CAPÍTULO IV. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

SECCIONES

A. Definición de función continua.

B. Propiedades de las funciones continuas.

C. Ejercicios propuestos.

A. DEFINICIÓN DE FUNCIÓN CONTINUA.

Una función $y = f(x)$ se dice *continua en un punto* $x = c$ cuando existe el límite de la función en el punto $x = c$ y dicho límite es $f(c)$.

Esta definición da lugar a tres condiciones que debe cumplir la función para ser continua en c:

a) c está en el dominio de la función.

b) existe $\lim_{x\to c} f(x)$ (es decir, los límites laterales son finitos e iguales).

c) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Esto quiere decir que para que una función sea continua no basta que tenga límite, sino que además dicho límite tiene que coincidir con el valor de la función en el punto correspondiente.

Las funciones que no son continuas se llaman *discontinuas*. Hay varios tipos de discontinuidad dependiendo de la condición que no se cumple.

A) *Discontinuidad evitable:* Corresponde al caso en que la función tiene límite pero no coincide con el valor $f(c)$. Se llama evitable porque basta definir $f(c)$ como el límite de la función en c para que la función sea ahora continua.

B) *Discontinuidad de primera especie:* Puede ser de *salto finito* cuando existen los dos límites laterales pero son distintos, o de *salto infinito* cuando alguno de los límites laterales es infinito.

C) *Discontinuidad esencial o de segunda especie:* Si alguno de los dos límites laterales no existe.

Las operaciones algebraicas con funciones continuas dan como resultado nuevas funciones continuas, salvo en la división por cero y las raíces de índice par de funciones que toman valores negativos.

PROBLEMA 4.1.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$.

Solución

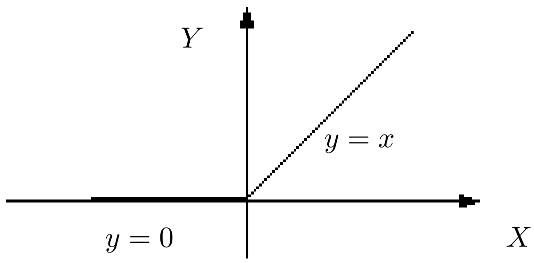
Esta es una función algebraica sólo que el valor absoluto hace que cambie la forma de la función en el punto $x = 0$. Esto quiere decir que si $x \neq 0$, la función es continua.

Para estudiar el comportamiento de la función en $x = 0$, debemos calcular los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} \frac{x + |x|}{2} &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x - x}{2} = 0, \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x + |x|}{2} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x + x}{2} = 0, \end{aligned}$$

lo que indica que la función también es continua en $x = 0$.

Podemos comprobar este resultado dibujando la gráfica de la función. Esta es de la forma:



PROBLEMA 4.2.

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones indicando los puntos de discontinuidad:

a) $f(x) = [x^2]$.

b) $f(x) = [\sqrt{x}]$.

c) $f(x) = [2x]$.

d) $f(x) = \sqrt{[x]}$.

e) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.

f) $f(x) = [x] + [-x]$.

Solución

Sabiendo que la parte entera sólo es discontinua en los enteros, los puntos de discontinuidad son, respectivamente:

a) $x^2 = n \iff x = \pm\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. (En $x = 0$ la función es continua.)

b) $\sqrt{x} = n \iff x = n^2$ con $n = 0, 1, \dots$

c) $2x = n \iff x = n/2$ con $n \in \mathbb{Z}$.

d) Como el dominio de la función es $[0, \infty)$, los puntos de discontinuidad son los enteros positivos.

e) Como $x - [x] \geq 0$ para todo x, los puntos de discontinuidad son $x \in \mathbb{Z}$.

f) Si n es cualquier número entero, los límites laterales son $\lim_{x\to n^-} [x] + [-x] = n - 1 + (-n) = -1$; $\lim_{x\to n^+} [x] + [-x] = n + (-n - 1) = -1$.

Como $f(n) = 0 \neq -1$, la discontinuidad es evitable en todo $\mathbb{Z}$.

PROBLEMA 4.3.

Estudiar la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Solución

a) Como $1 + x^2 = 0$ no tiene raíces reales, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Como la ecuación $x^2 - 1 = 0$ tiene raíces $x = 1$ y $x = -1$, la función es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$. Además, como $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to -1} \dfrac{1}{x^2 - 1} = \infty$, la función presenta discontinuidades de primera especie infinitas en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.

PROBLEMA 4.4.

Estudiar la continuidad de las funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

c) $f(x) = x^{2/3}$.

d) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{e^x}$.

Solución

a) La función es continua en todo $x \neq 0$, porque es racional y la única raíz del denominador es $x = 0$.

b) La función es continua en todo $x \neq 1$ por la misma razón del apartado anterior.

c) La función es continua en todo el campo real pues el índice de la raíz es impar.

d) Como $f(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, la función es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

e) Como el denominador no se anula en ningún valor real, la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 4.5.

Indicar la naturaleza de la discontinuidad en $x = 0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{cosec} x$.

b) $f(x) = \sqrt{1/x}$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{1/x}$.

d) $f(x) = \cos(1/x)$.

Solución

a) Como $\lim_{x \to 0} \operatorname{cosec} x = \infty$, la función presenta una discontinuidad infinita de primera especie.

b) Como $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{1/x}$ no existe, la discontinuidad es de segunda especie.

c) Tenemos que $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{1/x} = \infty$, por lo que la discontinuidad es infinita de primera especie.

d) En este caso, $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ no existe, por lo que la discontinuidad es de segunda especie.

PROBLEMA 4.6.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}{x^2 - 5x + 6}$*, determinar la clase de discontinuidad que posee en los puntos* $x = 2$ *y* $x = 3$*.*

Solución

Como $f(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{(x-2)(x-3)(x^2-1)}{(x-2)(x-3)}$, resulta que $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$ y $\lim_{x \to 3} f(x) = 8$, pero los puntos $x = 2$ y $x = 3$ no están en el dominio, por lo que las discontinuidades en dichos puntos son evitables.

PROBLEMA 4.7.

Encontrar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x}{(x-2)(x-4)}$.

b) $f(x) = \sqrt{(x-3)(6-x)}$, $3 \le x \le 6$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2 \operatorname{sen} x}$.

Solución

a) La función es discontinua en los puntos donde se anula el denominador, es decir $x = 2$, $x = 4$. La discontinuidad en ambos puntos es infinita de primera especie porque el límite es infinito en ambos casos.

b) No hay puntos de discontinuidad en el dominio de la función.

c) El denominador se anula cuando $1 + 2 \operatorname{sen} x = 0$, es decir cuando $\operatorname{sen} x = -1/2$, lo cual ocurre si $x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. En estos puntos la discontinuidad es infinita de primera especie.

PROBLEMA 4.8.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$.

Solución

El dominio de la función es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En el punto $x = 0$ tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2/2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2/2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

La función presenta en $x = 0$ una discontinuidad de salto finito.

PROBLEMA 4.9.

Estudiar la continuidad de las funciones

a) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

b) $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$.

¿Tiene discontinuidad evitable alguna de ellas?

Solución

a) Como $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, la función es continua donde $\cos x \neq 0$, es decir en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Como en los puntos de discontinuidad el límite es infinito, la discontinuidad es de primera especie.

b) Análogamente al anterior, la función es continua en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen} x \neq 0\} = \{x \mid x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ y en el resto la discontinuidad es de primera especie.

c) Como el denominador se anula cuando $x = 2$ y $x = 3$, la función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{2, 3\}$. Como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x + 2}{x - 3} = -4$, la discontinuidad en $x = 2$ es evitable. Sin embargo, como $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \infty$, la discontinuidad en $x = 3$ es de primera especie.

PROBLEMA 4.10.

¿Es evitable la discontinuidad en el origen de la función $f(x) = e^{-1/x^2}$? ¿Y la discontinuidad de la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$?

Solución

Debido a que $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0$, la discontinuidad es evitable.

Sin embargo, el límite $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(\pi/x)$ no existe, por lo que la discontinuidad es esencial.

PROBLEMA 4.11.

Estudiar la continuidad de la función $F(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x \cos x}{1 - \cos x}$ en el origen, siendo $F(0) = 0$.

Solución

Si aplicamos la equivalencia de infinitésimos $1-\cos x \sim x^2/2$, tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x \cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} x \cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{1/2} = 0.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$, la función es continua en $x = 0$.

PROBLEMA 4.12.

Estudiar la continuidad de la función

$$F(x) = \frac{2x^6 + x^5 - x^4}{\cos^4 x \operatorname{sen}^3 2x}$$

en el origen, sabiendo que $F(0) = 0$.

Solución

Aplicando la equivalencia $\operatorname{sen} 2x \sim 2x$, resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(2x^3 + x^2 - x)}{\cos^4 x \operatorname{sen}^3 2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(2x^3 + x^2 - x)}{\cos^4 x \cdot (2x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3 + x^2 - x}{8\cos^4 x} = 0.\end{aligned}$$

La función F es continua en $x = 0$ porque $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$.

PROBLEMA 4.13.

Estudiar la continuidad en el origen de la función

$$F(x) = \frac{x^7 + 2x^5 + x^3}{\operatorname{sen}^2(x/2)\operatorname{tg}(x/4)},$$

siendo $F(0) = 0$.

Solución

Debido a las equivalencias $\operatorname{sen} x/2 \sim x/2$ y $\operatorname{tg} x/4 \sim x/4$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} F(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x^4+2x^2+1)}{\operatorname{sen}^2(x/2)\operatorname{tg}(x/4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x^4+2x^2+1)}{(x/2)^2\cdot(x/4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^4+2x^2+1}{1/16} = 16.
\end{aligned}$$

Como existe $\lim_{x\to 0} F(x)$ pero es distinto a $F(0)$, existe una discontinuidad evitable en el origen.

PROBLEMA 4.14.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{3}{4+4^{\operatorname{tg} x}}$ *en el punto* $x = \pi/2$.

Solución

Como $\lim_{x\to \pi/2^-} \dfrac{3}{4+4^{\operatorname{tg} x}} = \dfrac{3}{\infty} = 0$ y $\lim_{x\to \pi/2^+} \dfrac{3}{4+4^{\operatorname{tg} x}} = \dfrac{3}{4+0} = \dfrac{3}{4}$, la función posee una discontinuidad finita de primera especie en $x = \pi/2$.

PROBLEMA 4.15.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = 2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$ *en el origen.*

Solución

La función no tiene límite cuando $x \to 0$, por lo que la discontinuidad es esencial o de segunda especie.

PROBLEMA 4.16.

¿Qué clase de discontinuidad posee la función $f(x) = 3^{1/x}$ *en el origen?*

Solución

Los límites laterales son $\lim_{x\to 0^-} 3^{1/x} = 3^{-\infty} = 0$ y $\lim_{x\to 0^+} 3^{1/x} = 3^{\infty} = \infty$, respectivamente.

Como uno de ellos es infinito, tenemos una discontinuidad infinita de primera especie.

PROBLEMA 4.17.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{2+e^{1/x}}$ *en el origen.*

Solución

Si $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$ y $e^{1/x} \to +\infty$, por lo que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

Si $x \to 0^-$, $1/x \to -\infty$ y $e^{1/x} \to 0$, por lo que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1/2$.

Como existen pero son distintos los límites laterales, la función presenta una discontinuidad de primera especie finita.

PROBLEMA 4.18.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}}$.

Solución

El denominador $1-e^{1/x}$ nunca se anula por lo que la función está definida en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} &= \lim_{x\to 0^+} \left(-1+\frac{2}{1-e^{1/x}}\right) = -1, \text{ pues } \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty; \\
\lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{1/x}}{1-e^{1/x}} &= \lim_{x\to 0^-} \left(-1+\frac{2}{1-e^{1/x}}\right) = 1, \text{ pues } \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = 0.
\end{aligned}$$

Se deduce que la función presenta una discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

PROBLEMA 4.19.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{1 + e^{1/x}}$.

Solución

El único punto donde no está definida la función es $x = 0$.

Cuando $x \to 0^+$, el numerador se mantiene acotado mientras el denominador tiende a infinito. Luego $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} 1/x}{1 + e^{1/x}} = 0$.

Cuando $x \to 0^-$, el denominador tiende a uno, pero como $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe, tampoco existe el límite del cociente.

Tenemos entonces una discontinuidad esencial o de segunda especie.

PROBLEMA 4.20.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} + 2}{e^{\operatorname{tg} x} - 2}$ *en el punto* $x = \pi/2$.

Solución

Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} e^{\operatorname{tg} x} = e^{-\infty} = 0$, resulta

$$\lim_{x\to(\pi/2)^+} \frac{e^{\operatorname{tg} x} + 2}{e^{\operatorname{tg} x} - 2} = \lim_{x\to(\pi/2)^+} \left(1 + \frac{4}{e^{\operatorname{tg} x} - 2}\right) = -1.$$

Por otra parte, como $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} e^{\operatorname{tg} x} = e^{\infty} = \infty$, resulta

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{e^{\operatorname{tg} x} + 2}{e^{\operatorname{tg} x} - 2} = \lim_{x\to(\pi/2)^-} \left(1 + \frac{4}{e^{\operatorname{tg} x} - 2}\right) = +1.$$

Se presenta entonces una discontinuidad finita de primera especie o de salto.

PROBLEMA 4.21.

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \ln \dfrac{1}{1+e^x}$.

Solución

Como para todo x, $1+e^x \neq 0$ y $\dfrac{1}{1+e^x} > 0$, la función está definida en todo $\mathbb{R}$, y es continua por ser el logaritmo de una función continua.

PROBLEMA 4.22.

Estudiar la continuidad de las funciones

a) $f(x) = \ln(x+2)(x+3)$.

b) $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$.

c) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$.

Solución

a) La función es continua en su dominio, es decir, donde $(x+2)(x+3) > 0$. La solución de esta inecuación es $(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$.

b) Como en el caso a), la función $f(x) = \ln \operatorname{sen} x$ es continua donde $\operatorname{sen} x > 0$, es decir, en todos los intervalos de la forma $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.

c) También en este caso, el dominio es el conjunto de puntos para los que $\operatorname{tg} x > 0$, lo cual ocurre en los intervalos de la forma $(k\pi, (2k+1)\pi/2)$, con $k \in \mathbb{Z}$, y en el dominio la función es continua.

PROBLEMA 4.23.

Estudiar las discontinuidades de la función

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1}.$$

Solución

Como el denominador nunca se anula, los únicos puntos donde puede haber discontinuidad son de la forma $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, pues en ellos la tangente no está definida.

Por una parte, como $\operatorname{tg} x \to -\infty$ y $e^{\operatorname{tg} x} \to 0$ cuando $x \to (\pi/2 + k\pi)^+$, se tiene:

$$\lim_{x\to(\pi/2+k\pi)^+} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1} = -1.$$

Por otra parte, debido a que $\operatorname{tg} x \to \infty$ y $e^{\operatorname{tg} x} \to \infty$, cuando $x \to (\pi/2+k\pi)^-$, se tiene:

$$\lim_{x\to(\pi/2+k\pi)^-} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1} = \lim_{x\to(\pi/2+k\pi)^-} \frac{1 - \frac{1}{e^{\operatorname{tg} x}}}{1 + \frac{1}{e^{\operatorname{tg} x}}} = 1.$$

En dichos puntos la función presenta pues discontinuidad finita de primera especie.

PROBLEMA 4.24.

a) Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{1}{x} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ presenta una discontinuidad de segunda especie en $x = 0$.

b) Demostrar que la función $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$.

Solución

a) Basta observar que en todo entorno de $x = 0$ la función toma infinitas veces cualquier valor, porque $\operatorname{sen} 1/x$ oscila entre -1 y 1 y $1/x$ tiende a infinito.

b) Como $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$ y $\lim_{x\to 0} x = 0$, se tendrá que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$ y la discontinuidad es evitable. Si definimos $f(0) = 0$, la función queda continua.

PROBLEMA 4.25.

Estudiar las discontinuidades de las funciones:

a) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}(1/x)}\right)$.

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}\ln x}{\ln x}$, $(x > 0, x \neq 1)$.

Solución

a) La función no está definida cuando $x = 0$ y $\operatorname{sen}(1/x) = 0$, es decir en los puntos $x = 0$ y $x = \dfrac{1}{k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$.

Como $\lim\limits_{x \to 1/(k\pi)} \dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \infty$, la función presenta discontinuidades de segunda especie en los puntos $x = \dfrac{1}{k\pi}$, $(k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$.

En $x = 0$ se tiene que $f(x) \to 0$ por ser el producto de una función acotada por una función con límite cero. En este caso tenemos discontinuidad evitable.

b) Debido a la equivalencia $\operatorname{sen}\ln x \sim \ln x$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}\ln x}{\ln x} = 1$. Esto quiere decir que la discontinuidad en $x = 1$ es evitable. En el resto del dominio, la función es continua.

PROBLEMA 4.26.

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} -3x & \text{si } x < 0, \\ -x^2 + 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Solución

El dominio de la función está formado por todos los números reales pues la unión de los intervalos donde está definida da todo $\mathbb{R}$ y en cada intervalo la función está definida. Estudiaremos la continuidad por separado en cada intervalo de definición de la función, considerando aparte los puntos extremos de cada intervalo.

- Si $x < 0$, la función es una recta, y por lo tanto, continua.

- Si $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} -3x = 0; \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (-x^2+2x) = 0. \end{aligned}$$

Como además $f(0) = 0$, la función es continua en $x = 0$.

- Si $0 < x < 2$, la función es un polinomio de grado dos, y por lo tanto, continua.

- Si $x = 2$:

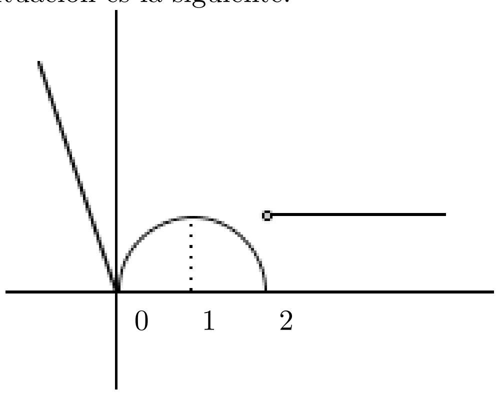
$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} (-x^2+2x) = 0; \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} 1 = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, la función tiene una discontinuidad de salto en $x = 2$.

- Si $x > 2$, la función es constante con lo que también es continua.

En definitiva, la función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en $x = 2$, donde presenta una discontinuidad de salto finito. Este salto es de una unidad.

Gráficamente la situación es la siguiente:



PROBLEMA 4.27.

¿Es continua la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ en el punto $x = 0$?

Solución

Debido a que $f(x)$ en $x \neq 0$ es el producto de una función $\operatorname{sen}(1/x)$ acotada y una función x^2 con límite cero, entonces $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, con lo que la función es continua en $x = 0$.

PROBLEMA 4.28.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\ln x^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ *probar que es continua en* $x = 0$.

Solución

Debido a que $|\operatorname{sen}(\ln x^2)| \leq 1$, se tiene que $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sen}(\ln x^2) = 0$. Como $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$, la función es continua en $x = 0$.

PROBLEMA 4.29.

Estudiar la continuidad de las funciones siguientes en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$ en $x = 0$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x^2-4} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2, \end{cases}$ en $x = 2$.

c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \pi x & \text{si } 0 < x < 1, \\ \ln x & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$ en $x = 1$.

Solución

a) Como $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \neq f(0) = 0$, se tiene una discontinuidad evitable en $x = 0$.

b) La función es continua en $x = 2$ porque

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4+4+4}{4} = 3 = f(2).$$

c) En $x = 1$, los límites laterales son

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \operatorname{sen} \pi x = 0; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \ln x = 0.$$

Como la función no está definida en $x = 1$, tiene una discontinuidad evitable.

PROBLEMA 4.30.

Estudiar la continuidad de $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x = 1, \\ e - x + 1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$

Solución

Los límites laterales son

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (e - x + 1) = e; \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} e^x = e.$$

La discontinuidad es evitable, porque existe $\lim_{x\to 1} f(x)$ pero es distinto de $f(1)$.

PROBLEMA 4.31.

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } x \le 1, \\ k^2x - 4 & \text{si } x > 1, \end{cases}$ *encontrar los valores que debe tomar k para que sea continua.*

Solución

El dominio de la función está formado por todos los números reales. Para ver si es continua debemos tomar en cuenta la forma de la función en cada intervalo de definición y en los puntos donde cambia la forma de las ecuaciones.

- Si $x < 1$, la función es un polinomio de grado 3, y por lo tanto, continua.

- Si $x > 1$, se trata de una recta que es también continua.

- Si $x = 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (x^3 - x) = 0; \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (k^2 x - 4) = k^2 - 4. \end{aligned}$$

Para que la función sea continua en $x = 1$, deben ser los límites laterales iguales, es decir, $k^2 - 4 = 0$ de donde se obtienen dos posibles valores para k, $k = 2$ y $k = -2$. Para cualesquiera de ellos, la función será continua en todo $\mathbb{R}$.

PROBLEMA 4.32.

Estudiar la continuidad de la función compuesta $f \circ g$, donde $f(x) =$ signo (x), $g(x) = x(1 - x^2)$.

Solución

Como $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } g(x) > 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \\ -1 & \text{si } g(x) < 0 \end{cases}$.

Basta pues estudiar el signo de g. Para ello hacemos la descomposición $g(x) = x(1 - x)(1 + x)$, y realizamos el correspondiente estudio de signos (ver capítulo 1); resulta que $g(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $g(x) = 0$ en $\{-1, 0, 1\}$ y $g(x) < 0$ en $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Resulta en definitiva que $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } (-\infty, -1) \cup (0, 1) \\ 0 & \text{si } x \in \{-1, 0, 1\} \\ -1 & \text{si } (-\infty, -1) \cup (0, 1) \end{cases}$. Por lo tanto, es continua en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ y en los puntos $x = -1, 0, 1$ tiene discontinuidades finitas de primera especie.

PROBLEMA 4.33.

Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \le 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 < x < 2, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

estudiar la continuidad de $f \circ g$ en $(0, 2)$.

Solución

Por definición, $(f \circ g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \text{ es racional,} \\ f(2 - x) & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}.$

Tenemos pues:

- Si $x \in (0, 1]$ y es racional, $(f \circ g)(x) = f(x) = x$.

- Si $x \in (0, 1]$ y es irracional, $(f \circ g)(x) = f(2 - x) = 2 - (2 - x) = x$.

- Si $x \in (1, 2)$ y es racional, $(f \circ g)(x) = f(x) = 2 - x$.

- Si $x \in (1, 2)$ y es irracional, $(f \circ g)(x) = f(2 - x) = 2 - x$.

En definitiva, $f \circ g = f$ en el intervalo $(0, 2)$ y la función es continua en dicho intervalo, porque $\lim_{x \to 1^-} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f \circ g)(x) = (f \circ g)(1) = 1$.

PROBLEMA 4.34.

Sea f una función continua en $x = 0$ y que satisface $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y$. Probar que f es continua en todo x.

Solución

Probaremos en primer lugar que $f(0) = 0$. Para ello basta aplicar la hipótesis a los puntos x y 0; resulta: $f(x) = f(x+0) = f(x)+f(0) \Longrightarrow f(0) = 0$.

A continuación, teniendo en cuenta que $\lim_{y \to 0} f(y) = f(0)$ por la continuidad de f en el origen, veremos que $\lim_{y \to 0} f(x + y) = f(x)$ lo que garantiza la continuidad de f en cualquier x:

$$\lim_{y \to 0} f(x + y) = \lim_{y \to 0} [f(x) + f(y)] = f(x) + \lim_{y \to 0} f(y) = f(x) + f(0) = f(x).$$

B. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

Tres propiedades importantes de las funciones continuas que serán útiles en las aplicaciones son:

(a) **Teorema de Weierstrass** (existencia de máximos y mínimos).

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza sus valores máximo y mínimo, es decir, existen por lo menos dos puntos x_0 *y* x_1 *en el intervalo cerrado* $[a, b]$ *tales que* $f(x_0) \geq f(x) \geq f(x_1)$ *para cualquier* $x \in [a, b]$.

En este caso se dice que la función alcanza en el intervalo $[a, b]$ el máximo cuando $x = x_0$ y el mínimo cuando $x = x_1$.

(b) **Teorema de Bolzano** (existencia de raíces).

Sea f *una función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *y tal que* $f(a)$ *y* $f(b)$ *son de distinto signo. Entonces existe algún* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*, es decir, su gráfica corta al eje* X *en algún punto del intervalo* (a, b).

Este resultado es evidente gráficamente pero la demostración debe hacerse de forma rigurosa. Además debe tenerse en cuenta que pueden existir varios valores donde la gráfica de la función corte al eje de abscisas.

(c) **Teorema del valor intermedio o propiedad de Darboux.**

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ *alcanza todos los valores comprendidos entre* $f(a)$ *y* $f(b)$ *al menos una vez.*

Esto quiere decir que f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$ aunque pueda tomar en algunos casos otros valores aparte de ellos.

Los siguientes problemas ilustran la aplicación de estos teoremas.

PROBLEMA 4.35.

Demostrar que existe algún número que sea igual a su cubo menos uno.

Solución

Sea x dicho número. Debe verificar la ecuación $x = x^3 - 1$, o bien $x^3 - x - 1 = 0$.

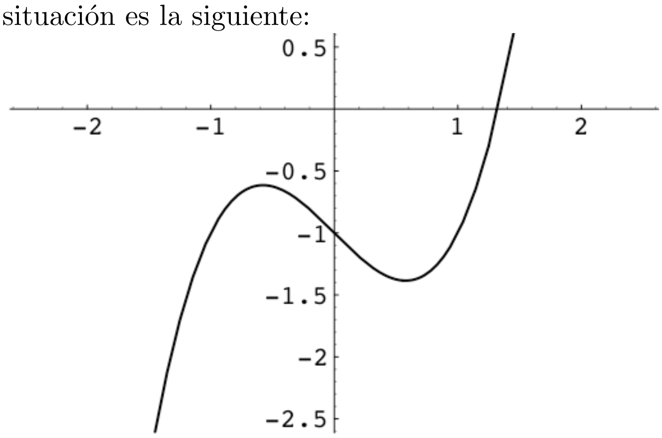
Si construimos la función $f(x) = x^3 - x - 1$, el problema se puede plantear ahora así:

Probar que la función $f(x)$ toma el valor cero en algún punto.

Utilizando el teorema de Bolzano, eso se podrá asegurar si la función $f(x)$ es continua en algún intervalo cerrado $[a, b]$ en el cual $f(a)$ y $f(b)$ tengan diferente signo.

Evidentemente la función es continua en todo $\mathbb{R}$ pues se trata de un polinomio de grado 3.

Comprobando .ª manoçon algunos puntos, obtenemos que $f(1) = -1$, $f(2) = 5$. De aquí se deduce que en el intervalo $[1, 2]$ la función pasa de valores negativos a valores positivos. Como el cero es un número comprendido entre -1 y 5, en algún punto del intervalo $[1, 2]$ la función tomará ese valor. Gráficamente la situación es la siguiente:



Nota: Hemos comprobado la existencia de tal número pero no lo hemos encontrado porque no es un número "común". Sin embargo, el saber un intervalo que lo contiene permite obtener buenas aproximaciones de dicho número.

PROBLEMA 4.36.

Encontrar, en caso de que existan, los máximos y mínimos de la función $f(x) = |x|$ en los intervalos que se indican.
(a) $[1, 3]$; (b) $[-1, 1]$; (c) $(-1, 3)$.

Solución

La función dada es continua en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto en cualquier intervalo cerrado se cumplirán las condiciones del teorema de Weierstrass.

(a) Como $[1, 3]$ es un intervalo cerrado, la función alcanza los valores máximo y mínimo. Además en este intervalo $f(x) = x$ es la bisectriz del primer cuadrante. Como toma valores cada vez mayores (la función es creciente), el mínimo será $f(1)$ y el máximo $f(3)$.

(b) En este caso también se cumplen las condiciones del teorema de Weierstrass. Sin embargo la función decrece desde -1 hasta 0 y crece desde 0 hasta 1. Además $f(-1) = f(1) = 1$. En ambos puntos se alcanza el máximo. El mínimo corresponde a $x = 0$ y vale $f(0) = 0$.

(c) Como el intervalo $(-1, 3)$ no es cerrado, no se puede asegurar que se alcancen los valores máximo y mínimo. En este caso no hay máximo (correspondería a $x = 3$ pero no pertenece al intervalo) pero sí hay mínimo en $x = 0$.

PROBLEMA 4.37.

Supongamos que f y g son dos funciones continuas tales que $f(0) < g(0) < g(1) < f(1)$. Probar que existe algún $c \in (0, 1)$ para el cual $f(c) = g(c)$.

Solución

Construimos la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Por ser diferencia de dos funciones continuas, h también será continua. Además $h(0) = f(0) - g(0) < 0$ y $h(1) = f(1) - g(1) > 0$.

La función h cumple todas las condiciones del teorema de Bolzano. Se concluye que para algún valor c del intervalo (a, b) se verifica que $h(c) = 0$, es decir $f(c) - g(c) = 0$. Por lo tanto, $f(c) = g(c)$.

PROBLEMA 4.38.

Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(x) \in \mathbb{Q}$, $\forall x$. Probar que f es constante.

Solución

Haremos la demostración por reducción al absurdo. Si f no fuera constante, existirían $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por la propiedad de Darboux, en el intervalo que determinan x_1 y x_2, f debe alcanzar todos los valores comprendidos entre $f(x_1)$ y $f(x_2)$. Pero entre dos números reales hay siempre algún número irracional, lo que contradice el hecho de que f sólo toma valores racionales. Esta contradicción permite asegurar que f debe ser constante.

C. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- *Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$.

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $x = 0$. Continua en el resto.

b) $f(x) = x[x]$.

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Continua en el resto.

c) $f(x) = [3x]$.

Resp.: Discontinuidad de salto finito en el conjunto $\{k/3 : k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $f(x) = x[1/x]$.

Resp.: Discontinuidad evitable en $x = 0$; discontinuidad de salto finito en $x = 1/n,\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; continua en el resto.

e) $f(x) = [x] \operatorname{sen} x$.

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$; continua en el resto.

f) $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$.

Resp.: Discontinuidad esencial en $x = 0$ (no existe el límite de la función cuando $x \to 0$). Continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

g) $f(x) = \dfrac{5 \cdot 2^{1/x} - 7}{25 \cdot 2^{1/x} + 8}$.

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $x = 0$; continua en el resto.

h) $f(x) = \dfrac{1}{a + b^{\operatorname{tg} x}},\ a > 0,\ b > 1$.

Resp.: La función es continua en todo $x \neq \pi/2 + k\pi$. En el resto, la discontinuidad es infinita de primera especie.

i) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(1/x)}{e^{1/x} + 1}$.

Resp.: En el punto $x = 0$ se presenta una discontinuidad de segunda especie.

j) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \le \pi/2, \\ \operatorname{tg} x & \text{si } x > \pi/2. \end{cases}$

Resp.: Salto finito en $x = 0$; salto infinito en $x = \pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{N}$.

k) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ \sqrt{x-1} & \text{si } 1 \le x \le 2, \\ (x-1)^2 + 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $x = 2$. Continua en el resto. l)

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0, \\ -2 & \text{si } x = 0, \\ 3x^2 + 1 & \text{si } 0 < x \le 1, \\ |-6x+2| & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $x = 0$; continua en el resto.

m) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+2^{\operatorname{tg} x}} & \text{si } x \ne \pi/2, \\ 1/2 & \text{si } x = \pi/2. \end{cases}$

Resp.: Discontinuidad de salto finito en $x = (\pi/2) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

n) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional}, \\ \operatorname{sen} \pi x & \text{si } x \text{ es racional}. \end{cases}$

Resp.: Continua en $\mathbb{Z}$; discontinuidad de segunda especie en el resto.

2.- Encontrar los valores de las constantes para que las siguientes funciones sean continuas en su dominio.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 3, \\ 2ax & \text{si } x \ge 3. \end{cases}$

Resp.: $a = 4/3$.

b) $f(x) = \begin{cases} bx & \text{si } x < -1, \\ bx^2 - a & \text{si } -1 \le x \le 1, \\ -x & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Resp.: $a = 2, b = 1$.

3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1} & \text{si } x > 1, \\ 4 & \text{si } x = 1, \\ \sqrt{\frac{x}{2} + p} & \text{si } x < 1, \end{cases}$ encontrar el valor de p para que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$. ¿Dónde es $f(x)$ continua?

Resp.: $p = -5/12$. La función es continua en su dominio excepto en $x = 1$ (discontinuidad evitable). $D(f) = [5/6, \infty)$.

4.- Sean $f(x) = x^3 + 3x - 2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Estudiar la continuidad de $f \circ g$.

Resp.: Continua en su dominio $[0, \infty)$.

5.- Demostrar que si existe $\lim_{x\to 0} f(x)/x$, entonces $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$.

Resp.: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ porque, en caso contrario, no existiría el límite del cociente. Esto asegura la continuidad de g.

6.- Encontrar, en caso de que existan, los máximos y mínimos de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le a, \\ a+2 & \text{si } x > a, \end{cases}$ en $(-a-1, a+1)$.

Resp.: Si $-1 < a \le -1/2$, f es constante y $\max f = \min f = a + 2$.

Si $-1/2 < a \le 0$, $\max f = a + 2$ y se alcanza en $x = 0$; $\min f = a^2$ y se alcanza en $x = a$.

Si $0 < a \le (1 + \sqrt{5})/2$, $\max f = a + 2$ y se alcanza en el intervalo $(a, a + 1)$; $\min f = 0$ y se alcanza en $x = 0$.

Si $(1+\sqrt{5})/2 < a$, f no alcanza el máximo; $\min f = 0$ y se alcanza en $x = 0$. b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional}, \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional}, \end{cases}$ en $[0, a]$.

Resp.: Si a es racional, $\max f = a$ y $\min f = 0$. Si a es irracional, f no alcanza el máximo pero $\min f = 0$.

7.- Probar que la ecuación $x^5 - 2x^4 + x - 2 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $(1, 3)$.

Sugerencia: Comprobar el teorema de Bolzano.

8.- Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Probar que existe algún punto c en $[0, 1]$ para el cual $f(c) = c$.

Sugerencia: Comprobar que la función $g(x) = f(x) - x$ verifica el teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 1]$.

9.- Probar que la ecuación $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$ tiene solución.

Sugerencia: Utilizar el teorema del valor intermedio para una función adecuada en el intervalo conveniente.

10.- Sea $f(x) = \operatorname{tg} x$. Comprueba que $f(\pi/4) = 1$ y $f(3\pi/4) = -1$ y que en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$ no hay ningún valor x tal que $f(x) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? ¿Por qué?

Resp.: La función no es continua en $x = \pi/2$.

11.- Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ con $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demostrar que $f(x) = g(x)$ para algún $x \in (a, b)$.

Sugerencia: Estudiar la función $h(x) = f(x) - g(x)$.

12.- Probar que existe un número real x tal que $x^5 - 4x + 1 = 7,21$.

13.- Dada la función $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$, encontrar un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún valor x del intervalo $(n, n + 1)$.

14.- Demostrar que existe algún x tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

15.- Decidir si son verdaderos o falsos los siguientes planteamientos:

(a) Si f es continua en $x = a$ y g es discontinua en $x = a$, entonces $f + g$ es discontinua en $x = a$.

Resp.: Verdadero.

(b) Si f y g son discontinuas en $x = a$, entonces $f \cdot g$ es discontinua en $x = a$.

Resp.: Falso. Ejemplo: $f(x) = 0$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 1$; $g(x) = 1$ si $x \neq 0$ y $g(0) = 0$.

(c) *Si una función f está definida en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces es continua en $[a, b]$.*

Resp.: Falso. Ejemplo: $f(x) = x - [x]$ en $[0, 2]$.

(d) *Si f es una función continua que verifica $[f(x)]^2 = x^2$, entonces $f(x) = x$.*

Resp.: Falso. Ejemplo: $f(x) = -x$.

(e) *Si $|f|$ es continua en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.*

Resp.: Falso. Ejemplo: $f(x) = x + 1$ si $x \geq 0$ y $x - 1$ si $x < 0$.

(f) *Si f y g son continuas en $x = a$, entonces $\max\{f, g\}$ es continua en $x = a$.*

Resp.: Verdadero.