CALCOLO DIFFERENZIALE

Còmpito Complessivo #3 – Lìmiti Parte 1

Isaac Mancero-Mosquera

Nome:____

Preliminares: Como resumen de la clase sobre límites, se vió que:

1) En general, el límite $\lim_{x \to c} f(x)$ no depende de que exista $f(c)$, pero si existe, y es continua en ese punto, entonces se aplica el método de Sustitución Directa y se tiene que $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
2) Si $f(c)$ no está definida (hay una indeterminación en $x = c$), se busca una función equivalente g(x) que sea igual a f excepto en $x = c$. Luego se aplica el Teorema de las Funciones Coincidentes en Casi Todos Sus Puntos, según el cual $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x)$.
3) El modo de hallar esta nueva función coincidente depende de cada problema. Se estudiaron en clase 3 tipo básicos: Técnica del Cancelación, Racionalización y otras manipulaciones algebraicas. Si el tipo de límite involucra funciones trigonométricas, entonces siempre es bueno ayudarse con las identidades trigonométricas básicas.

La mayor parte de los ejercicios son tomados del libro Problemas de Análisis Matemático de Demidovich (descargable en el link enviado por SidWeb.)

1.- Resuelva los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2} \qquad \lim_{x \to 4} \frac{3 - \sqrt{5 + x}}{1 - \sqrt{5 - x}}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{[1/(x+4)] - (1/4)}{x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \qquad \lim_{x \to 3} \sqrt{2x^2 - 2}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{2 - \sqrt{x - 3}}{x^2 - 49} \qquad \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6}}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right) \qquad \lim_{x \to a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{[1/(2+x)] - (1/2)}{x}$$

2.- Resuelva los siguientes límites involucrando funciones trigonométricas:

- $\lim_{x \to 0} \frac{Cos^2(x) - 1}{Cos(x) - 1}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{Tan(x)}{Sen(x)}$
- $\lim_{x \to \pi} \theta Cos(\theta)$
- $\lim_{\Delta\beta \to 0} \frac{Cos(\Delta\beta)}{Ctg(\Delta\beta)}$
- $\lim_{x \to 3\pi/2} \frac{Sen^3(x) + 1}{Sen(x) + 1}$
- $\lim_{x \to 3\pi} 1 + Cos(\theta) + Cos^2(\theta)$

Cambios de variables:
Como resumen, cuando se tiene radicales diferentes en el numerador y denominador, por ejemplo

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$$

Un cambio de variable puede ayudar si es elegido inteligentemente, por ejemplo, en este caso sería $y^{12} = x+1$. De este modo la expresión se convierte en:

$$\frac{\sqrt[4]{y^{12}}}{\sqrt[3]{y^{12}}} = \frac{y^3}{y^4}$$

Es decir, una nueva expresión polinomial. Si originalmente, el límite era del tipo $\lim\limits_{x\to -1}$, al despejar "y" en el cambio de variable se obtiene un nuevo límite de tipo $\lim\limits_{y\to 0}$.

3.- Resuelva los siguientes límites involucrando funciones radicales:

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{-1+\sqrt[4]{x}}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{x-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1+x}-1}$
- $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{4-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-8}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{x}-1}$
- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

Límites Trigonométricos Especiales.- Se refieren a las identidades:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-Cos(x)}{x} = 0$

Se trata de saber reconocer cuando un límite se resuelve solo con manipulaciones algebraicas (como en el ejercicio 2) o se puede reducir a la forma de estas identidades; o si requiere de manipulaciones algebraicas e identidades trigonométricas combinadas con las identidades mencionadas aquí.

4.- Resuelva los siguientes límites involucrando funciones trigonométricas, utilice si es necesario, las identidades de límites especiales:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen(8x)}{Sen(5x)}$
- $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{Cos^2(\theta)-1}{Cos(\theta)-1}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen(\mathrm{m}x)}{Sen(\mathrm{n}x)}$
- $\lim\limits_{n\to 0} \dfrac{Sen(n+x)-Sen(x)}{n}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+Sen(x)}-\sqrt{1-Sen(x)}}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+Sen(x)}{x+Tan(x)}$
- $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{Sen(x)-Cos(x)}{1-Tan(x)}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Sen(x)-Sen(\pi)}{x-\pi}$

Existencia del Límite.- Se dice que el límite de una función cuando x tiende a c existe, si y solo si los límites laterales cuando x tiende a c^+ y c^- existen y son iguales entre sí.

5.- Determine si $\lim_{x\to 2} g(x)$ existe, donde:

- $g(x)=\begin{cases} 5-x & -1\le x\le 2 \\ x^2-1 & 2<x\le 3 \end{cases}$
- $g(x)=\begin{cases} x^2-4x+6 & x<2 \\ -x^2+4x-2 & x\ge 2 \end{cases}$
- $g(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ 2 & x=2 \\ 2x-1 & x>2 \end{cases}$

6.- Califique como Verdadero o Falso. Justifique su respuesta:

- $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=1$
- $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$

7.- Encuentre el valor de c para que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista, donde

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & x\le 2 \\ cx+6 & x>2 \end{cases}$$

8.- Calcular los siguientes límites en el infinito:

- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x}{\sqrt{x^4+x}}$
- $\lim_{x\to\infty} xTan\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x\to\infty} xSen\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x-1}+\frac{3x}{x+1}$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{x-Cos(x)}{x}$
- $\lim_{x\to\infty} 2x-\sqrt{4x^2+1}$
- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}$
- $\lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2+x}$

9.- Calcular los siguientes límites infinitos:

- $\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2}{x^2-9}$
- $\lim_{x\to -3^-} Sec\left(\frac{\pi x}{6}\right)$
- $\lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}$
- $\lim_{x\to 1^+}\frac{2+x}{1-x}$
- $\lim_{x\to 4}\frac{x^2}{x^2+16}$
- $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$
- $\lim_{x\to -1}\frac{2x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}$
- $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$