

EXAMEN CÁLCULO INTEGRAL

TEMA 1

Justificando sus respuestas, califique como VERDADERA o FALSA a cada una de las siguientes proposiciones:

Valor: 15 puntos

a) La integral impropia $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$ es divergente (5 puntos)

b) La serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$ es convergente (5 puntos)

c) Si $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ es divergente, entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

TEMA 2

Valor: 15 puntos

Sea R la región exterior a la curva definida por la ecuación polar $r = 3$ e interior a la curva definida por la ecuación polar $r = 2 + 2 \cos(\theta)$, determine:

- El gráfico de la región R (3 puntos)
- El área de la región R (6 puntos)
- El perímetro de la región R (6 puntos)

TEMA 3

Sea R la región limitada por:
$$\begin{cases} y = x^3 \\ y - x = 6 \\ 2y + x = 0 \end{cases}$$

Valor: 20 puntos

Determine:

- El gráfico de la región R (4 puntos)
- El área de la región R (8 puntos)
- El volumen del sólido que se genera al rotar R alrededor de la recta $x = 2$ (8 puntos)

TEMA 4

Valor: 10 puntos

A partir de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$:

- Determine la serie de potencias en x para la función $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ (4 puntos)
- Obtenga el intervalo de convergencia de la serie obtenida en a) (3 puntos)
- Utilice la serie en obtenida en a) para calcular la suma de la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n4^n}$ (3 puntos)