SUPERFICIES CUÁDRICAS

Un cuarto tipo de superficie en el espacio tridimensional son las cuádricas.
Una superficie cuádrica en el espacio es una ecuación de segundo grado de la forma
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ con A , B, C no todos nulos.
Existen 6 superficies cuádricas básicas las cuales son:

1) Elipsoide
2) hiperboloide de una hoja
3) hiperboloide de dos hojas
4) cono elíptico
5) paraboloide elíptico
6) paraboloide hiperbólico (silla de montar)

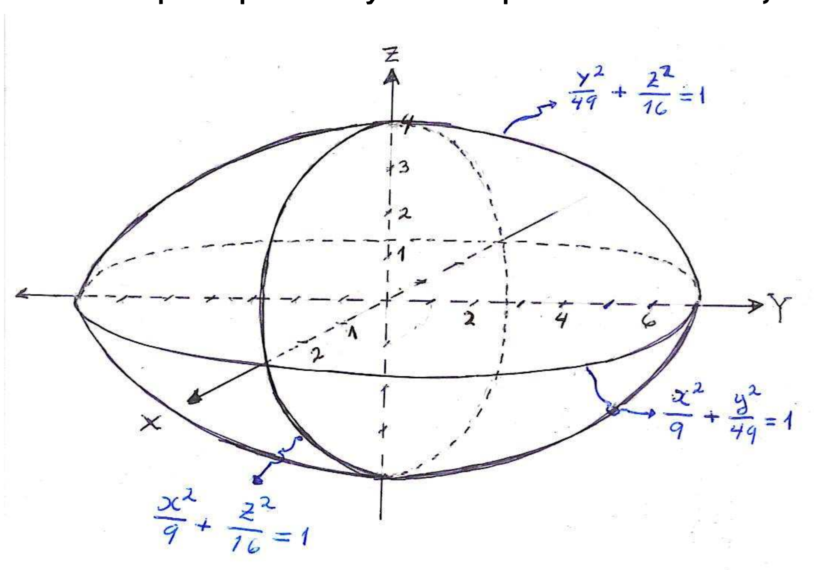
OBSERVACION:

La intersección de una superficie con un plano se llama **traza de la superficie con ese plano**. En particular, las trazas de las superficies con los planos coordenados se obtienen haciendo $x = 0$ (traza con el plano yz), $y = 0$ (traza con el plano xz) y $z = 0$ (traza con el plano xy).
Para el estudio de estas superficies cuádricas utilizaremos la ecuación canónica de cada una de ellas.

1) Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ con $a, b, c > 0$

Observemos que las 3 trazas de esta superficie con los 3 planos coordenados son elipses (o circunferencias).

Ejemplo 1:
Graficar $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} + \frac{z^2}{16} = 1$
De la ecuación podemos ver que la parte mayor del elipsoide irá sobre el eje Y.



2) Hiperboloide de una hoja

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma $$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}_{\substack{\text{Hiperboloide de una hoja} \\ \text{eje del hiperboloide corresponde a la} \\ \text{variable cuyo coeficiente es negativo}}}$$

Para identificar el hiperboloide de una hoja lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados*: <u>Son 2 hipérbolas y una elipse (la "cintura" del hiperboloide)</u>*

Para graficar esta superficie cuádrica utilizaremos tres elementos básicos

a) Identificar el eje del hiperboloide
b) Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio
c) Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados)

<u>Ejemplo 2</u> : Graficar $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-z^2=1$

Solución

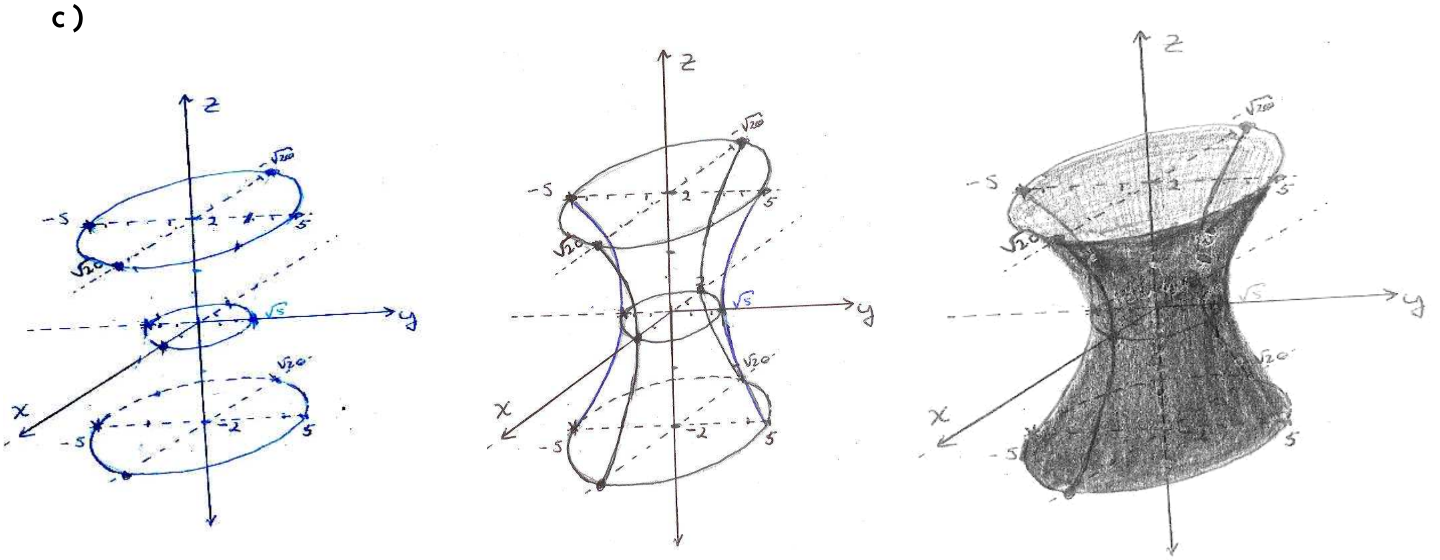
a) Identificamos que el eje del hiperboloide es el eje z
b) Hacemos cortes perpendiculares al eje z (paralelos al plano xy) : Escogemos cortes, por ejemplo, en $z=2,\ z=0,\ z=-2$

$Si \quad z=2$, entonces

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}-(2)^2=1$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=5$$
$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$$

Si $z=-2$, notemos que nos da el mismo resultado anterior, es decir una elipse $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{25}=1$

Si $z=0, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$, es otra elipse (en el plano xy) c)



3) Hiperboloide de dos hojas

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma

$$\underbrace{\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}_{\text{Hiperboloide de dos hojas}}$$

eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo

Para identificar el hiperboloide de dos hojas lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: <u>Dos hipérbolas y no existe traza con el plano coordenado perpendicular al eje del hiperboloide.</u>

Para graficar esta superficie cuádrica utilizaremos cuatro elementos básicos

a) Identificar el eje del hiperboloide
b) Identificar los vértices del hiperboloide de dos hojas
c) Encontrar las trazas con planos perpendiculares al eje del hiperboloide y graficar estas trazas en el espacio
d) Unir estos cortes con hipérbolas (preferentemente las hipérbolas ubicadas en planos coordenados)

Ejemplo 3: Graficar $\frac{y^2}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$

<u>Solución</u>

Este hiperboloide es de la forma $\frac{y^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1$

a) El eje del hiperboloide es el eje y .

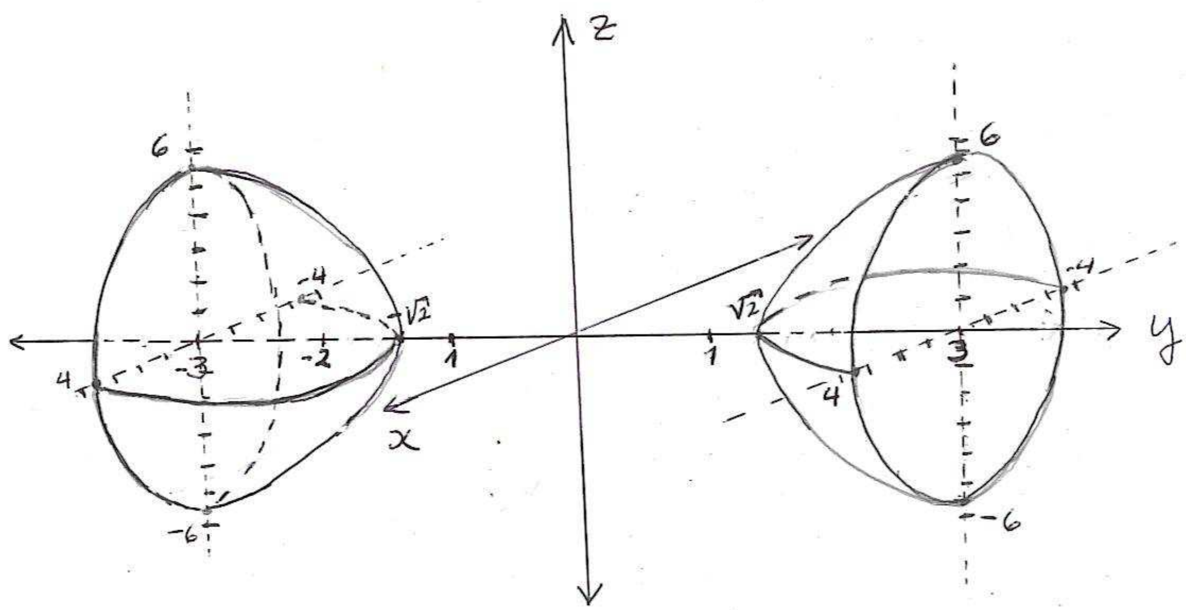
b) Los vértices del hiperboloide se ubican en su eje, y vienen dados por la raíz cuadrada del denominador del término positivo. Para este caso $c=\pm\sqrt{2}$

c) Hacer cortes perpendiculares al eje del hiperboloide, por ejemplo en $y=\pm 3$

$$\frac{(\pm 3)^2}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=3.5 \qquad ó \qquad \frac{x^2}{14}+\frac{z^2}{31.5}=1$$

d) Graficar, uniendo estos cortes con hipérbolas



4) Cono Elíptico

Las ecuaciones canónicas de estas superficies son de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad ó \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

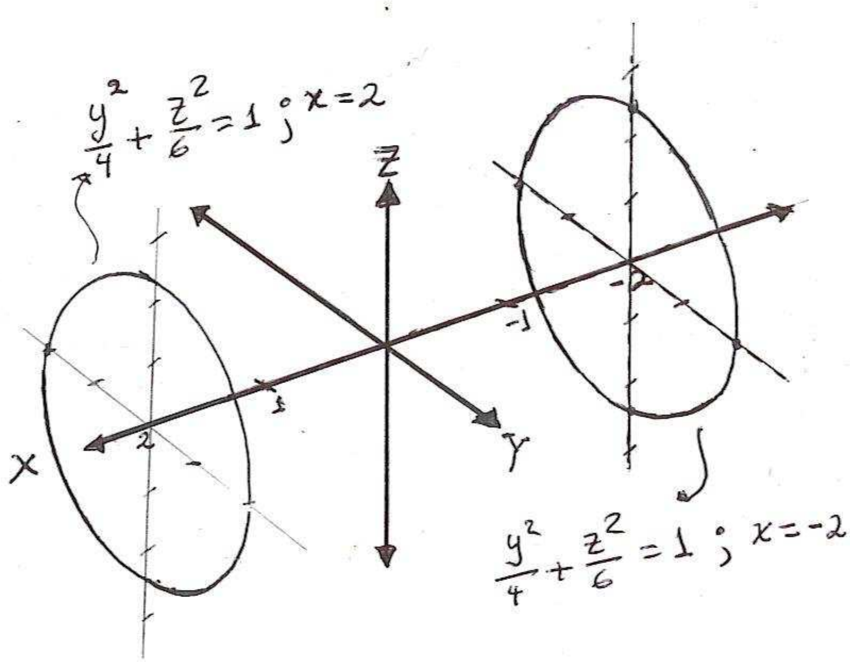
- Para identificar el cono elíptico lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: ***<u>Las trazas con los planos coordenados son rectas que pasan por el origen y el punto (0,0)</u>***

Después de identificada el tipo de gráfica, mediante las trazas, continuamos con lo sigte:

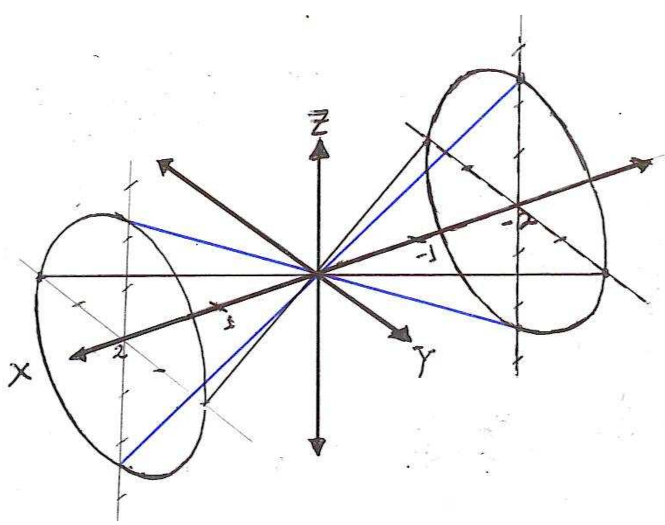
a) Identificamos el eje del cono (la variable del término de diferente signo)
b) Hacemos los cortes perpendiculares al eje del cono y los graficamos en el espacio.(estos cortes son elipses)
c) Unimos estos cortes con rectas que pasan por el origen

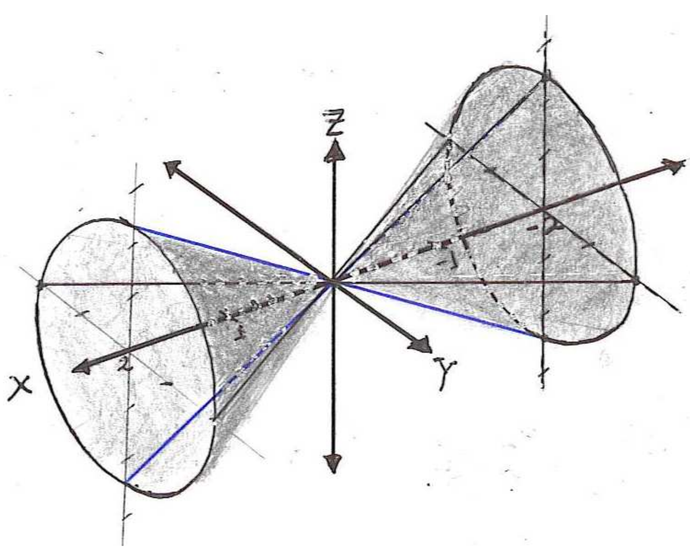
<u>Ejemplo 4</u>: Graficar $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}=0$

a) El eje del cono es el eje x
b) Escogemos 2 cortes perpendiculares al eje x, es decir paralelos al plano yz. Por ejemplo $x=\pm 2$.



c) Unimos cortes mediante rectas (las trazas con los planos coordenados) pasando por el origen.





5) Paraboloide elíptico

Las ecuaciones canónicas del paraboloide tienen la forma $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$

- Para identificar el paraboloide elíptico vemos que las trazas con los planos coordenados son parábolas abiertas en el mismo sentido (que pasan por el origen) y el punto (0,0). Recordemos que estas trazas las obtenemos haciendo $x = 0, y = 0, z = 0$.

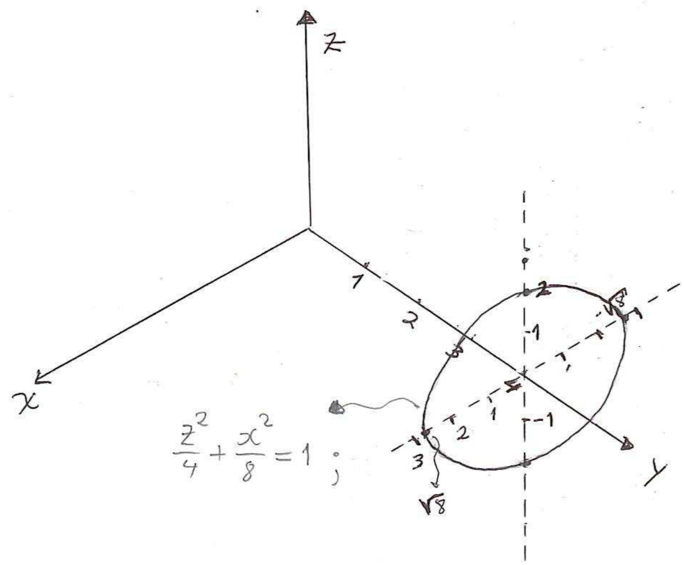
- El eje del paraboloide es la variable del término de primer grado
- Los cortes perpendiculares al eje del paraboloide son elipses (hacemos un solo corte)
- Unimos el corte con parábolas que pasan por el origen.

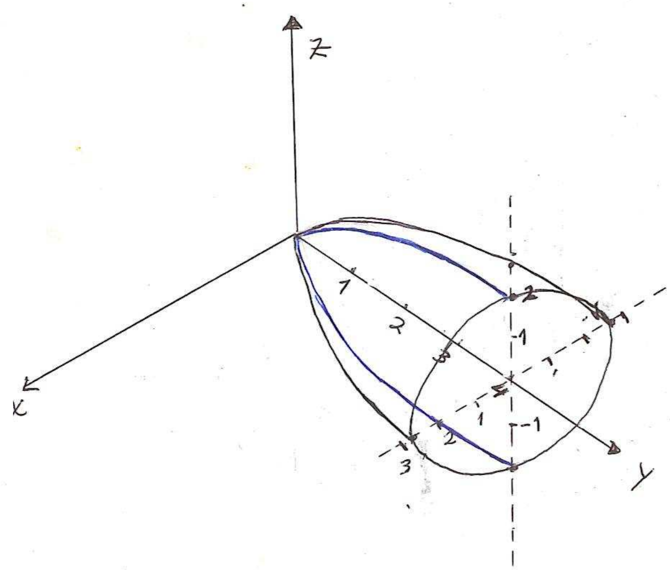
Ejemplo 5: Graficar $y = z^2 + \dfrac{x^2}{4}$

Solución

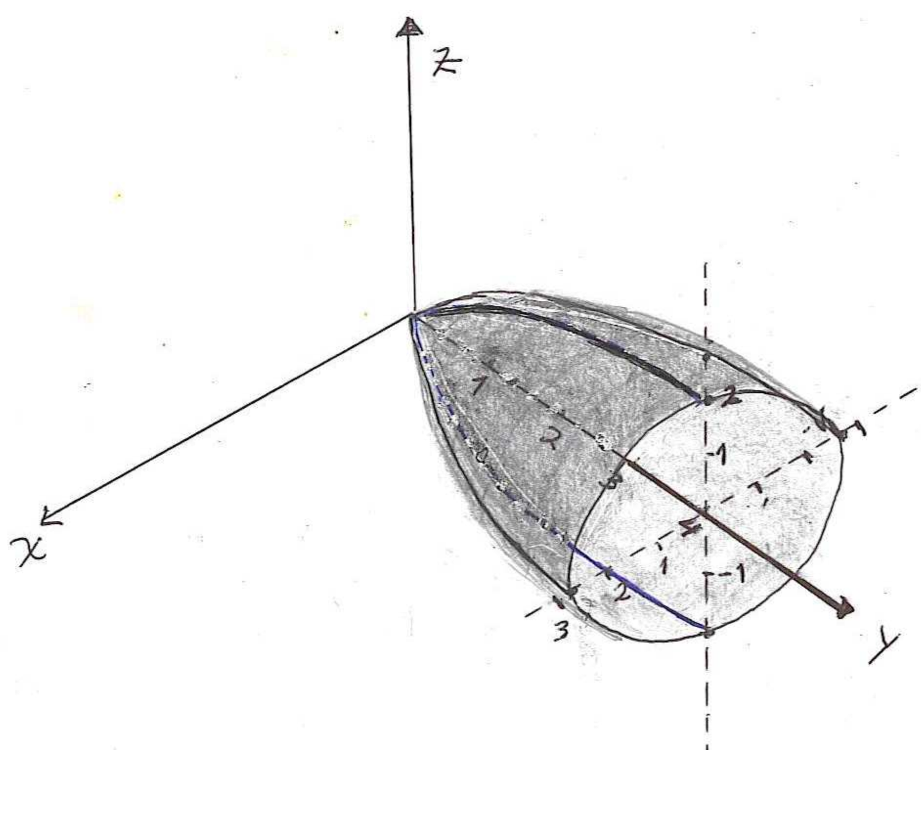
- Es un paraboloide elíptico con eje en " y"
- Podemos escoger hacer corte en $y = 4$ (por ejemplo)

$4 = z^2 + \dfrac{x^2}{2} \quad \rightarrow \quad 1 = \dfrac{z^2}{4} + \dfrac{x^2}{8}$ ésta es la elipse que hay que dibujar en y = 4. Después unir esta elipse con parábolas que pasan por el origen (trazas con los planos coordenados)





Por último se le pueden dar los retoques o efectos que mejoren la presentación de la gráfica. (Todo esto se puede hacer de una sola vez en un sistema de coordenadas, si se hace a lápiz).



6) Paraboloide hiperbólico

Las ecuaciones canónicas del paraboloide hiperbólico tienen la forma $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

-Para identificar el Paraboloide hiperbólico lo hacemos mediante las trazas con los planos coordenados: *<u>parábolas abiertas en "sentido contrario",y la trazas con el plano coordenado perpendicular al eje de la variable lineal son rectas.</u>*

Una manera de trazar la gráfica es la siguiente: (suponiendo que la ecuación es de la forma $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$**)**

a) Sabemos que el eje de la figura es el eje "z". En la parte inferior haremos el corte en $z = -1$ y la parte superior la graficaremos hasta $z = 1$.

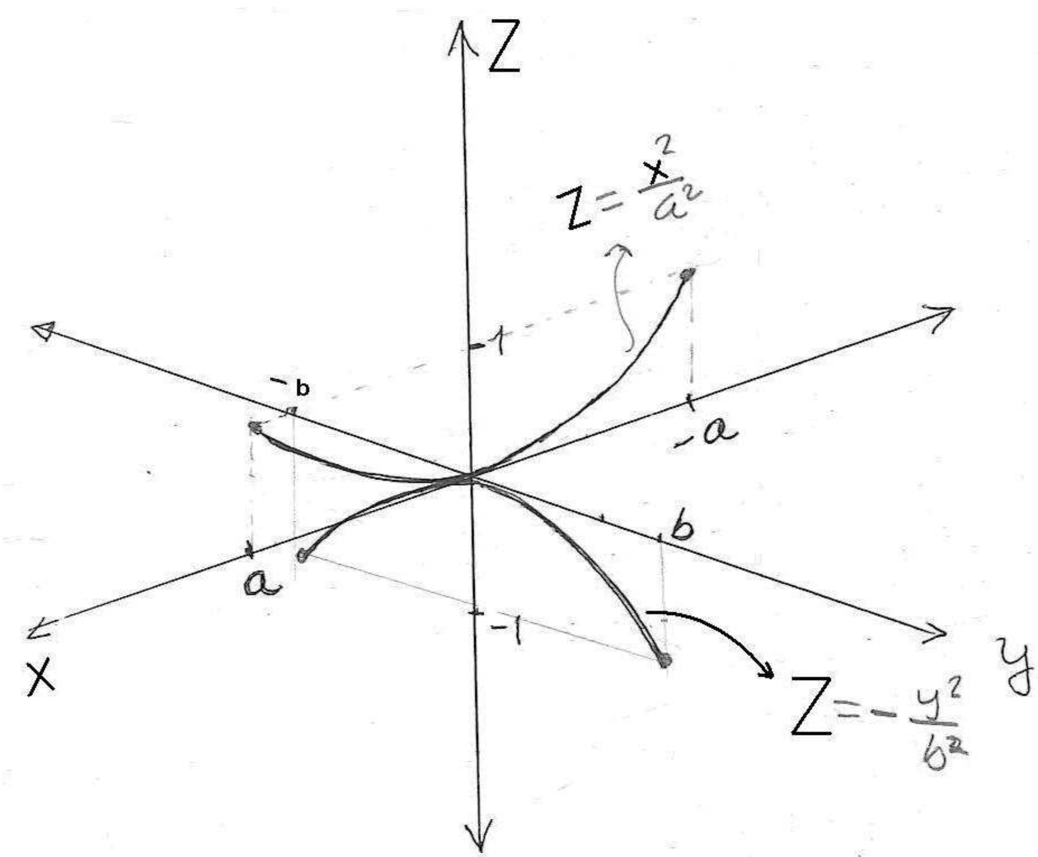
b) Encontramos las trazas con los planos coordenados que son parábolas y las graficamos en el espacio (una es parábola abierta hacia arriba y la otra hacia abajo.

Traza con el plano xz: $z = \frac{x^2}{a^2}$ Traza con el plano yz: $z = -\frac{y^2}{b^2}$

Para graficar estas parábolas utilizaremos los valores

$z = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm a$ para el primer caso

$z = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b$ para la otra parábola



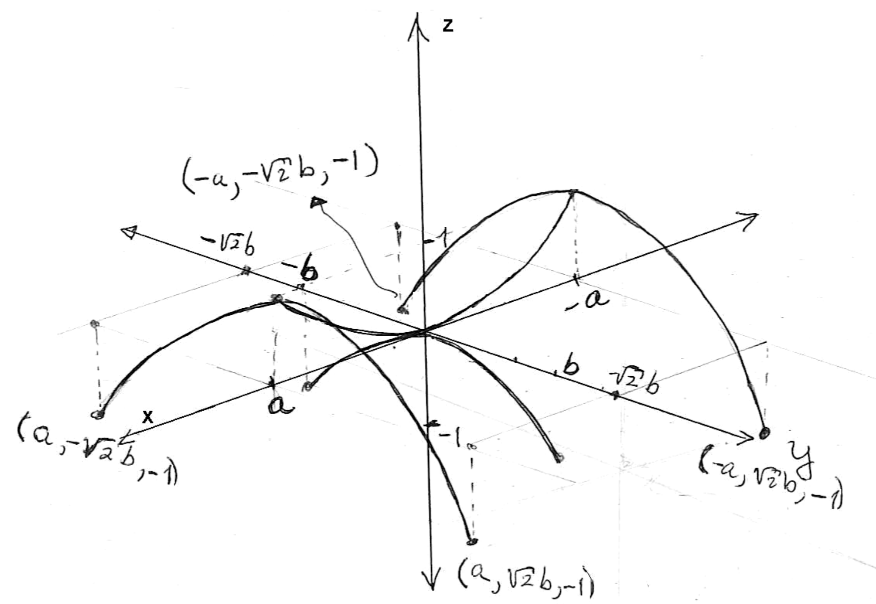
c) Haremos cortes también en los extremos de la parábola “abierta hacia arriba” y estos cortes son parábolas (cada corte es la parábola abierta hacia abajo pero trasladada). Los cortes serán en $x = \pm a$. Esto se debe a que la ecuación de la parábola en estos cortes es :

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad haciendo \quad x = \pm a$$

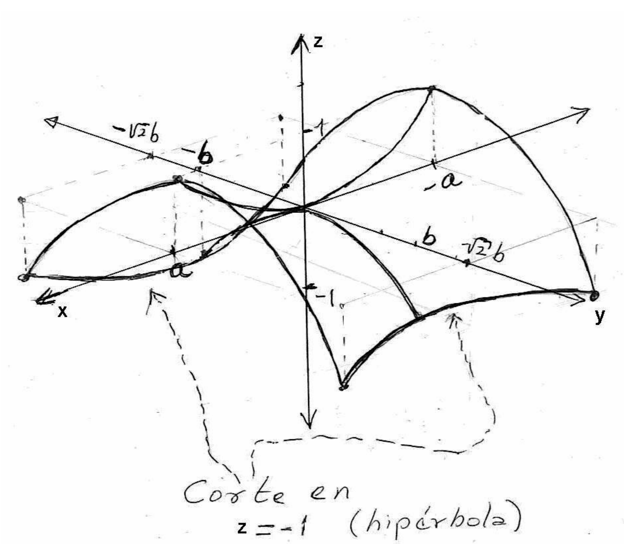
$$z = \frac{a^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \qquad o \quad sea \quad z - 1 = -\frac{y^2}{b^2}$$

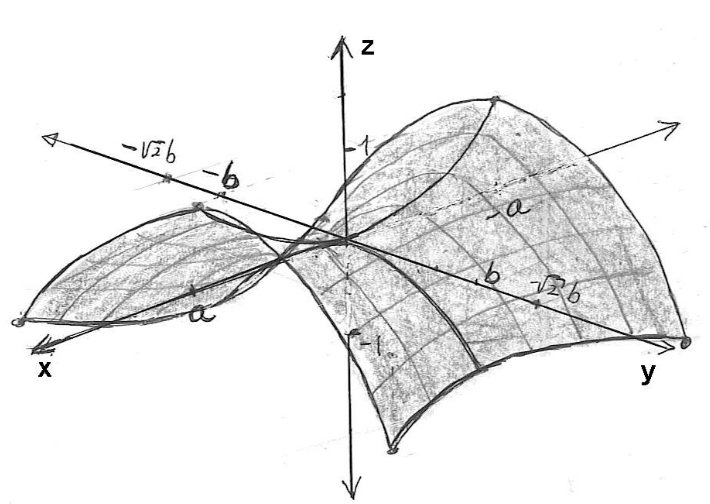
Esta última ecuación es la misma parábola $z = -\frac{y^2}{b^2}$ pero trasladada, es decir con vértice $(\pm a, 0, 1)$.

Como las parábolas abiertas hacia abajo las queremos graficar hasta $z = -1$, para la parábola del corte de la izquierda utilizamos los puntos $(a, \sqrt{2}\, b, -1)\ y\ (a, -\sqrt{2}\, b, -1)$ y para la parábola del corte de la derecha utilizamos los puntos $(-a, \sqrt{2}\, b, -1)\ y\ (-a, -\sqrt{2}\, b, -1)$.



Por último se unen estas parábolas con hipérbolas en la parte de abajo (corte en $z = -1$)





Ejemplo 7: graficar $y-1=(z+1)^2+\frac{(x-2)^2}{2}$

Solución

Podemos observar que la gráfica de $y-1=(z+1)^2+\frac{(x-2)^2}{2}$ es idéntica a la gráfica de $y=z^2+\frac{x^2}{2}$, pero trasladada en x, dos unidades en el sentido positivo, una unidad en el sentido positivo de y, mientras que una unidad en el sentido negativo de z.

Construyendo el sistema $x'y'z'$ cuyo origen es el punto $(2,1,-1)$ puede escribirse la ecuación en este nuevo sistema como $y'=(z')^2+\frac{(x')^2}{2}$, cuya gráfica se haría de forma igual a los procesos de los ejemplos anteriores en este nuevo sistema.(Haciendo el corte en y´=4)

$$1=\frac{(z')^2}{4}+\frac{(x')^2}{8}$$