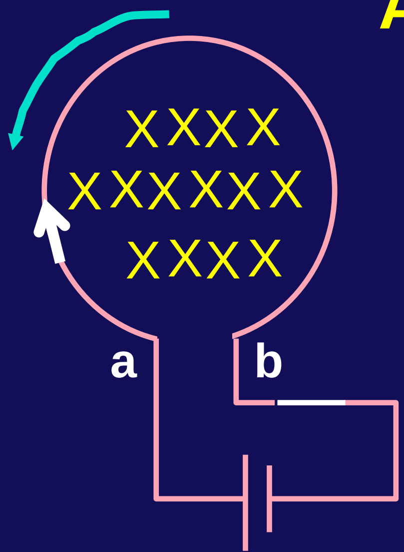
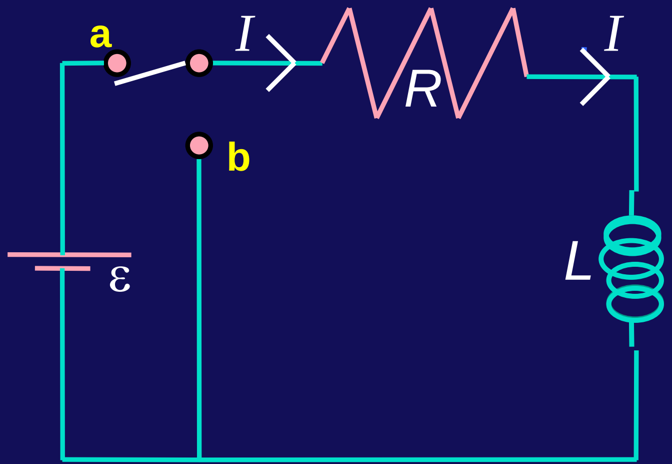
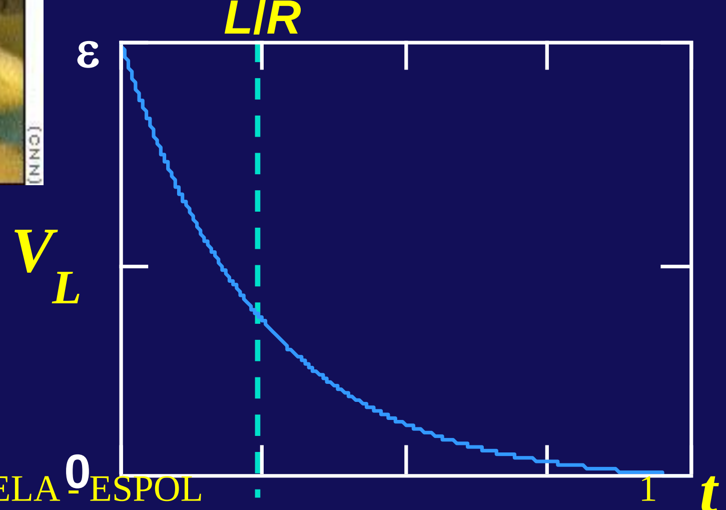
Inductancia

Auto-Inductancia, Circuitos RL



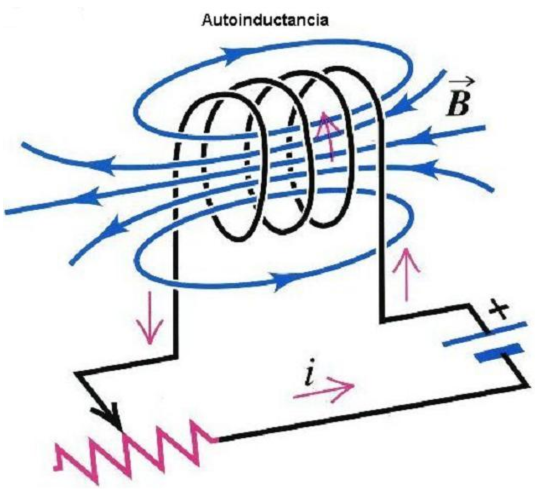




$$L \equiv \frac{\Phi_B}{I}$$

$$L \equiv -\frac{\varepsilon}{(dI/dt)}$$

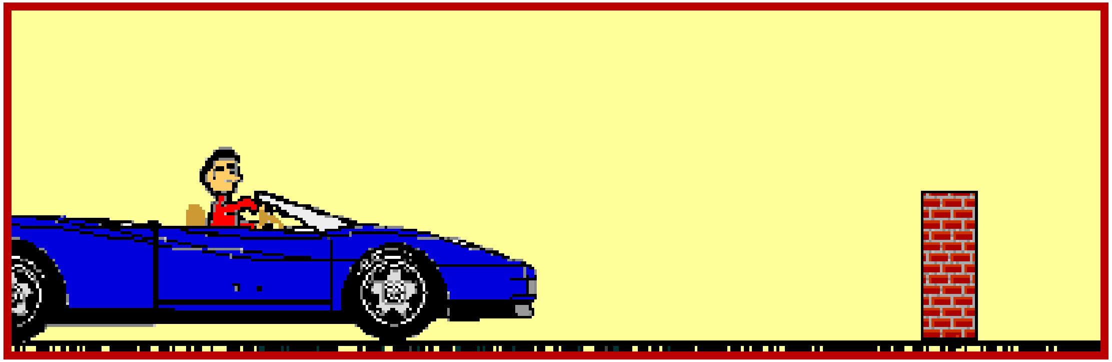
LA INERCIA Y LA INDUCTANCIA



La oposición que presentan los cuerpos al intentar cambiar su estado de movimiento, inercia, tiene su equivalente en los circuitos eléctricos, inductancia

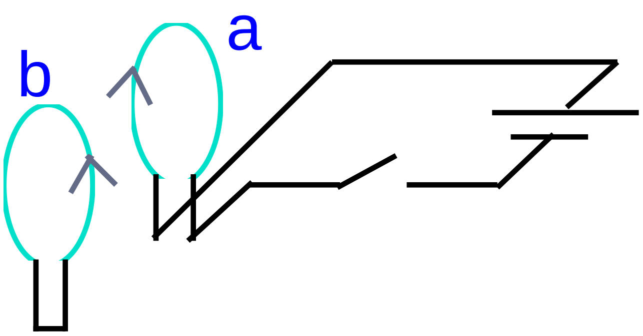
$$\frac{dv}{dt} \equiv \frac{F}{\boxed{m}} \qquad \frac{di}{dt} \equiv \frac{\varepsilon}{\boxed{L}}$$

La oposición que presentan los circuitos al intentar cambiar su corriente se conoce como **INDUCTANCIA**



La Inductancia Mutua

- Se induce una corriente en una espira cuando se cambia la corriente en una espira vecina
- Se puede describir este efecto cuantitativamente en términos de la **inductancia mutua**, **la relación entre el flujo en una espira para la corriente en la espira opuesta**.



$$M \equiv \frac{\Phi_{ab}}{I_b} = \frac{\Phi_{ba}}{I_a}$$

Φ_{ab} = flujo a través del lazo "a" debida a la corriente en el lazo "b"

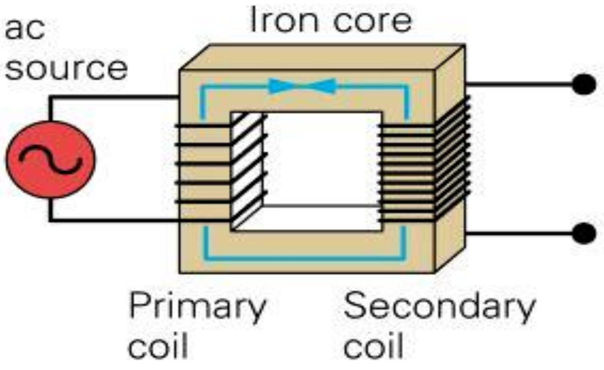
Aplicaciones de Inductancia Mutua

Transformadores

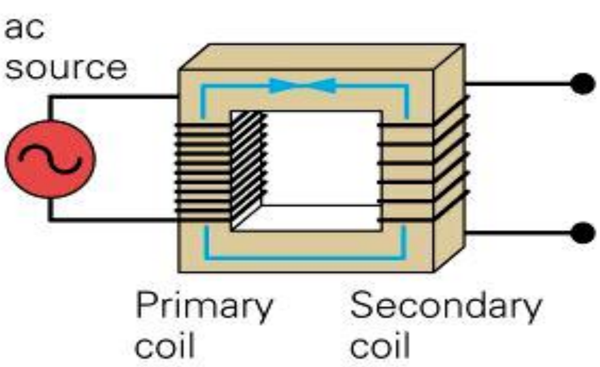
(a) Un transformador-elevador tiene mas vueltas en la bobina del secundario que en la bobina del primario.

(b) Un transformador-reductor tiene mas vueltas en la bobina del primario que en la del secundario.

Ver animacion

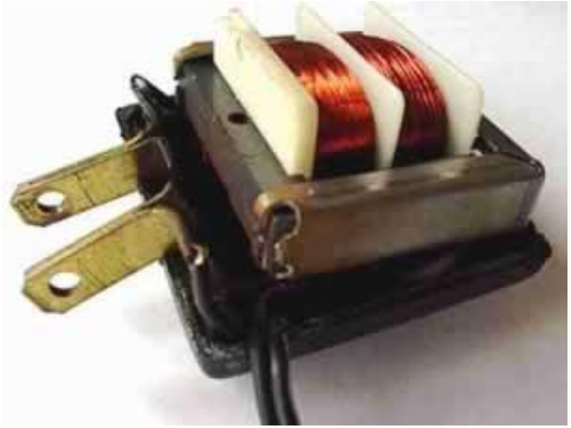


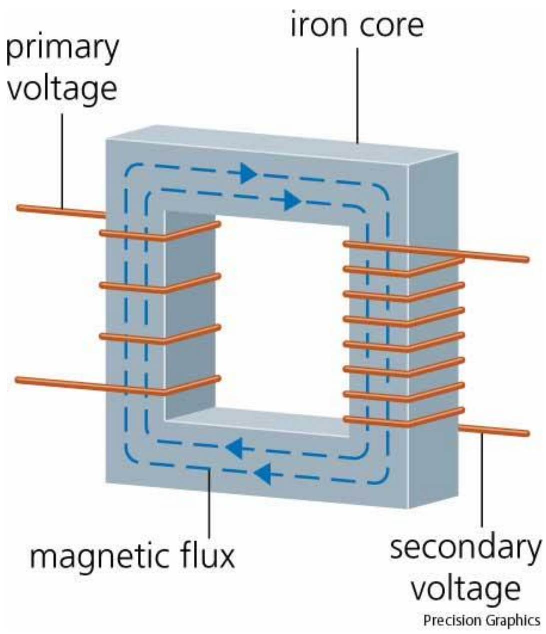
(a) Step-up transformer: high-voltage (low-current) output

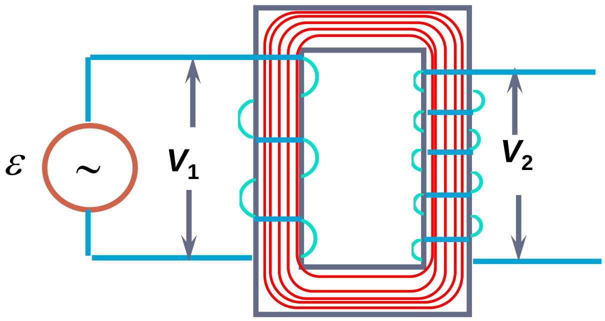


(b) Step-down transformer: low-voltage (high-current) output

Transformadores Típicos







Modelo transformador

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\boxed{V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1}}$$

$$P = VI$$

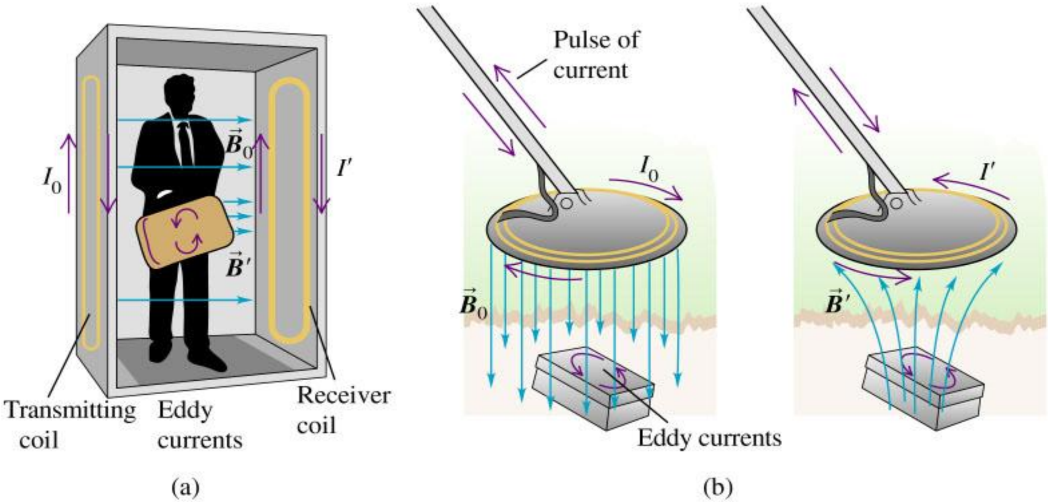
$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

$$\boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2}}$$

Detector de Metales (Aeropuertos)

– Corriente Pulsante → pulso de campo B → Induce una *fem* en el metal

Metales Ferromagnéticos producen mayor B → mayor inductancia mutua → mayor fem



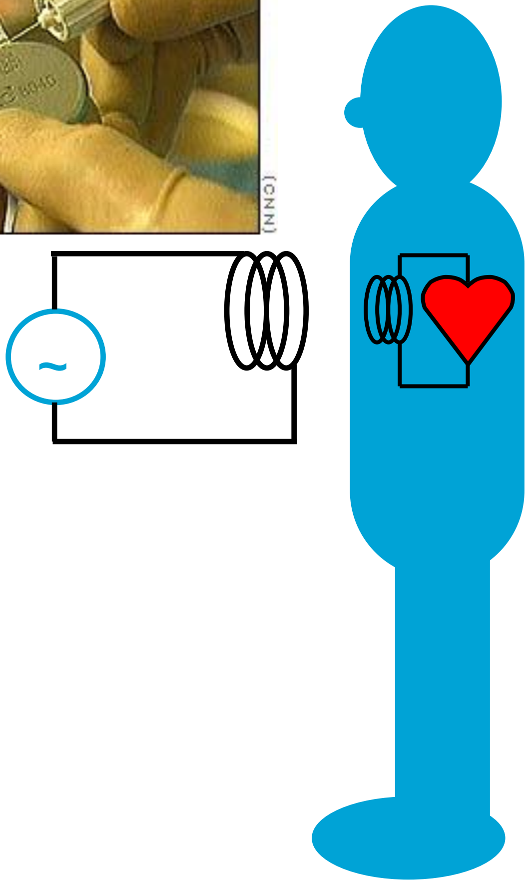
fem → corriente (¿cuánta?, ¿qué duración?, depende de la resistividad del material)

Decaimiento de la corriente genera decaimiento del campo magnético → induce una corriente en espiras vecinas

Magnitud & duración de la señal depende de la composición y geometría del objeto metálico.

Marca-Pasos

- Marca-Pasos
  - No es fácil cambiar la batería!
  - Se utiliza una fuente externa de CA.



- Corriente alterna

  → alternado $\boldsymbol{B}$

  → alternado Φ_B dentro del "paciente"

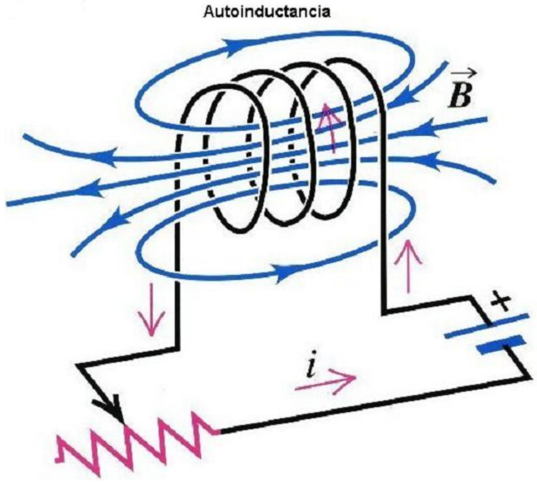
  → induce una corriente AC que energiza el marcapasos.

LA AUTOINDUCCIÓN Y LA INDUCTANCIA

La fem autoinducida en un circuito es el resultado de la variación del flujo a través del circuito debido a la variación de la corriente en el propio circuito.

$$R = \frac{V}{I}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$



$$\frac{d\Phi}{dt} \alpha \frac{dI}{dt}$$

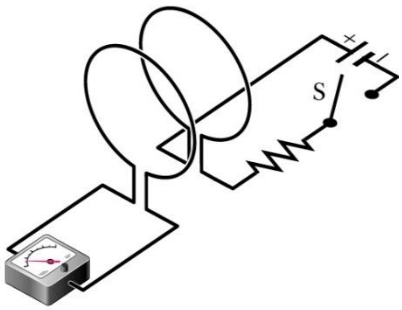
$$d\Phi = L\, dI$$

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{I}}$$

INDUCTANCIA DEL CIRCUITO

Similar a la Resistencia y la Capacitancia, la Inductancia depende únicamente de la geometría del conductor. La inductancia es una propiedad de los conductores.

Auto-Inducción y la *fem* Autoinducida



- Usted sabe que una corriente que cambia en un lazo induce un FEM en el otro circuito vecino. Usted puede apreciar que si los dos lazos son parte de la misma bobina, un cambio en la corriente en uno de los lazos inducirá una FEM en otro lazo de la misma bobina.
- De hecho, una corriente que cambia en un solo lazo induce una FEM en sí mismo. *Esto se llama autoinducción.*
- Puesto que para cualquier inductor $L = \frac{N\Phi_B}{i}$ entonces
- Pero la ley de Faraday dice.

$$iL = N\Phi_B$$

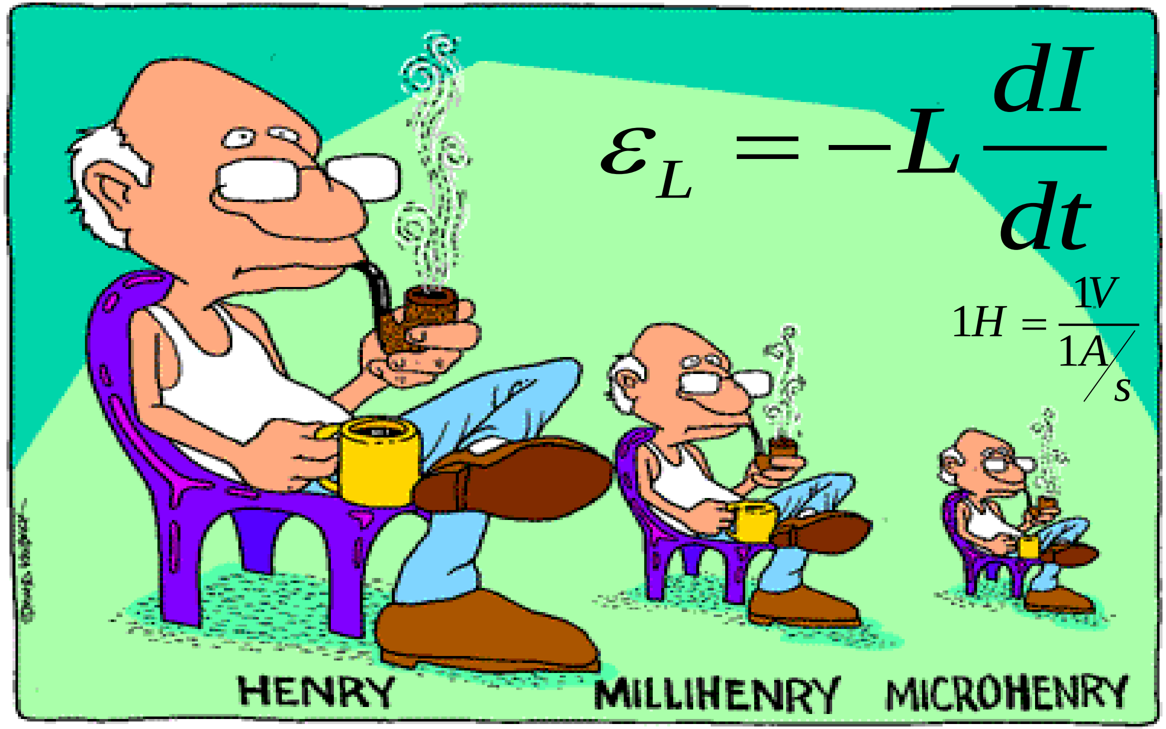
$$L\frac{di}{dt} = N\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

La FEM auto-inducida se opone a la dirección en que cambia la corriente

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt}$$

UNIDADES DE LA INDUCTANCIA (L)



$$\varepsilon_L = -L\frac{dI}{dt}$$

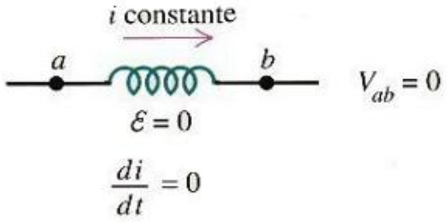
$$1H = \frac{1V}{1A/s}$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

Unidad de la Inductancia: henry (H)
1 H = 1 T-m^2/A

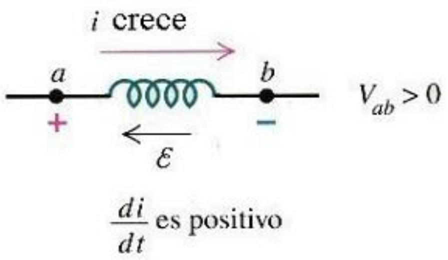
Dirección de la fuerza electromotriz (fem) autoinducida

Si la corriente es constante NO hay *fem* autoinducida



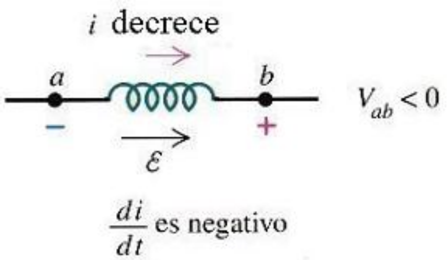
(a)

Si la corriente aumenta, la *fem* autoinducida aparece oponiéndose a la dirección de la corriente.



(b)

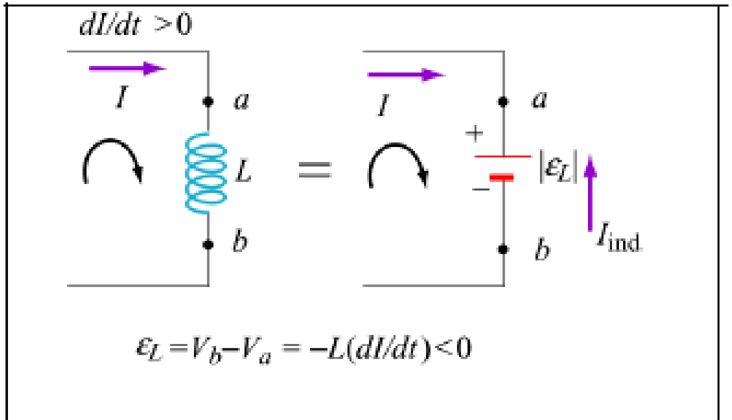
Si la corriente disminuye, la *fem* autoinducida aparece sumándose en la misma dirección de la corriente



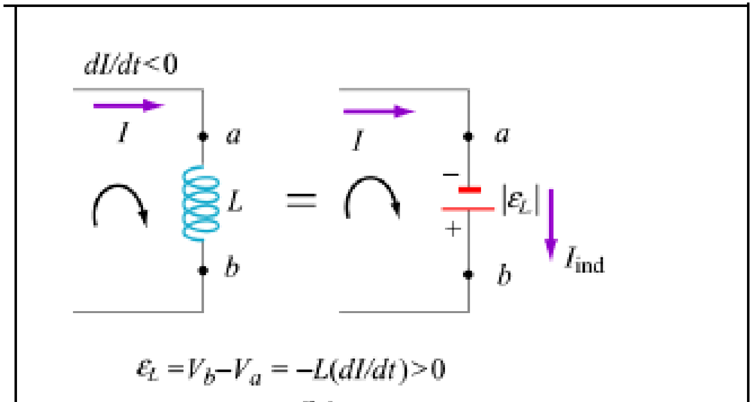
(c)

Regla de Kirchhoff para los inductores

(a) con el aumento de la corriente, y
(b) con la corriente que disminuye.



(a)



(b)

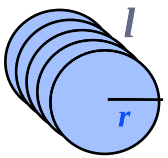
➢La *fem* autoinducida está presenta mientras la corriente está variando en el circuito.

➢Una vez que la corriente se estabiliza, la *fem* autoinducida vale cero.

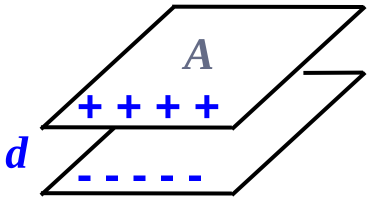
Auto-Inductancia: Resumen

- Todo conductor presenta inductancia, de la misma forma que presenta resistencia y tiene capacitancia.
- La inductancia de un inductor (e.g., solenoide) puede ser calculada por su geometría solamente, si el dispositivo es construido de conductores y aire (similar a la capacitancia de un capacitor).
- Si hay un material extra añadido (e.g., núcleo de hierro) la inductancia se incrementará (igual como un dieléctrico aumenta la capacitancia de un capacitor)

- El arquetipo de un inductor es un solenoide, de la misma forma que un par de placas planas es el arquetipo de un capacitor.



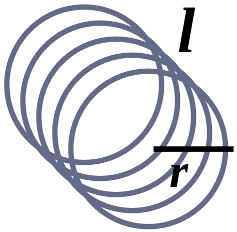
$r << l$



$d << \sqrt{A}$

Cálculo de la Inductancia de un solenoide

- Solenoide Ideal:



N: total de vueltas, radio r, Longitud l

$$r << l \Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

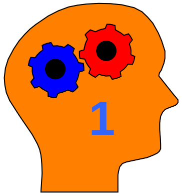
Para una vuelta, $A = \pi r^2 \Rightarrow \phi = BA = \mu_0 \frac{N}{l} I \pi r^2$

El flujo total a través del solenoide viene dado por:

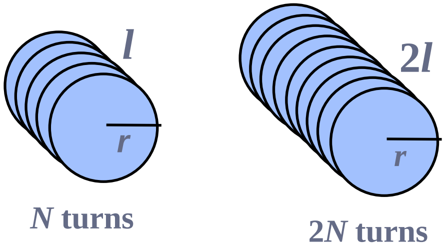
$$\Phi_B = N\phi = \mu_0 \frac{N^2}{l} I \pi r^2$$

La Inductancia de un solenoide puede ser calculada:

$$\boxed{L \equiv \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2 = \mu_0 \left(\frac{N}{l}\right)^2 l \pi r^2}$$

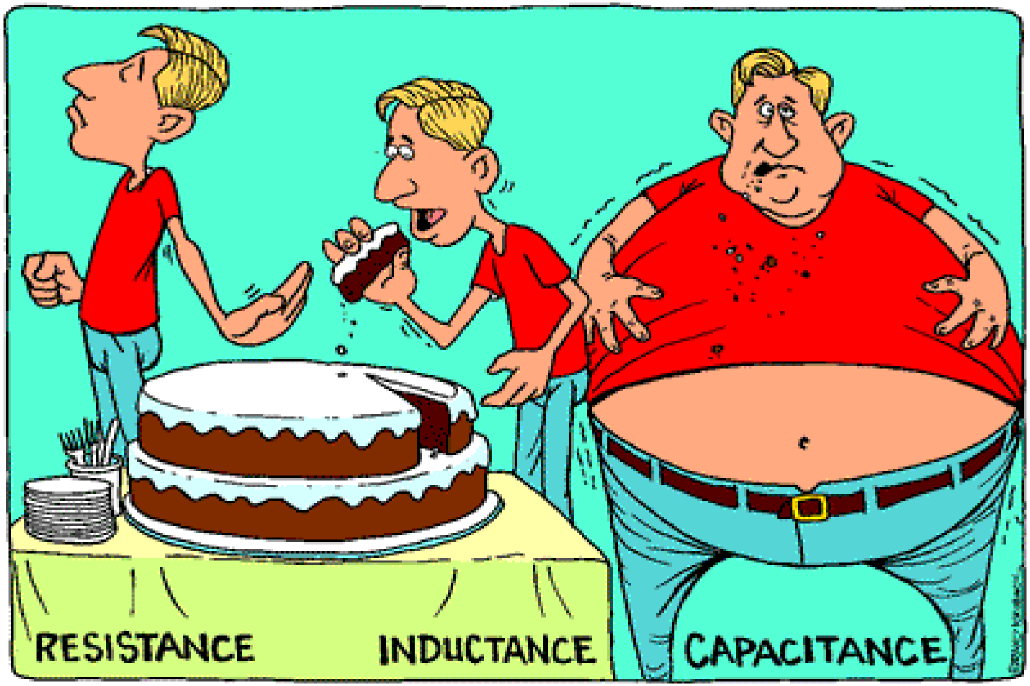


- Considere los dos inductores mostrados:
  - El Inductor 1 tiene longitud l, N vueltas e inductancia L_1.
  - El Inductor 2 tiene longitud $2l$, $2N$ vueltas e inductancia L_2.
  - Cual es la relacion entre L_1 y L_2?



(a) $L_2 < L_1$ **(b)** $L_2 = L_1$ **(c)** $L_2 > L_1$

Similar a la Resistencia y la Capacitancia, la Inductancia depende únicamente de la geometría del conductor. La inductancia es una propiedad de los conductores.

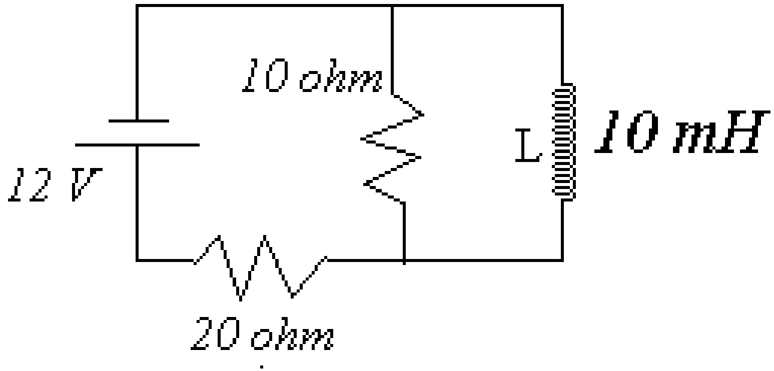


$$R = \rho \frac{l}{A} \qquad L = \mu_0 \left(\frac{N}{l} \right)^2 l \pi r^2 \qquad C = \varepsilon_o \frac{A}{d}$$

PROPIEDADES FÍSICAS DE LOS CONDUCTORES

Dispositivo	Propiedades	Representación	Nomenclatura
Resistor	Resistencia		R
Capacitor	Capacitancia		C
Inductor	Inductancia		L

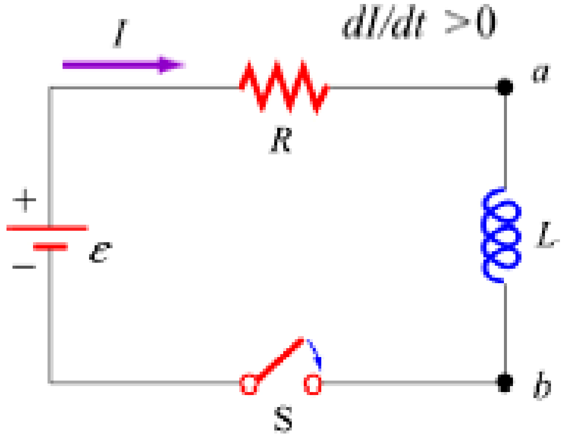
Un inductor de 10 mH y un resistor de 10 Ω se conectan en paralelo. Luego estos dos elementos se conectan en serie con una batería de 12 V y un resistor de 20 Ω ¿Cuál es la rapidez de cambio de la corriente en el inductor cuando la corriente en la batería es 0,50 A?

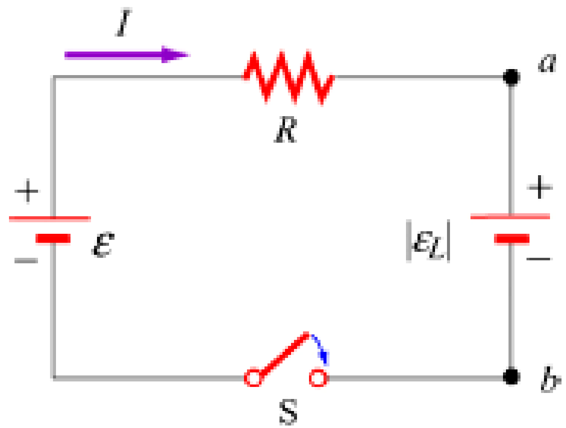


a) 600 A/s
b) 400 A/s
c) 200 A/s
d) 800 A/s
e) 500 A/s

Inductores en Circuitos de C.C

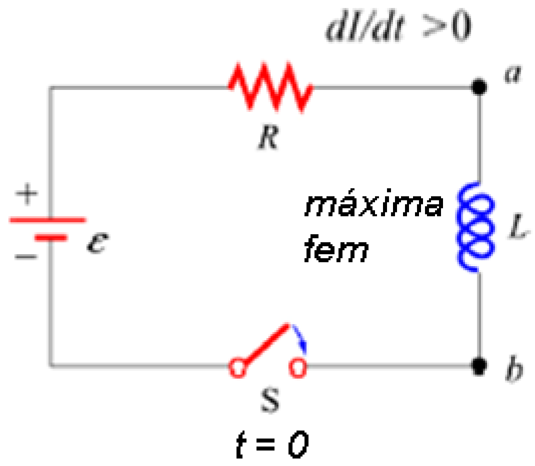
Regla General: Los inductores resisten cambios de corriente cuando son conectados a una fuente

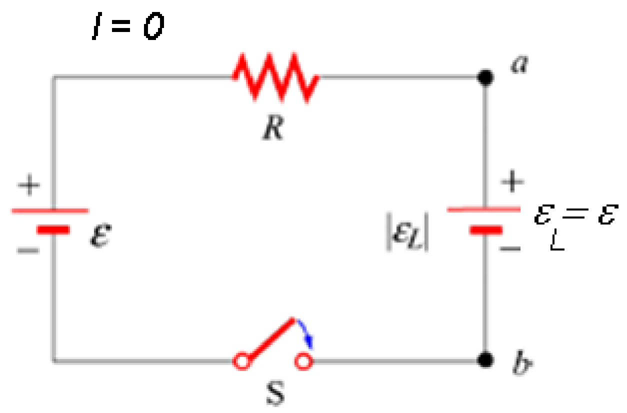


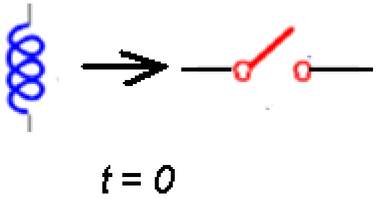


Inductores en Circuitos de C.C

Inicialmente, al cerrar el interruptor de un circuito, el inductor se comporta como un "interruptor" abierto. Se produce la máxima variación de corriente. (*máximo valor de fem autoinducida*).

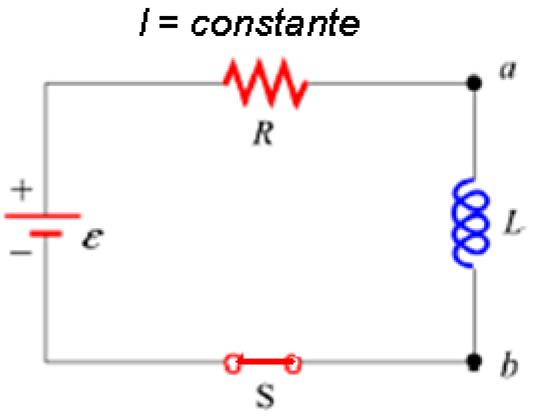


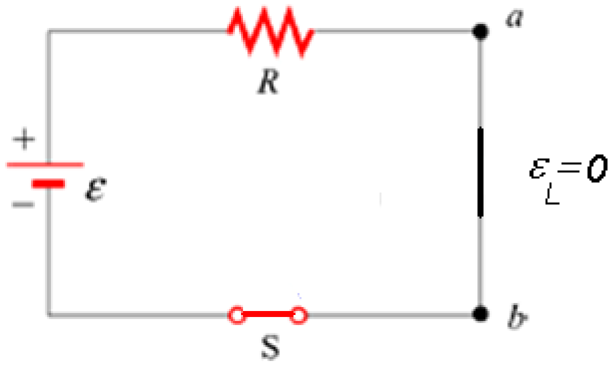




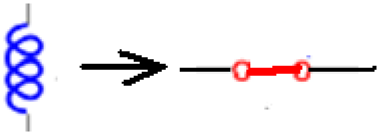
Inductores en Circuitos de C.C

Después de que el interruptor permanece cerrado por un tiempo muy largo, el inductor se comporta como un "corto". La corriente se ha estabilizado. (*la fem autoinducida vale cero*).





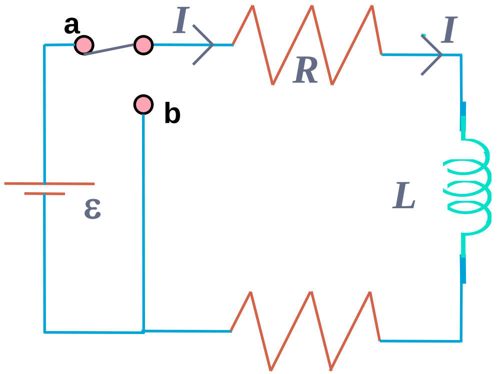
$$\varepsilon = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad t \gg 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} = 0$$

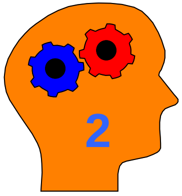


Desconectemos el inductor de la fuente de corriente. Pasemos el interruptor de la posición a a la posición b

- **Inicialmente, el inductor se comporta como una fuente de corriente (*fem auto inducida*).**

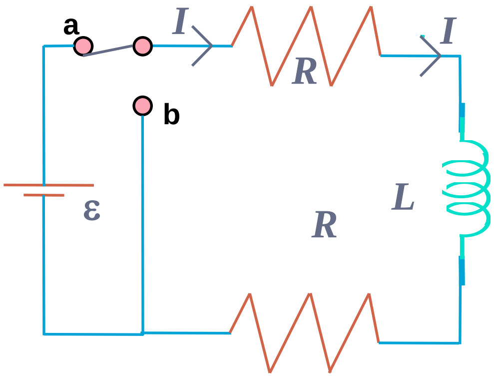
- Después de un tiempo relativamente grande, el inductor entrega toda su energía, la corriente a través de él se hace cero.





Pregunta de concepto: recordemos

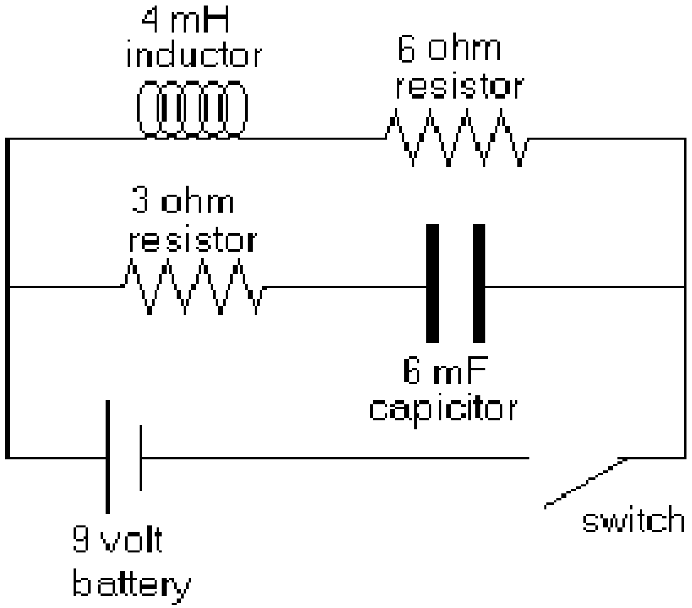
- A $t = 0$ el "switch" se pasa de la posición b a la posición a en el circuito mostrado:



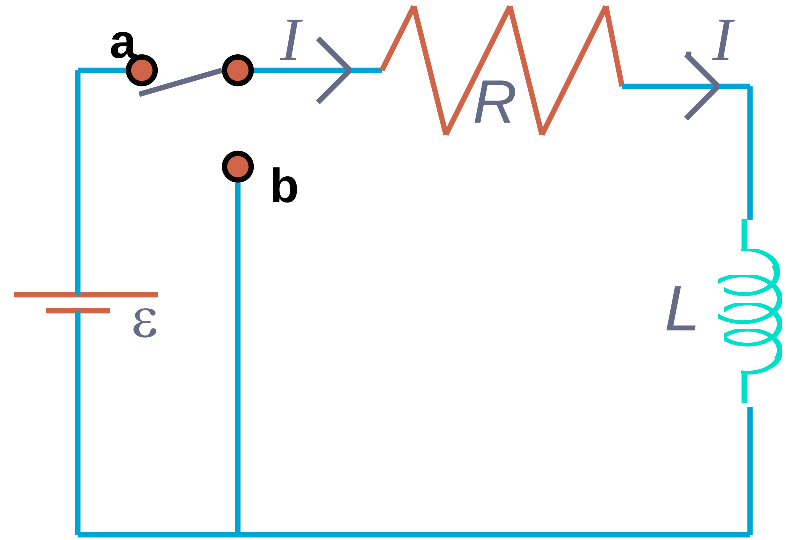
  - ¿Cuál es el valor de la corriente I_0 inmediatamente después de cerrar el "switch"?

(a) $I_0 = 0$ **(b)** $I_0 = \varepsilon/2R$ **(c)** $I_0 = 2\varepsilon/R$

Determine el valor de la corriente que maneja la fuente en el instante de cerrar el interruptor y después de que el interruptor permanece cerrado por un tiempo muy largo.



Análisis del Circuito RL



- A $t=0$, se cierra el interruptor y la corriente I comienza a fluir.

- Suma de voltajes:

$$\boxed{\varepsilon - IR - L\frac{dI}{dt} = 0}$$

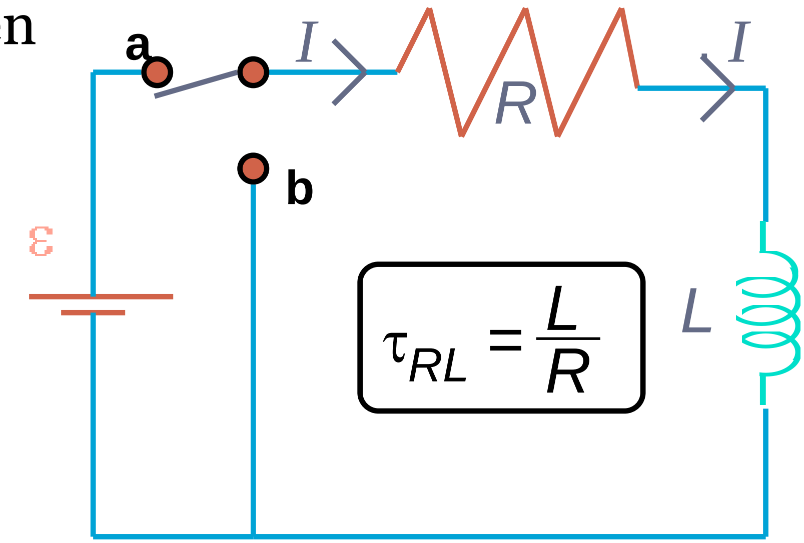
Note que esta ecuación es idéntica en forma a la del circuito RC con las siguientes sustituciones:

RC: $\boxed{\varepsilon - \frac{Q}{C} - R\frac{dQ}{dt} = 0}$ $\Rightarrow$ **RC→RL:** $R \to L \quad Q \to I \quad \frac{1}{C} \to R$

Por tanto, $\tau_{RC} = RC \Rightarrow \boxed{\tau_{RL} = \frac{L}{R}}$ CONSTANTE DE TIEMPO INDUCTIVA

Circuito RL

- Para encontrar la corriente I en función del tiempo t, necesitamos escoger una solución exponencial que satisfaga las condiciones de frontera:



$$\tau_{RL} = \frac{L}{R}$$

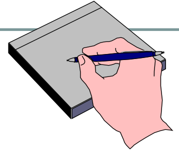
$$\frac{dI}{dt}(t=\infty)=0 \quad \Rightarrow \quad I(t=\infty)=\frac{\varepsilon}{R}$$

- En consecuencia: $$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)$$

- **La caída de voltaje a través del inductor está dada por:**

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = \varepsilon e^{-Rt/L}$$

Circuito RL (ε on)



Corriente

$$I = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

Max = ε/*R*

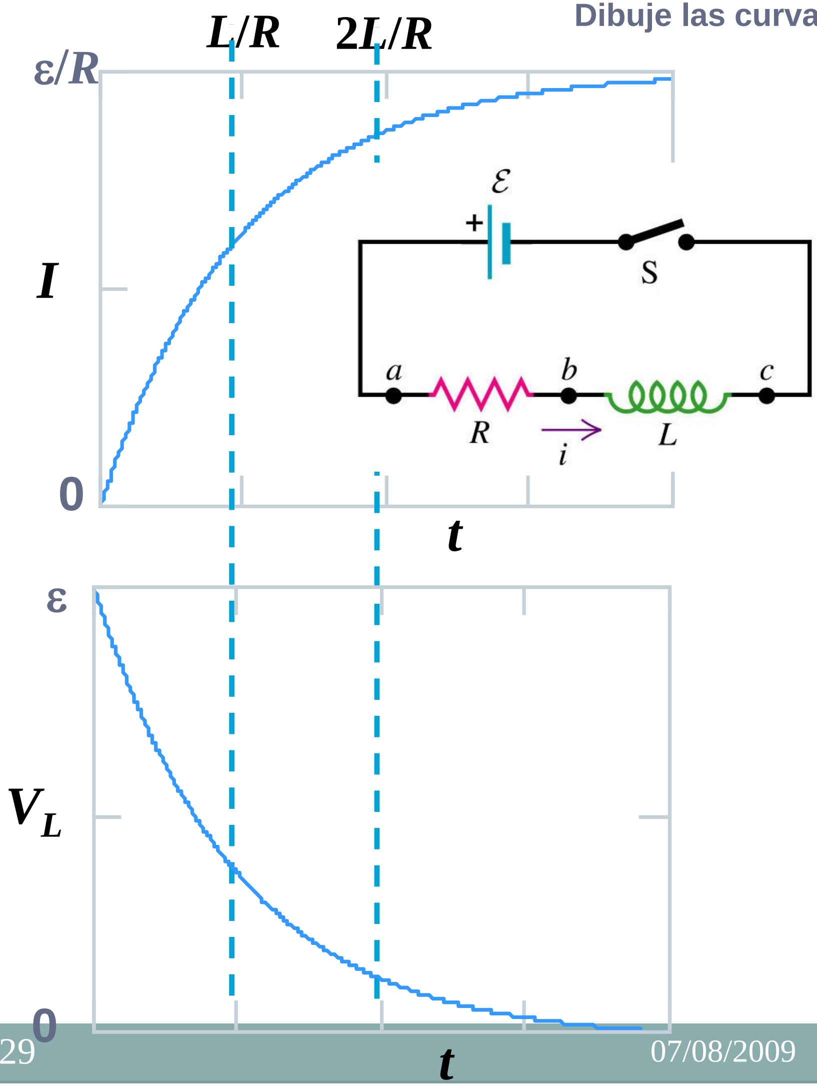
63% Max a *t*=*L*/*R*

Voltaje en *L*

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = \varepsilon e^{-Rt/L}$$

Max = ε/*R*

37% Max a *t*=*L*/*R*

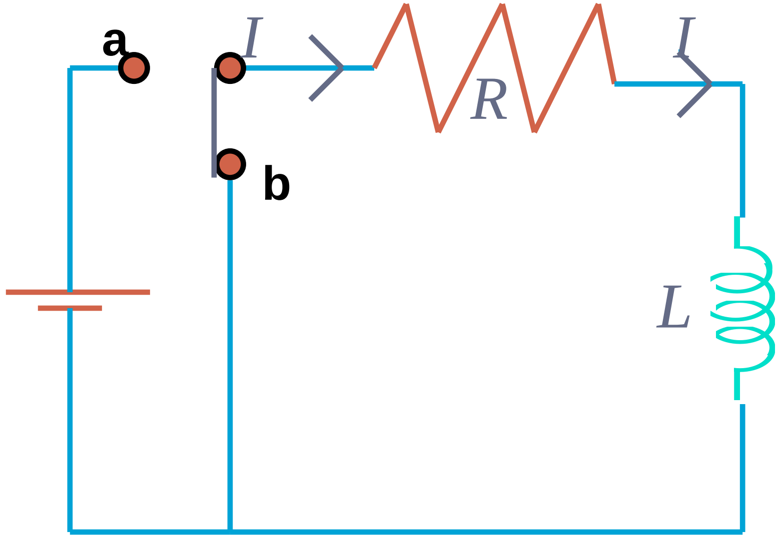


Un circuito en serie contiene una batería de 12 V, un resistor de 2000 Ω, un inductor de 3 μH. Si el interruptor que conecta el circuito es cerrado a $t = 0$, determine el tiempo requerido para que la corriente en el circuito alcance el 63% de su valor final.

a. 1.5 ns
b. 3.0 ns
c. 4.0 ns
d. 5.0 ns

Circuitos RL

- Después que el "switch" pasó un largo tiempo en la posición a, el interruptor pasa a la nueva posición b a $t=0$.



- Suma de voltajes:

$$\boxed{IR + L\frac{dI}{dt} = 0}$$

- La condición inicial apropiada es:

$$I(t=0) = \frac{\varepsilon}{R}$$

- **La solución debe tener la forma:**

$$\boxed{I = \frac{\varepsilon}{R}e^{-Rt/L}}$$

$$\boxed{V_L = L\frac{dI}{dt} = -\varepsilon e^{-Rt/L}}$$

Circuito RL (ε off)

Corriente

$$I = \frac{\varepsilon}{R} e^{-Rt/L}$$

Max = ε/*R*

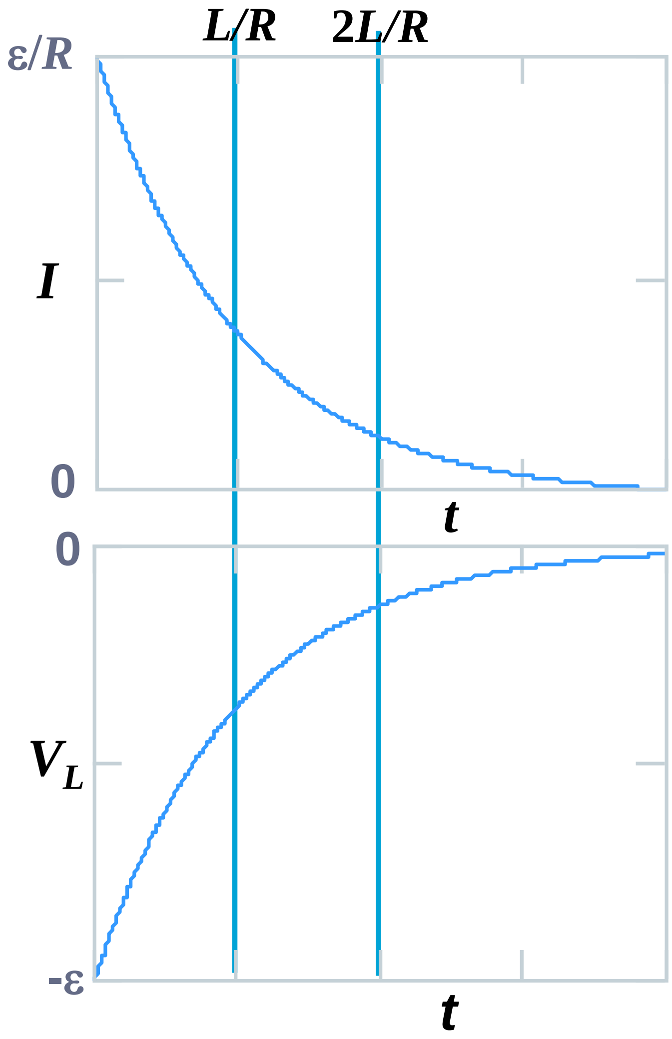
37% Max a *t=L/R*

Voltaje en *L*

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = -\varepsilon e^{-Rt/L}$$

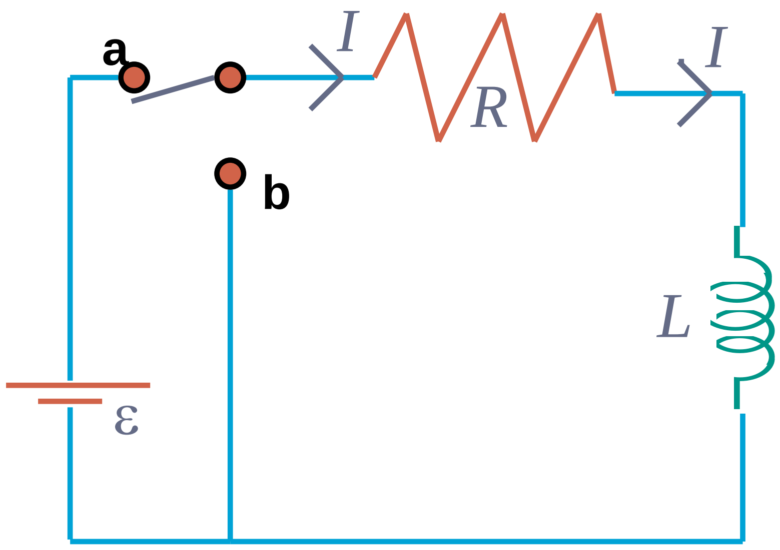
Max = -ε

37% Max a *t=L/R*



Energía de un Inductor

- Cuánta energía almacena un inductor cuando una corriente circula en él?



- Suma de voltajes:

$$\varepsilon = IR + L\frac{dI}{dt}$$

Multiplicando por *I*

$$\varepsilon I = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon I = I^2 R + LI\frac{dI}{dt}$$

Rapidez con que la fuente entrega energia

Rapidez con que la resistencia disipa energia

Rapidez con que el inductor almacena energia

- De esta ecuación, identificamos P_L, la rapidez con que se almacena energía en el inductor:

$$P_L = \frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

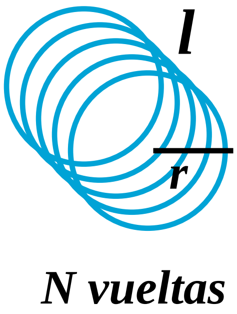
$$\frac{dU}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$$

$$\int_0^U dU = L\int_0^I IdI \Rightarrow \boxed{U = \frac{1}{2}LI^2}$$

¿Dónde está la Energía Almacenada?

- La energía es almacenada en *el campo magnético* (igual que en el capacitor, en su campo eléctrico).
- Para calcular esta densidad de energía, consideremos el campo magnético uniforme generado por un solenoide:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$



- La inductancia ***L*** es: $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2$

- Energía *U*:

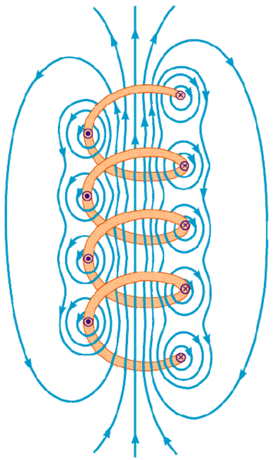
$$U = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2}\left(\mu_0 \frac{N^2}{l} \pi r^2\right) I^2 = \frac{1}{2\mu_0}\left(\mu_o^2 \frac{N^2}{l^2} I^2\right) \pi r^2 l = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \pi r^2 l$$

•Podemos convertirla en densidad de energía dividiéndola para el volumen que contiene el campo:

$$u = \frac{U}{\pi r^2 l} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

densidad de energía magnética

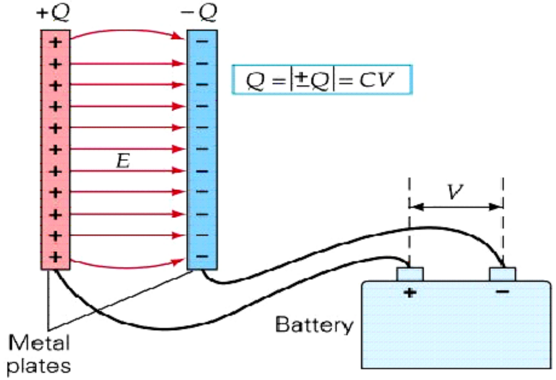
$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_o}$$



Esta expresión tiene su similar para el campo eléctrico.

densidad de energía eléctrica

$$u_E = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2}$$



Para el circuito mostrado en la figura. **Después que el interruptor en el circuito ha permanecido cerrado por un tiempo muy largo,** determine la energía que finalmente almacenan el inductor y el capacitor.