obtuvo $\left\|\mathrm{T}'(\pi)\right\| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\left\|\overrightarrow{r}\,'(\pi)\right\| = \sqrt{2}$

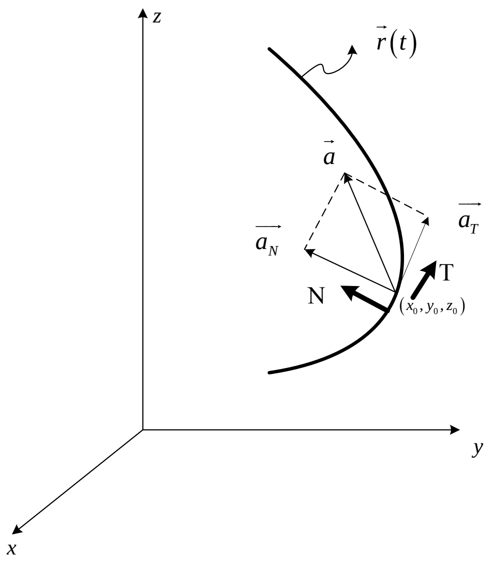
$$\kappa = \frac{\left\|\mathrm{T}'(\pi)\right\|}{\left\|r'(\pi)\right\|} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

8.10.3 Torsión.

Sea $\overrightarrow{r}$ una trayectoria diferenciable. La ***TORSIÓN***, denotada por τ, está definida en la expresión: $\dfrac{d\mathrm{B}}{ds} = -\tau\mathrm{N}$. Es decir: $\tau = \left\| \dfrac{dB}{ds} \right\|$

8.10.4 ACELERACIÓN NORMAL Y ACELERACIÓN TANGENCIAL.

En cuestiones físicas, se hace necesario presentar la aceleración en términos de sus componentes tangencial y ortogonal en un punto de la trayectoria.



$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_T + \vec{a}_N \\ &= a_t \mathrm{T} + a_n \mathrm{N}\end{aligned}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\vec{v}\right] = \frac{d}{dt}\left[\left\|\vec{v}\right\|\mathrm{T}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{ds}{dt}\mathrm{T}\right] = \frac{d^2 s}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{ds}{dt}\mathrm{T}'$$

Deduzcamos T':

En la expresión $\frac{d\mathrm{T}}{ds} = \kappa\mathrm{N}$, transformando $\frac{d\mathrm{T}}{ds}$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \kappa\mathrm{N}$$

$$\frac{d\mathrm{T}/dt}{ds/dt} = \kappa\mathrm{N}$$

Es decir: $\boxed{\mathrm{T}' = \kappa\frac{ds}{dt}\mathrm{N}}$

Reemplazando:

$$\vec{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{ds}{dt}\mathrm{T}'$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\mathrm{T} + \frac{ds}{dt}\left(\kappa\frac{ds}{dt}\mathrm{N}\right)$$
$$= \frac{d^2s}{dt^2}\mathrm{T} + \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathrm{N}$$

Por tanto:

$$\boxed{a_t = \frac{d^2s}{dt^2}} \quad \text{y} \quad \boxed{a_n = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

Ejemplo

Sea $\vec{r}(t) = (\cos t, sent, t)$. Hallar a_t y a_n $t = \pi$.

<u>SOLUCIÓN:</u>

Empleando los resultados anteriores

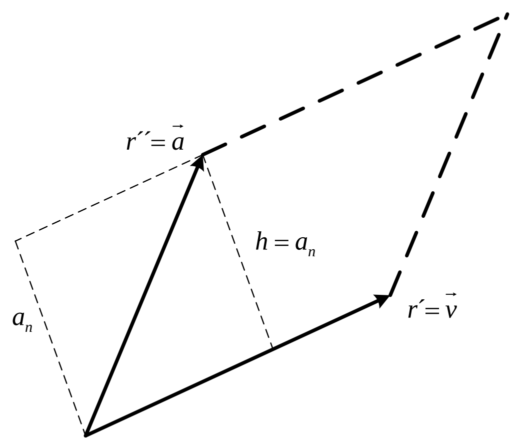
1. $\frac{ds}{dt} = \left\|\vec{r}'(\pi)\right\| = \sqrt{2}$ entonces $\boxed{a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = 0}$

2. La curvatura ya la obtuvimos en el ejercicio anterior, por tanto:

$$\boxed{a_n = \kappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1}$$

En ocasiones determinar los parámetros anteriores no es tan sencillo debido a la ecuación de la trayectoria. Podemos darles otra forma a las formulas anteriores.

Observe la figura:



Por teoría de vectores:

El área del paralelogramo sustentado por los vectores $\overrightarrow{r}'=\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{r}''=\overrightarrow{a}$ está dada por:

$$Area=\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|$$

Pero, por geometría también tenemos:

$$Area=\left(base\right)\times\left(altura\right)=\left\|\overrightarrow{r}'\right\|a_n$$

Igualando y despejando resulta:

$$\boxed{a_n=\frac{\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|}}$$

Para la curvatura tenemos:

$$\kappa=\frac{a_n}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}=\frac{\frac{\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|}}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|^2}=\frac{\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|^3}$$

$$\boxed{\kappa=\frac{\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|^3}}$$

Ejemplo

Sea $\overrightarrow{r}(t)=(4t,3\cos t,sent)$. Hallar $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{a}$, a_t, a_n, κ, para cualquier t.

Solución:

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{r}'(t)=(4,-3sent,\cos t)$$

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{r}''(t)=(0,-3\cos t,-sent)$$

$$\frac{ds}{dt}=\left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\|=\sqrt{19+9sen^2t+\cos^2 t}$$

$$\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3sent & \cos t \\ 0 & -3\cos t & -sent \end{vmatrix}=\left(3sen^2t+3\cos^2 t,\ 4sent,\ -12\cos t\right)=\left(3,\ 4sent,\ -12\cos t\right)$$

$$a_n=\frac{\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|}=\frac{\sqrt{9+16sen^2t+144\cos^2 t}}{\sqrt{19+9sen^2t+\cos^2 t}}$$

$$\kappa=\frac{\left\|\overrightarrow{r}'\times\overrightarrow{r}''\right\|}{\left\|\overrightarrow{r}'\right\|^3}=\frac{\sqrt{9+16sen^2t+144\cos^2 t}}{\left(\sqrt{19+9sen^2t+\cos^2 t}\right)^3}$$

Finalmente, también se podría utilizar el teorema de Pitágora para determinar la magnitud de una de las aceleraciones:

$$\left\|\vec{a}\right\|^2 = a_n{}^2 + a_t{}^2$$

Ejercicios Propuestos 8.4

1. Halle $\sigma'(t)$ y $\sigma'(0)$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $\sigma(t) = \left(\operatorname{sen} 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2\right)$ c) $\sigma(t) = \left(t^3, t^2 - 4t, 0\right)$

   b) $\sigma(t) = \left(e^t, \cos t, \operatorname{sen} t\right)$ d) $\sigma(t) = \left(\operatorname{sen} 2t, \log(1+t), t\right)$

   Resp. a) $\sigma'(0) = (2\pi, 0, 2)$ b) $\sigma'(0) = (1,0,1)$ c) $\sigma'(0) = (0,-4,0)$

   d) $\sigma'(0) = \left(2, \frac{1}{\ln 10}, 1\right)$

2. Un punto situado en la rosca de un tornillo, que se enrosca en una viga describe una hélice circular, siendo t el ángulo de giro del tornillo, a el radio del tornillo y b la elevación correspondiente al giro de una vuelta. Determine la velocidad y el vector aceleración del movimiento del punto.

   Resp. $r'(t) = \left(-a\operatorname{sen} t, a\cos t, \frac{b}{2\pi}\right)$ $r''(t) = \left(-a\cos t, -a\operatorname{sen} t, 0\right)$

3. El movimiento de una partícula está definido por $R(t) = at\left(\cos t\hat{i} - \operatorname{sen} t\hat{j}\right)$. Hállese su velocidad, las componentes tangencial y normal de la aceleración en $t = \pi/2$.

4. La posición de una partícula móvil en el tiempo t viene dada por $r(t) = \left(t^2 - 6t\right)\hat{i} + 5t\hat{j}$. Calcule el instante en que la rapidez de la partícula es mínima.

   Resp. $t = 3$

5. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes en el valor especificado de t.

   a) $r(t) = \left\langle 6t, 3t^2, t^3\right\rangle, \quad t = 0$

   b) $r(t) = \left\langle \operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2}\right\rangle, \quad t = 1$

   Resp. a) $r'(0) = (6,0,0)$; $r''(0) = (0,6,0)$; $l: \begin{cases} x = 6t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

   b)

6. Sea una partícula de 1 gramo de masa, que sigue la trayectoria $r(t) = \left\langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\right\rangle$, con unidades en segundos y centímetros. ¿Qué fuerza actúa sobre ella en $t = 0$?
   Nota: $F = m.a$

   Resp. $F = 10^{-5}(-1,0,0)$ N

7. Sea $\sigma(t)$ una trayectoria en IR^3 con aceleración cero. Probar que σ es una recta o un punto.

8. Suponer que una partícula sigue la trayectoria $r(t) = \left(e^t, e^{-t}, \cos t\right)$ hasta que sale por una trayectoria tangente en $t = 1$. ¿Dónde está en $t = 2$?

   Resp. $(2e,\ 0,\ \cos 1 - sen 1)$

9. Una partícula se mueve sobre la curva C que se obtiene de la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $z = y$. Obtener la ecuación de la trayectoria que describiría la partícula si se separase de la curva C en el punto $\left(\sqrt{2}/2, 1/2, 1/2\right)$

Resp. $l:\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\\ z=\frac{1}{2}\left(t-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\end{cases}$

10. Calcular la curvatura y la componente normal de la aceleración de la curva $r(t)=\left\langle \cos t, e^{2t}, (t+1)^3\right\rangle, \quad para \quad t=0$

    Resp. $k=\frac{1}{13} \qquad \vec{a}_N=(-1,0,0)$

11. Encontrar las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la curva $x=6\operatorname{sen} t,\ y=4\cos 3t,\ z=2\operatorname{sen} 5t$ en el punto $t=\pi/4$

    Resp.

12. El movimiento de una partícula está representado por la función $r(t)=\left\langle \frac{5}{2}t^2-1, t^3, 2t\right\rangle, \quad t\geq 0$. En el tiempo $t=1$, la partícula es expulsada por la tangente con una rapidez de 12 unidades por segundo. ¿A qué tiempo y por qué punto atraviesa al paraboloide $z^2+y^2=4x$?

    Resp. $t=0{,}30389$ seg. $\quad P\left(\frac{69}{26}+\frac{5\sqrt{22}}{13}, \frac{22+3\sqrt{22}}{13}, \frac{32+2\sqrt{22}}{13}\right)$

13. Dada la curva $r(t)=\left\langle e^{-2t}, e^{2t}, 2\sqrt{2}\ t\right\rangle$, Encontrar la curvatura y las ecuaciones de las rectas tangente y normal en $t=0$

    Resp.

14. Hallar la función vectorial para la curva de intersección entre el cilindro $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=2$ y el plano $y=5z$. Encontrar la curvatura en el punto (2,5,1).

    Resp. $r(t)=\left(2\sqrt{2}\cos t, 5\sqrt{2}sent, \sqrt{2}sent\right); \quad k=\frac{2}{15}\sqrt{\frac{13}{15}}$

15. Una partícula se mueve suponiendo la trayectoria $r(t)=\left\langle t^2, t^3-4t, 0\right\rangle$ en t=2 seg sale por la tangente. Calcular la posición y la velocidad de la partícula en t=3 seg.

    Resp. $r'(2)=(4,8,0) \qquad l(3)=(8,8,0)$

16. Calcular la longitud de arco descrito por el vector $r(t)=\left\langle 3\cos t, -3\operatorname{sen} t, -t^2\right\rangle, \quad 0\leq t\leq 2$.

    Resp. $L=5+\frac{9}{4}\ln 3$

17. Una partícula se mueve por la trayectoria $\sigma(t)=\left(\cos t^2, \frac{1}{\sqrt{2}}sent^2, -\frac{1}{\sqrt{2}}sent^2\right)$ desde $t=1$ seg hasta $t=3\sqrt{\pi}$ seg. En $t=3\sqrt{\pi}$ seg la aceleración normal deja de actuar, y la partícula sale disparada tangencialmente a σ. Calcular la posición de la partícula 1 seg después que deja de actuar la aceleración normal.

    Resp. $\left(-1,-3\sqrt{2\pi}, 3\sqrt{2\pi}\right)$

9 INTEGRALES DE LINEA

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Calcule integrales de línea.
- Aplique el Teorema de GREEN.
- Calcule el área de regiones planas empleando integrales de líneas.

En el capítulo de funciones de variables se definió funciones vectoriales generales de la forma $\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ahora trataremos con funciones de la forma $\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

9.1. CAMPOS VECTORIALES EN $\mathbb{R}^n$

Sean $f_1,\ f_2,\ \cdots, f_n$ funciones escalares de las variables $x_{1,}x_2,\cdots,x_n$ definidas en una región Ω de $\mathbb{R}^n$. La función $\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $\overrightarrow{F} = \left(f_1(x_{1,}x_2,\cdots,x_n), f_2(x_{1,}x_2,\cdots,x_n),\cdots, f_n(x_{1,}x_2,\cdots,x_n)\right)$ se llama Campo vectorial sobre Ω.

Si $\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se lo denota como $\overrightarrow{F} = \left(M(x,y), N(x,y)\right)$.

Si $\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se lo denota como:

$$\overrightarrow{F} = \left(M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)\right)$$

Ejemplo

$\overrightarrow{F}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\overrightarrow{F} = \left(2x + y, x^2 - y^2\right)$

Algunos ejemplos físicos comunes de campos vectoriales son:

- Campos de velocidades
- Campos gravitacionales.
- Campos de fuerzas eléctricas.

Un campo conocido es el Gradiente, ∇f , de una función escalar f .

Si llamamos el vector $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, **operador NABLA**, podemos obtener la definición del gradiente y otras definiciones más.

9.2 DEFINICIONES

Sea f una función escalar y $\overrightarrow{F} = (M, N, P)$ un campo vectorial. Se define:

1. El gradiente de f como el vector

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

2. La **Divergencia** de $\vec{F}$ como

$$\nabla \bullet \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(M,N,P\right)$$

$$= \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$$

3. El **rotacional** de $\vec{F}$ como el vector

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

4. El **Lapalciano** de f como

$$\nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\bullet\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

9.3 PROPIEDADES

Sea f una función escalar y sean $\vec{F}$ y $\vec{G}$ campos vectoriales. Entonces:

1. $\nabla \bullet\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\nabla \bullet \vec{F}+\nabla \bullet \vec{G}$
2. $\nabla \bullet\left(f\ \vec{F}\right)= f\left(\nabla \bullet \vec{F}\right)+\left(\nabla f\right)\bullet \vec{F}$
3. $\nabla \times\left(f\ \vec{F}\right)= f\left(\nabla \times \vec{F}\right)+\left(\nabla f\right)\times \vec{F}$
4. $\nabla \bullet\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\left(\nabla \times \vec{F}\right)\bullet \vec{G}+\left(\nabla \times \vec{G}\right)\bullet \vec{F}$
5. $\nabla \times\left(\nabla f\right)=\vec{0}$
6. $\nabla \bullet\left(\nabla \times \vec{F}\right)=\vec{0}$

$$7.\ \nabla \times \left(\nabla f + \nabla \times \vec{F} \right) = \nabla \times \nabla \times \vec{F}$$

Las demostraciones de estas propiedades se la dejamos al lector.

9.4 CAMPOS VECTORIALES CONSERVATIVOS

Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice que es conservativo si existe alguna función diferenciable f tal que $\vec{F} = \nabla f$. La función f se llama función potencial de $\vec{F}$.

9.4.1 Teorema.

Un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo y si sólo si $\nabla \times \vec{F} = \vec{0}$.

Ejemplo 1

Determine si $\vec{F} = \left(2xy, x^2 - y\right)$ es conservativo. En caso de serlo encuentre la función potencial.

SOLUCIÓN:

El rotacional de $\vec{F}$ sería:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - y & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, 2x - 2x\right) = \left(0, 0, 0\right)$$

Por tanto, $\vec{F}$ si es conservativo.

Note que para campos de $\mathbb{R}^2$, basta que $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ para ser conservativos. ¿Por qué?.

Cuando el campo es conservativo la función potencial existe y además:

$$\vec{F} = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(2xy, x^2 - y\right)$$

Es decir conocemos las derivadas parciales de la función potencial, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \Rightarrow f = \int 2xy\, dx \Rightarrow f\left(x, y\right) = x^2 y + g\left(y\right) + C_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - y \Rightarrow f = \int \left(x^2 - y\right) dy \Rightarrow f\left(x, y\right) = x^2 y - \frac{y^2}{2} + h\left(x\right) + C_2$$

Haciendo superposición de soluciones, la función potencial sería:

$$f\left(x, y\right) = x^2 y - \frac{y^2}{2} + C$$

Ejemplo 2

Determine si $\vec{F}=\left(2xy, x^2+z^2, 2zy\right)$ es conservativo. En caso de serlo encuentre la función potencial.

<u>SOLUCIÓN:</u>

El rotacional de $\vec{F}$ sería:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+z^2 & 2zy \end{vmatrix}=\left(2z-2z, 0, 2x-2x\right)=\left(0,0,0\right)$$

Por tanto, $\vec{F}$ si es conservativo.

Ahora tenemos:

$$\vec{F}=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(2xy, x^2+z^2, 2zy\right)$$

Entonces

$$f=\int 2xy\,dx \Rightarrow f(x,y,z)=x^2y+g\left(y,z\right)+C_1$$

$$f=\int \left(x^2+z^2\right)dy \Rightarrow f\left(x,y,z\right)=x^2y+z^2y+h\left(x,z\right)+C_2$$

$$f=\int \left(2zy\right)dz \Rightarrow f\left(x,y,z\right)=z^2y+h\left(x,y\right)+C_3$$

Haciendo Superposición de soluciones:

$$f\left(x,y,z\right)=x^2y+z^2y+C$$

9.5 INTEGRALES DE LÍNEAS

En los capítulos 6 y 7 tratamos integrales de funciones escalares sobre regiones de $\mathbb{R}^2$ o regiones de $\mathbb{R}^3$, ahora trataremos integrales de funciones escalares y funciones vectoriales sobre curvas.

9.5.1 Integrales de líneas de funciones escalares.

Sea $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ una función escalar de n variables definida en una región U que contiene una curva suave C de longitud finita, la integral de línea de f sobre C se define como:

$$\int_C f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)ds=\lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n\right)\Delta s_i$$

Supuesto que este límite exista.

9.5.1.1 Teorema. Calculo de una integral de línea como integral definida.

Sea f continua en una región que contiene una curva suave C, definida por $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ donde $a \leq t \leq b$, entonces:

$$\int_C f\ ds = \int_C \left[f \circ \vec{r}(t) \right] \left\| \vec{r}\,'(t) \right\| dt$$

$$= \int_a^b f\left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right) \sqrt{\left[x_1'(t)\right]^2 + \left[x_2'(t)\right]^2 + \cdots + \left[x_n'(t)\right]^2}\, dt$$

Si $f = 1$ entonces tenemos $\int_C ds$, la longitud de la curva.

Ejemplo.

Calcular $\int_C \left(x^2 - y + 3z\right) ds$ donde C: segmento de recta desde el punto $(0,0,0)$ al punto $(1,2,1)$.

SOLUCIÓN:

La ecuación de C es $\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + 2t \\ z = 0 + t \end{cases}$; es decir: $\vec{r}(t) = (t, 2t, t)$.

Entonces:

$$\int_C fds = \int_C \left[f \circ \vec{r}(t) \right] \left\| \vec{r}\,'(t) \right\| dt$$

$$= \int_0^1 \left(t^2 - 2t + 3t\right)\sqrt{1 + 2^2 + 1^2}\,dt$$

$$= \sqrt{6}\int_0^1 \left(t^2 + t\right)dt$$

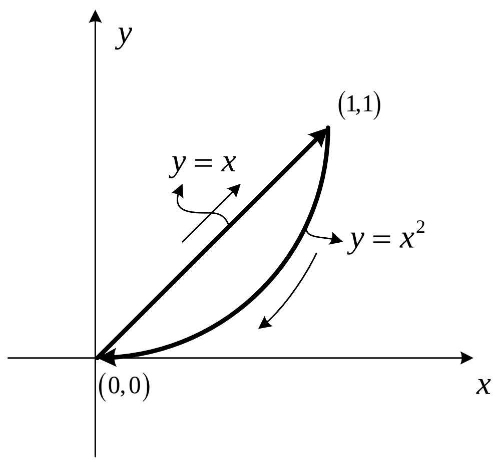
$$= \sqrt{6}\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \sqrt{6}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_C xds$ donde C: es la curva que se presenta en el gráfico:



SOLUCIÓN:

Por la forma de C debemos hacer dos integrales; es decir:

$$\int_C xds = \int_{C_1} xds + \int_{C_2} xds$$ donde $C_1 : y = x$ y $C_2 : y = x^2$.

Para la primera integral $C_1 = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

$$\int_{C_1} xds = \int_0^1 t\sqrt{1^2+1^2}\,dt = \sqrt{2}\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para la segunda integral $C_2 = \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$

$$\int_{C_2} xds = \int_1^0 t\sqrt{1^2+(2t)^2}\,dt = \int_1^0 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{2}{3}\frac{\left(1+4t^2\right)^{3/2}}{8}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}-\frac{1}{12}5^{3/2}$$

Por tanto:

$$\int_C xds = \int_{C_1} xds + \int_{C_2} xds = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{12}-\frac{1}{12}5^{3/2}$$

9.5.2 Integrales de línea de Campos vectoriales.

Sea $\vec{F}: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por $\vec{r}(t) = \left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)$ donde $a \le t \le b$. La integral de línea de $\vec{F}$ sobre C se define como:

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C \vec{F} \bullet \vec{T}\, ds$$

Reemplazando $\vec{T} = \dfrac{r´(t)}{\left\|r´(t)\right\|}$ y $ds = \left\|r´(t)\right\| dt$

$$\int_C \vec{F} \bullet \vec{T}\, ds = \int_a^b \vec{F} \bullet \frac{r´(t)}{\left\|r´(t)\right\|}\left\|r´(t)\right\| dt$$

Entonces:

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} == \int_C \left[\left(\vec{F}\left(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\right)\right) \bullet \left(r´(t)\right)\right] dt$$

Ejemplo

Calcular $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F} = (x, -xy, z^2)$ y C es la curva definida por $\vec{r}(t) = (\cos t, sent, t)$ desde el punto $(0,0,0)$ hasta el punto $(1,0,2\pi)$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}
\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} (x, -xy, z^2) \bullet (-sent, \cos t, 1)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos t, -\cos t sent, t^2) \bullet (-sent, \cos t, 1)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos t sent - \cos^2 t sent + t^2)\, dt \\
&= \left(\frac{\cos^2 t}{2} + \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{8\pi^3}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 \right) \\
&= \frac{8\pi^3}{3}
\end{aligned}$$

La integral de línea que acabamos de definir se la puede interpretar como el trabajo que tiene que realizar un campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula sobre la curva C, si denotamos al trabajo como W, entonces:

$$W = \int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

9.5.2.1 Forma Diferencial

En la integral $\int_C \left[\vec{F} \bullet r'(t) \right] dt$

Suponga que $\vec{F} = (M, N, P)$ y que $C : \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ entonces tenemos que $\vec{r}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$

Reemplazando:

$$\int_C \left[\vec{F} \bullet r'(t) \right] dt = \int_C \left[(M, N, P) \bullet \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \right] dt$$

Entonces:

$$\int_C \left[\vec{F} \bullet r'(t)\right] dt = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

Ejemplo

Calcular $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F} = \left(y, x^2\right)$ y $C: y = 4x - x^2$ desde el punto $(4,0)$ hasta el punto $(1,3)$.

SOLUCIÓN:

Empleando la forma diferencial

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy$$

$$= \int_C ydx + x^2 dy$$

En este caso $y = 4x - x^2$ entonces $dy = (4 - 2x)dx$

Reemplazando:

$$\int_C ydx + x^2 dy = \int_4^1 \left(4x - x^2\right)dx + x^2\left(4 - 2x\right)dx$$

$$= \int_4^1 \left(4x - x^2 + 4x^2 - 2x^3\right)dx$$

$$= \int_4^1 \left(4x + 3x^2 - 2x^3\right)dx$$

$$= \left(4\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_4^1$$

$$= \frac{69}{2}$$

Veamos ahora que existen campos vectoriales que producen el mismo efecto independientemente de la trayectoria.

9.5.3 Independencia de la Trayectoria

Ejemplo

Calcular $\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F} = (4xy, 2x^2)$ y $C: y = x^2$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(1,1)$.

SOLUCIÓN:
Empleando la forma diferencial

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy$$

$$= \int_C 4xydx + 2x^2dy$$

En este caso $y = x^2$ entonces $dy = 2xdx$
Reemplazando:

$$\int_C 4xydx + 2x^2dy = \int_0^1 4x\left(x^2\right)dx + 2x^2\left(2xdx\right)$$

$$= \int_0^1 8x^3dx$$

$$= \left.\frac{8x^4}{4}\right|_0^1$$

$$= 2$$

- Si empleamos la trayectoria $y = x^3$ entonces $dy = 3x^2dx$

Reemplazando:

$$\int_C 4xydx + 2x^2dy = \int_0^1 4x\left(x^3\right)dx + 2x^2\left(3x^2dx\right)$$

$$= \int_0^1 10x^4dx$$

$$= \left.\frac{10x^5}{5}\right|_0^1$$

$$= 2$$

- Si empleamos la trayectoria $y = x$ entonces $dy = dx$

Reemplazando:

$$\int_C 4xydx + 2x^2dy = \int_0^1 4x(x)dx + 2x^2(dx)$$
$$= \int_0^1 6x^2dx$$
$$= \left.\frac{6x^3}{3}\right|_0^1$$
$$= 2$$

Note que se obtienen los mismos resultados para diferentes trayectorias, además observe que el campo $\overrightarrow{F}$ es conservativo debido a que:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$
$$\frac{\partial\left(2x^2\right)}{\partial x} = \frac{\partial(4xy)}{\partial y}$$
$$4x = 4x$$

9.5.3.1 Teorema

> Si $\overrightarrow{F}$ es continuo en una región abierta conexa, entonces la integral de línea $\int_C \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ es independiente del camino si y sólo si $\overrightarrow{F}$ es conservativo.

Ejemplo

Calcular $\int_C \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r}$ donde $\overrightarrow{F} = \left(y^3 + 1, 3xy^2 + 1\right)$ y $C : \overrightarrow{r}(t) = (1 - \cos t, sent)$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,0)$.

SOLUCIÓN:

Empleando la forma diferencial

$$\int_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_C Mdx + Ndy$$

$$= \int_C \left(y^3+1\right)dx + \left(3xy^2+1\right)dy$$

En este caso $\begin{cases} x = 1-\cos t \\ y = sent \end{cases}$ entonces $\begin{cases} dx = sentdt \\ dy = \cos tdt \end{cases}$

Reemplazando:

$$\int_C \left(y^3+1\right)dx + \left(3xy^2+1\right)dy = \int_C \left(sen^3t+1\right)\left(sentdt\right) + \left(3\left(1-\cos t\right)sen^2t+1\right)\left(\cos tdt\right)$$

Se observa que a integral está difícil de evaluar.

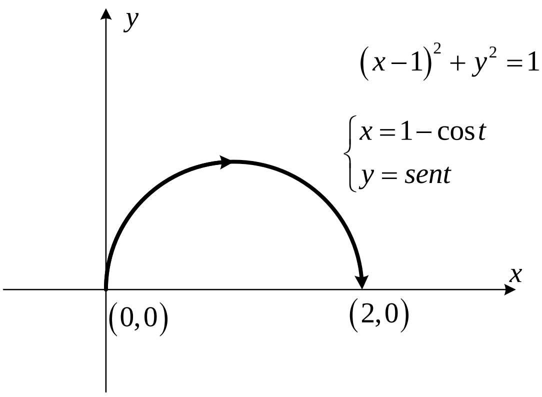
Ahora veamos si $\vec{F}$ es conservativo:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\left(3xy^2+1\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(y^3+1\right)}{\partial y}$$

$$3y^2 = 3y^2$$

Como $\vec{F}$ si es conservativo, entonces es independiente de la trayectoria:



Mejor empleemos una trayectoria simple:

$y = 0$ entonces $dy = 0$

Reemplazando:

$$\int_C \left(y^3+1\right)dx + \left(3xy^2+1\right)dy = \int_0^2 \left(0+1\right)dx + \left(0+1\right)\left(0\right)$$

$$= \int_0^2 dx$$

$$= x\Big|_0^2$$

$$= 2$$

Sin embargo podemos evaluar la integral de línea de otra manera para campos conservativos.

9.5.3.2 Teorema Fundamental

Sea C una curva suave a trozos situada en una región abierta R dada por dada por $\vec{r}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ donde $a\leq t\leq b$. Si $\vec{F}=(M,N,P)$ es conservativo en R; y M , N y P son continuas en R entonces:

$$\int_C \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_C \nabla f\bullet d\vec{r}=f_{final}-f_{inicial}$$

Siendo f una función potencial de $\vec{F}$.

Es decir:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_C \nabla f\bullet d\vec{r}&=\int_C\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\bullet(dx,dy,dz)\\&=\int_C\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz\right)\\&=\int_C df\\&=f_{final}-f_{inicial}\end{aligned}$$

Ejemplo 1

En el ejemplo anterior, como $\vec{F}=(y^3+1,3xy^2+1)$ es conservativo podemos encontrar su función potencial y aplicar el teorema anterior:

Hallando la función potencial.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^3+1\Rightarrow f=(y^3+1)x+g(y)+C_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3xy^2+1\Rightarrow f=xy^3+y+h(x)+C_2$$

Entonces:

$$f(x,y)=xy^3+x+y+C$$

$$\int_C \vec{F}\bullet d\vec{r} = f_{final} - f_{inicial}$$
$$= \left[2\left(0^3\right)+2+0+C\right]-\left[0\left(0^3\right)+0+0+C\right]$$
$$= 2$$

Ejemplo 2

Calcular $\int_C \vec{F}\bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F}=\left(\frac{z}{x},\frac{z}{y},\ln xy\right)$ y $C:\vec{r}(t)=\left(\frac{1}{1+t^2},t^2+t+1,t\right)$ $-1\le t\le 1$.

SOLUCIÓN:

Realizar el cálculo de la integral de lineal convencionalmente puede resultar complicado. Veamos si $\vec{F}$ es conservativo:

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{z}{x} & \frac{z}{y} & \ln xy \end{vmatrix} = \left(\frac{x}{xy}-\frac{1}{y},\frac{y}{xy}-\frac{1}{x},0-0\right)=\left(0,0,0\right)$$

Entonces $\vec{F}$ es conservativo y por ende independiente de la trayectoria; se podría utilizar una trayectoria simple, por ejemplo el segmento de recta que va desde el punto

$$\vec{r}(-1)=\left(\frac{1}{1+(-1)^2},(-1)^2+(-1)+1,(-1)\right)=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$

al punto $\vec{r}(1)=\left(\frac{1}{1+(1)^2},(1)^2+(1)+1,(1)\right)=\left(\frac{1}{2},3,1\right)$

O mejor aún, se podría utilizar la función potencial, hallémosla:

$$\vec{F}=\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{z}{x},\frac{z}{y},\ln xy\right)$$

$$f=\int\frac{z}{x}dx = z\ln x + g(y,z)+C_1$$

$$f=\int\frac{z}{y}dy = z\ln y + h(x,z)+C_2$$

$$f=\int \ln xy dz = z\ln xy + I(x,y)+C_3 = z\ln x + z\ln y + g(x,y)+C_3$$

Por tanto $f(x,y,z)=z\ln xy + C$

$$\int_C \vec{F}\bullet d\vec{r} = f\left(\frac{1}{2},3,1\right) - f\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$$
$$= \left[1\ln\left(\frac{1}{2}(3)\right)+C\right] - \left[(-1)\ln\left(\frac{1}{2}(1)\right)+C\right]$$
$$= \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{1}{2}$$
$$= \ln\frac{3}{4}$$

Si la **trayectoria es cerrada** y si el **campo es conservativo y continuo** dentro de la región que encierra la curva entonces:

$$\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{r} = 0$$

Ejemplo

Calcular $\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ y $C: x^2+y^2=1$

SOLUCIÓN:

Veamos si $\vec{F}$ es conservativo. Como es un campo de $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\left(x^2+y^2\right)-x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-1\left(x^2+y^2\right)-y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Por tanto $\vec{F}$ si es conservativo.

Como la trayectoria es cerrada se podría pensar que el valor de la integral de línea debería ser cero, pero observe que el campo no es continuo en $(0,0)$, entonces debemos evaluar la integral de línea.

La curva en forma paramétrica es $C:\begin{cases} x=\cos t \\ y = sent\end{cases}$ y en forma vectorial $\vec{r}(t) = (\cos t, sent)$

La Integral de línea sería:

$$\oint\limits_C \vec{F}\bullet d\vec{r} = \oint\limits_C \vec{F}\bullet \vec{r}\,'\,dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)(-sent, \cos t)\,dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{-sent}{1}, \frac{\cos t}{1}\right)(-sent, \cos t)\,dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(sen^2 t + \cos^2 t\right)dt$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi$$

Existe otro mecanismo para evaluar integrales de líneas en el caso de caminos cerrados.

9.6 TEOREMA DE GREEN

Sea $\vec{F} = (M, N)$ un campo vectorial de $\mathbb{R}^2$. Sea R una región simplemente conexa con frontera C suave a trozos orientada en sentido antihorario. Si M, N, $\frac{\partial N}{\partial x}$, $\frac{\partial M}{\partial y}$ son continuas en una región abierta que contiene a R, entonces:

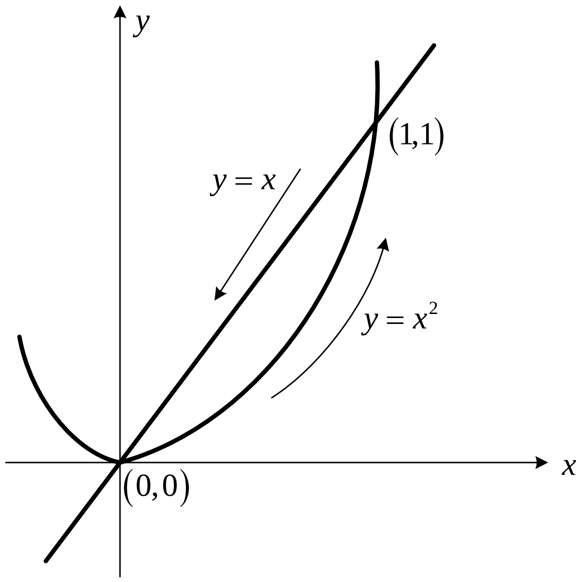
$$\oint\limits_C \vec{F}\bullet d\vec{r} = \oint\limits_C Mdx + Ndy = \iint\limits_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$

Ejemplo 1

Calcular $\oint\limits_C \vec{F}\bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F} = \left(y^3, x^3 + 3xy^2\right)$ y $C:$ es el camino desde $(0,0)$ a $(1,1)$ sobre $y = x^2$ y desde $(1,1)$ a $(0,0)$ sobre $y = x$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

La evaluaremos primero empleando una integral de línea y luego por el Teorema de Green para comparar procedimientos y comprobar resultados.



<u>PRIMER MÉTODO:</u> Por integral de línea:

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \oint_C Mdx + Ndy = \oint_C y^3 dx + \left(x^3 + 3xy^2\right) dy$$

Hay 2 trayectorias:

$C_1 : y = x^2$ entonces $dy = 2xdx$

$$\int_{C_1} y^3 dx + \left(x^3 + 3xy^2\right) dy = \int_0^1 \left(x^2\right)^3 dx + \left(x^3 + 3x\left(x^2\right)^2\right)\left(2xdx\right)$$

$$= \int_0^1 \left(x^6 + 2x^4 + 6x^6\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(7x^6 + 2x^4\right) dx$$

$$= 7\frac{x^7}{7} + 2\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{7}{5}$$

$C_2 : y = x$ entonces $dy = dx$

$$\int_{C_2} y^3dx + \left(x^3 + 3xy^2\right)dy = \int_1^0 (x)^3\, dx + \left(x^3 + 3x(x)^2\right)(xdx)$$
$$= \int_1^0 \left(x^3 + x^3 + 3x^3\right)dx$$
$$= \int_1^0 \left(5x^3\right)dx$$
$$= 5\frac{x^4}{4}\bigg|_1^0$$
$$= -\frac{5}{4}$$

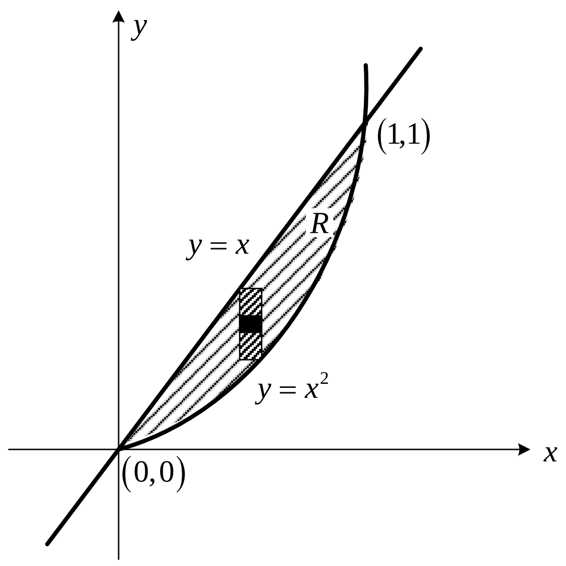
Por lo tanto:

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \frac{7}{5} - \frac{5}{4} = \frac{3}{20}$$

SEGUNDO METODO: Empleando el TEOREMA DE GREEN

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dA = \iint_R \left(\frac{\partial\left(x^3 + 3xy^2\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial y}\right)dA$$

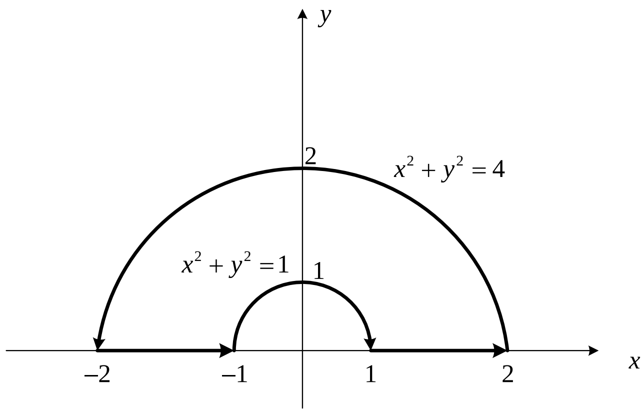
La región R es:



$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA=\int_0^1\int_{x^2}^{x}\left(3x^2+3y^2-3y^2\right)dydx$$
$$=\int_0^1\int_{x^3}^{x}\left(3x^2\right)dydx$$
$$=\int_0^1 3x^2y\Big|_{x^2}^{x}dx$$
$$=\int_0^1 3x^2\left(x-x^2\right)dx$$
$$=\int_0^1\left(3x^3-3x^4\right)dx$$
$$=3\frac{x^4}{4}-3\frac{x^5}{5}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{3}{5}$$
$$=\frac{3}{20}$$

Ejemplo 2

Calcular $\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{r}$ donde $\vec{F}=\left(\operatorname{arc} senx+y^2,\cos y-x^2\right)$ y $C:$ es el camino que se describe en la gráfica:



SOLUCIÓN:
Aquí es mejor por GREEN, ¿Porqué?

$$\oint_C \vec{F}\bullet d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA$$
$$= \iint_R \left(\frac{\partial\left(\cos y - x^2\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\operatorname{arc}senx + y^2\right)}{\partial y}\right)dA$$
$$= \iint_R (-2x-2y)dA$$

Pasando a Polares:

$$\iint_R (-2x-2y)dA = -2\int_0^{\pi}\int_1^{2}\left(r\cos\theta + rsen\theta\right)rdrd\theta$$
$$= -2\int_0^{\pi}\int_1^{2}\left(\cos\theta + sen\theta\right)r^2drd\theta$$
$$= -2\int_0^{\pi}\left(\cos\theta + sen\theta\right)\left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 d\theta$$
$$= -2\left(\frac{2^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right)\left.\left(sen\theta - \cos\theta\right)\right|_0^{\pi}$$
$$= -2\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)\left[1-(-1)\right]$$
$$= -\frac{28}{3}$$

9.7 INTEGRAL DE LÍNEA PARA EL ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA.

Con integrales de líneas también podemos calcular el área de regiones planas. En la formula de Green, si tomamos $M = -\frac{1}{2}y$ y $N = \frac{1}{2}x$ entonces

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dA = \oint_C Mdx + Ndy$$
$$\iint_R \left(\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)dA = \oint_C -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy$$
$$\iint_R dA = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

9.7.1 Teorema

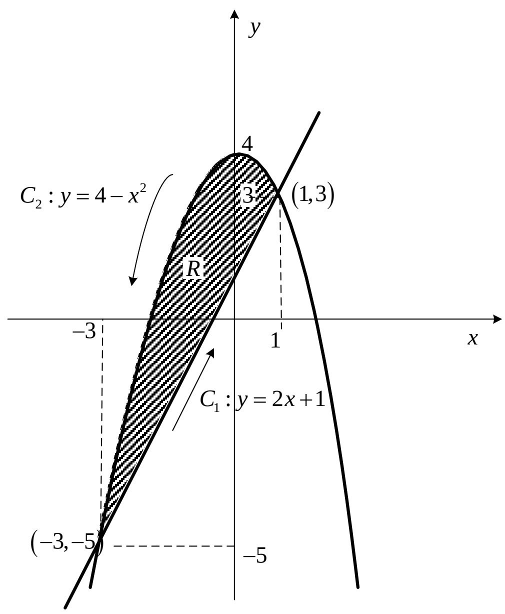
Sea R una región plana limitada por una curva cerrada simple a trozos C. El área de R viene dada por:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Ejemplo 1

Emplear una integral de línea para calcular el área de la región limitada por $\begin{cases} y = 2x+1 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$

SOLUCIÓN:
Haciendo un dibujo de la región



La curva C que encierra R está compuesta por dos trayectorias diferentes, calcularemos la integral de línea por cada trayectoria, y luego sumaremos los resultados.

Primero: $C_1 : y = 2x+1$ entonces $dy = 2dx$

Reemplazando y evaluando:

$$\frac{1}{2}\int_{C_1} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} x(2dx) - (2x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} (2x - 2x - 1)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{1} -dx$$
$$= -\frac{1}{2}x\Big|_{-3}^{1}$$
$$= -2$$

Segundo: $C_2 : y = 4 - x^2$ entonces $dy = -2xdx$

Reemplazando y evaluando:

$$\frac{1}{2}\int_{C_2} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{1}^{-3} x(-2xdx) - (4 - x^2)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{-3} (-2x^2 + x^2 - 4)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{1}^{-3} (-x^2 - 4)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{1}^{-3}$$
$$= \frac{38}{3}$$

Finalmente, sumando:

$$A = -2 + \frac{38}{3} = \frac{32}{3}$$

Ejemplo 2

Hallar el área de la elipse con ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

SOLUCIÓN:

Las ecuaciones paramétrica de la elipse son: $C : \begin{cases} x = a\cos t \\ y = bsent \end{cases}$

Entonces $\begin{cases} dx = -asent\ dt \\ dy = b\cos t\ dt \end{cases}$

Reemplazando en la formula anterior y luego evaluando, resulta:

$$
\begin{aligned}
A=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t)(b\cos tdt)-(bsent)(-asentdt)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\cos^2 tdt+absen^2tdt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\left(\cos^2 t+sen^2t\right)dt\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} abdt\\
&=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt\\
&=\frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi}\\
&=\pi ab
\end{aligned}
$$

Ejercicios Propuestos 9.1

1. La fuerza ejercida por una carga eléctrica ubicada en el origen sobre una partícula cargada situada en un punto (x,y, z) , con vector posición $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ es $F(r)=k\frac{r}{\|r\|^3}$,donde k es una constante. Encuentre el trabajo realizado cuando la partícula se mueve a lo largo de una recta de (2,0,0) a (2,1,5).
2. Dado el campo vectorial $F(x,y,z)=\left(2xyz+\operatorname{sen}x\right)i+x^2zj+x^2yk$, demostrar que F es un campo conservativo y encontrar su función potencial.
3. Calcular $\int_C F\bullet dr$ siendo C la trayectoria $C(t)=\left\langle (t-1)^3+1,\ \cos^5(\pi t),\ -\cos^8(\pi t)\right\rangle$, $t\in[1,2]$ y $F(x,y,z)=\left(2xz^3+6y,\ 6x-2yz,\ 3x^2z^2-y^2\right)$
4. Calcular $\int_C x^3dy-y^3dx$ donde C es el círculo unitario centrado en el origen.
5. Sea $F(x,y)=\left\langle xe^{-y^2},\ -x^2ye^{-y^2}+1\big/\left(x^2+y^2\right)\right\rangle$, calcular el trabajo de F en el contorno del cuadrado determinado por: $|x|\le a$; $|y|\le a$
6. Evaluar la integral $\oint_C x^2ydx-y^2xdy$; donde C es la curva que consta del arco $4y=x^3$ de (0,0) a (2,2) y del segmento de recta que va de (2,2) a (0,0)
7. Verificar el teorema de Green en la integral $\oint_C 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, siendo C el contorno del triángulo con vértices en los puntos (1,1),(2,2), (1,3).
8. Hallar $\int_C xydx+2x^2dy$ donde C consta de los segmentos de recta que van desde (0,2) a (-2,0) y de allí a (2,0) y luego la parte de la circunferencia $x^2+y^2=4$ para x>0 y y>0.

9. Una partícula empieza en el punto (-2,0), se mueve a lo largo del eje x hacia (2,0) y luego a lo largo de la semicircunferencia $y=\sqrt{4-x^2}$ hacia el punto inicial. Encontrar el trabajo sobre esta partícula por el campo de fuerzas $F(x,y)=\left(x,x^3+3xy^2\right)$.
10. Calcular: $\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\left[xy+\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]dy$, donde C es la circunferencia $x^2+y^2=a^2$
11. Utilizando una integral de línea calcular el área de la región encerrada por la curva $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$
12. Empleando una integral de línea, encuentre el área de la región R limitada por las gráficas $y=x^2+2$; $y=-x$; $x=-2$; $x=2$.

10 INTEGRALES DE SUPERFICIE

Objetivos.

Se persigue que el estudiante:

- Calcule integrales de Superficies y de Volúmenes.
- Aplique el Teorema de Stokes.
- Aplique el Teorema de Gauss.

10.1 INTEGRALES DE SUPERFICIES DE FUNCIONES ESCALARES.

En el capítulo de integrales Dobles se estableció la manera de calcular área de una superficie, ahora se trata de calcular el efecto de una función escalar sobre una superficie. Es decir, evaluar integrales del tipo:

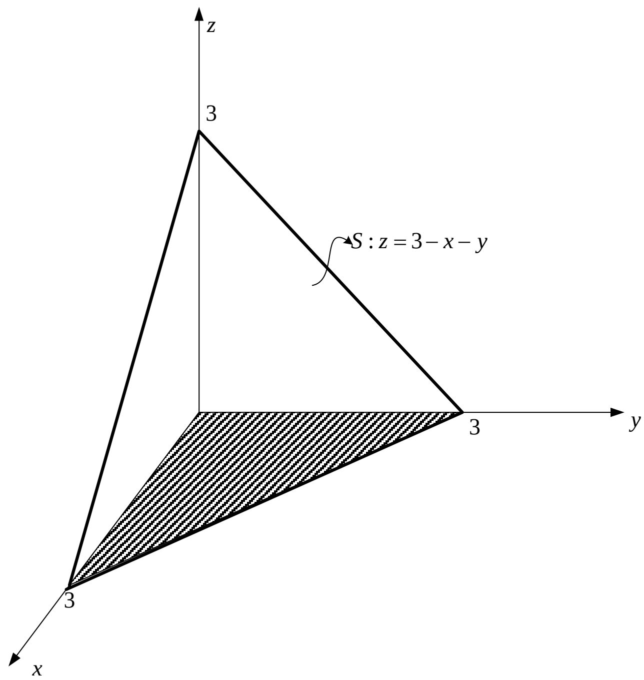
$$\iint_S f(x,y,z)\,dS$$

Ejemplo.

Calcular $\iint_S (xyz)\,dS$ donde S: porción del plano $x+y+z=3$ en el primer octante.

SOLUCIÓN:

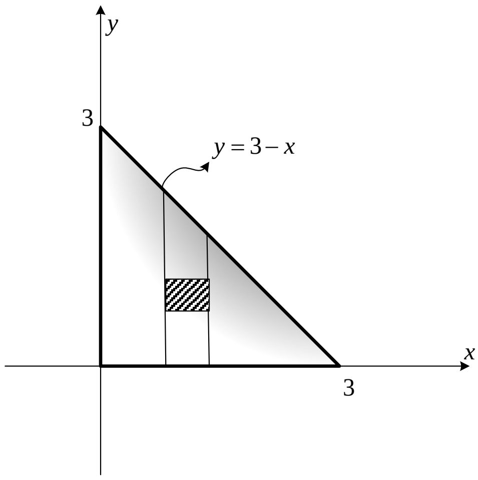
Primero hacemos un dibujo de la superficie:



Proyectamos la superficie en el plano xy, por tanto:

$$\iint_S (xyz)\,dS = \iint_R (xyz)\sqrt{1+z_x^{\,2}+z_y^{\,2}}\,dydx$$

La región de integración sería:



Haciendo las sustituciones correspondientes y evaluando la integral doble:

$$\iint_R (xyz)\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,dydx = \int_0^3\int_0^{3-x}\left(xy\left(3-x-y\right)\right)\sqrt{1+\left(-1\right)^2+\left(-1\right)^2}\;dydx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^3\int_0^{3-x}\left(3xy-x^2y-xy^2\right)dydx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^3\left[\left(3x-x^2\right)\frac{y^2}{2}-x\frac{y^3}{3}\right]_0^{3-x}dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^3\left[x\left(3-x\right)\frac{\left(3-x\right)^2}{2}-x\frac{\left(3-x\right)^3}{3}\right]dx$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\int_0^3 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(3-x\right)^3 dx}_{dv}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[x\frac{\left(3-x\right)^4}{-4}-\int\frac{\left(3-x\right)^4}{-4}dx\right]_0^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[x\frac{\left(3-x\right)^4}{-4}-\frac{\left(3-x\right)^5}{20}\right]_0^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\frac{3^5}{20}\right]$$

$$= \frac{81\sqrt{3}}{40}$$

Puede ocurrir que no sea posible proyectar la superficie en el plano xy y que si se la pueda proyectar en el plano xz o en el plano yz, en tales casos tenemos:

- **Proyectando en el plano xz.**

  Si la ecuación de la superficie está dada por $y = f(x,z)$

$$dS = \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_z^{\,2}}\ dxdz$$

  O en forma implícita, si $F(x,y,z) = 0$ entonces;

$$dS = \frac{\sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}}{\left|F_y\right|}dxdz$$

- **Proyectando en el plano yz.**

  Si la ecuación de la superficie está dada por $x = f(y,z)$

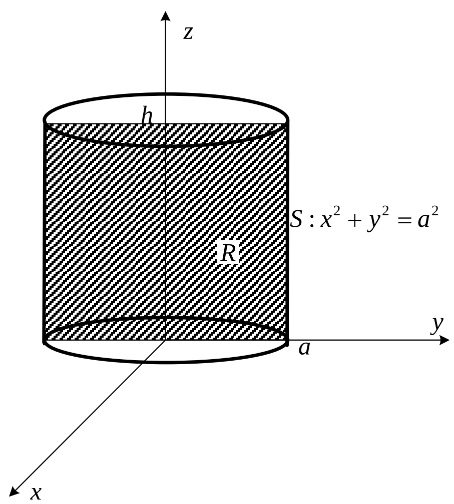
$$dS = \sqrt{1 + f_y^{\,2} + f_z^{\,2}}\ dydz$$

  O en forma implícita si $F(x,y,z) = 0$, entonces:

$$dS = \frac{\sqrt{F_x^{\,2} + F_y^{\,2} + F_z^{\,2}}}{\left|F_x\right|}dydz$$

Ejemplo

Demuestre que el área lateral del cilindro, que se muestra es $2\pi ah$.



SOLUCIÓN:

Proyectando en el plano zy

$$S = \iint_R \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_x|}\,dydz = 4\int_0^h \int_0^a \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 0^2}}{2x}\,dydz$$

$$= 4\int_0^h \int_0^a \frac{2a}{2\sqrt{a^2 - y^2}}\,dydz$$

$$= 4a\left(arcsen\frac{y}{a}\right)_0^a (z)_0^h$$

$$= 4a\left(arcsen1 - arcsen0\right)h$$

$$= 4a\left(\frac{\pi}{2}\right)h$$

$$= 2\pi ah$$

10.1.1 SUPERFICIES PARAMETRIZADAS.

Si para una superficie están dadas sus ecuaciones paramétricas:

$$S:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Que definen su vector posición:

$$\vec{r}(u,v) = \left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

Entonces el diferencial de superficie está dado por:

$$dS = \left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| dudv$$

Ejemplo.

Hallar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

SOLUCIÓN:

Empleando las ecuaciones paramétricas para la esfera:

$$S:\begin{cases} x = a\ sen\phi \cos\theta \\ y = a\ sen\phi\ sen\theta \quad ;0 \le \phi \le \pi; 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = a\cos\phi \end{cases}$$

El vector posición para los puntos de la esfera sería:

$$\vec{r}(\phi,\theta) = \left(a\ sen\phi\cos\theta, a\ sen\phi\ sen\theta, a\cos\phi\right)$$

Las derivadas parciales serían:

$$\vec{r}_t = \left(a\cos\phi\cos\theta, a\cos\phi\ sen\theta, -a\ sen\phi\right)$$

$$\vec{r}_\theta = \left(-a\ sen\phi\ sen\theta, a\ sen\phi\cos\theta, 0\right)$$

El producto cruz y su magnitud:

$$\vec{r}_t \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\, sen\theta & -a\, sen\phi \\ -a\, sen\phi\, sen\theta & a\, sen\phi\cos\theta & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \left(a^2 sen^2\phi\cos\theta, a^2 sen^2\phi sen\theta, a^2 sen\phi\cos\phi\cos^2\theta + a^2 sen\phi\cos\phi sen^2\theta\right)$$

$$\left\|\vec{r}_t \times \vec{r}_\theta\right\| = \sqrt{a^4 sen^4\phi\cos^2\theta + a^4 sen^4\phi sen^2\theta + \left(a^2 sen\phi\cos\phi\cos^2\theta + a^2 sen\phi\cos\phi sen^2\theta\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^4 sen^4\phi\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right) + a^4 sen^2\phi\cos^2\phi\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^4 sen^4\phi + a^4 sen^2\phi\cos^2\phi}$$
$$= \sqrt{a^4 sen^2\phi\left(sen^2\phi + \cos^2\phi\right)}$$
$$\left\|\vec{r}_t \times \vec{r}_\theta\right\| = a^2 sen\phi$$

El área de la esfera estaría dado por:

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 sen\phi\, d\phi\, d\theta = a^2\left(-\cos\phi\right)\Big|_0^{\pi}\left(\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = a^2\left(1+1\right)\left(2\pi\right) = 4\pi a^2$$

Las integrales de funciones escalares sobre superficies parametrizas serían de la forma:

$$\iint_{R'} f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)\left\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\right\| du dv$$

Ejercicios propuestos 10.1

1. Encontrar el área de la superficie total que encierra el sólido formado por el cilindro $z = x^2$, y los planos $y = 0$; $x + 2y + z = 2$
2. Evaluar $\iint_S \left(x^2 + y^2\right) dS$, siendo S la superficie del cono $z^2 = 3\left(x^2 + y^2\right)$ entre z=0 y z=3
3. Considere la superficie $S = S_1 \cup S_2$, siendo S_1 la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ entre z=1 y z=2, S_2 la superficie semiesférica $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4,\quad z \ge 2$. Si $F = (z, x, y)$, evaluar la integral $\iint_S \left(\nabla \times F\right) \bullet n dS$
4. Calcular el área de la superficie dada por: $\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = 2r\cos\phi \\ z = \phi \end{cases}$ $\quad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \phi \le 2\pi$

Las integrales de superficies nos permitirán evaluar integrales de funciones vectoriales sobre curvas que encierran superficies, para lo cual tenemos una generalización del teorema de GREEN.

10.2 TEOREMA DE STOKES

Sea S una superficie orientada con vector unitario N cuyo contorno es una curva cerrada simple C, suave a trozos. Si $\overrightarrow{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta R que contiene a S y a C, entonces:

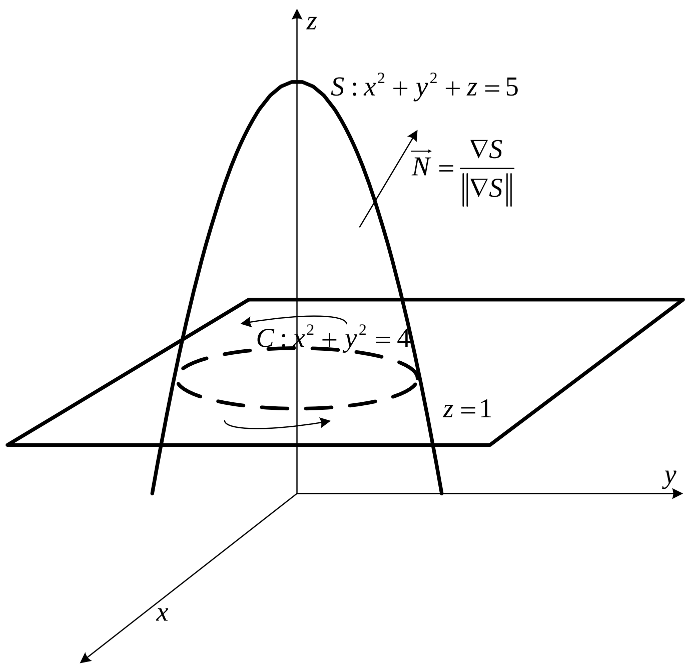
$$\oint_C \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r} = \iint_S \left(\nabla \times \overrightarrow{F}\right) \bullet N \; dS$$

Ejemplo.

Comprobar el Teorema de Stokes para $\overrightarrow{F} = \left(2z, x, y^2\right)$, S: superficie del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ y C: traza de S en el plano $z = 1$.

<u>SOLUCIÓN</u>:

Identificando S y C:



POR INTEGRAL DE LÍNEA.

$$\oint_C \overrightarrow{F} \bullet d\overrightarrow{r} = \oint_C Mdx + Ndy + Pdz$$

$$= \oint_C 2zdx + xdy + y^2 dz$$

En este caso $C:\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2sent \\ z = 0 \end{cases}$ entonces $\begin{cases} dx = -2sent\ dt \\ dy = 2\cos t\ dt \\ dz = 0 \end{cases}$

Reemplazando y evaluando:

$$\oint_C 2zdx + xdy + y^2dz = \int_0^{2\pi} 2(0)[-2sentdt] + (2\cos t)[2\cos tdt] + (2sent)^2(0)$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\cos^2 tdt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2t)}{2}dt$$

$$= 2\left(t + \frac{sen2t}{2}\right)_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi$$

APLICANDO EL TEOREMA DE STOKES. POR INTEGRAL DE SUPERFICIE.

$$\oint_C \vec{F} \bullet d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \bullet N\ dS$$

Calculando el rotacional, el vector normal a la superficie y el diferencial de superficie:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z & x & y^2 \end{vmatrix} = (2y, 2, 1)$$

$$\vec{N} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}}$$

$$dS = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\ dydx$$

Reemplazando:

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{F}\right) \bullet N\ dS = \iint_R (2y, 2, 1) \bullet \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}} \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + 1}\ dydx$$

$$= \iint_R (4xy + 4y + 1)\ dydx$$

En este caso la región de integración es el círculo centrado en el origen de radio 2, pasando a coordenadas cilíndricas:

$$\iint_R (4xy+4y+1)\,dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4\left(r\cos\theta\right)\left(rsen\theta\right)+4rsen\theta+1\right)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[2sen2\theta\frac{r^4}{4}+4sen\theta\frac{r^3}{3}+\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[2sen2\theta\frac{2^4}{4}+4sen\theta\frac{2^3}{3}+\frac{2^2}{2}\right]d\theta$$

$$= \left[8\left(\frac{-\cos 2\theta}{2}\right)+\frac{32}{3}\left(-\cos\theta\right)+2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi$$

Ejercicios propuestos 10.2

1. Calcular $\iint_S (rotF)\bullet ndS$, donde $F(x,y,z)=y^2 i+xyj+xzk$ y S es la superficie semiesférica $x^2+y^2+z^2=1$ con z >0
2. Comprobar el teorema de Stokes si $F(x,y,z)=(y-z)i+(z-x)j+(x-y)k$ calculando la circulación a lo largo de la curva de intersección de $x^2+y^2=1$ con $x+z=1$.
3. Calcule el trabajo efectuado por el campo de fuerza $F(x,y,z)=\left(x^x+z^2\right)i+\left(y^y+x^2\right)j+\left(z^z+y^2\right)k$;cuando una partícula se mueve bajo su influencia alrededor del borde de la porción de la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ que se encuentra en el primer octante, en dirección opuesta a la de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.
4. Calcular $\oint_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$. Donde C es la curva de intersección entre las superficies $x^2+y^2=1$; $x+z=1$.
5. Dado el campo de fuerzas $F(x,y,z)=\left(2x+2y,2x,3z^2\right)$. Encontrar el trabajo que realizará F al mover una partícula a través de los puntos: $(0,0,0)\to(1,2,0)\to(1,2,5)$
6. Evaluar $\int_C F\bullet dr$, siendo $F=\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)i+\left(\ln\sqrt{x^2+y^2}\right)j+k$ y C: el triángulo con vértices (0,0,0), (1,1,1), (0,0,2).
7. Evaluar $\oint_C (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$ donde C es la frontera de la superficie $x^2+y^2+z^2=1 \quad ; z\geq 0$
8. Calcular $\int_C -y^3dx+x^3dy-z^3dz$;donde C es la intersección del cilindro $x^2+y^2=1$, y el plano x+y+z=1, y la orientación de C corresponde al movimiento en sentido contrario al de las manecillas del reloj.
9. Calcular $\int_C \left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$; donde C es la curva de intersección de la superficie del cubo $0\leq x\leq a;\quad 0\leq y\leq a;\quad 0\leq z\leq a$; y el plano $x+y+z=\frac{3}{2}a$

10.3 INTEGRALES DE SUPERFICIES DE CAMPOS VECTORIALES. INTEGRALES DE FLUJO

Se trata ahora de determinar el efecto de funciones vectoriales $\vec{F}$ atravesando una superficie S, para esto se empleará integrales de superficie de la forma:

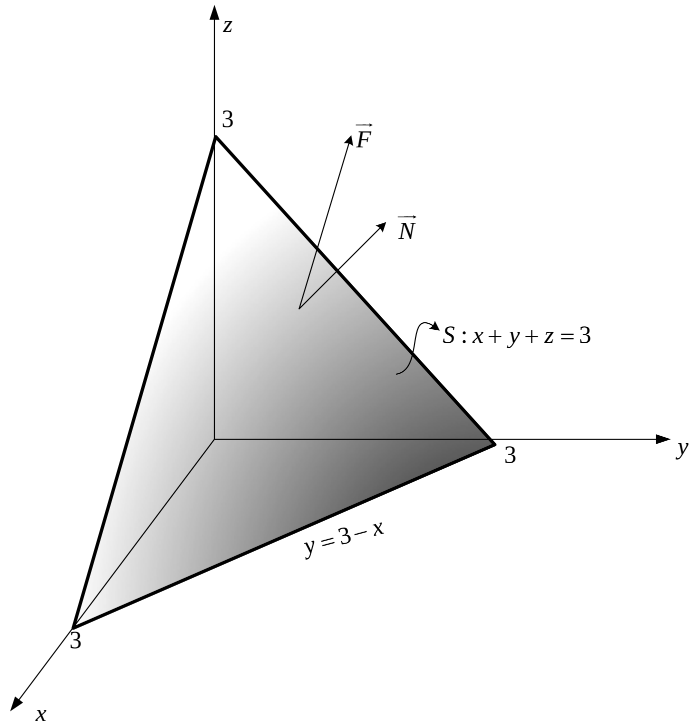
$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N}\, dS$$

Este tipo de integrales son llamadas integrales de Flujo.

Ejemplo.

Calcular $\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N}\, dS$ para $\vec{F} = \left(2z, x, y^2\right)$ y S : porción del plano $x + y + z = 3$ en el primer octante.

SOLUCIÓN:

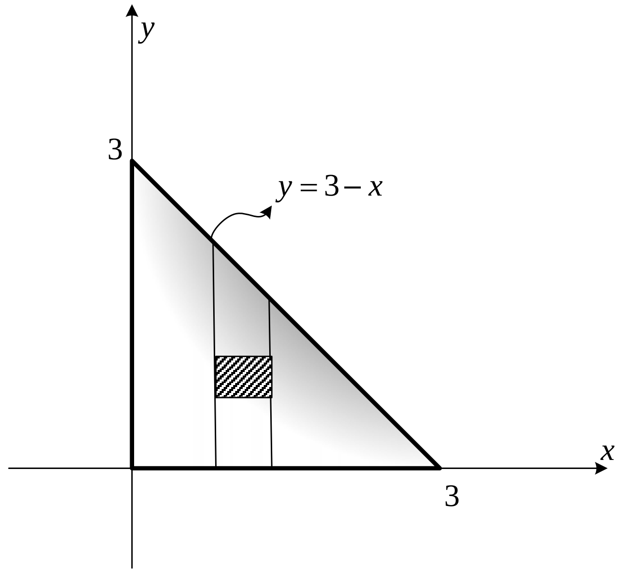


El flujo a través del plano estaría dado por:

$$\iint_S \vec{F} \bullet \vec{N}\, dS = \iint_S \left(2z, x, y^2\right) \bullet \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\, dS$$

$$= \iint_S \frac{\left(2z + x + y^2\right)}{\sqrt{3}}\, dS$$

Proyectando la superficie en el plano xy, la región de integración sería:



Reemplazando y evaluando:

$$\iint_S \frac{\left(2z+x+y^2\right)}{\sqrt{3}}\,dS=\int_0^3\int_0^{3-x}\frac{\left(2(3-x)+x+y^2\right)}{\sqrt{3}}\sqrt{1+1+1}\,dydx$$

$$=\int_0^3\int_0^{3-x}\left(6-x+y^2\right)dydx$$

$$=\int_0^3\left[(6-x)y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{3-x}dx$$

$$=\int_0^3\left[(6-x)(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}\right]dx$$

$$=\int_0^3\left[18-9x+x^2+\frac{(3-x)^3}{3}\right]dx$$

$$=\left[18x-9\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(3-x)^4}{-12}\right]_0^3$$

$$=\left[18(3)-9\frac{(3)^2}{2}+\frac{(3)^3}{3}+\frac{(3-3)^4}{-12}\right]-\left[-\frac{3^4}{12}\right]$$

$$=24-\frac{81}{2}+\frac{27}{3}+\frac{81}{12}$$

Si la superficie es cerrada tenemos otra opción para evaluar la integral de flujo.

10.4 TEOREMA DE GAUSS

Sea Q una región sólida limitada por una superficie S orientada por un vector normal unitario dirigido al exterior de Q. Si $\vec{F}$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q, entonces:

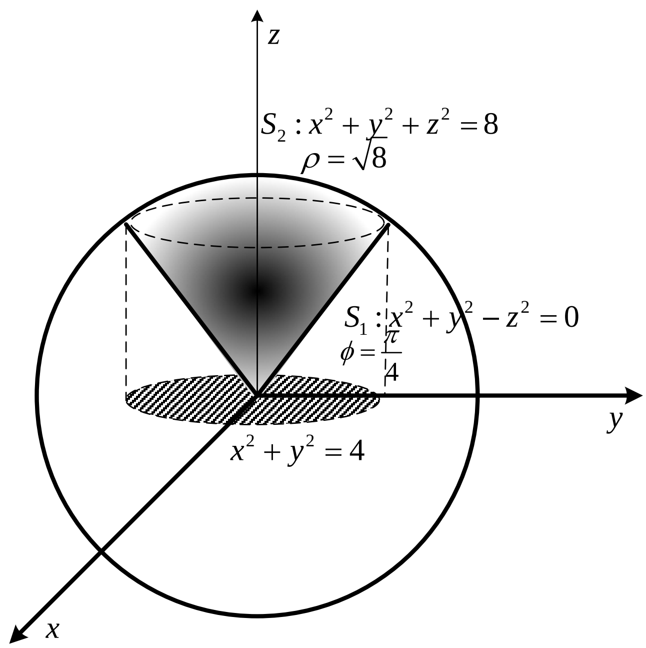
$$\oiint_S \vec{F} \bullet \vec{N}\, dS = \iiint_Q \left(\nabla \bullet \vec{F}\right) dV$$

Es decir, que en lugar de emplear una integral de superficie para calcular el flujo a través de una superficie cerrada se puede emplear una integral de volumen.

Ejemplo 1

Comprobar el teorema de Gauss para $\vec{F} = (2x, 2y, z)$ y Q el sólido limitado por las superficies $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 8$; $z \geq 0$

SOLUCIÓN:
Haciendo un dibujo



PRIMER MÉTODO: POR INTEGRAL DE SUPERFICIE.
Como hay dos superficies que definen el sólido, calculamos el flujo por cada una y Luego los sumamos.

Primero, el flujo por el cono:

$$\iint_{S_1} \vec{F}\bullet\overrightarrow{N}\,dS = \iint_{S_1}(2x,2y,z)\bullet\frac{(2x,2y,-2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\,dS$$

Proyectamos la superficie en el plano xy

$$\iint_{S_1}(2x,2y,z)\bullet\frac{(2x,2y,-2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\,dS = \iint_R (2x,2y,z)\bullet\frac{(2x,2y,-2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}\,dA$$

$$= \iint_R \frac{\left(4x^2+4y^2-2z^2\right)}{2z}dA$$

Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$\iint_R \frac{\left(4x^2+4y^2-2z^2\right)}{2z}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{\left(4r^2-2r^2\right)}{2r}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2drd\theta$$

$$= \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^2 \left.\theta\right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{16}{3}\pi$$

Segundo, el flujo por la esfera

$$\iint_{S_2} \vec{F}\bullet\overrightarrow{N}\,dS = \iint_{S_2}(2x,2y,z)\bullet\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\,dS$$

Proyectamos la superficie en el plano xy

$$\iint_{S_1}(2x,2y,z)\bullet\frac{(2x,2y,-2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\,dS = \iint_R (2x,2y,z)\bullet\frac{(2x,2y,2z)}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}\frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}\,dA$$

$$= \iint_R \frac{\left(4x^2+4y^2+2z^2\right)}{2z}dA$$

Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$\iint_R \frac{\left(4x^2+4y^2+2z^2\right)}{2z}dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{\left(4r^2+2\left(8-r^2\right)\right)}{2\sqrt{\left(8-r^2\right)}}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{2r^2+16}{2\sqrt{\left(8-r^2\right)}}rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{r^3}{\sqrt{\left(8-r^2\right)}}+8\left(8-r^2\right)^{-1/2}r\right]drd\theta$$

La primera integral es por sustitución trigonométrica y la segunda por sustitución.
El resultado es:

$$\iint_{S_2} \vec{F}\bullet\overrightarrow{N}\,dS = \left(\frac{160}{3}\sqrt{2}-\frac{176}{3}\right)\pi$$

Sumando los dos flujos

$$\oiint_S \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{N}\ dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{N}\ dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{N}\ dS$$
$$= \left(\frac{160}{3}\sqrt{2} - \frac{176}{3}\right)\pi + \frac{16}{3}\pi$$
$$= \frac{160}{3}\pi\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$$

<u>SEGUNDO MÉTODO</u>: APLICANDO EL TEOREMA DE GAUSS

$$\oiint_S \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{N}\ dS = \iiint_Q \left(\nabla \bullet \overrightarrow{F}\right) dV$$
$$= \iiint_Q \left(2+2+1\right) dV$$
$$= 5\iiint_Q dV$$

Lo mejor será pasarlo a coordenadas esféricas:

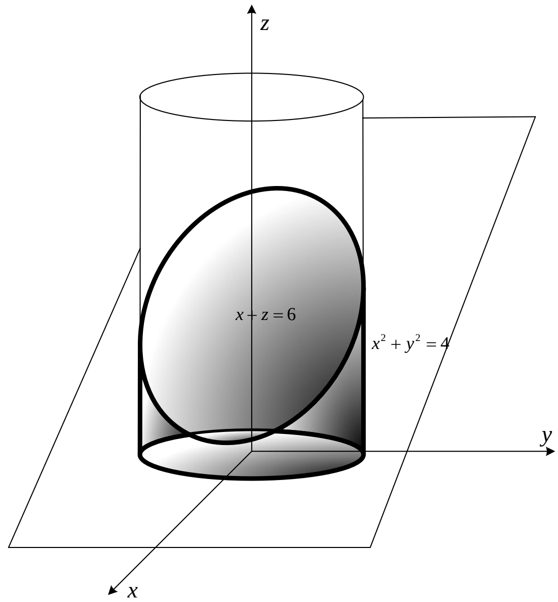
$$5\iiint_Q dV = 5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{8}} \rho^2 sen\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$
$$= 5\left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{\sqrt{8}} \left.\left(-\cos\phi\right)\right|_0^{\pi/4} \left.\theta\right|_0^{2\pi}$$
$$= 5\frac{\left(\sqrt{8}\right)^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\pi\right)$$
$$= 5\frac{16\sqrt{2}}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(2\pi\right)$$
$$= \frac{160}{3}\left(\sqrt{2}-1\right)\pi$$

Ejemplo 2

Sea Q la región limitada por el cilindro $x^2+y^2=4$, el plano $x+z=6$ y el plano xy. Hallar el flujo de $\vec{F}=\left(x^2+senz, xy+\cos z, xz+e^y\right)$ a través de la superficie que limita a Q.

SOLUCIÓN:

Haciendo un dibujo:



Aquí es mejor aplicar el teorema de Gauss.

$$\oiint_S \vec{F}\bullet\vec{N}\,dS = \iiint_Q \left(\nabla\bullet\vec{F}\right)dV$$
$$= \iiint_Q \left(2x+x+x\right)dV$$
$$= \iiint_Q 4x\,dV$$

Pasando a coordenadas cilíndricas:

$$
\begin{aligned}
\iiint_Q 4x\,dV &= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{6-r\cos\theta} r\cos\theta\, dz r dr d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\cos\theta\, z\Big|_0^{6-r\cos\theta} dr d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2\cos\theta\left(6-r\cos\theta\right) dr d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi}\int_0^{2} \left(6r^2\cos\theta - r^3\cos^2\theta\right) dr d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} \left(6\cos\theta\frac{r^3}{3} - \cos^2\theta\frac{r^4}{4}\right)_0^2 d\theta \\
&= 4\int_0^{2\pi} \left(16\cos\theta - 4\cos^2\theta\right) d\theta \\
&= 4\left(16 sen\theta - 4\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta\right) \\
&= 4\left(16 sen\theta - 2\left(\theta + \frac{sen 2\theta}{2}\right)\right)_0^{2\pi} \\
&= 4\left(-2\left(2\pi\right)\right) \\
&= -16\pi
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos 10.3

1. Sea $F = 2yzi + \left(-x+3y+2\right)j + \left(x^2+z\right)k$, evaluar $\iint \left(\nabla \times F\right)\bullet dS$, donde S es el cilindro $x^2+y^2=81$, $0\le z\le 1$
2. Calcular $\iint_S F\bullet dS$, donde $F(x,y,z) = 3xy^2 i + 3xy^2 j + z^3 k$; y S es la superficie de la esfera unitaria.
3. Sea Q la región sólida en R³ limitada por los planos coordenados y el plano $2x+2y+z=6$, y $F(x,y,z) = xi + yj + zk$. Calcular la integral de Superficie de F en el contorno de Q.
4. Calcular $\iint_S rotF\bullet ndS$, donde $F\left(x,y,z\right) = \left(y-z, yz, -xy\right)$. S consta de las cinco caras del cubo $0\le x\le 2;\quad 0\le y\le 2;\quad 0\le z\le 2$; no situadas en el plano xy, y n es el vector normal unitario exterior a cada cara.

5. Evaluar $\iiint\limits_E \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$, donde E es el sólido en el primer octante limitado por los planos $y=x$; $y=\sqrt{3}\,x$; el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$; el plano $z=0$; y las esferas $x^2+y^2+z^2=2$ y $x^2+y^2+z^2=8$.
6. Sea $F(x,y,z)=z\,\text{arctg}\,y^2 i+z^3\ln\left(x^2+1\right)j+zk$. Encuentre el flujo de F a través de la porción de la superficie $x^2+y^2+z=2$, que se encuentra arriba del plano $z=1$ y está orientada hacia arriba.
7. Calcular el flujo del campo vectorial $F(x,y,z)=\left(xz^2,x^2y-z^3,2xy+y^2z\right)$ a través de toda la superficie S de la región semiesférica limitada por $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=0$
8. Calcular el flujo del vector $F=x^3i+\left(y^3-y\right)j+\left(z^3+z-xy\right)k$, a través de la superficie $x^2+y^2+z^2=a^2$
9. Calcular el flujo del vector $F=(2x+1)i+y(z+1)j-\left(\frac{z^2}{2}\right)k$, a través de la superficie del sólido $|x|+|y|+|z|=1$
10. Verificar el teorema de la divergencia de Gauss para evaluar $\iint\limits_S F\bullet dS$, donde S es la superficie cerrada determinada por $x^2+y^2=4$, $z=0$ y $z=2$, y F es el campo vectorial $F(x,y,z)=\left(4x,-2y^2,z^2\right)$
11. Evaluar $\oiint\limits_S F.dS$ donde $F=xy^2i+x^2yj+\frac{1}{3}z^3k$ y S es la superficie del elipsoide $x^2+y^2+z^2=1$
12. Calcular $\iint\limits_S F\bullet dS$, donde $F(x,y,z)=(2x+3z)i-(xz+y)j+\left(y^2+2z\right)k$ donde S es la superficie externa del sólido limitado por $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$;$0\le z\le 4$
13. Calcular el flujo de $F(x,y,z)=xi+yj+zk$, a través de la región limitada por $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, $b>a$ e interior a $z=\sqrt{x^2+y^2}$.